

# Les $K$ -groupes d'un schéma éclaté et une formule d'intersection excédentaire

R.W. Thomason

CNRS URA212, UFR de Mathématiques, Université de Paris 7, F-75251 Paris Cedex 05, France

Oblatum 21-V-1992 & 2-VI-1992

Soient  $X$  un schéma noethérien et  $i: Y \rightarrow X$  une immersion fermée régulière de pure codimension  $d$ , c'est-à-dire que localement l'idéal de  $Y$  dans  $X$  est engendré par une suite régulière de longueur  $d$ . Soit  $p: X' \rightarrow X$  l'éclaté de  $X$  le long de  $Y$ . Alors  $Y' = p^{-1}Y$  est le fibré projectif  $\mathbb{P}\mathcal{N}_Y$  sur  $Y$ , où  $\mathcal{N}_Y$  est le faisceau conormal de  $Y$  dans  $X$ , un faisceau localement libre de rang  $d$ .

Un résultat classique [SGA6, VII 3.7; FL, VI 4.4] donne une suite exacte:

$$(0.1) \quad 0 \rightarrow K_0(Y) \rightarrow K_0(Y') \oplus K_0(X) \rightarrow K_0(X').$$

Pour  $Y$  régulier, c'était connu que le morphisme  $K_0(Y') \oplus K_0(X) \rightarrow K_0(X')$  est surjectif et l'on obtenait une formule complète pour  $K_0(X')$  dans ce cas. En général, compte tenu de l'isomorphisme de Grothendieck-Berthelot  $K_0(Y')$

$= K_0(\mathbb{P}\mathcal{N}) \cong \bigoplus_d K_0(Y)$ , on peut exprimer (0.1) en disant que  $K_0(X')$  contient un sous-groupe isomorphe à  $K_0(X) \oplus \bigoplus_{d-1} K_0(Y)$ , ce sous-groupe étant tout  $K_0(X')$  dans le cas où  $Y$  est régulier.

Dans cet article je donne une formule complète pour  $K_n(X')$ , pour tout  $n$  et sans hypothèse de régularité de  $Y$ . C'est l'isomorphisme du théorème 2.1:

$$(0.2) \quad K_n(X') \cong K_n(X) \oplus \bigoplus_{d-1} K_n(Y).$$

D'où l'on peut déduire (2.2) que pour tout  $n$  et sans hypothèse de régularité de  $Y$  on a une suite exacte:

$$(0.3) \quad 0 \rightarrow K_n(Y) \rightarrow K_n(Y') \oplus K_n(X) \rightarrow K_n(X') \rightarrow 0.$$

En particulier, pour  $n=0$  l'hypothèse classique de régularité est inutile.

En plus, je fournis un théorème d'intersection excédentaire pour la  $K$ -théorie, le théorème 3.1, qui donne une relation entre les morphismes d'image réciproque et les morphismes d'image directe par une immersion fermée régulière dans un carré cartésien de schémas. Il comporte des résultats antérieurs pour  $K_0$  (par exemple, la "formule clef" de [SGA6, VII 2.7 et 3.4], la formule d'intersec-

tion excédentaire de Fulton-Lang [FL, VI 1.3] et un cas du théorème de changement de base par un morphisme relativement plat de [SGA6, IV 3.1.1], ainsi que la version de celui-ci pour la haute K-théorie de [Q, § 7 2.11] et de [TT 3.18]). D'ailleurs ce théorème 3.1, ainsi que le théorème 2.1, ne font pas l'hypothèse paresseuse supposée par [SGA6] et [FL] qu'il existe des faisceaux inversibles amples sur les schémas en question.

Je voudrais faire mention de deux applications de ces résultats que je ne traiterai pas en détail dans cet article. La formule classique servait à démontrer un théorème d'Adams-Riemann-Roch [SGA6, VIII 3.2] sur le comportement de la  $\gamma$ -filtration sur  $K_0 \otimes \mathbb{Q}$  relatif à l'image directe  $f_*$  d'un morphisme d'intersection complète. Muni de nos résultats on trouvera facilement en adaptant celle dans [SGA6] la démonstration d'une version d'Adams-Riemann-Roch pour les K-groupes supérieurs  $K_n \otimes \mathbb{Q}$ . On pourrait aussi le démontrer par la technique de déformation au cône normal [FL]. Par contre, nos résultats ici permettent de calculer les K-groupes de cette déformation, étant un schéma éclaté le long d'une immersion régulière [FL, IV § 5]. Cela apporte plusieurs améliorations à la technique. Par exemple, l'on peut ainsi définir un morphisme multiplicatif de cospécialisation partant de  $K_*$  de la fibre déformée vers  $K_*$  de la fibre originale.

Je remercie Colliot-Thélène et Bruno Kahn de plusieurs entretiens utiles, ainsi que Soulé qui a en plus soigneusement critiqué un des brouillons de cet article pour ses nombreuses fautes de langue. (Les fautes qui s'y trouvent actuellement j'ai ajoutées plus tard.) La première version de cet article avait donné une formule fautive pour  $K_n(X')$ , un analogue de (0.2) où  $K_n(X \text{ sur } Y)$  remplaçait  $K_n(Y)$ . Après que j'avais découvert une erreur dans l'argument, Ofer Gabber m'a sauvé en faisant l'observation très fructueuse que la formule fautive était incompatible avec celle pour les K-groupes étales topologiques d'un éclaté qui ressort de la formule pour ses groupes de cohomologie étale, et que la vraie formule devait être l'actuel (0.2). Amnon Neeman m'a gracieusement signalé une lacune dans ma première tentative de démontrer le lemme 2.4 b. Enfin, le contrôleur final de l'article, en outre de ses tâches ordinaires, a été assez soigneux de me signaler des inexactitudes dans un article antérieur cité ici et corrigé dans le par. 4.

## 1 Hypothèses, notations et rappels

1.1 Soient  $X$  un schéma quasi-compact et quasi-séparé, par exemple n'importe quel schéma noethérien, et  $i: Y \rightarrow X$  une immersion fermée et régulière au sens de [SGA6, VII 1.4]. C'est-à-dire que l'idéal  $\mathcal{J}$  de  $Y$  dans  $X$  est un faisceau de  $\mathcal{O}_X$ -modules de type fini, et qu'il est localement engendré par une suite d'éléments pour laquelle le complexe de Koszul soit acyclique sauf en degré 0. (Lorsque  $X$  est noethérien, c'est équivalent à la condition que  $\mathcal{J}$  soit localement engendré par une suite régulière, et donc à ce que  $i: Y \rightarrow X$  soit une immersion régulière au sens naïf de [EGA, IV 16.9.2], le tout en vertu de [EGA, IV 19.5.2]). Supposons de plus que  $i: Y \rightarrow X$  est de pure codimension  $d \geq 1$ , c.-à-d. que les suites locales sont toutes de  $d$  éléments. (En général, la codimension locale égale le rang local de  $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$  [SGA6, VII 1.6] et ainsi elle est constante sur chaque composante connexe de  $Y$ . Donc on est ramené facilement au cas de pure codimension.)

Notons  $\mathcal{N} = \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$  le faisceau conormal de l'immersion régulière de  $Y$  dans  $X$ : c'est un  $\mathcal{O}_Y$ -module localement libre, donc un fibré vectoriel sur  $Y$ , et de rang  $d$  [SGA6, VII 1.6].

1.2 Soit  $X' = \text{Proj}_X(\oplus \mathcal{I}^n)$  le schéma éclaté de  $X$  le long de l'immersion régulière  $i: Y \rightarrow X$ . C'est muni d'un faisceau inversible fondamental  $\mathcal{O}_{X'}(1)$  qui est relativement ample pour le morphisme canonique  $p: X' \rightarrow X$ . Ce morphisme projectif est aussi parfait: localement sur  $X$  il se factorise en une immersion fermée régulière de  $X'$  dans un espace projectif  $\mathbb{P}_X^{d-1}$ , suivie de la projection  $\mathbb{P}_X^{d-1} \rightarrow X$ . En effet, localement sur  $X$  il existe un  $\mathcal{O}_X$ -module libre de rang  $d$ ,  $\mathcal{E}$ , et une surjection  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{I}$ . Sur le sous-schéma de  $X$  où elle est définie cette surjection induit une immersion fermée  $k: X' \rightarrow \mathbb{P}\mathcal{E} = \mathbb{P}_X^{d-1}$ , telle que  $k^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}\mathcal{E}}(1) = \mathcal{O}_{X'}(1)$ . Ce  $k$  est une immersion régulière: voir [SGA6, VII 1.8], ou, pour le cas noethérien, [EGA, IV 19.4].

Soit  $p': Y' = X' \times_X Y \rightarrow Y$  le pullback de  $p$  sur  $Y$ . Alors  $Y' = \text{Proj}_Y(\oplus \mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1}) \cong \mathbb{P}\mathcal{N}_Y$ . Le morphisme  $p': Y' \rightarrow Y$  s'identifie au morphisme de projection et donc est parfait, même lisse. L'idéal de l'immersion fermée induite  $i': Y' \rightarrow X'$  est canoniquement isomorphe au faisceau inversible  $\mathcal{O}_{X'}(1)$ ,  $Y'$  étant «le diviseur exceptionnel»: ainsi l'on a une suite exacte [EGA, II 8.1.8]:

$$(1.2.1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{X'}(1) \xrightarrow{s} \mathcal{O}_{X'} \rightarrow i'_* \mathcal{O}_{Y'} \rightarrow 0.$$

En particulier l'immersion  $i'$  est régulière de codimension un. Pour tout entier  $n$ , on a la suite exacte utile qui est le produit tensoriel de (1.2.1) avec  $\mathcal{O}_{X'}(n)$ :

$$(1.2.2) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{X'}(n+1) \xrightarrow{s} \mathcal{O}_{X'}(n) \rightarrow i'_* \mathcal{O}_{Y'}(n) \rightarrow 0.$$

Soit  $j: U \rightarrow X$  l'immersion ouverte de  $U = X - Y$  dans  $X$ . Le schéma  $U$  est quasi-compact et quasi-séparé puisque  $X$  l'est et que l'immersion  $Y \rightarrow X$  est de présentation finie. Si l'on pose  $U' = X' - Y'$ , le morphisme restreint  $p|U': U' \rightarrow U$  est un isomorphisme, donc identifions  $U$  et  $U'$ .

1.3 Soit  $Z$  un schéma quasi-compact et quasi-séparé. Rappelons qu'un complexe parfait sur  $Z$  est un complexe de  $\mathcal{O}_Z$ -modules qui soit localement quasi-isomorphe à un complexe borné de  $\mathcal{O}_Z$ -modules libres de type fini, c.-à-d. à un complexe borné de fibrés vectoriels ([SGA6, I] ou [TT, §2]). Si  $Z$  possède une famille ample de faisceaux inversibles, par exemple lorsque  $Z$  est noethérien régulier et séparé ou lorsque  $Z$  est quasi-projectif sur un schéma affine, un complexe parfait est globalement quasi-isomorphe à un complexe borné de fibrés vectoriels ([SGA6, II 2.2] ou [TT, 2.3.1, 2.1.2]).

Si  $f: Z' \rightarrow Z$  est un morphisme parfait et projectif de schémas quasi-compacts et quasi-séparés, et si  $E^*$  est parfait sur  $Z'$ , l'image directe dérivée  $Rf_* E^*$  est parfait sur  $Z$  [SGA6, III 2.1, 2.2, 4.8.1]. En particulier, tous les morphismes  $f = p: X' \rightarrow X$ ,  $p': Y' \rightarrow Y$ ,  $i: Y \rightarrow X$ ,  $i': Y' \rightarrow X'$  considérés dans le par. 1.2 ont cette propriété.

1.4 Pour  $Z$  un schéma quasi-compact et quasi-séparé, notons  $K(Z)$  le spectre (au sens de la topologie algébrique) de K-théorie de  $Z$ , associé à la catégorie des complexes parfaits sur  $Z$ , comme dans [TT, 3.1]. Plus précisément, on prend la version non-connexe de ce spectre, celle notée  $K^B(Z)$  dans [TT, §6] plutôt que celle produite directement par la machine de Waldhausen. Les groupes d'homotopie  $\pi_n K(Z)$  sont les K-groupes  $K_n(Z)$ . Ordinairement, par exemple

lorsque  $Z$  est régulier noethérien séparé, ou si  $Z$  est quasiprojectif sur un schéma affine, ces groupes pour  $n \geq 0$  sont isomorphes aux  $K$ -groupes définis par Quillen [TT, 7.6]. Les groupes  $K_n(Z)$  pour  $n < 0$  sont déterminés à partir des  $K$ -groupes en degrés positifs via la «formule fondamentale de Bass» [TT, 6.6]. En général,  $K_0(Z)$  est le groupe de Grothendieck «non-naïf» de [SGA6, IV 2.2], dont les éléments sont les classes de complexes parfaits plutôt que celles des seuls fibrés vectoriels.

Rappelons que  $K(Z)$  est un foncteur contravariant en  $Z$ , prenant ses valeurs dans la catégorie des spectres multiplicatifs, c.-à-d. de ceux qui soient des anneaux commutatifs à homotopie près [TT, 3.15, 6.9]. Cette multiplication est induite par le produit tensoriel des complexes parfaits. En plus,  $K(\ )$  est aussi un foncteur covariant relatif aux morphismes à la fois parfaits et projectifs [TT, 3.16, 6.5]. Si  $f: Z' \rightarrow Z$  est un tel morphisme, le morphisme correspondant de spectres  $f_*: K(Z') \rightarrow K(Z)$  est induit par l'image directe dérivée  $Rf_*$ . En vertu de la formule de projection [TT, 3.17, 6.5] le morphisme  $f_*$  de spectres est un morphisme de modules à homotopie près sur le spectre multiplicatif  $K(Z)$ .

Pour  $W$  un sous-ensemble fermé de  $Z$  tel que  $Z - W$  soit quasi-compact, notons  $K(Z \text{ sur } W)$  la version non-connexe du spectre de  $K$ -théorie associé à la catégorie des complexes parfaits sur  $Z$  et acycliques sur  $Z - W$  [TT, 3.1, 3.5, 6.4, 6.5]. Le théorème de localisation [TT, 7.4] affirme qu'il existe une suite de fibration homotopique naturelle:

$$(1.4.1) \quad K(Z \text{ sur } W) \rightarrow K(Z) \rightarrow K(Z - W)$$

à laquelle est associé canoniquement une suite exacte de groupes d'homotopie:

$$(1.4.2) \quad \dots \rightarrow K_n(Z \text{ sur } W) \rightarrow K_n(Z) \rightarrow K_n(Z - W) \rightarrow K_{n-1}(Z \text{ sur } W) \rightarrow \dots$$

Le produit tensoriel sur  $\mathcal{O}_Z$  de complexes parfaits induit un accouplement naturel compatible avec la structure de modules sur l'anneau  $K(Z) = K(Z \text{ sur } Z)$  [TT, 3.15, 6.9]:

$$(1.4.3) \quad K(Z \text{ sur } W) \wedge K(Z \text{ sur } W') \rightarrow K(Z \text{ sur } W \cap W').$$

Cela induit un accouplement des groupes d'homotopie.

Un élément  $x$  de  $K_0(Z)$  correspond à un morphisme de spectres  $x: \Sigma^\infty S^0 \rightarrow K(Z)$  partant du spectre des sphères et défini à homotopie près. Sur  $K(Z \text{ sur } W)$  il induit un endomorphisme,  $x \cup$ , le cup-produit par  $x$ , qui est le composé:

$$(1.4.4) \quad K(Z \text{ sur } W) \simeq \Sigma^\infty S^0 \wedge K(Z \text{ sur } W) \xrightarrow{x \wedge \text{id}}$$

$$K(Z) \wedge K(Z \text{ sur } W) \xrightarrow{\otimes} K(Z \text{ sur } W).$$

## 2 Calcul des $K$ -groupes d'un schéma éclaté

**Théorème 2.1** *On adopte les hypothèses et les notations de 1.1 et 1.2. En particulier, soient  $i: Y \rightarrow X$  une immersion fermée régulière de pure codimension  $d \geq 1$  et*

$p: X' \rightarrow X$  l'éclaté de  $X$  le long de  $Y$ . Alors il existe une équivalence d'homotopie naturelle de spectres, en tant que modules sur le spectre multiplicatif  $K(X)$ :

$$(2.1.1) \quad \Theta: K(X') \simeq K(X) \times \prod_{i=1}^{d-1} K(Y).$$

Sur les groupes d'homotopie cette équivalence induit l'isomorphisme annoncé dans (0.2).

2.1.2 Voici les données pour préciser à homotopie près la flèche qui donne l'équivalence, ou plutôt l'équivalence inverse  $\Theta^{-1}$ . Parce que la catégorie d'homotopie des spectres est une catégorie additive, il suffit de spécifier  $\Theta^{-1}$  sur chaque facteur du produit. Sur le facteur  $K(X)$ ,  $\Theta^{-1}$  est donné par  $p^*: K(X) \rightarrow K(X')$ . Sur les  $d-1$  facteurs  $K(Y)$  le morphisme  $\Theta^{-1}$  est le composé de  $p^*: K(Y) \rightarrow K(Y')$ , de  $i_*^*: K(Y') \rightarrow K(X')$  et de la multiplication par la classe dans  $K_0(X')$  du faisceau inversible  $\mathcal{O}_{X'}(-i)$ , où  $i$  prend les  $d-1$  valeurs  $i = 1, 2, \dots, d-1$ . Donc sur le  $k$ -ième facteur  $K(Y)$  c'est  $(i_*^* p^* ( )) \otimes [\mathcal{O}_{X'}(-k)]$ .

*Remarque 2.2* Pour comparer la formule au niveau de groupes d'homotopie qui résulte de 2.1 et la formule classique de [SGA6, VII. 3.7] et de [FL, VI §4] pour  $K_0$ , on peut exprimer celle-là dans la forme d'une suite exacte pour tout  $n$ :

$$(2.2.1) \quad 0 \rightarrow K_n(Y) \xrightarrow{\begin{bmatrix} \lambda_{-1} \mathcal{F} \cup p^* \\ -i_* \end{bmatrix}} K_n(Y') \oplus K_n(X) \xrightarrow{[i_*, p^*]} K_n(X') \rightarrow 0.$$

Ici l'on note  $\mathcal{F}$  le noyau de l'épimorphisme canonique  $p^*(\mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$  sur  $Y' = \mathbb{P}^n$  comme dans [SGA6, VII 3.1] et l'on note  $\lambda_{-1} \mathcal{F}$  l'élément de  $K_0(Y')$  donné par  $\sum_i (-1)^i [A^i \mathcal{F}]$  comme dans 3.1 ci-dessous ou dans [SGA6]. Pour

voir que cette suite (2.2.1) est exacte, d'abord on constate d'après la formule d'intersection excédentaire 3.1 que le composé  $K_n(Y) \rightarrow K_n(X')$  est nul. (Il ressort de (1.2.1) que le faisceau conormal du diviseur exceptionnel  $Y' = \mathbb{P}^n$  dans  $X'$  est  $\mathcal{N}' = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$  et donc notre  $\mathcal{F}$  ici est bien le  $\mathcal{F}$  de 3.1.) Alors, parce que  $p_*^*[\lambda_{-1} \mathcal{F}] = [\mathcal{O}_Y]$  dans  $K_0(Y)$  d'après [SGA6, VI 5.9], il résulte de la formule de projection que le morphisme  $K_n(Y) \rightarrow K_n(Y') \oplus K_n(X)$  est un monomorphisme scindé par le morphisme  $[p_*^*, 0]$ . Ainsi, pour entraîner que la suite (2.2.1) soit exacte, il suffit que  $[i_*^*, p^*]$  induit un isomorphisme de  $(\ker p_*^*) \oplus K_n(X) \subset K_n(Y') \oplus K_n(X)$  sur  $K_n(X')$ . Or, d'après la formule de Grothendieck-Berthelot-Quillen [TT, 7.3]  $K_*(Y') = K_*(\mathbb{P}^n) \cong \bigoplus^d K_*(Y)$  est un module libre sur  $K_*(Y)$  avec base  $\{[\mathcal{O}(0)], [\mathcal{O}(-1)], \dots, [\mathcal{O}(1-d)]\}$ . Alors compte tenu de 2.3(b), on voit que  $(\ker p_*^*) \cong \bigoplus^{d-1} K_*(Y)$  possède  $\{[\mathcal{O}(-1)], \dots, [\mathcal{O}(1-d)]\}$  pour base sur  $K_*(Y)$  et que l'isomorphisme souhaité est celui du théorème 2.1.

D'ailleurs, on remarque qu'il résulte de cette démonstration que la suite (2.2.1) est la suite exacte des groupes d'homotopie d'une évidente suite homotopique de fibration des  $K$ -spectres.

On s'est servi des résultats des paragraphes ci-dessous dans ces arguments ici, mais on ne citera jamais 2.2 ci-dessous et donc il n'y a pas de danger de cercle vicieux.

*Démonstration du théorème.* On commence par établir des lemmes sur le comportement de complexes parfaits dans la situation de 2.1.

**Lemme 2.3** (cf. [SGA6, VII 3.5, 3.6]) *On suppose les hypothèses et les notations de 1.1–1.2.*

(a) *Soit  $F^*$  un complexe parfait sur  $X$ . Alors le morphisme canonique d'adjonction (2.3.1) pour  $p: X' \rightarrow X$  est un quasi-isomorphisme :*

$$(2.3.1) \quad \eta: F^* \xrightarrow{\sim} R p_* L p^* F^* = R p_* (\mathcal{O}_{X'} \otimes L p^* F^*).$$

(b) *Soit  $G^*$  un complexe parfait sur  $Y$ . Alors pour  $p': Y' \cong \mathbb{P}_{\mathcal{N}_Y} \rightarrow Y$  le fibré projectif associé au faisceau localement libre de rang  $d$  qui est  $\mathcal{N}_Y^*$  le morphisme d'adjonction (2.3.2) est un quasi-isomorphisme et en plus, pour  $i = 1, 2, \dots, d-1$  on a le résultat d'annulation (2.3.3):*

$$(2.3.2) \quad \eta: G^* \xrightarrow{\sim} R p'_* L p'^* G^* = R p'_* (\mathcal{O}_{Y'} \otimes L p'^* G^*)$$

$$(2.3.3) \quad R p'_* (\mathcal{O}_{Y'}(-i) \otimes L p'^* G^*) \simeq 0.$$

*Démonstration.* D'après la formule de projection [SGA6, III 3.7] il existe des quasi-isomorphismes naturels:  $R p_* (\mathcal{O}_{X'} \otimes L p^* F^*) \simeq R p_* (\mathcal{O}_{X'}) \otimes F^*$  et pour tout  $n$   $R p'_* (\mathcal{O}_{Y'}(n) \otimes L p'^* G^*) \simeq R p'_* (\mathcal{O}_{Y'}(n)) \otimes G^*$ . Donc on se ramène à démontrer que: (a') le morphisme d'adjonction  $\mathcal{O}_X \rightarrow R p_* L p^* \mathcal{O}_X$  est un quasi-isomorphisme et (b') le morphisme d'adjonction  $\mathcal{O}_Y \rightarrow R p'_* L p'^* \mathcal{O}_Y$  est un quasi-isomorphisme tandis que  $R p'_* (\mathcal{O}_{Y'}(-i)) \simeq 0$  pour  $i = 1, \dots, d-1$ . Or b') résulte du calcul de la cohomologie des fibrés projectifs associés aux faisceaux localement libres de rang  $d$ , [EGA, III 2.1.15]. L'énoncé a') est démontré dans [SGA6] VII 3.5. La méthode est de démontrer par récurrence descendante sur  $n$  pour  $n \geq 0$  que  $\mathcal{J}^n \rightarrow R p_* \mathcal{O}_{X'}(n)$  est un quasi-isomorphisme où  $\mathcal{J}$  est l'idéal le long duquel on a éclaté  $X$ . Pour  $n$  très grand c'est vrai grâce à l'amplitude relative de  $\mathcal{O}_{X'}(1)$ , et le pas de récurrence descendante s'appuie sur la suite exacte (1.2.2) et le calcul sur le fibré projectif  $Y'$  que  $\mathcal{J}^n / \mathcal{J}^{n+1} \cong S^n(\mathcal{N}_Y) \rightarrow R p'_* \mathcal{O}_{Y'}(n)$  est un quasi-isomorphisme pour  $n \geq 0$  [EGA, III 2.1.15].

**Lemme 2.4** *Sous les hypothèses de 1.1–1.2, soit  $k$  un entier tel que  $1 \leq k \leq d-1$ . On rappelle que pour un complexe  $E^*$ , le signe  $E^*[-1]$  signifie le complexe décalé (e.g. [H I.2]).*

(a) *Notons  $\mathbf{A}'_k$  la catégorie des complexes parfaits  $E^*$  sur  $X'$  tels que  $R p_*(E^* \otimes \mathcal{O}_{X'}(i)) \simeq 0$  pour  $0 \leq i < k$ . (Les morphismes dans  $\mathbf{A}'_k$  sont tous les morphismes de complexes de  $\mathcal{O}_{X'}$ -modules.) Alors il existe une application naturelle de foncteurs en  $E^*$  dans  $\mathbf{A}'_k$  vers la catégorie dérivée des complexes parfaits sur  $X'$ :*

$$(2.4.1) \quad \partial: (i'_*(L p'^* R p'_*(E^* \otimes_{\mathcal{O}_{X'}}^L \mathcal{O}_{Y'}(k-1))) \otimes \mathcal{O}_{X'}(-k))[-1] \rightarrow E^*.$$

*Ce morphisme  $\partial$  satisfait à ce que  $R p_*(\partial \otimes \mathcal{O}_{X'}(i))$  est un quasi-isomorphisme pour  $0 \leq i < k+1$ .*

(b) *Il existe un quasi-isomorphisme naturel dans la catégorie dérivée des complexes parfaits sur  $Y$  des foncteurs en  $F^*$  un tel complexe :*

$$(2.4.2) \quad \begin{aligned} \Delta: F^* &\xrightarrow{\sim} R p'_*(i'_*(L p'^* F^*) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}}^L \mathcal{O}_{Y'}(-1))) [-1] \\ &= R p'_*(L i'^* i'_*(L p'^* F^*) \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}} \mathcal{O}_{Y'}(-1))) [-1]. \end{aligned}$$

*Démonstration.* On interprète la suite exacte (1.2.2) comme un triangle exact dans la catégorie dérivée des complexes parfaits sur  $X'$ . En le tensorisant avec  $E^*$  on en produit pour tout entier  $n$  et tout complexe parfait  $E^*$  sur  $X'$  un triangle exact :

$$(2.4.3) \quad \begin{array}{ccccc} E^* \otimes_{\mathcal{O}_{X'}}(n+1) & \longrightarrow & E^* \otimes s & \longrightarrow & E^* \otimes_{\mathcal{O}_{X'}}(n) \\ & \nwarrow \delta & & \swarrow & \\ & & i'_*(E^* \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}}(n)). & & \end{array}$$

Le morphisme  $\delta$  est un morphisme de degré un, donc un morphisme ordinaire de degré zéro partant du complexe décalé  $i'_*(E^* \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}}(n)) [-1]$ .

On définit l'application naturelle  $\delta$  comme le composé du morphisme induit par l'adjonction  $\varepsilon: L p'^* R p'_*(E^* \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}}(k-1)) \rightarrow E^* \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}}(k-1)$ , du morphisme  $\delta$  de (2.4.3) pour  $n=k-1$  et de l'isomorphisme canonique  $E^* \otimes_{\mathcal{O}_{X'}}(k) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}}(-k) \cong E^*$ . Donc, on a un morphisme de degré un :

$$(2.4.4) \quad \begin{aligned} \partial: i'_*(L p'^* R p'_*(E^* \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}}(k-1))) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}}(k) &\xrightarrow{i'_* \varepsilon \otimes \mathcal{O}_{X'}(-k)} \\ i'_*(E^* \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}}(k-1)) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}}(-k) &\xrightarrow{\delta \otimes \mathcal{O}_{X'}(-k)} E^* \otimes_{\mathcal{O}_{X'}}(k) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}}(-k) \cong E^*. \end{aligned}$$

De 2.4(a) il reste à démontrer que pour  $i=0, 1, \dots, k$  le morphisme  $R p_*(\partial \otimes_{\mathcal{O}_{X'}}(i))$  est un quasi-isomorphisme. La source

$$R p_*(i'_*(L p'^* R p'_*(E^* \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}}(k-1))) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}}(-k+i)) \quad \text{de } R p_*(\partial \otimes_{\mathcal{O}_{X'}}(i))$$

s'identifie évidemment à  $i_* R p'_*(L p'^* R p'_*(E^* \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}}(k-1)) \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}}(-k+i))$ . En appliquant le lemme 2.3(b) avec  $G^* = R p'_*(E^* \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}}(k-1))$  on trouve que cette source est quasi-isomorphe à 0 pour  $1-d \leq -k+i < 0$ , c'est-à-dire pour  $0 \leq i < k$  puisque  $k \leq d-1$ . Par hypothèse la cible de  $R p_*(\partial \otimes_{\mathcal{O}_{X'}}(i))$ ,  $R p_*(E^* \otimes_{\mathcal{O}_{X'}}(i))$ , est aussi quasi-isomorphe à 0 pour  $0 \leq i < k$  et donc  $R p_*(\partial \otimes_{\mathcal{O}_{X'}}(i))$  est un quasi-isomorphisme idiot de 0 à 0 pour ces valeurs de  $i$ . Reste le cas  $i=k$ . Dans ce cas la source s'identifie canoniquement à

$$i_* R p'_*(L p'^* R p'_*(E^* \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}}(k-1)) \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}}(0)) \simeq i_* R p'_* L p'^* R p'_*(E^* \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}}(k-1)).$$

D'après le lemme 2.3(b), celui-ci est quasi-isomorphe à  $i_* R p'_*(E^* \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}}(k-1))$  via le morphisme d'adjonction  $\eta R p'_*$ . Etant donné la définition de  $\delta$  dans (2.4.4), l'identité universelle  $(R p'_* \varepsilon)(\eta R p'_*) = 1_{R p'_*}$  entre morphismes d'adjonction et la naturalité des identifications canoniques, on voit que  $R p_*(\partial \otimes_{\mathcal{O}_{X'}}(k))$  s'identifie

à  $\delta' \simeq R p_* \delta$  dans le triangle exact (2.4.5) qui est l'image par  $R p_*$  du triangle (2.4.3) pour  $n = k - 1$ .

$$(2.4.5) \quad \begin{array}{ccc} R p_*(E^* \otimes \mathcal{O}_{X'}(k)) & \longrightarrow & R p_*(E^* \otimes \mathcal{O}_{X'}(k-1)) \\ & \nwarrow \delta' & \swarrow \\ & i_* R p'_*(E^* \otimes \mathcal{O}_{Y'}(k-1)) & \end{array}$$

Or, par hypothèse  $R p_*(E^* \otimes \mathcal{O}_{X'}(k-1)) \simeq 0$  et ainsi  $\delta'$  est un quasi-isomorphisme. La démonstration de l'énoncé 2.4(a) est donc complète.

Quant à 2.4(b), on applique (3.5.2) à l'immersion régulière de codimension un  $i': Y' \rightarrow X'$ . On note qu'il résulte de (1.2.1) que le faisceau conormal  $\mathcal{N}'$  est  $\mathcal{O}_{Y'}(1)$ . On prend le triangle exact donné par (3.5.2) pour  $F'^* = L p'^* F^*$ , on le tensorise avec  $\mathcal{O}_{Y'}(-1)$  et on prend l'image direct  $R p'_*$  pour obtenir un triangle exact sur  $Y$ :

$$(2.4.6) \quad \begin{array}{ccc} R p'_*(L p'^* F^*)[1] & \longrightarrow & R p'_*((L i'^* R i'_* L p'^* F^*) \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}} \mathcal{O}_{Y'}(-1)) \\ & \nwarrow & \swarrow \\ & R p'_*((L p'^* F^*) \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}} \mathcal{O}_{Y'}(-1)) & \end{array}$$

Or, d'après (2.3.3)  $R p'_*(L p'^* F^* \otimes \mathcal{O}_{Y'}(-1))$  est quasi-isomorphe à zéro. Donc le morphisme  $R p'_* L p'^* F^*[1] \rightarrow R p'_*((L i'^* R i'_* L p'^* F^*) \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}} \mathcal{O}_{Y'}(-1))$  est un quasi-isomorphisme. En composant son décalé par  $[-1]$  avec le quasi-isomorphisme  $F^* \rightarrow R p'_* L p'^* F^*$  de (2.3.2) on obtient le quasi-isomorphisme (2.4.2) souhaité. CQFD

**Lemme 2.5** Soient  $X$  un schéma quasi-compact et quasi-séparé,  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module localement libre de rang  $d$  et  $q: \mathbb{P}\mathcal{E} \rightarrow X$  le fibré projectif associé. Supposons que  $E^*$  soit un complexe parfait sur  $\mathbb{P}\mathcal{E}$ , tel que pour  $i=0, 1, \dots, d-1$ ,  $R q_*(E^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}\mathcal{E}}(i))$  est acyclique sur  $X$ . Alors  $E^*$  est acyclique sur  $\mathbb{P}\mathcal{E}$ .

(b) On adopte les hypothèses de 1.1–1.2, en particulier que  $X'$  soit l'éclaté de  $X$  le long de  $Y \rightarrow X$ , une immersion régulière de codimension  $d$  en tout point. Soit  $E^*$  un complexe parfait sur  $X'$ , tel que pour  $i=0, 1, \dots, d-1$ ,  $R p_*(E^* \otimes \mathcal{O}_{X'}(i))$  est acyclique sur  $X$ . Alors  $E^*$  est acyclique sur  $X'$ .

*Démonstration.* Les questions sont locales sur la base  $X$ . Donc, d'après 1.2 on peut supposer pour (b) que  $X = \text{Spec}(A)$  est affine, que le faisceau conormal  $\mathcal{N}$  sur  $Y$  est libre de rang  $d$  et ainsi qu'il est l'image réciproque sur  $Y'$  d'un faisceau localement libre  $\mathcal{E}$  de rang  $d$  sur  $X$ , et que  $p: X' \rightarrow X$  se factorise en une immersion fermée régulière  $k: X' \rightarrow \mathbb{P}\mathcal{E} = \mathbb{P}^{d-1}$  suivie de la projection  $q: \mathbb{P}\mathcal{E} \rightarrow X$  de manière que  $\mathcal{O}_{X'}(1) \cong k^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}\mathcal{E}}(1)$ . Pour que  $E^*$  soit acyclique sur  $X'$  il suffit que  $k_*(E^*)$  soit acyclique sur  $\mathbb{P}^{d-1}$ . Le complexe  $k_*(E^*)$  est parfait sur  $\mathbb{P}^{d-1}$  puisque  $k$  est un morphisme parfait. En outre, l'on a que  $R q_*(k_* E^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}\mathcal{E}}(i)) \cong R p_*(E^* \otimes \mathcal{O}_{X'}(i)) \simeq 0$  pour  $i=0, 1, \dots, d-1$ . Donc on peut remplacer  $E^*$  par  $k_*(E^*)$  pour réduire b) au a) pour  $\mathbb{P}\mathcal{E}_X = \mathbb{P}_A^{d-1}$ . Reste à démontrer l'énoncé a). Comme ci-dessus, on peut réduire au cas où  $X = \text{Spec}(A)$  est affine et  $\mathcal{E}$  est libre de rang  $d$ .



D'abord on démontre par récurrence que pour tout entier  $i \geq 0$  on a l'annulation :

$$(2.5.1) \quad Rq_*(E^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(i)) \simeq 0.$$

C'est vrai lorsque  $0 \leq i \leq d-1$  par l'hypothèse du lemme. Pour faire le pas de récurrence, supposons que  $j \geq d$  et que (2.5.1) est déjà avéré pour  $i=j-1, j-2, \dots, j-d$ . La suite exacte canonique de Koszul sur  $\mathbb{P}^d = \mathbb{P}_A^{d-1}$ , ([SGA6, VI 1.11] ou [Q, §8.1.5]) tensorisée par  $E^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(j)$ , donne une suite exacte de complexes parfaits sur  $\mathbb{P}^d$  :

$$(2.5.2) \quad 0 \rightarrow q^*(A^d \mathcal{E}) \otimes E^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(j-d) \rightarrow \dots \rightarrow q^*(A^1 \mathcal{E}) \otimes E^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(j-1) \\ \rightarrow E^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(j) \rightarrow 0.$$

Cette suite des complexes, considérée comme une résolution de  $E^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(j)$  par un bicomplexe, donne une suite spectrale qui calcule  $Rq_*(E^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(j))$  à partir des  $Rq_*(q^*(A^i \mathcal{E}) \otimes E^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(j-i)) \simeq A^i \mathcal{E} \otimes Rq_*(E^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(j-i))$  pour  $i=1, \dots, d$ . L'hypothèse de récurrence que (2.5.1) est avéré pour  $i=j-1, \dots, j-d$  entraîne que le terme  $E^1$  de cette suite spectrale est nul, d'où il ressort que  $Rq_*(E^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(j)) \simeq 0$ . Cela achève la démonstration du pas de récurrence et celle du résultat d'annulation (2.5.1).

En utilisant (2.5.1) et l'amplitude relative de  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(1)$ , on déduira par récurrence sur l'entier  $k$  que pour tout  $k$  :

$$(2.5.3) \quad H^k(E^*) \simeq 0.$$

Pour  $k \ll 0$  c'est vrai parce que le complexe parfait  $E^*$  est à cohomologie bornée. En supposant que (2.5.3) est vrai lorsque  $k \leq N-1$ , faisons le pas de récurrence pour le démontrer lorsque  $k=N$ . Pour tout  $n \geq 0$  on a la suite spectrale canonique d'hypercohomologie, dont l'aboutissement est isomorphe à zéro d'après (2.5.1)

$$(2.5.4) \quad E_2^{r,s} = R^r q_*(H^s(E^*) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(n)) \Rightarrow H^{r+s}(Rq_*(E^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(n))) \simeq 0.$$

On a toujours  $E_2^{r,s} = 0$  pour  $r < 0$ , et d'après l'hypothèse de récurrence on a que  $E_2^{r,s} = 0$  pour  $s < N$ . Il en ressort via l'analyse habituelle des suites spectrales que  $E_2^{0,N} = E_\infty^{0,N}$  et donc qu'il est nul. C'est-à-dire que  $q_*(H^N(E^*) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(n)) \simeq 0$  pour tout  $n \geq 0$ . Le faisceau  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(1)$  étant ample sur le schéma  $\mathbb{P}^d$  et le faisceau  $H^N(\mathcal{E}^*)$  étant quasicohérent, on déduit du théorème fondamental sur les faisceaux amples [EGA, II 4.5.2(c)] que  $H^N(E^*) \simeq 0$ . Ainsi s'achève le pas de récurrence pour démontrer (2.5.3), qui affirme que  $E^*$  est acyclique. CQFD.

2.6 Ayant fini les démonstrations des lemmes, on aborde le corps de la démonstration du théorème 2.1. Remarquons que si l'on remplace  $X$  en 1.1–1.2 par son extension par l'anneau des polynômes de Laurent  $X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[T, T^{-1}]$ ,  $Y$  par  $Y \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[T, T^{-1}]$  et l'immersion  $i: Y \rightarrow X$  par  $i \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[T, T^{-1}]$ , alors  $X'$  est remplacé par le nouvel éclaté  $X' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[T, T^{-1}]$ ,  $Y'$  par  $Y' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[T, T^{-1}]$  etc. En somme, tout est compatible avec les extensions par l'anneau des polynômes de Laurent qui ont lieu dans le procédé [TT, §6] pour produire la version non-connexe des spectres de  $K$ -théorie à partir des versions connexes. Ainsi, d'après [TT, 6.7], il suffit de démontrer 2.1 pour cette version connexe. Rappelons de [TT, 3.1] que celle-ci est produite par la machine de Waldhausen [W] appliquée à la catégorie waldhausienne des complexes parfaits. Donner une

structure waldhausienne sur une catégorie consiste à spécifier deux sous-catégories dont les morphismes s'appellent les cofibrations et les équivalences faibles respectivement. La structure doit satisfaire à des axiomes simples et bien connus, énumérés dans ([W, § 1.1, § 1.2] ou [TT, 1.2.1, 1.2.3]). On dispose des théorèmes fondamentaux de Waldhausen [W] pour cette version connexe de  $K$ -théorie.

2.7 Soient  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  les catégories waldhausiennes des complexes parfaits sur  $X$  et sur  $Y$  respectivement. Pour  $k=0, 1, 2, \dots, d$  soit  $\mathbf{A}'_k$  la catégorie waldhausienne des complexes parfaits  $E^*$  sur  $X'$  tels que  $Rp_*(E^* \otimes \mathcal{O}_{X'}(i)) \cong 0$  pour  $0 \leq i < k$ . Lorsque  $k=0$  on interprète la dernière condition comme vide, donc  $\mathbf{A}'_0 = \mathbf{A}'$ , la catégorie des complexes parfaits sur  $X'$ . Comme cofibrations dans ces catégories on choisit les monomorphismes des complexes qui sont scindés en tant que morphismes de modules gradués après avoir oublié les différentielles. Bien que l'on ait besoin de considérer plusieurs notions d'équivalence faible dans ces catégories, l'option ordinaire à défaut d'autre spécification explicite c'est que les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes.

Alors d'après la définition des  $K$ -spectres (versions connexes) des schémas  $X$ ,  $Y$  et  $X'$  [TT, 3.1], ils sont les  $K$ -spectres des catégories waldhausiennes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{A}'_0$ :

$$(2.7.1) \quad \begin{aligned} K(\mathbf{A}) &= K(X) \\ K(\mathbf{B}) &= K(Y) \\ K(\mathbf{A}'_0) &= K(X'). \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de fibration de Waldhausen on verra qu'il existe une équivalence d'homotopie:

$$(2.7.2) \quad K(\mathbf{A}'_0) \simeq K(\mathbf{A}'_1) \times K(\mathbf{A})$$

tandis que pour chaque  $k$  entre 1 et  $d-1$  inclus on aura l'équivalence:

$$(2.7.3) \quad K(\mathbf{A}'_k) \simeq K(\mathbf{A}'_{k+1}) \times K(\mathbf{B}).$$

En outre, le morphisme d'inclusion  $K(\mathbf{A}) \rightarrow K(\mathbf{A}'_0)$  dans (2.7.2) sera donné par  $Lp^*$ , et le morphisme  $K(\mathbf{B}) \rightarrow K(\mathbf{A}'_k)$  dans (2.7.3) sera donné par  $(i'_* p'^*( )) \otimes \mathcal{O}_{X'}(-k)$ .

Alors la récurrence évidente sur  $k$  donnera que  $K(X') \simeq K(\mathbf{A}'_0)$  est le produit d'un exemplaire de  $K(\mathbf{A}) \simeq K(X)$ , de  $d-1$  exemplaires de  $K(\mathbf{B}) \simeq K(Y)$  et un facteur additionnel  $K(\mathbf{A}'_d)$ . Or d'après le lemme 2.5 le morphisme canonique partant de 0 vers un objet quelconque de  $\mathbf{A}'_d$  est un quasi-isomorphisme naturel et donc  $K(\mathbf{A}'_d)$  est contractile. En plus, les morphismes d'inclusion du  $K(\mathbf{A})$  et des  $K(\mathbf{B})$  comme facteurs dans  $K(X')$  seraient tels précisés dans 2.1.2. Ainsi, le théorème 2.1 aura été démontré dès que l'on aura établi les équivalences d'homotopie (2.7.2) et (2.7.3). Pour le faire, on se servira du théorème de fibration de Waldhausen.

Notons  $\mathbf{vA}'_k$  la catégorie waldhausienne  $\mathbf{A}'_k$  ci-dessus où l'on a choisi les quasi-isomorphismes comme les équivalences faibles, et notons  $\mathbf{wA}'_k$  la catégorie waldhausienne avec les mêmes objets, morphismes et cofibrations, mais où les équivalences faibles sont les morphismes de complexes  $f$  tels que  $Rp_*(f \otimes \mathcal{O}_{X'}(k))$  soit un quasi-isomorphisme sur la base  $X$ . Il est clair que chaque quasi-isomorphisme des complexes dans  $\mathbf{vA}'_k$  est aussi une équivalence faible dans  $\mathbf{wA}'_k$ . La

sous-catégorie waldhausienne  $\mathbf{vA}'_k^w$  des objets de  $\mathbf{vA}'_k$  qui soient  $w$ -faiblement équivalents au zéro est celle des complexes  $E'$  dans  $\mathbf{vA}'_k$  tels que  $Rp_*(E' \otimes \mathcal{O}_{X'}(i)) \cong 0$  pour  $i=k$  aussi bien que pour  $i=0, \dots, k-1$ . Donc la catégorie  $\mathbf{vA}'_k^w$  est exactement  $\mathbf{vA}'_{k+1}$ . La construction habituelle de cylindres de morphismes entre complexes fournit un foncteur cylindre au sens de Waldhausen [TT, 1.3] pour  $\mathbf{vA}'_k$  ainsi que pour  $\mathbf{wA}'_k$ , et donc toutes les hypothèses du théorème de fibration de Waldhausen ([W, 1.6.4] ou [TT, 1.8.2]) sont satisfaites. Il en ressort qu'il existe une suite de fibration homotopique:

$$(2.7.4) \quad K(\mathbf{vA}'_k^w) \rightarrow K(\mathbf{vA}'_k) \rightarrow K(\mathbf{wA}'_k).$$

C'est à dire, une suite de fibration homotopique:

$$(2.7.5) \quad K(\mathbf{vA}'_{k+1}) \rightarrow K(\mathbf{vA}'_k) \rightarrow K(\mathbf{wA}'_k).$$

Pour déduire (2.7.2) à partir du cas  $k=0$  de (2.7.5), on considère le morphisme  $p^*: K(X) = K(\mathbf{A}) \rightarrow K(\mathbf{vA}'_0) = K(X')$ . Le composé de ce morphisme avec le morphisme  $K(\mathbf{vA}'_0) \rightarrow K(\mathbf{wA}'_0)$  est une équivalence d'homotopie  $K(\mathbf{A}) \simeq K(\mathbf{wA}'_0)$ . Car d'après la critère de (§4 et [TT, 1.9.8]), il suffit que le foncteur  $Lp^*: Ho(\mathbf{A}) \rightarrow Ho(\mathbf{wA}'_0)$  soit une équivalence des catégories dérivées formées en inversant les équivalences faibles. Le foncteur d'image direct  $Rp_*: Ho(\mathbf{A}'_0) = Ho(\mathbf{A}') \rightarrow Ho(\mathbf{A})$  envoie les  $w$ -équivalences dans  $\mathbf{A}'_0$  sur les quasi-isomorphismes d'après la définition de celles-là. Ainsi, il induit un foncteur  $Rp_*: Ho(\mathbf{wA}'_0) \rightarrow Ho(\mathbf{A})$  qui sera l'équivalence inverse à  $Lp^*$ . L'adjonction standard entre l'image réciproque et l'image direct induit une adjonction entre ces  $Lp^*$  et  $Rp_*$ . Il résulte du lemme 2.3(a) que l'application naturelle  $\eta: 1 \rightarrow Rp_* Lp^*$  est un isomorphisme dans  $Ho(\mathbf{A})$ . L'application d'adjonction  $\varepsilon: Lp^* Rp_* \rightarrow 1$  satisfait à l'identité d'adjonction  $(Rp_* \varepsilon)(\eta Rp_*) = 1$ . Donc  $Rp_* \varepsilon$  est aussi un isomorphisme dans  $Ho(\mathbf{A})$ . Or cela entraîne que  $\varepsilon: Lp^* Rp_* \rightarrow 1$  est une  $w$ -équivalence dans  $\mathbf{A}'_0$  d'après la définition et donc que ce morphisme est un isomorphisme dans  $Ho(\mathbf{wA}'_0)$ . Ainsi  $Lp^*$  et  $Rp_*$  sont des équivalences inverses de catégories, ce qui donne que le composé  $K(\mathbf{A}) \rightarrow K(\mathbf{vA}'_0) \rightarrow K(\mathbf{wA}'_0)$  est une équivalence d'homotopie, comme annoncé. Or, cela montre que la suite de fibration homotopique (2.7.5) pour  $k=0$  est scindée et qu'elle s'identifie à la décomposition en produit (2.7.2), concluant la démonstration de celui-ci.

On déduit (2.7.3) à partir des cas  $k=1, \dots, d-1$  de (2.7.5). Pour  $F'$  un complexe parfait sur  $Y$  le complexe  $(Ri'_* Lp'^*(F')) \otimes \mathcal{O}_{X'}(-k) \simeq Ri'_*(Lp'^*(F') \otimes \mathcal{O}_{Y'}(-k))$  est un objet de  $\mathbf{A}'_k$ , ce qui ressort de (2.3.3). Le foncteur  $(i'_* p'^*( )) \otimes \mathcal{O}_{X'}(-k)$  est exact sur la sous-catégorie waldhausienne  $\mathbf{B}'$  dont les objets sont les complexes parfaits et bornés supérieurement de  $\mathcal{O}_Y$ -modules plats. L'inclusion  $\mathbf{B}' \rightarrow \mathbf{B}$  induit une équivalence d'homotopie des spectres de  $K$ -théorie [TT, 3.5] et donc on peut considérer que ce foncteur exact sur  $\mathbf{B}'$  donne à homotopie près un morphisme de spectres  $(i'_* p'^*( )) \otimes \mathcal{O}_{X'}(-k): K(Y) = K(\mathbf{B}) \rightarrow K(\mathbf{vA}'_k)$ . Pour scinder la suite (2.7.5) et l'identifier à (2.7.3) on veut que le composé de cette flèche  $K(\mathbf{B}) \rightarrow K(\mathbf{vA}'_k)$  avec celle  $K(\mathbf{vA}'_k) \rightarrow K(\mathbf{wA}'_k)$  est une équivalence d'homotopie  $K(\mathbf{B}) \simeq K(\mathbf{wA}'_k)$ . Encore, d'après la critère de §4 et de [TT, 1.9.8], il suffit de démontrer que  $(i'_* Lp'^*( )) \otimes \mathcal{O}_{X'}(-k): Ho(\mathbf{B}) \rightarrow Ho(\mathbf{wA}'_k)$  soit une équivalence des catégories. L'inverse sera le foncteur qui envoie un objet  $E'$  de  $\mathbf{A}'_k$  sur  $Rp'_*(E' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}}^L \mathcal{O}_{Y'}(k-1))[-1] = Rp'_*((Li'^* E') \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}} \mathcal{O}_{Y'}(k-1))[-1]$ . Remarquons que si  $f'$  est un  $w$ -équivalence, alors d'après la définition

$Rp_*(f \otimes \mathcal{O}_{X'}(n))$  est un quasi-isomorphisme pour  $n=k-1$  et pour  $n=k$ . Sous ces hypothèses le lemme des cinq et le triangle exact (2.4.5) entraînent que  $i_*Rp'_*(f \otimes \mathcal{O}_{Y'}(k-1))$  est un quasi-isomorphisme sur  $X$ . Alors  $Rp'_*(f \otimes \mathcal{O}_{Y'}(k-1))$  est également un quasi-isomorphisme sur  $Y$ , le foncteur  $i_*$  étant exact et fidèle entre les catégories de modules quasi-cohérents où les groupes d'homologie des complexes prennent leurs valeurs. Ainsi le foncteur  $Rp'_*(\otimes \mathcal{O}_{Y'}(k-1))[-1]$  sur  $A'_k$  induit un foncteur  $Ho(\mathbf{w}A'_k) \rightarrow Ho(\mathbf{B})$ . Reste à vérifier que ce foncteur est une équivalence de catégories inverse au foncteur  $(i'_*Lp'^*( )) \otimes \mathcal{O}_{X'}(-k)$ . Or le composé  $Ho(\mathbf{w}A'_k) \rightarrow Ho(\mathbf{B}) \rightarrow Ho(\mathbf{w}A'_k)$  qui envoie  $E^*$  sur  $(i'_*Lp'^*(Rp'_*(E^* \otimes \mathcal{O}_{Y'}(k-1)))) \otimes \mathcal{O}_{X'}(-k)[-1]$  est naturellement isomorphe à l'identité selon le lemme 2.4(a), qui donne une  $\mathbf{w}$ -équivalence naturelle  $\partial$  entre le composé et le foncteur identité. Quant au composé  $Ho(\mathbf{B}) \rightarrow Ho(\mathbf{w}A'_k) \rightarrow Ho(\mathbf{B})$ , il envoie un complexe parfait de  $\mathcal{O}_Y$ -modules  $F^*$  sur  $Rp'_*((i'_*Lp'^*(F^*)) \otimes \mathcal{O}_{X'}(-k) \otimes \mathcal{O}_{Y'}(k-1))[-1] \simeq Rp'_*((i'_*Lp'^*(F^*)) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_{Y'}(-1))[-1]$ . Il ressort du lemme 2.4(b) que ce composé aussi est naturellement quasi-isomorphe à l'identité. CQFD.

*Remarque 2.8.* Un argument semblable à celui pour 2.1, mais beaucoup plus simple, donne une démonstration rapide de la formule de Grothendieck-Berthelot-Quillen pour les  $K$ -groups d'un fibré projectif. Voir [T].

### 3 La formule d'intersection excédentaire

**Théorème 3.1** Soit (3.1.1) un carré cartésien de schémas quasi-compacts et quasi-séparés, où  $i$  et  $i'$  sont des immersions fermées régulières [SGA, VII 1.4]:

$$(3.1.1) \quad \begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{i'} & X' \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{i} & X. \end{array}$$

Soient  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{N}'$  les faisceaux conormaux des morphismes  $i$  et  $i'$  respectivement, et  $\mathcal{F}$  le noyau de l'épimorphisme canonique des faisceaux localement libres sur  $\mathcal{O}_{Y'}$ :

$$(3.1.2) \quad 0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow f'^*\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}' \rightarrow 0.$$

Notons  $[\lambda_{-1}\mathcal{F}]$  dans  $K_0(Y')$  la classe de l'algèbre extérieure graduée engendrée par  $\mathcal{F}$ ,

$$[A^*\mathcal{F}] = [\mathcal{O}_{Y'}] - [\mathcal{F}] + [A^2\mathcal{F}] - [A^3\mathcal{F}] + \dots \pm [A^{\operatorname{rg}\mathcal{F}+1}\mathcal{F}] = 0.$$

Soient  $W \subseteq X$  et  $Z \subseteq Y$  des sous-espaces fermés tels que  $X-W$  et  $Y-Z$  sont quasi-compacts. Supposons que  $Z \subseteq Y \cap W$  et posons  $W' = f^{-1}(W) \subseteq X$  et  $Z' = f'^{-1}(Z) \subseteq Y'$ .

Alors on a une égalité à homotopie près des morphismes de spectres  $K(Y \text{ sur } Z) \rightarrow K(X' \text{ sur } W')$

$$(3.1.3) \quad f^* \circ i_* = i'_*([\lambda_{-1}\mathcal{F}] \cup f'^*( )).$$

(Par exemple, quand  $Z = Y$  et  $W = X$ , d'où  $K(Y \text{ sur } Z) = K(Y)$  et  $K(X' \text{ sur } W') = K(X')$ , on a l'égalité (3.1.3) pour les morphismes  $K(Y) \rightarrow K(X')$ .)

En particulier en prenant  $f = i$ , on a pour une immersion fermée régulière  $i$  que :

$$(3.1.4) \quad i^* \circ i_* = [\lambda_{-1} \mathcal{N}] \cup ( ).$$

*Démonstration.* Notons d'abord que  $f$  et  $f'$  sont des morphismes quasi-compacts [EGA, I 6.1.10] et donc  $X' - W'$  et  $Y' - Z'$  sont quasi-compacts comme il faut. Pour expliciter tous ces morphismes, remarquons d'abord que les morphismes d'image directe  $i_* : K(Y \text{ sur } Z) \rightarrow K(X \text{ sur } W)$  et  $i'_* : K(Y' \text{ sur } Z') \rightarrow K(X' \text{ sur } W')$  existent d'après [TT, 3.16.5, 3.16.7 et 6.5], grâce à l'hypothèse que les immersions fermées  $i$  et  $i'$  sont régulières, donc parfaites autant que projectives. Les morphismes  $f^*$  et  $f'^*$  sont les morphismes usuels d'image réciproque [TT, 3.14]. Le morphisme  $[\lambda_{-1} \mathcal{F}] \cup$  est le cup-produit (1.4.4) par l'élément  $[\lambda_{-1} \mathcal{F}]$  de  $K_0(Y')$ .

Si  $\mathcal{J}$  est l'idéal de  $Y$  dans  $X$  et  $\mathcal{J}'$  celui de  $Y'$  dans  $X'$ , alors  $\mathcal{J}'$  est l'idéal engendré par  $f^* \mathcal{J}$ , le carré (3.1.1) étant cartésien. Ainsi, le morphisme canonique  $f^*(\mathcal{N}) = f^*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2) \rightarrow \mathcal{J}'/\mathcal{J}'^2 = \mathcal{N}'$  est bien un épimorphisme. Les faisceaux  $\mathcal{N} = \mathcal{J}/\mathcal{J}^2$  et  $\mathcal{N}' = \mathcal{J}'/\mathcal{J}'^2$  sont localement libres de type fini sur  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}_{Y'}$  respectivement, parce que les immersions fermées  $i$  et  $i'$  sont régulières. Donc le noyau  $\mathcal{F}$  est localement libre de type fini, et  $[\lambda_{-1} \mathcal{F}]$  est bien une classe de  $K_0(Y')$ .

Ainsi, tous les termes de la formule (3.1.3) sont définis. On aura besoin d'un lemme.

**Lemme 3.2** (cf. [SGA6, VII 2.5, 3.2]) *Sous les hypothèses de 3.1, il existe un isomorphisme canonique de  $\mathcal{O}_{Y'}$ -modules :*

$$(3.2.1) \quad \mathrm{Tor}_k^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{X'}, \mathcal{O}_Y) \cong A^k \mathcal{F}.$$

*En particulier, pour chaque  $k \geq 0$  le  $\mathcal{O}_{Y'}$ -module  $\mathrm{Tor}_k^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{X'}, \mathcal{O}_Y)$  est localement libre de type fini, et il est nul lorsque  $k > \mathrm{rang} \mathcal{F}$ .*

*Démonstration.* La suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow 0$  induit une suite exacte longue des  $\mathrm{Tor}_*^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{X'}, \quad)$ , qui, compte tenu que  $\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{X'}, \mathcal{O}_X)$  est tautologiquement 0, contient la suite exacte :

$$(3.2.2) \quad 0 \rightarrow \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{X'}, \mathcal{O}_Y) \rightarrow \mathcal{O}_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{O}_{X'} \rightarrow \mathcal{O}_{Y'} \rightarrow 0.$$

C'est-à-dire qu'il existe une suite exacte pour  $\mathcal{J}' = \ker \mathcal{O}_{X'} \rightarrow \mathcal{O}_{Y'} :$

$$(3.2.3) \quad 0 \rightarrow \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{X'}, \mathcal{O}_Y) \rightarrow f^* \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}' \rightarrow 0.$$

Il en résulte qu'il existe un épimorphisme :

$$(3.2.4) \quad \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{X'}, \mathcal{O}_Y) \twoheadrightarrow \mathcal{F} = \ker (f^*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2) \rightarrow \mathcal{J}'/\mathcal{J}'^2).$$

Pour entraîner la formule (3.2.1) il suffit que le morphisme (3.2.4) est un isomorphisme et que le cup-produit dans l'algèbre graduée  $\mathrm{Tor}_*^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{X'}, \mathcal{O}_Y)$  induit un isomorphisme pour tout  $k$  :

$$(3.2.5) \quad A^k \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{X'}, \mathcal{O}_Y) \cong \mathrm{Tor}_k^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{X'}, \mathcal{O}_Y).$$

Ces deux questions sont locales, donc elles se ramènent au cas où  $\mathcal{O}_X$ ,  $\mathcal{O}_{X'}$ , etc., sont des anneaux locaux avec corps résiduels  $k, k'$ . Alors les modules localement libres  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{N}'$  sont libres. On choisit une base du  $\mathcal{O}_Y$ -module libre de type fini  $\mathcal{N}$ . Cette base induit des bases pour le  $\mathcal{O}_Y$ -module libre  $f^*\mathcal{N}$  et le  $k'$ -module  $f^*\mathcal{N} \otimes k'$ . La flèche  $f^*\mathcal{N} \otimes k' \rightarrow \mathcal{N}' \otimes k'$  étant un épimorphisme d'espaces vectoriels, on peut choisir dans cette base de  $f^*\mathcal{N} \otimes k'$  un sous-ensemble qui aille bijectivement sur une base de  $\mathcal{N}' \otimes k'$ . Donc  $\mathcal{N}$  possède une base sur  $\mathcal{O}_Y$ ,  $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_d)$ , telle que l'image de  $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m)$  est une base de  $\mathcal{N}' \otimes k'$ . En utilisant le lemme de Nakayama, on voit que l'image de  $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m)$  est alors une base du  $\mathcal{O}_Y$ -module libre  $\mathcal{N}'$ . On relève les éléments  $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_d)$  le long de l'épimorphisme  $\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}/\mathcal{J}^2 = \mathcal{N}$ . D'après le lemme de Nakayama la suite qui en résulte  $(u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_d)$  engendre  $\mathcal{J}$  et l'image de la sous-suite  $(u_1, u_2, \dots, u_m)$  engendre  $\mathcal{J}'$ . Comme ces suites induisent des bases de  $\mathcal{J} \otimes k$  et de  $\mathcal{J}' \otimes k'$  et comme  $\mathcal{J}$  et  $\mathcal{J}'$  sont les idéaux d'immersions régulières, d'après [SGA6, VII 1.4.2] les complexes de Koszul de ces suites sont acycliques, c'est-à-dire qu'ils sont des résolutions libres de  $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X/\mathcal{J}$  et de  $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X/\mathcal{J}'$  respectivement:

$$(3.2.6) \quad \begin{aligned} K_{\bullet, \mathcal{O}_X}(u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_d) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_Y \\ K_{\bullet, \mathcal{O}_{X'}}(u_1, u_2, \dots, u_m) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_Y. \end{aligned}$$

En utilisant cette résolution de  $\mathcal{O}_Y$  pour calculer le complexe des Tor, on obtient que  $\mathrm{Tor}_{k^X}^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{X'}, \mathcal{O}_Y)$  est le module de cohomologie  $H^{-k}$  des complexes quasi-isomorphes dans (3.2.7):

$$(3.2.7) \quad \begin{aligned} \mathcal{O}_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_X}^L \mathcal{O}_Y &\simeq \mathcal{O}_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_X} K_{\bullet, \mathcal{O}_X}(u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_d) \\ &\simeq \mathcal{O}_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_X} K_{\bullet, \mathcal{O}_X}(u_1, u_2, \dots, u_m) \otimes_{\mathcal{O}_X} K_{\bullet, \mathcal{O}_X}(v_1, v_2, \dots, v_d) \\ &\simeq K_{\bullet, \mathcal{O}_{X'}}(u_1, u_2, \dots, u_m) \otimes_{\mathcal{O}_X} K_{\bullet, \mathcal{O}_X}(v_1, v_2, \dots, v_d) \\ &\simeq \mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_X} K_{\bullet, \mathcal{O}_X}(v_1, v_2, \dots, v_d). \end{aligned}$$

Or, tous les  $v_i$  étant éléments de  $\mathcal{J}$  et donc d'image 0 dans  $\mathcal{O}_Y$ , toutes les différentielles du dernier complexe de Koszul sont nulles. Son algèbre de cohomologie  $\mathrm{Tor}_{*}^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{X'}, \mathcal{O}_Y)$  est donc isomorphe à ce complexe de Koszul, une algèbre extérieure libre sur  $d$  générateurs de degré 1. Donc le morphisme (3.2.5) est un isomorphisme. D'ailleurs,  $d = \mathrm{rang} \mathcal{N} - \mathrm{rang} \mathcal{N}' = \mathrm{rang} \mathcal{F}$ , ce qui donne que le morphisme (3.2.4) est un épimorphisme entre modules libres du même rang fini, et donc un isomorphisme. CQFD.

**3.3** Pour entamer le corps de la démonstration de la formule (3.1.3), on se ramène comme dans 2.6 à la démontrer pour les versions connexes des  $K$ -spectres produites par la machine de Waldhausen. Il faut choisir parmi les principales possibilités offertes par [TT, 3.1, 1.9.2, 3.5] quelques catégories waldhausiennes commodées pour donner ces  $K$ -spectres. On prend pour donner  $K(X$  sur  $W)$  la catégorie  $\mathbf{K}(X$  sur  $W)$  des complexes parfaits sur  $X$ , bomés supérieurement, acycliques sur  $X - W$  et composés de  $\mathcal{O}_X$ -modules plats [TT, 3.5.3]. Pour donner  $K(X'$  sur  $W')$ , on prend la catégorie  $\mathbf{K}(X'$  sur  $W')$  des complexes parfaits sur  $X'$  acycliques sur  $X' - W'$ . Dans  $\mathbf{K}(X'$  sur  $W')$  on choisit comme cofibrations

les morphismes qui sont des monomorphismes en tant que morphismes de modules gradués: on n'impose pas la condition habituelle que ces monomorphismes soient scindés. Il demande plus d'effort pour construire un modèle de  $K(Y \text{ sur } Z)$  qui convient à la démonstration du théorème 3.2. On prend la catégorie  $\mathbf{K}(Y \text{ sur } Z)$  dont les objets sont les données:

$$(3.3.1) \quad (E^*, \lambda: L^* \xrightarrow{\sim} i_* E^*)$$

où  $E^*$  est un complexe parfait sur  $Y$ , borné supérieurement, acyclique sur  $Y-Z$  et composé de  $\mathcal{O}_Y$ -modules plats, où  $L^* = \{L^{ij} \mid i \in \mathbb{Z}, j \leq 0\}$  est un bicomplexe de  $\mathcal{O}_X$ -modules plats pour lequel il existe un entier  $N$  tel que  $L^{ij} = 0$  lorsque  $i > N$ , et où  $\lambda$  est une augmentation exacte de ce bicomplexe, une suite de morphismes  $L^{i0} \rightarrow i_* E^i$  tel que le diagramme (3.3.2) est commutatif et à lignes exactes:

(3.3.2)

$$\begin{array}{ccccccccc} & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & L^{i, -3} & \longrightarrow & L^{i, -2} & \longrightarrow & L^{i, -1} & \longrightarrow & L^{i, 0} & \longrightarrow & i_* E^i & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & L^{i+1, -3} & \longrightarrow & L^{i+1, -2} & \longrightarrow & L^{i+1, -1} & \longrightarrow & L^{i+1, 0} & \longrightarrow & i_* E^{i+1} & \longrightarrow & 0. \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \end{array}$$

Notons que le morphisme induit à partir du complexe total de  $L^*$  vers  $i_* E^*$  est un quasi-isomorphisme, et donc que  $L^*$  est une sorte de résolution plate de  $i_* E^*$ . En outre, puisque  $i$  et  $E^*$  sont parfaits, le complexe  $i_* E^*$  et donc le complexe total de  $L^*$  sont des complexes parfaits. Pour continuer la spécification de la catégorie  $\mathbf{K}(Y \text{ sur } Z)$ , un morphisme  $(e, \ell): (E^*, \lambda, L^*) \rightarrow (E'^*, \lambda', L'^*)$  consiste en un morphisme de complexes de  $\mathcal{O}_Y$ -modules  $e: E^* \rightarrow E'^*$  et un morphisme de bicomplexes  $\ell: L^* \rightarrow L'^*$  qui sont compatibles avec les augmentations, c.-à-d. que  $\lambda' \circ \ell = i_* e \circ \lambda$ . On déclare qu'un morphisme  $(e, \ell)$  est une cofibration si et si  $e$  et  $\ell$  sont des monomorphismes scindés en tant que morphismes de modules gradués (resp., bigradués). Un morphisme  $(e, \ell)$  est une équivalence faible si  $e: E^* \rightarrow E'^*$  est un quasi-isomorphisme: dans ce cas  $i_* e$  et le morphisme induit par  $\ell$  sur les complexes totaux sont aussi des quasi-isomorphismes. Cette catégorie waldhausienne  $\mathbf{K}(Y \text{ sur } Z)$  admet un foncteur d'oubli exact vers la catégorie waldhausienne des complexes parfaits, acycliques sur  $Y-Z$  et bornés supérieurement de  $\mathcal{O}_Y$ -modules plats [TT, 3.5.3], un foncteur qui envoie  $(E^*, \lambda, L^*)$  sur  $E^*$ . Ce foncteur d'oubli induit une équivalence d'homotopie entre les  $K$ -spectres, et donc le spectre de  $\mathbf{K}(Y \text{ sur } Z)$  est bien le  $K(Y \text{ sur } Z)$  de [TT, 3.5]. Car d'après le théorème d'approximation de Waldhausen [TT, 1.9.1], dont toutes les autres hypothèses sont évidemment remplies, il suffit de vérifier pour tout objet  $(E^*, \lambda, L^*)$  de la catégorie-source  $\mathbf{K}(Y \text{ sur } Z)$  et pour tout morphisme  $e: E^* \rightarrow F^*$  dans la catégorie-cible qu'il existe un objet  $(F^*, \mu, M^*)$  de  $\mathbf{K}(Y \text{ sur } Z)$

**Z)** et un morphisme  $(e, \ell): (E^*, \lambda, L^*) \rightarrow (F^*, \mu, M^*)$  envoyé sur  $e$  par le foncteur d'oubli. Donc on veut trouver une résolution plate  $\mu: M^* \rightarrow i_* F^*$  telle que le morphisme  $i_*(e)\lambda: L^* \rightarrow i_* F^*$  se relève en un morphisme de bicomplexes  $\ell: L^* \rightarrow M^*$ . Or, tout  $\mathcal{O}_X$ -module est le quotient d'un  $\mathcal{O}_X$ -module plat (e.g. [H, II 1.2]). Cela et une récurrence standard sur le degré (cf. [H, I 4.6]) permettent de construire pour tout complexe borné supérieurement de  $\mathcal{O}_X$ -modules  $A^*$ , un complexe borné supérieurement de  $\mathcal{O}_X$ -modules plats  $B^*$  et un épimorphisme de complexes  $B^* \rightarrow A^*$ . Si  $C^*$  est un complexe borné supérieurement de  $\mathcal{O}_X$ -modules plats et si  $C^* \rightarrow A^*$  est un morphisme de complexes, on peut remplacer ce  $B^*$  par  $B^* \oplus C^*$  afin que  $C^* \rightarrow A^*$  se factorise à travers un facteur direct de l'épimorphisme  $B^* \rightarrow A^*$ . Si  $A^*$  et  $C^*$  satisfont à  $0 = A^i = C^i$  pour  $i > N$ , la construction permet de choisir  $B^*$  tel que  $B^i = 0$  pour  $i > N$ . On applique cette construction, d'abord à  $i_* F^*$ , puis successivement aux noyaux des épimorphismes déjà construits, pour ériger, colonne par colonne, une résolution plate  $\mu: M^* \rightarrow i_* F^*$  dont toutes les colonnes sont bornées supérieurement par un entier  $N$ . En choisissant comme  $C^*$  les colonnes successives de  $L^*$  on obtient un  $M^*$  qui admet un morphisme  $\ell: L^* \rightarrow M^*$  de bicomplexes augmentés sur  $i_* F^*$ . Le morphisme  $(e, \ell): (E^*, \lambda, L^*) \rightarrow (F^*, \mu, M^*)$  dans **K(Y sur Z)** est alors celui que l'on cherchait. Ainsi, l'on a vérifié que les hypothèses du théorème d'approximation sont remplies, et donc que le spectre de **K(Y sur Z)** est bien  $K(Y \text{ sur } Z)$ . Le morphisme  $i_*: K(Y \text{ sur } Z) \rightarrow K(X \text{ sur } W)$  est représenté par le foncteur exact **K(Y sur Z)**  $\rightarrow$  **K(X sur W)** qui envoie  $(E^*, \lambda, L^*)$ , sur le complexe total de  $L^*$ , un complexe parfait de modules plats quasi-isomorphe à  $i_*(E^*)$ . Enfin, pour donner  $K(Y' \text{ sur } Z')$  on prend **K(Y' sur Z')** la catégorie des complexes parfaits sur  $Y'$  acycliques sur  $Y' - Z'$ .

3.4 Le morphisme à la gauche de la formule (3.1.3),  $f^* \circ i_*: K(Y \text{ sur } Z) \rightarrow K(X' \text{ sur } W')$ , est représenté par le foncteur exact **K(Y sur Z)**  $\rightarrow$  **K(X' sur W')** qui envoie  $(E^*, \lambda, L^*)$  sur le complexe total de  $f^* L^*$ . Pour le découper en morceaux convenables, considérons pour tous entiers  $k$  les foncteurs  $T_k$  qui envoient  $(E^*, \lambda, L^*)$  sur les complexes totaux des bicomplexes (3.4.1) qui résultent de « bien » tronquer [H, I § 7] chaque complexe horizontal du bicomplexe  $f^* L^*$ :

(3.4.1)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \dots 0 \rightarrow & \text{im } \partial_h^{i, -k-1} & \rightarrow & f^* L^{i, -k} & \rightarrow \dots \rightarrow & f^* L^{i, -1} & \rightarrow & f^* L^{i, 0} \rightarrow 0 \\
 T_k = & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \dots 0 \rightarrow & \text{im } \partial_h^{i+1, -k-1} & \rightarrow & f^* L^{i+1, -k} & \rightarrow \dots \rightarrow & f^* L^{i+1, -1} & \rightarrow & f^* L^{i+1, 0} \rightarrow 0. \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
 \end{array}$$

Remarquons que  $T_k = 0$  si  $k < 0$ . Les différentielles horizontales de  $f^* L^*$  induisent des épimorphismes canoniques  $f^* L^{i, -k} \rightarrow \text{im } \partial_h^{i, -k}$ , qui sont les composantes en



bidegré  $(i, -k)$  d'un épimorphisme naturel  $T_k \rightarrow T_{k-1}$ , dont le noyau  $h_k(L'')$  est le complexe total du bicomplexe

$$(3.4.2) \quad \begin{array}{ccccccc} & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots 0 & \longrightarrow & \operatorname{im} \partial_h^{i, -k-1} & \longrightarrow & \ker \partial_h^{i, -k} & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots 0 & \longrightarrow & \operatorname{im} \partial_h^{i+1, -k-1} & \longrightarrow & \ker \partial_h^{i+1, -k} & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \cdots & & \cdots & & \cdots \end{array}$$

et donc est quasi-isomorphe à un décalé du complexe vertical des modules de la  $-k$ -ième cohomologie horizontale du bicomplexe  $f^*(L'')$ , c'est-à-dire au complexe  $p \mapsto H^{-k}(f^* L^{k+p}, \partial_h)$ . Parce que  $L''$  est une résolution plate de  $i_*(E')$ , cette cohomologie horizontale est isomorphe à un foncteur Tor :

$$(3.4.3) \quad H^{-k}(f^* L^{k+p}, \partial_h) \cong \operatorname{Tor}_k^{\mathcal{O}_{X'}}(\mathcal{O}_{X'}, i_*(E^{k+p})) \cong \operatorname{Tor}_k^{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_{X'}, \mathcal{O}_Y) \otimes_{\mathcal{O}_Y} E^{k+p}$$

où le dernier isomorphisme résulte de la platitude de  $E^{k+p}$  sur  $\mathcal{O}_Y$ . D'après le lemme 3.2, on a alors des quasi-isomorphismes :

$$(3.4.4) \quad h_k(L'') \simeq \operatorname{Tor}_k^{\mathcal{O}_{X'}}(\mathcal{O}_{X'}, \mathcal{O}_Y) \otimes_{\mathcal{O}_Y} E^{k+} \cong A^k \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} E[k] \cong A^k \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}} f'^* E[k].$$

Il en ressort que le foncteur qui envoie  $(E', \lambda, L'')$  dans  $\mathbf{K}(\mathbf{Y} \text{ sur } \mathbf{Z})$  sur  $h_k(L'')$  prend ses valeurs parmi les complexes parfaits sur  $X'$  acycliques sur  $X' - W'$ , et qu'il préserve les quasi-isomorphismes des complexes de modules plats  $E'$ . La suite exacte de foncteurs  $h_k(L'') \rightarrow T_k(L'') \rightarrow T_{k-1}(L'')$  donne un triangle exact dans la catégorie dérivée. On se rappelle que si deux sommets d'un tel triangle exact sont des complexes parfaits, le troisième sommet l'est aussi ([SGA6, I 4.10] ou [TT, 2.2.13]). Grâce à cela et au lemme des cinq, ce triangle exact et la récurrence évidente sur  $k$ , qui commence par  $T_{-1} = 0$ , démontrent que le foncteur qui envoie  $(E', \lambda, L'')$  sur  $T_k(L'')$  prend ses valeurs dans la catégorie des complexes parfaits  $\mathbf{K}(X' \text{ sur } W')$  et préserve les quasi-isomorphismes. En outre  $T_k$  envoie les cofibrations dans  $\mathbf{K}(\mathbf{Y} \text{ sur } \mathbf{Z})$  sur des cofibrations dans  $\mathbf{K}(X' \text{ sur } W')$ . Car le monomorphisme scindé des modules gradués sous-jacent à une cofibration dans  $\mathbf{K}(\mathbf{Y} \text{ sur } \mathbf{Z})$  va évidemment sur un monomorphisme des modules gradués dans la formule (3.4.1) pour  $T_k$ , sauf peut-être dans les degrés occupés par un  $\operatorname{im} \partial_h^{i, -k-1}$ . Or ces  $\operatorname{im} \partial_h^{i, -k-1}$  sont des sous-modules des  $f^* L^{i, -k}$  et donc le morphisme est aussi un monomorphisme là. Pour compléter la vérification que  $T_k$  est un foncteur exact  $\mathbf{K}(\mathbf{Y} \text{ sur } \mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{K}(X' \text{ sur } W')$ , il ne reste qu'à démontrer que  $T_k$  préserve les pushouts le long des cofibrations. En exprimant le pushout comme un quotient, on voit qu'il suffit que  $T_k$  envoie les suites exactes dans  $\mathbf{K}(\mathbf{Y} \text{ sur } \mathbf{Z})$ , scindées au niveau des modules gradués, sur des suites exactes

des complexes. Or en vertu de (3.4.4) pour ce qui n'est pas banal, on a des suites exactes de foncteurs de  $(E^*, \lambda, L^*)$ :

(3.4.5) 
$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \ker \partial_h^{*, -k} \rightarrow f^* L^{*, -k} \rightarrow \operatorname{im} \partial_h^{*, -k} \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \operatorname{im} \partial_h^{*, -k-1} \rightarrow \ker \partial_h^{*, -k} \rightarrow A^k \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y}, f'^* E^*[k] \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Parce que les foncteurs de valeurs  $f^* L^{*, -k}$  et  $A^k \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y}, f'^* E^*[k]$  sont exacts pour les suites exactes scindées au niveau de modules, le lemme du serpent appliqué à (3.4.5) permet de voir que l'exactitude de  $\operatorname{im} \partial_h^{*, -k}$  entraîne celle de  $\ker \partial_h^{*, -k}$ , et que celle de  $\ker \partial_h^{*, -k}$  entraîne celle de  $\operatorname{im} \partial_h^{*, -k-1}$ . Alors une récurrence qui commence par  $\operatorname{im} \partial_h^{*, 0}=0$  donne que tous les  $\ker \partial_h^{*, -k}$  et les  $\operatorname{im} \partial_h^{*, -k-1}$  sont des foncteurs exacts. Alors (3.4.1) montre que le foncteur  $T_k$  envoie les suites exactes dans  $\mathbf{K}(\mathbf{Y} \text{ sur } \mathbf{Z})$  sur des suites exactes des complexes, ce qui termine la vérification que les foncteurs  $T_k \colon \mathbf{K}(\mathbf{Y} \text{ sur } \mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathbf{X}' \text{ sur } \mathbf{W}')$  sont exacts entre catégories waldhausiennes.

Par ailleurs le quasi-isomorphisme (3.4.4) montre que  $h_k(L^*) \simeq 0$  lorsque  $k > \operatorname{rang} \mathcal{F}$ , et donc que  $T_{k+1}(L^*) \rightarrow T_k(L^*)$  est un quasi-isomorphisme pour un tel  $k$ . D'après la suite spectrale canonique pour le complexe total  $f^* L^*$  filtré par les tronçons  $T_k(L^*)$ , laquelle converge fortement grâce aux bornes uniformes du bicomplexe  $L^*$  (que  $L^{i,j}=0$  si  $i > N$  ou si  $j > 0$ , le tout selon (3.3.1)), on en conclut que le morphisme canonique de troncation  $f^*(L^*) \rightarrow T_d(L^*)$  est un quasi-isomorphisme pour  $d = \operatorname{rang} \mathcal{F}$ .

Donc, le morphisme de spectres  $f^* \circ i_* \colon K(Y \text{ sur } Z) \rightarrow K(X' \text{ sur } W')$ , représenté par le foncteur exact  $\mathbf{K}(\mathbf{Y} \text{ sur } \mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{K}(\mathbf{X}' \text{ sur } \mathbf{W}')$  qui envoie  $(E^*, \lambda, L^*)$  sur le complexe total de  $f^* L^*$ , est aussi représenté par le foncteur exact  $T_d(L^*)$ . D'après le théorème d'additivité ([W, 1.3.2 (4)] où [TT, 1.7.3 et 1.7.4]), les suites exactes  $h_k \rightarrow T_k \rightarrow T_{k-1}$  entraînent que pour les morphismes de spectres correspondants on a  $T_k = T_{k-1} + h_k$  à homotopie près. Avec l'identité  $T_{-1} = 0$ , cela

donne que  $f^* \circ i_* \simeq T_d \simeq \sum_{k=0}^d h_k$ . Compte tenu du quasi-isomorphisme (3.4.4), et du fait que le décalage  $[k]$  induit  $(-1)^k$  sur les spectres de  $K$ -théorie [TT, 1.5.7], on en déduit la formule de 3.1, que

$$\begin{aligned} f^* \circ i_* ( ) \simeq T_d ( ) \simeq \sum h_k ( ) \simeq \sum [A^k \mathcal{F}] \otimes_{\mathcal{O}_Y}, f'^* ( ) [k] \simeq \sum (-1)^k [A^k \mathcal{F}] \otimes_{\mathcal{O}_Y}, f'^* ( ) \\ = i'_* ([\lambda_{-1} \mathcal{F}] \cup f'^* ( ) ). \end{aligned}$$

CQFD.

**Porisme 3.5** *Gardons les hypothèses et les notations du théorème 3.1 et supposons en outre que  $\operatorname{rang} \mathcal{F} = 1$ . Alors dans la catégorie dérivée des complexes parfaits sur  $X'$  on a un triangle exact naturel de foncteurs en  $E^*$  un complexe parfait sur  $Y$ :*

(3.5.1) 
$$\begin{array}{ccc} Ri'_*(\mathcal{F} \otimes Lf'^* E^*)[1] & \longrightarrow & Lf^* Ri_* E^* \\ & \nwarrow \quad \nearrow & \\ & Ri'_* Lf'^* E^* & \end{array}$$

En particulier, en prenant  $i = f$ , d'où  $Y = X' = Y'$ ,  $i' = f' = 1_Y$  et  $\mathcal{F} = \mathcal{N}$ , pour  $i$  une immersion fermée régulière de pure codimension un il existe un triangle exact naturel en  $F''$  un complexe parfait sur  $Y$ :

$$(3.5.2) \quad \begin{array}{ccc} (\mathcal{N} \otimes F'')[1] & \longrightarrow & Li^* Ri_* F'' \\ & \nwarrow \quad \nearrow & \\ & F'' & \end{array}$$

*Démonstration.* Ce triangle exact résulte de la suite exacte de complexes de  $\mathcal{O}_{X'}$ -modules  $h_1(L'') \rightarrow T_1(L'') \rightarrow T_0(L'')$  dans 3.4. Car on choisit un représentant  $(E', \lambda, L'')$  dans  $\mathbf{K}(Y \text{ sur } Y)$  de la classe de  $E'$  dans la catégorie dérivée. Alors d'après (3.4.4)  $h_1(L'')$  est quasi-isomorphe à  $\mathcal{F} \otimes f'^* E'[1]$  considéré comme complexe de  $\mathcal{O}_{X'}$ -modules, et donc il représente  $Ri'_*(\mathcal{F} \otimes Lf'^* E')[1]$ . Quant à  $T_0(L'') = h_0(L'')$ , il est de même quasi-isomorphe à  $f'^* E'$  considéré comme complexe de  $\mathcal{O}_{X'}$ -modules et donc il représente  $Ri'_* Lf'^* E'$ . Enfin, puisque  $d = \text{rang } \mathcal{F} = 1$ ,  $T_1(L'')$  est  $T_d(L'')$  qui représente  $Lf^* Ri_* E'$ . CQFD.

On note que cette démonstration ne dépend que de l'analyse homologique de 3.2 et de 3.4, et donc qu'elle est indépendante du paragraphe 2 où le porisme 3.5 est cité. Donc il n'y a pas de cercle vicieux ici.

*Remarque 3.6* On pourrait démontrer l'égalité (3.1.3) pour un carré cartésien (3.1.1) des schémas quasi-compacts et quasi-séparés où  $i$  et  $i'$  sont des morphismes projectifs d'intersection complète [SGA6, VIII 1.1] en remplaçant les faisceaux conormaux  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{N}'$  par les complexes cotangents relatifs de  $i$  et de  $i'$  [SGA6, VIII 2] et  $\mathcal{F}$  par le cône du morphisme induit entre ces complexes parfaits. Car, cela se ramène à conjuguer le Théorème 3.1 pour des immersions régulières de  $Y$  et de  $Y'$  dans des fibrés projectifs lisses  $\mathbb{P}\mathcal{E}_X$  et  $\mathbb{P}\mathcal{E} \times_X X'$  avec le théorème de changement de base [TT, 3.18] pour le carré Tor-indépendant formé par  $\mathbb{P}\mathcal{E} \rightarrow X$  et  $X' \rightarrow X$ . Voir [FL, VI § 1 et § 2]. C'est un autre avatar de la méthode classique de réduire les questions du type Riemann-Roch au cas des immersions régulières.

## 4 Une correction à l'article de Thomason et de Trobaugh

4.1 Le contrôleur du présent article, qui était d'un soin malheureusement exceptionnel, m'a signalé une faute dans un article antérieur cité ici à plusieurs reprises. La formulation des hypothèses du théorème [TT, 1.9.8] n'est pas exacte. Ce théorème annonce que, si  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont des catégories waldhausiennes de complexes (plus précisément, au sens de [TT], des catégories biwaldhausiennes, complicales et stables par pullbacks homotopiques et par pushouts homotopiques dans les catégories ambiantes de tous les complexes), et si  $F: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$  est un foncteur exact qui induit une équivalence entre les catégories d'homotopie produites en inversant les équivalences faibles, alors  $K(F)$  est une équivalence d'homotopie entre les spectres  $K(\mathbf{A})$  et  $K(\mathbf{B})$ . Il faut y ajouter explicitement l'hypothèse additionnelle pour les deux catégories waldhausiennes  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  que le rétracte à équivalence faible près d'un objet faiblement équivalent à zéro est lui-même

faiblement équivalent à zéro. Plus précisément, on demande que **A** et **B** satisfassent à :

*Hypothèse 4.1.1* Si  $f: A \rightarrow A'$  et  $g: A' \rightarrow A''$  sont tels que  $gf: A \rightarrow A''$  est une équivalence faible, et si le morphisme partant de l'objet initial,  $0 \rightarrow A'$ , est une équivalence faible, alors  $0 \rightarrow A$  est aussi une équivalence faible.

Cette hypothèse additionnelle est évidemment remplie par toutes les catégories waldhausiennes «communes», en tout cas par celles qui sont considérées dans les pars. 1–3 du présent article. Car elle est remplie lorsque les équivalences faibles sont définies comme les quasi-isomorphismes de complexes, ou même comme les morphismes  $f$  de la catégorie waldhausienne tels que tous les  $F_\alpha f$  soient des quasi-isomorphismes, où  $\{F_\alpha\}$  est un ensemble de foncteurs vers des catégories de complexes, chaque foncteur satisfaisant à  $F_\alpha 0 = 0$ .

Mais, comme remarque le contrôleur, si l'on prend la catégorie des complexes bornés d'espaces vectoriels de rang fini sur un corps  $k$ , en édictant que les équivalences faibles sont tous les morphismes entre complexes dont les caractéristiques d'Euler se sont égales (un cas de [TT, 1.10.1]), on trouve une catégorie waldhausienne qui ne satisfait pas à l'hypothèse additionnelle 4.1.1. Car pour tout complexe  $A^*$ , on a que  $\chi(A^*) = -\chi(A^*[1])$  où  $A^*[1]$  est le complexe décalé. Donc  $\chi(A^* \oplus A^*[1]) = 0$ . Alors  $A^* \oplus A^*[1]$  est faiblement équivalent à 0, tandis que son rétracte  $A^*$  ne l'est pas si  $\chi(A^*) \neq 0$ , si  $A^* = k$  par exemple. Cette catégorie waldhausienne est un contre-exemple à la formulation fautive de [TT, 1.9.8]. Car la catégorie d'homotopie est équivalent à 0, tout objet dans cette catégorie additive étant un rétracte de 0, tandis que le groupe  $K_0$  de la catégorie waldhausienne est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ , pas à  $0 = K_0(0)$ .

4.2 La lacune dans la démonstration de [TT, 1.9.8], qui est trivialement rapiécée par l'hypothèse additionnelle, c'est qu'elle se sert à plusieurs reprises de l'affirmation dans [TT, 1.9.6] (sous l'hypothèse qu'une catégorie biwaldhausienne compliciale soit stable par pullbacks homotopiques et par pushouts homotopiques) que si un morphisme de la catégorie waldhausienne va sur un isomorphisme dans la catégorie d'homotopie, alors ce morphisme est une équivalence faible. Mais cette affirmation n'est exacte que sous l'hypothèse additionnelle 4.1.1. Car pour justifier cette affirmation, on cite [V, I § 2] ou [H, I § 3–§ 4], dont les conditions de saturation sur la sous-catégorie («système multiplicatif») des équivalences faibles sont plus fortes que celles faites pour les catégories biwaldhausiennes compliciales en général [TT, 1.2.11, 1.2.5, 1.2.6], sauf en présence de l'hypothèse 4.1.1. En revanche, cette hypothèse entraîne immédiatement que la sous-catégorie triangulée des objets faiblement équivalents à 0 dans la catégorie de proto-homotopie (la «chain homotopy category», celle noté  $K(A)$  ou  $\mathcal{K}(\mathcal{A}) = A/\simeq$  dans [V, H et TT, 1.9.6]) est une sous-catégorie épaisse au sens de [V] I § 2 no. 1-1. Ainsi, sous cette hypothèse le système multiplicatif des équivalences faibles dans la catégorie de proto-homotopie est saturé au sens de [V, I § 2], et cette citation démontre l'affirmation dans ce cas.

En somme, on doit aussi ajouter l'hypothèse 4.1.1 aux énoncés de [TT, 1.9.6] dont les conclusions soient que  $\mathbf{w}$  est un système multiplicatif saturé, que la sous-catégorie triangulée  $\mathbf{A}^{\mathbf{w}}/\simeq$  des objets faiblement équivalents à zéro est épaisse, et que les équivalences faibles  $\mathbf{wA}$  sont précisément les morphismes de **A** qui aillent sur des isomorphismes dans la catégorie d'homotopie  $Ho(\mathbf{A}) = \mathbf{w}^{-1}\mathbf{A}$ . Les autres énoncés de [TT, 1.9.6] sont valides sans changements, et

en particulier celui que le passage de  $\mathbf{A}/\simeq$  vers  $\mathbf{w}^{-1}\mathbf{A}$  admet un calcul de fractions. A part [TT, 1.9.8], traité ci-dessus, aucun d'autre énoncé de [TT] n'a besoin de modification. D'ailleurs toutes les catégories waldhausiennes dans [TT, §2–§11] satisfont évidemment à l'hypothèse 4.1.1.

## Références

- [FL] Fulton, W., Lang, S.: Riemann-Roch Algebra. (Grundlehren Math. Wiss., Bd. 277) Berlin Heidelberg New York: Springer 1985
- [H] Hartshorne, R.: Residues and Duality. (Lect. Notes Math. Vol. 20) Berlin Heidelberg New York: Springer 1966
- [Q] Quillen, D.: Higher algebraic K-theory I. Dans: Bass, H. (ed.) Higher K-Theories. (Lect. Notes Math., Vol. 341, pp. 85–147. Springer 1973
- [T] Thomason, R.W.: Les K-groupes d'un fibré projectif. Dans: Jardine, J. et al. (eds.) Les actes de «Algebraic topology and algebraic K-theory». NATO ARW à Lac Louise, Canada 1991. London New York: Kluwer (à paraître)
- [TT] Thomason, R.W., Trobaugh, T.: Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories. Dans: Cartier, P. et al. (eds.) The Grothendieck Festschrift III. (Prog. Math. Vol. 88, pp. 247–435) Boston Basel Stuttgart: Birkhäuser 1990
- [W] Waldhausen, F.: Algebraic K-theory of spaces. Dans: Ranicki, A. et al. (eds.) Algebraic and Geometric Topology (Lect. Notes Math., vol. 1126, pp. 318–419) Berlin Heidelberg New York: Springer 1985
- [V] Verdier, J.-L.: Catégories dérivées, état 0. Dans: Deligne, P. et al. (eds.) Cohomologie Etale (Lect. Notes Math., vol. 569, pp. 262–312) Berlin Heidelberg New York: Springer 1977
- [EGA] Grothendieck, A., Dieudonné, J.: Eléments de Géométrie Algébrique. (Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci., vols. 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32) Paris: Presse Univ. France 1961–1967; (Grundlehren Math. Wiss., Bd. 166) Berlin Heidelberg New York: Springer 1971
- [SGA6] Berthelot, P., Grothendieck, A., Illusie, L.: Théorie des Intersections et Théorème de Riemann-Roch. (Lect. Notes Math. vol. 225) Berlin Heidelberg New York: 1971