QUELQUES REMARQUES SUR LA TRANSFORMATION DE FOURIER DANS L'ANNEAU DE CHOW D'UNE VARIÉTÉ ABÉLIENNE

A. BEAUVILLE

INTRODUCTION.

Les objets de nature cohomologique associés à une variété abélienne (K-théorie, anneau de Chow, jacobiennes intermédiaires...) sont munis d'une transformation de Fourier qui établit un isomorphisme entre l'objet associé à la variété abélienne et celui de la variété abélienne duale. Au niveau de la cohomologie, cette transformation a été utilisée par Lieberman (cf. [K], appendice au §2) ; dans le cadre le plus général (celui des catégories dérivées de $\mathcal{O}_A$-Modules), elle a été introduite par Mukai [M].

Dans ce travail on se propose d'étudier la transformation de Fourier dans l'anneau de Chow d'une variété abélienne. A torsion près, cette transformation possède des propriétés mirifiques, en particulier celle d'échanger les produits d'intersection et de convolution. Elle est facile à calculer sur les cycles "usuels" (diviseurs, 0-cycles). Après avoir dressé une liste des propriétés de ce type, on en donne deux applications. La première permet d'obtenir des formules explicites pour les intersections de diviseurs qui sont, à ma connaissance, nouvelles ; on déduit de ces formules quelques informations sur la structure de l'anneau de Chow. La seconde permet de retrouver facilement, et de manière uniforme, les résultats de Bloch [B].

Les propriétés de la transformation de Fourier que nous utilisons ici sont de nature élémentaire ; je ne crois pas qu'on puisse espérer en tirer des résultats profonds sur les cycles algébriques d'une variété abélienne. J'espère néanmoins convaincre le lecteur que la transformation de Fourier est un outil technique fort utile, qui éclaire en partie la structure de l'anneau de Chow.

§1. DÉFINITIONS ET COMPATIBILITÉS.

Dans tout cet exposé, on fixe une variété abélienne A de dimension g sur $\mathbb{C}$. On note $\hat{A}$ la variété abélienne duale, et $\mathcal{L}$ le fibré de Poincaré normalisé sur $A\times\hat{A}$. On désigne par p et q les projections de $A\times\hat{A}$ sur A et $\hat{A}$ respectivement.

La transformation de Fourier introduite dans [M] est un foncteur

$$\mathcal{F}_d : D(A) \longrightarrow D(\hat{A}) \ ;$$

il est défini sur les objets de $D(A)$ par la formule

$$\mathcal{F}_d(K) = Rq_*(Lp^*K \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathcal{L}) \ .$$

Par restriction, $\mathcal{F}_d$ définit un foncteur de $D_c^b(A)$ dans $D_c^b(\hat{A})$ (il s'agit des catégories dérivées de complexes bornés à cohomologie cohérente).

Nous allons définir des transformations analogues sur la cohomologie de A, sur la K-théorie $K(A)$, et sur l'anneau de Chow $CH_{\mathbb{Q}}(A) = CH(A)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ (rappelons que $CH(A)$ désigne l'anneau des classes de cycles algébriques sur A modulo équivalence rationnelle). Nous noterons un peu abusivement ℓ la classe de $\mathcal{L}$ dans chacun des groupes $K(A\times\hat{A})$, $CH^1(A\times\hat{A})$ et $H^2(A\times\hat{A},\mathbb{Z})$.

On définit des homomorphismes de groupes

$$\mathcal{F}_k : K(A) \longrightarrow K(\hat{A}) \qquad \mathcal{F} : CH_{\mathbb{Q}}(A) \longrightarrow CH_{\mathbb{Q}}(\hat{A}) \qquad \mathcal{F}_h : H^\cdot(A,\mathbb{Q}) \longrightarrow H^\cdot(\hat{A},\mathbb{Q})$$

en posant

$$\mathcal{F}_k(x) = q_*(p^*x.\ell) \qquad \text{pour } x\in K(A) \ ;$$

$$\mathcal{F}(y) = q_*(p^*y.e^{\ell}) \qquad \text{pour } y\in CH_{\mathbb{Q}}(A) \ ;$$

$$\mathcal{F}_h(z) = q_*(p^*z.e^{\ell}) \qquad \text{pour } z\in H^\cdot(A,\mathbb{Q}) \ .$$

On étendra parfois $\mathcal{F}_h$ à $H^\cdot(A,\mathbb{C})$ par linéarité.

Les espaces introduits sont reliés par des flèches

$$\mathrm{Ob}\ D_c^b(A) \xrightarrow{k} K(A) \xrightarrow{ch} CH_{\mathbb{Q}}(A) \longrightarrow H^\cdot(A,\mathbb{Q}) \ ;$$

la première application associe à un complexe la classe dans $K(A)$ de la somme alternée de ses faisceaux de cohomologie (cf. [SGA 6], exp. IV). La seconde est le caractère de Chern, et la troisième fait correspondre à un cycle sa classe de cohomologie. Le diagramme suivant est alors commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Ob}\, D^b_c(A) & \xrightarrow{k} & K(A) & \xrightarrow{ch} & CH_{\mathbb{Q}}(A) & \longrightarrow & H^{\cdot}(A,\mathbb{Q}) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{F}_d} & & \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{F}_k} & & \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{F}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{F}_h} \\ \mathrm{Ob}\, D^b_c(\hat{A}) & \xrightarrow{k} & K(\hat{A}) & \xrightarrow{ch} & CH_{\mathbb{Q}}(\hat{A}) & \longrightarrow & H^{\cdot}(\hat{A},\mathbb{Q}) \end{array}$$

(la commutativité du carré central provient du théorème de Riemann-Roch-Grothendieck, qui entraîne que le caractère de Chern commute aux images directes par des morphismes de variétés abéliennes).

Nous allons maintenant donner une autre description de l'homomorphisme $\mathfrak{F}_h$. Rappelons d'abord, d'après [Md], §1 et 9, la structure des algèbres de cohomologie de A et $\hat{A}$. Via la décomposition de Künneth, la classe ℓ vit dans $H^1(A,\mathbb{Z})\otimes H^1(\hat{A},\mathbb{Z})$, qui est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Hom}(H^1(A,\mathbb{Z})^*, H^1(\hat{A},\mathbb{Z}))$; l'homomorphisme correspondant à ℓ dans cette identification est bijectif. Posons $H = H^1(A,\mathbb{Z})$; nous identifierons désormais $H^1(\hat{A},\mathbb{Z})$ à H^* par cet isomorphisme. On a alors des isomorphismes canoniques

$$H^{\cdot}(A,\mathbb{Z}) = \Lambda^{\cdot}H \quad \text{et} \quad H^{\cdot}(\hat{A},\mathbb{Z}) = \Lambda^{\cdot}H^* .$$

On dispose de plus d'un isomorphisme trace de $\Lambda^{2g}H = H^{2g}(A,\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{Z}$, autrement dit d'une orientation de H. On en déduit alors, pour $0 \leqslant p \leqslant 2g$, un <u>isomorphisme canonique</u>

$$\varphi^p : \Lambda^p H \longrightarrow \Lambda^{2g-p} H^* ,$$

défini comme suit. A l'accouplement

$$\Lambda^p H \otimes \Lambda^{2g-p} H \longrightarrow \Lambda^{2g} H \xrightarrow{Tr} \mathbb{Z}$$

est associé un isomorphisme $u^p : \Lambda^p H \longrightarrow (\Lambda^{2g-p}H)^*$ (tel que $\langle u^p(x),y\rangle = Tr(x\wedge y)$). D'autre part le produit extérieur des formes linéaires définit un isomorphisme gradué $v : \Lambda H^* \longrightarrow (\Lambda H)^*$ (tel que $\langle v(h_1^*\wedge\ldots\wedge h_q^*), h_1\wedge\ldots\wedge h_q\rangle = \det(\langle h_i^*,h_j\rangle)$. On pose alors $\varphi^p = (v^{2g-p})^{-1} \circ u^p$.

PROPOSITION 1. L'homomorphisme $\mathfrak{F}_h$ applique $H^p(A,\mathbb{Z})$ sur $H^{2g-p}(A,\mathbb{Z})$; avec les identifications précédentes, il coïncide sur $H^p(A,\mathbb{Z})$ avec $(-1)^{n(p)}\varphi^p$, où φ^p est l'isomorphisme canonique de $\Lambda^p H$ sur $\Lambda^{2g-p}H^*$ et $n(p) = g+\frac{1}{2}p(p+1)$. De plus il induit un isomorphisme des structures de Hodge ; autrement dit on a $\mathfrak{F}(H^{r,s}(A)) = H^{g-s,g-r}(\hat{A})$.

Choisissons une base directe $(e_1,\ldots,e_{2g})$ de H ; soit $(e_1^*,\ldots,e_{2g}^*)$ la base duale. Pour tout sous-ensemble $I = \{i_1,\ldots,i_p\}$ de $[1,2g]$, avec $i_1<\ldots<i_p$, notons e_I l'élément $e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_p}$ de $\Lambda^p H$ et e_I^* l'élément analogue de $\Lambda^p H^*$.

La $\mathbb{Z}$-algèbre $H^\cdot(A\times\hat{A},\mathbb{Z})$ s'identifie au produit tensoriel gradué gauche $\Lambda^\cdot H\otimes\Lambda^\cdot H^*$; les homomorphismes p^* et q_* sont alors définis par

$$p^*h = h\otimes 1 \quad \text{et} \quad q_*(h\otimes h^*) = \mathrm{Tr}(h).h^*$$

(on convient de poser $\mathrm{Tr}(h)=0$ pour $h\in\Lambda^q H$ et $q<2g$). La classe ℓ s'écrit par construction $\ell = \sum_i e_i\otimes e_i^*$, de sorte que

$$e^\ell = \prod_i \exp(e_i\otimes e_i^*) = \prod_i (1+e_i\otimes e_i^*) = \sum_{I\subset[1,2g]} (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} e_I\otimes e_I^* ,$$

avec $p = \mathrm{Card}(I)$.

Posons $G = [1,2g]$. Soient I un sous-ensemble de G , I^c son complémentaire, p le cardinal de I , et $n(p) = g+\frac{1}{2}p(p+1)$; on a $n(p) \equiv \frac{1}{2}(2g-p)(2g-p-1)$ (mod.2). Comme $\mathrm{Tr}(e_I\wedge e_J) = 0$ pour $J\neq I^c$, on a

$$\mathfrak{F}_h(e_I) = (-1)^{n(p)} q_*((e_I\otimes 1)(e_{I^c}\otimes e_{I^c}^*)) = (-1)^{n(p)}\varepsilon(I)e_{I^c}^* ,$$

où $\varepsilon(I)\in\{-1,1\}$ est défini par $e_I\wedge e_{I^c} = \varepsilon(I)e_G$.

D'autre part on a, avec les notations introduites avant l'énoncé,

$$\langle u(e_I),e_J\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } J\neq I^c \\ \varepsilon(I) & \text{si } J=I^c , \end{cases}$$
$$= \varepsilon(I)\ \langle v(e_{I^c}^*),e_J\rangle ,$$

d'où l'égalité $\mathfrak{F}_h = (-1)^{n(p)}\varphi$.

Cela signifie qu'on a, pour $x\in H^p(A,\mathbb{C})$,

$$\mathfrak{F}_h(x) = q_*(p^*x.\frac{\ell^{2g-p}}{(2g-p)!}) ;$$

si $x \in H^{r,s}(A)$ (avec $r+s=p$), on a $p^*x.\ell^{2g-p} \in H^{2g-s,2g-r}(A\times\hat{A})$ et $\mathfrak{F}x \in H^{g-s,g-r}(\hat{A})$. Ceci achève la démonstration de la proposition.

Nous allons examiner la transformation de Fourier sur les jacobiennes intermédiaires (la fin de ce paragraphe ne sera pas utilisée dans la suite). Rappelons [G] que la jacobienne intermédiaire $J^p(A)$, pour $1 \leqslant p \leqslant g$, est un tore complexe défini par

$$J^p(A) = H_-^{2p-1}(A)/H^{2p-1}(A,\mathbb{Z}) \ , \text{ avec } \ H_-^{2p-1}(A) = H^{p-1,p} \oplus \ldots \oplus H^{o,2p-1} \ .$$

Puisque l'isomorphisme $\mathfrak{F}_h$ préserve les structures de Hodge, il induit des isomorphismes

$$\mathfrak{F}_j : J^p(A) \longrightarrow J^{g-p+1}(\hat{A}) \ ;$$

pour $p=1$ (resp. $p=g$), on retrouve au signe près l'isomorphisme canonique $\mathrm{Pic}^o(A) \longrightarrow \hat{A}$ (resp. $A \longrightarrow \mathrm{Pic}^o(A)$).

D'autre part, notons $\Sigma^p(A)$ le sous-groupe de $CH^p(A)$ formé des cycles homologiquement équivalents à zéro. On sait alors définir (loc. cit.) une application d'Abel-Jacobi $\alpha : \Sigma^p(A) \longrightarrow J^p(A)$. Posons

$$\Sigma_{\mathbb{Q}}(A) = \bigoplus_p (\Sigma^p(A)\otimes\mathbb{Q}) \qquad \text{et} \qquad J_{\mathbb{Q}}(A) = \bigoplus_p (J^p(A)\otimes\mathbb{Q}).$$

PROPOSITION 2. <u>Le diagramme</u>

$$\begin{tikzcd}
\Sigma_{\mathbb{Q}}(A) \arrow[r, "\mathfrak{F}"] \arrow[d] & \Sigma_{\mathbb{Q}}(\hat{A}) \arrow[d] \\
J_{\mathbb{Q}}(A) \arrow[r, "\mathfrak{F}_j"] & J_{\mathbb{Q}}(\hat{A})
\end{tikzcd}$$

<u>est commutatif</u>.

En effet d'après [G], (2.15) et (2.16), on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\Sigma_{\mathbb{Q}}(A) \arrow[r, "p^*"] \arrow[d, "\alpha"] & \Sigma_{\mathbb{Q}}(A\times\hat{A}) \arrow[r, ".e^{\ell}"] \arrow[d, "\alpha"] & \Sigma_{\mathbb{Q}}(A\times\hat{A}) \arrow[r, "q_*"] \arrow[d, "\alpha"] & \Sigma_{\mathbb{Q}}(\hat{A}) \arrow[d, "\alpha"] \\
J_{\mathbb{Q}}(A) \arrow[r, "p^*"] & J_{\mathbb{Q}}(A\times\hat{A}) \arrow[r, ".e^{\ell}"] & J_{\mathbb{Q}}(A\times\hat{A}) \arrow[r, "q_*"] & J_{\mathbb{Q}}(A\times\hat{A})
\end{tikzcd}$$

où les flèches de la deuxième ligne sont obtenues à partir des opérations p^*, cup-produit avec e^{ℓ}, et q_* en cohomologie. Le composé de ces flèches est donc $\mathfrak{F}_j$, d'où la proposition.

On prendra garde qu'on n'a pas $\mathfrak{F}(\Sigma^p_{\mathbb{Q}}(A)) \subset \Sigma^{g-p+1}_{\mathbb{Q}}(\hat{A})$; la proposition signifie seulement que si $x \in \Sigma^p(A)$ et $\mathfrak{F}x = \Sigma\, y_q$ avec $y_q \in CH^q_{\mathbb{Q}}(\hat{A})$, alors $\alpha(y_q) = 0$ pour $q \neq g-p+1$.

§2. PREMIÈRES PROPRIÉTÉS.

Le reste de ce travail est consacré à l'anneau de Chow $CH(A)$: c'est l'anneau des cycles algébriques sur A modulo équivalence rationnelle, gradué par la codimension. On a

$$CH^o(A) = \mathbb{Z} \quad , \quad CH^1(A) = \mathrm{Pic}(A) \ ;$$

pour $p \geqslant 2$ les groupes $CH^p(A)$ sont très gros et ne peuvent être paramétrés par des variétés algébriques (cf. §4).

Le groupe de Chow d'une variété abélienne est muni d'une seconde structure d'anneau, définie par le produit de convolution $*$ (ou produit de Pontriagin). Si r,s désignent les deux projections de $A \times A$ sur A et $m : A \times A \longrightarrow A$ la loi d'addition, on a

$$x*y = m_*(r^*x.s^*y) \qquad \text{pour } x,y \text{ dans } CH(A) \ .$$

L'élément neutre pour cette loi est le 0-cycle $[o] \in CH^g(A)$.

Nous noterons σ l'involution $a \longmapsto -a$ de A , et $\hat{\sigma}$ l'involution analogue de $\hat{A}$. On identifiera A à sa variété abélienne biduale $\hat{\hat{A}}$; la transformation de Fourier de $\hat{A}$ définit donc une application $\hat{\mathfrak{F}} : CH_{\mathbb{Q}}(\hat{A}) \longrightarrow CH_{\mathbb{Q}}(A)$. On observera que $\mathfrak{F}$ (resp. $\hat{\mathfrak{F}}$) est l'homomorphisme associé à la correspondance e^{ℓ} sur $A \times \hat{A}$ (resp. sur $\hat{A} \times A$).

PROPOSITION 3. <u>La transformation de Fourier possède les propriétés suivantes</u> :

(i) <u>On a</u> $\hat{\mathfrak{F}} \circ \mathfrak{F} = (-1)^g \sigma^*$ <u>et</u> $\mathfrak{F} \circ \hat{\mathfrak{F}} = (-1)^g \hat{\sigma}^*$.

(ii) <u>Pour</u> x,y <u>dans</u> $CH_{\mathbb{Q}}(A)$, <u>on a</u>

$$\mathfrak{F}(x*y) = \mathfrak{F}x.\mathfrak{F}y \quad \underline{\text{et}} \quad \mathfrak{F}(xy) = (-1)^g \mathfrak{F}x*\mathfrak{F}y \ .$$

(iii) <u>Soit</u> $f : A \longrightarrow B$ <u>une isogénie de variétés abéliennes</u> ; <u>notons</u> $\mathfrak{F}_A$ <u>et</u> $\mathfrak{F}_B$ <u>les transformations de Fourier pour</u> A <u>et</u> B <u>respectivement</u>. <u>Soient</u> $x \in CH_{\mathbb{Q}}(A)$, $y \in CH_{\mathbb{Q}}(B)$; <u>on a</u>

$$\mathcal{F}_A(f^*y) = \hat{f}_*(\mathcal{F}_B y) \quad \underline{\text{et}} \quad \mathcal{F}_B(f_*x) = \hat{f}^*(\mathcal{F}_A x) .$$

(iv) <u>Soit</u> $x \in CH^p_{\mathbb{Q}}(A)$; <u>posons</u> $\mathcal{F}x = \sum_q y_q$, <u>avec</u> $y_q \in CH^q_{\mathbb{Q}}(\hat{A})$. <u>On a</u> $\hat{\sigma}^* y_q = (-1)^{p+q-g}\, y_q$.

Pour démontrer la prop. 3, la solution de facilité consiste à utiliser les formules analogues de Mukai, en appliquant le caractère de Chern. Prouvons par exemple (i) : si $K \in \mathrm{Ob}\, D^b(A)$, on a ([M], th. 2.2)

$$\hat{\mathcal{F}}_d \circ \mathcal{F}_d(K) = \sigma^* K[-g] .$$

Avec les notations du §1, posons $x = \mathrm{ch}\circ k(K)$; appliquant $\mathrm{ch}\circ k$, on obtient

$$\hat{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} x = (-1)^g \sigma^* x .$$

Or l'homomorphisme $\mathrm{ch} : K(A) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow CH_{\mathbb{Q}}(A)$ est bijectif : cela résulte de [SGA 6], exp. 14, formules (4.4) et exp. 5, (6.4). Ceci entraîne (i) ; on déduit de même (ii), (iii) et (iv) de [M], (3.7), (3.4) et (3.8).

Il est d'autre part facile (mais fastidieux) de donner des démonstrations directes de ces formules ; nous en verrons deux exemples ci-dessous (prop. 3').

Nous dirons qu'un élément x de $CH_{\mathbb{Q}}(A)$ est symétrique si $\sigma^* x = x$ et antisymétrique si $\sigma^* x = -x$.

COROLLAIRE 1. <u>Soit</u> x <u>un élément symétrique</u> (<u>resp</u>. <u>antisymétrique</u>) <u>de</u> $CH^p_{\mathbb{Q}}(A)$. <u>Alors</u> $\mathcal{F}x$ <u>est symétrique</u> (<u>resp</u>. <u>antisymétrique</u>), <u>et l'on a</u>

$$\mathcal{F}x \in \sum CH^{g-p+r}_{\mathbb{Q}}(\hat{A}) \quad \underline{\text{avec}} \quad r \quad \underline{\text{pair}} \quad (\underline{\text{resp}}.\ \underline{\text{impair}}).$$

La première assertion résulte en effet de (iii), et la seconde de (iv).

COROLLAIRE 2. <u>On a</u> $\mathcal{F}[o] = 1$ <u>et</u> $\mathcal{F}1 = (-1)^g [o]$.

En effet les propriétés (i) et (ii) entraînent que $\mathcal{F}$ est un isomorphisme d'anneaux lorsqu'on munit $CH_{\mathbb{Q}}(A)$ du produit de convolution et $CH_{\mathbb{Q}}(\hat{A})$ du produit usuel ; donc $\mathcal{F}$ applique l'élément neutre $[o]$ du premier anneau sur l'élément neutre 1 du second. La seconde formule en résulte à l'aide de (i).

A cause des problèmes de torsion, nous aurons besoin (uniquement au §5) d'une version plus technique de la prop. 3 :

PROPOSITION 3'. Il existe un entier N et des applications $\mathfrak{F}_N : CH(A) \longrightarrow CH(\hat{A})$ et $\hat{\mathfrak{F}}_N : CH(\hat{A}) \longrightarrow CH(A)$ satisfaisant à :

(i) $\hat{\mathfrak{F}}_N \circ \mathfrak{F}_N = (-1)^g N^2 \hat{\sigma}^*$ et $\mathfrak{F}_N \circ \hat{\mathfrak{F}}_N = (-1)^g N^2 \sigma^*$;

(ii) $N\mathfrak{F}_N(x*y) = \mathfrak{F}_N x . \mathfrak{F}_N y$ pour x,y dans $CH(A)$;

(iii) pour $x \in CH(A)$ et $y \in CH(\hat{A})$, on a

$$\mathfrak{F}_N(x) = N\mathfrak{F}(x) \text{ dans } CH_{\mathbb{Q}}(\hat{A}), \text{ et } \hat{\mathfrak{F}}_N(y) = N\mathfrak{F}(y) \text{ dans } CH_{\mathbb{Q}}(A) .$$

Soit N un entier multiple de $(2g)!$; nous noterons Ne^{ℓ} l'élément $\sum_{p=o}^{2g} \frac{N}{p!} \ell^p$ de $CH(A\times\hat{A})$. Le corollaire 2 ci-dessus entraîne qu'on a $q_*(Ne^{\ell}) = (-1)^g N[o]$ dans $CH_{\mathbb{Q}}(\hat{A})$; remplaçant N par un de ses multiples, on peut donc supposer qu'on a $q_*(Ne^{\ell}) = (-1)^g N[o]$ dans $CH(\hat{A})$, et symétriquement $p_*(Ne^{\ell}) = (-1)^g N[o]$ dans $CH(A)$. Nous fixons désormais ce choix de N .

Définissons $\mathfrak{F}_N$ et $\hat{\mathfrak{F}}_N$ par

$$\mathfrak{F}_N(x) = q_*(p^*x.Ne^{\ell}) \qquad \hat{\mathfrak{F}}_N(y) = p_*(q^*y.Ne^{\ell}) .$$

Il est clair que la propriété (iii) est alors vérifiée. D'autre part, $\mathfrak{F}_N$ (resp. $\hat{\mathfrak{F}}_N$) est l'homomorphisme associé à la correspondance Ne^{ℓ} sur $A\times\hat{A}$ (resp. $\hat{A}\times A$) ; un calcul facile montre alors que $\hat{\mathfrak{F}}_N \circ \mathfrak{F}_N$ est l'homomorphisme associé à la correspondance $z = (p_{12})_*(p_{13}^*(Ne^{\ell}).p_{23}^*(Ne^{\ell}))$ sur $A\times A$ (on note p_{ij} la projection de $A\times A\times\hat{A}$ sur le produit du i-ième et du j-ième facteur). Or on a

$$p_{13}^*\ell + p_{23}^*\ell = (m\times 1)^*\ell ;$$

en effet, d'après le théorème du cube, il suffit de vérifier cette formule après restriction à $\{o\}\times A\times\hat{A}$, $A\times\{o\}\times\hat{A}$ et $A\times A\times\{o\}$, ce qui est immédiat. On a donc

$$z = N(p_{12})_*(m\times 1)^*Ne^{\ell} = Nm^*p_*(Ne^{\ell}) = (-1)^g N^2 m^*[o] ;$$

or $m^{-1}(o)$ est le graphe de σ dans $A\times A$, d'où la première égalité de (i). La seconde s'en déduit en échangeant les rôles de A et $\hat{A}$.

Démontrons enfin (ii). Notons p_i la projection de $A\times A\times\hat{A}$ sur le i-ième facteur $(i=1,2,3)$. On a

$$\begin{aligned} N\mathfrak{F}_N(x*y) &= q_*(p^*m_*(r^*x.s^*y).N^2e^{\ell}) \\ &= q_*((m\times 1)_*(p_1^*x.p_2^*y).N^2e^{\ell}) \\ &= p_{3*}(p_1^*x.p_2^*y.p_{13}^*(Ne^{\ell}).p_{23}^*(Ne^{\ell})) \\ &= q_*(p_{13})_*[p_{13}^*(p^*x.Ne^{\ell}).p_{23}^*(p^*y.Ne^{\ell})] \\ &= q_*[p^*x.Ne^{\ell}.q^*q_*(p^*y.Ne^{\ell})] \\ &= \mathfrak{F}_Nx.\mathfrak{F}_Ny \ . \end{aligned}$$

COROLLAIRE. <u>Soit</u> J <u>l'idéal de</u> $CH(A)$ <u>formé des cycles algébriquement équivalents à zéro</u>. <u>On a</u> $J^{*(g+1)}=0$.

Notons en effet $\hat{J}$ l'idéal analogue de $CH(\hat{A})$; d'après (ii), on a

$$N^g\mathfrak{F}_N(J^{*(g+1)})\subset(\mathfrak{F}_NJ)^{g+1}\subset\hat{J}^{g+1}=0\ .$$

Il résulte alors de (i) que le groupe $J^{*(g+1)}$ est annulé par N^{g+2} . Comme il est divisible ([B], lemme 1.3), il est nécessairement nul.

§3. QUELQUES CALCULS.

Pour $a\in A$, on note T_a la translation $x\longmapsto x+a$ de A , et i_a le plongement de $\hat{A}$ dans $A\times\hat{A}$ défini par $i_a(\alpha)=(a,\alpha)$; on pose $\ell_a=i_a^*\ell\in \mathrm{Pic}(\hat{A})$. On définit de même pour $\alpha\in\hat{A}$ l'élément ℓ_α de $\mathrm{Pic}(A)$. Rappelons que par définition de ℓ , les applications $\alpha\longmapsto\ell_\alpha$ et $a\longmapsto\ell_a$ sont des isomorphismes de $\hat{A}$ sur $\mathrm{Pic}^o(A)$ et de A sur $\mathrm{Pic}^o(\hat{A})$ respectivement.

PROPOSITION 4. <u>Soit</u> $a\in A$. <u>Les formules suivantes sont satisfaites</u> :

(i) $\mathfrak{F}[a]=e^{\ell_a}$;

(ii) $\mathfrak{F}(T_a^*x)=e^{-\ell_a}\mathfrak{F}x$ <u>pour tout</u> $x\in CH_{\mathbb{Q}}(A)$;

(iii) $(-1)^g\hat{\mathfrak{F}}(\ell_a)=[o]-[a]+\frac{1}{2}([o]-[a])^{*2}+\ldots+\frac{1}{g}([o]-[a])^{*g}$.

On a

$$\mathfrak{F}[a] = q_*(p^*a.e^{\ell}) = q_*(i_a)_*\, i_a^*\, e^{\ell} = e^{\ell_a} ,$$

d'où la formule (i). D'après celle-ci et la prop. 3 (ii), on a

$$\mathfrak{F}(T_a^* x) = \mathfrak{F}([-a]*x) = \mathfrak{F}[-a].\mathfrak{F}x = e^{-\ell_a}\, \mathfrak{F}x ,$$

d'où (ii). Enfin on peut écrire dans $CH_{\mathbb{Q}}(\hat{A})$

$$\ell_a = -\log(1-(1-e^{-\ell_a})) = (1-e^{-\ell_a}) + \frac{1}{2}(1-e^{-\ell_a})^2 + \ldots + \frac{1}{g}(1-e^{-\ell_a})^g ;$$

comme $\hat{\mathfrak{F}}(1-e^{-\ell_a})^p = \hat{\mathfrak{F}}\circ\mathfrak{F}([o]-[-a])^{*p} = (-1)^g([o]-[a])^{*p}$, on en déduit la formule (iii).

Nous allons maintenant calculer le transformé de Fourier d'un diviseur ample. Pour simplifier les notations, considérons d'abord le cas où A admet une <u>polarisation principale</u> ; dans ce cas nous identifierons $\hat{A}$ à A à l'aide de cette polarisation. La transformation de Fourier devient alors un isomorphisme de $CH_{\mathbb{Q}}(A)$ sur $CH_{\mathbb{Q}}(A)$ (noté encore $\mathfrak{F}$), et on a $\hat{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}$.

Soit θ l'élément symétrique de $CH^1_{\mathbb{Q}}(A)$ dont la classe de cohomologie définit la polarisation principale.

LEMME 1. <u>On a</u> $\mathfrak{F}(e^{\theta}) = e^{-\theta}$.

Lorsqu'on identifie $\hat{A}$ à A à l'aide de la polarisation θ , on a $\ell_a = T_a^*\theta - \theta$ pour $a \in A$, autrement dit $\ell = m^*\theta - p^*\theta - q^*\theta$ (théorème du carré). Par conséquent

$$\mathfrak{F}(e^{\theta}) = q_*(e^{m^*\theta - q^*\theta}) = e^{-\theta}\, q_* e^{m^*\theta} .$$

Mais pour des raisons de codimension, on a

$$q_*\, e^{m^*\theta} = q_*\, m^* \frac{\theta^g}{g!} = \deg \frac{\theta^g}{g!} = 1 ,$$

d'où le lemme.

LEMME 2. <u>Posons</u> $c = \dfrac{\theta^{g-1}}{(g-1)!}$; <u>on a alors</u> $\theta = \dfrac{c^{*(g-1)}}{(g-1)!}$ <u>dans</u> $CH^1_{\mathbb{Q}}(A)$.

En effet les éléments θ et $\dfrac{c^{*(g-1)}}{(g-1)!}$ de $CH^1_{\mathbb{Q}}(A)$ sont symétriques ; pour prouver qu'ils sont égaux, il suffit de vérifier qu'ils ont même classe dans $H^2(A,\mathbb{Q})$. Considérons la formule $\mathfrak{F}(e^{\theta}) = e^{-\theta}$ en cohomologie ; puisque $\mathfrak{F}_h$ applique $H^p(A,\mathbb{Q})$ sur $H^{2g-p}(A,\mathbb{Q})$ (prop. 1), on en déduit dans $H(A,\mathbb{Q})$

$$\mathfrak{F}_h c = -\theta \quad \text{et} \quad \mathfrak{F}_h \theta = (-1)^{g-1} c \ ,$$

d'où $\theta = -\mathfrak{F}_h \dfrac{\theta^{g-1}}{(g-1)!} = -(-1)^{g(g-2)} \dfrac{(\mathfrak{F}_h\theta)^{*(g-1)}}{(g-1)!} = \dfrac{c^{*(g-1)}}{(g-1)!}$.

PROPOSITION 5. Soit d la classe dans $\mathrm{Pic}(A)$ d'un fibré en droites ample symétrique ; notons $\varphi : A \longrightarrow \hat{A}$ la polarisation correspondante, et $\nu = h^o(d) = \dfrac{d^g}{g!}$. Soient p,q deux entiers positifs tels que $p+q=g$. On a dans $CH_{\mathbb{Q}}(\hat{A})$

$$\mathfrak{F}(\frac{d^p}{p!}) = (-1)^q \, \varphi_* \, (\frac{d^q}{\nu q!}) \ .$$

Traitons d'abord le cas où d est une polarisation principale θ (c'est-à-dire $\nu = 1$). Posons $c = \dfrac{\theta^{g-1}}{(g-1)!}$. Puisque c est symétrique, on a

$$\mathfrak{F}c \in CH^1_{\mathbb{Q}}(A) + CH^3_{\mathbb{Q}}(A) + \ldots \quad \text{(cor. 1 à la prop. 3).}$$

Appliquant $\mathfrak{F}$ à l'égalité du lemme 2, on obtient

$$\mathfrak{F}\theta = \frac{(\mathfrak{F}c)^{g-1}}{(g-1)!} \in CH^{g-1}_{\mathbb{Q}}(A)$$

et par conséquent

$$\mathfrak{F}\theta^p = \pm(\mathfrak{F}\theta)^{*p} \in CH^{g-p}_{\mathbb{Q}}(A) \ .$$

Mais alors l'égalité $\mathfrak{F}e^{\theta} = e^{-\theta}$ (lemme 1) s'écrit en dimension p

$$\mathfrak{F}\,\frac{\theta^p}{p!} = (-1)^q \frac{\theta^q}{q!} \ , \quad \text{avec} \quad q = g-p \ .$$

Dans le cas général, il existe une isogénie $f : A \longrightarrow B$ et une polarisation principale θ sur B telle que $d = f^*\theta$. Identifions $\hat{B}$ à B à l'aide de θ , de sorte qu'on a $\varphi = \hat{f}\circ f$. La fonctorialité de $\mathfrak{F}$ entraîne

$$\mathfrak{F}\,\frac{d^p}{p!} = \mathfrak{F}\, f^*\,\frac{\theta^p}{p!} = \hat{f}_*\,\mathfrak{F}_B\,\frac{\theta^p}{p!} = (-1)^q\,\hat{f}_*\,\frac{\theta^q}{q!} \ ,$$

d'où, compte tenu de la relation $f_*f^* = \nu$,

$$\nu\,\mathfrak{F}\,\frac{d^p}{p!} = (-1)^q\,\hat{f}_*(f_*f^*)\,\frac{\theta^q}{q!} = (-1)^q\,\varphi_*\,\frac{d^q}{q!} \ .$$

COROLLAIRE 1. <u>Pour tout élément symétrique</u> d <u>de</u> $CH^1_{\mathbb{Q}}(A)$, <u>on a</u> $\mathfrak{F}d \in CH^{g-1}_{\mathbb{Q}}(A)$.

En effet un tel élément peut toujours s'écrire comme différence de deux éléments amples symétriques.

La prop. 5 entraîne par ailleurs dans l'anneau de Chow des relations qui ne me semblent pas triviales :

COROLLAIRE 2. <u>Posons</u> $c = \frac{d^{g-1}}{\nu(g-1)!}$; <u>soient</u> p,q <u>deux entiers positifs de somme</u> g . <u>On a alors</u> $\frac{d^p}{p!} = \nu \frac{c^{*q}}{q!}$ <u>dans</u> $CH^p_{\mathbb{Q}}(A)$.

On a en effet $\mathfrak{F}d = (-1)^{g-1} \varphi_* c$, d'où (prop. 3 (ii))

$$\mathfrak{F}d^q = (-1)^{(q-1)g} (\mathfrak{F}d)^{*q} = (-1)^p \varphi_* (c^{*q}) .$$

Par ailleurs la prop. 5 fournit l'égalité

$$\mathfrak{F}d^q = (-1)^p q! \nu^{-1} \varphi_* (\frac{d^p}{p!}) ,$$

d'où le résultat cherché puisque φ_* est bijectif dans $CH_{\mathbb{Q}}(A)$.

On observera que le cor. 2 entraîne en particulier l'égalité $d^g = \nu g! [o]$ dans $CH^g_{\mathbb{Q}}(A)$. D'autre part, on déduit aussitôt du cor. 2 la formule suivante :

COROLLAIRE 3. <u>Soient</u> r,s <u>deux entiers positifs</u>. <u>On a dans</u> $CH_{\mathbb{Q}}(A)$

$$\frac{d^r}{r!} * \frac{d^s}{s!} = \nu \binom{2g-r-s}{g-r} \frac{d^{r+s-g}}{(r+s-g)!} .$$

Indiquons une autre conséquence de la prop. 5. Pour tout $p \geqslant 0$, notons $NS^p_{\mathbb{Q}}(A)$ le sous-espace des cycles algébriques dans $H^{2p}(A,\mathbb{Q})$, de sorte qu'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \Sigma^p_{\mathbb{Q}}(A) \longrightarrow CH^p_{\mathbb{Q}}(A) \longrightarrow NS^p_{\mathbb{Q}}(A) \longrightarrow 0 .$$

Pour $p=1$, cette suite exacte admet une <u>section canonique</u>, qui associe à un élément de $NS^1_{\mathbb{Q}}(A)$ son unique représentant symétrique. L'image de cette section est le sous-espace $Pic^s_{\mathbb{Q}}(A)$ de $Pic_{\mathbb{Q}}(A)$ formé des fibrés symétriques ; la décomposition $Pic_{\mathbb{Q}}(A) = Pic^o_{\mathbb{Q}}(A) \oplus Pic^s_{\mathbb{Q}}(A)$ n'est autre que la décomposition de $Pic_{\mathbb{Q}}(A)$ en sous-espaces propres pour σ .

Considérons maintenant la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Sigma^{g-1}_{\mathbb{Q}}(A) \longrightarrow CH^{g-1}_{\mathbb{Q}}(A) \longrightarrow NS^{g-1}_{\mathbb{Q}}(A) \longrightarrow 0 \ .$$

Il résulte de la prop. 5 que cette suite exacte admet également une <u>section canonique</u>, définie par l'homomorphisme composé

$$NS^{g-1}_{\mathbb{Q}}(A) \xrightarrow{\mathfrak{F}_h} NS^{1}_{\mathbb{Q}}(\hat{A}) \xrightarrow{\sim} Pic^{s}_{\mathbb{Q}}(\hat{A}) \xrightarrow{(-1)^g \hat{\mathfrak{F}}} CH^{g-1}_{\mathbb{Q}}(A) \ .$$

En d'autres termes, il existe un sous-espace canonique $C^s \subset CH^{g-1}_{\mathbb{Q}}(A)$, tel que l'homomorphisme induit $C^s \longrightarrow NS^{g-1}_{\mathbb{Q}}(A)$ soit bijectif : c'est le sous-espace engendré par les éléments d^{g-1}, pour $d \in Pic^s(A)$.

§4. APPLICATIONS : 1. CALCULS D'INTERSECTIONS.

Notons γ l'application de A dans $CH^g_{\mathbb{Q}}(A)$ définie par

$$\gamma(a) = [o] - [a] + \tfrac{1}{2}([o]-[a])^{*2} + \ldots + \tfrac{1}{g}([o]-[a])^{*g} \ .$$

On a $\gamma(a) = (-1)^g \hat{\mathfrak{F}}\ell_a$ (prop. 4 (iii)), de sorte que γ est un <u>homomorphisme</u>.

Soit $d \in Pic(A)$; on pose $\nu(d) = \frac{d^g}{g!}$ et $d_a = T_a^* d$ pour tout $a \in A$.

PROPOSITION 6. <u>Soit</u> d <u>la classe dans</u> $Pic(A)$ <u>d'un diviseur ample, et soient</u> $a_1,\ldots,a_g$ <u>des points de</u> A . <u>On a dans</u> $CH_{\mathbb{Q}}(A)$ <u>les égalités</u>

(i) $$\frac{d^q}{q!}(d_{a_1}-d)\ldots(d_{a_p}-d) = \frac{d^{p+q}}{(p+q)!} * \gamma(a_1) * \ldots * \gamma(a_p)$$

(ii) $$d_{a_1}\ldots d_{a_p} = \frac{d^p}{p!} * \Big(p![o] + (p-1)! \sum_i \gamma(a_i) + (p-2)! \sum_{i<j} \gamma(a_i) * \gamma(a_j) + \ldots + \gamma(a_1) * \ldots * \gamma(a_p)\Big) \ .$$

Observons d'abord que si une des formules est satisfaite pour un diviseur d , elle l'est aussi pour ses translatés (utiliser $T_a^* x = [-a] * x$). On peut donc supposer d symétrique.

Démontrons maintenant (i) dans le cas $p = 1$, $q = g-1$, en posant $a_1 = a$. Soit $\varphi : A \longrightarrow \hat{A}$ la polarisation associée à d ; on a par définition $\varphi^* \ell_a = \ell_{\varphi a} = d_a - d$, et par conséquent

$$(-1)^g\ \varphi_*\ \gamma(a) = \mathfrak{F}\ell_{\varphi a} = \mathfrak{F}(d_a - d) = (e^{-\ell_a} - 1)\mathfrak{F}d \qquad \text{(prop. 3 (iii) et 4 (ii))}$$

$$= (-1)^g\ \ell_a . \varphi_*\left(\frac{d^{g-1}}{\nu(d)(g-1)!}\right) \qquad \text{(prop. 5)}$$

$$= \frac{(-1)^g}{\nu(d)(g-1)!}\ \varphi_*(d^{g-1}(d_a - d))\ ,$$

d'où l'égalité (i) dans ce cas ; en posant $c = \nu(d)^{-1}\ \frac{d^{g-1}}{(g-1)!}$, elle s'écrit aussi $c.\ell_{\varphi a} = \gamma(a)$.

Pour passer de là au cas général, on utilise la formule $\ell_{\varphi a}.(x*y) = (\ell_{\varphi a}x)*y + x*(\ell_{\varphi a}y)$ pour x,y dans $CH(A)$ ([B], lemme 1.1 (i)), d'où l'on déduit

$$\ell_{\varphi a}.c^{*r} = rc^{*(r-1)}*(\ell_{\varphi a}.c)$$

et par récurrence

$$\ell_{\varphi a_1}\cdots\ell_{\varphi a_p}.c^{*r} = \frac{r!}{(r-p)!}\ c^{*(r-p)}*(\ell_{\varphi a_1}.c)*\cdots*(\ell_{\varphi a_p}.c)\ ;$$

compte tenu du cor. 2 à la prop. 5 et de ce qui précède, ceci entraîne (i). La formule (ii) s'obtient alors en écrivant $d_{a_i} = d + (d_{a_i} - d)$ et en développant à l'aide de (i).

On peut en fait obtenir des formules analogues à celles de la proposition dans $CH(A)$. Il faut pour cela utiliser le résultat de Roitman [R] sur la torsion du groupe des 0-cycles d'une variété projective, que nous allons énoncer dans le cadre des variétés abéliennes.

Soit I le sous-groupe de $CH^g(A)$ formé des 0-cycles de degré zéro ; c'est un idéal de $CH^g(A)$ pour le produit de convolution. Le groupe I est divisible, et on a une suite exacte (cf. [B], §1)

$$0 \longrightarrow I^{*2} \longrightarrow I \xrightarrow{S} A \longrightarrow 0$$

où S est l'homomorphisme défini par $S(\sum m_i[a_i]) = \sum m_i a_i$. Le résultat de Roitman entraîne que I^{*2} est sans torsion ; par suite les groupes I^{*r} sont des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels pour $r \geqslant 2$.

Une première conséquence est que la formule

$$\gamma(a) = [o] - [a] + \tfrac{1}{2}([o]-[a])^{*2} + \cdots + \tfrac{1}{g}([o]-[a])^{*g}$$

définit un élément bien déterminé de I . En outre γ <u>est un homomorphisme de</u> A <u>dans</u> I , tel que $S\circ\gamma = Id_A$. En effet

$\gamma(a+b)-\gamma(a)-\gamma(b)$, pour a et b dans A , est un élément de torsion de I^{*2} , donc nul.

PROPOSITION 7. Sous les hypothèses de la prop. 6, les égalités suivantes sont satisfaites dans $CH(A)$:

(i) $\frac{(p+q)!}{q!} d^q(d_{a_1}-d)\dots(d_{a_p}-d) = d^{p+q}*\gamma(a_1)*\dots*\gamma(a_p)$,

et pour $p+q = g$

$$d^q(d_{a_1}-d)\dots(d_{a_p}-d) = q!\,\nu(d).\gamma(a_1)*\dots*\gamma(a_p)$$

(ii) $p!\, d_{a_1}\dots d_{a_p} = d^p*(p![o] + (p-1)!\sum_i \gamma(a_i) +\dots+\gamma(a_1)*\dots*\gamma(a_p))$.

D'après la prop. 6 on peut écrire

$$d^{g-1}(d_a-d) = \nu(d)(g-1)!\ \gamma(a)+\tau ,$$

où τ est un élément de torsion de I . Mais on a (cf. [Be], cor. 2 à la prop. 2)

$$S(d^{g-1}(d_a-d)) = -\nu(d)(g-1)!a$$

d'où $S(\tau)=0$ et par conséquent $\tau=0$.

Reprenant la démonstration de la prop. 6, et posant $\tilde{c}=d^{g-1}$, on obtient dans $CH(A)$

$$(d_{a_1}-d)\dots(d_{a_p}-d)\tilde{c}^{*r} = m\tilde{c}^{*(r-p)}*\gamma(a_1)*\dots*\gamma(a_p) ,$$

où m est un entier. D'après le cor. 2 à la prop. 5, il existe pour chaque r des entiers p_r , q_r tels que $p_r\,\tilde{c}^{*r} = q_r\, d^{g-r}$ dans $CH(A)$. On en déduit que les deux membres des égalités à démontrer sont égaux après multiplication par un entier N indépendant du choix de $a_1,\dots,a_g$; comme A est divisible, cela entraîne (i). La formule (ii) s'en déduit comme dans la démonstration de la prop. 6.

Notons P le sous-groupe $Pic^o(A)$ de $CH(A)$.

COROLLAIRE 1. Pour $x\in P^r$, on a $d^{g-r}.x\in I^{*r}$ et

$$d^r*(d^{g-r}.x) = \nu(d)r!(g-r)!x .$$

En effet il suffit de le vérifier lorsque x est de la forme $(d_{a_1}-d)\dots(d_{a_r}-d)$, auquel cas cela résulte des formules (i).

COROLLAIRE 2.

(i) Le groupe P^r est sans torsion pour $r \geqslant 2$;

(ii) soit q un entier positif tel que $q+r \leqslant g$. L'application $x \longmapsto d^q x$ de P^r dans $d^q P^r$ est un isomorphisme pour $r \geqslant 2$, une isogénie pour $r=1$;

(iii) on a $d^p * I^{*r} = \bigoplus_{r \leqslant s \leqslant p} d^{p-s} P^s$.

Comme I^{*2} est sans torsion, le cor. 1 montre que le sous-groupe de torsion de P^r est annulé par $\nu(d)r!(g-r)!$; il est donc réduit à zéro puisqu'il est divisible. D'autre part le cor. 1 montre aussi qu'un élément annulé par d^q est annulé par $\nu(d)r!(g-r)!$; compte tenu de (i), cela entraîne (ii).

On déduit de la prop. 7 les inclusions

$$d^{p-s} P^s \subset d^p * I^{*s} \quad \text{et} \quad d^p * I^{*r} \subset d^{p-r} P^r + d^p * I^{*(r+1)} \; ;$$

on en conclut facilement l'égalité $d^p * I^{*r} = d^{p-r} P^r + \ldots + P^p$. Pour prouver que la somme est directe, considérons une relation

$$d^{p-r} x_r + \ldots + x_p = 0 \quad , \quad \text{avec} \quad x_s \in P^s \; ;$$

quitte à faire une translation, on peut supposer d symétrique. On a alors $\mathfrak{F}(d^{p-s} x_s) \in CH_{\mathbb{Q}}^{g-p+s}(\hat{A})$; la relation précédente entraîne donc $\mathfrak{F}(d^{p-s} x_s) = 0$, de sorte que $d^{p-s} x_s$ est de torsion. On déduit alors de (i) et (ii) que $d^{p-s} x_s$ est nul pour $s \neq 1$ et donc aussi pour $s=1$, d'où (iii).

Notons $\hat{P}$ le sous-groupe $\mathrm{Pic}^{o}(\hat{A})$ de $CH(\hat{A})$. Il résulte du cor. 2 (i) que l'on peut identifier $\hat{P}^r$ à $\hat{P}_{\mathbb{Q}}^r$, ainsi que I^{*r} à $I_{\mathbb{Q}}^{*r}$, pour $r \geqslant 2$. Considérons l'homomorphisme $\mathfrak{F}^r : I^{*r} \longrightarrow \hat{P}^r$ qui associe à un cycle s de I^{*r} la composante de codimension r de $\mathfrak{F}s$. On a

$$\mathfrak{F}^r([a_1]-[o]) * \ldots * ([a_r]-[o]) = \ell_{a_1} \ldots \ell_{a_r} \quad \text{pour} \quad a_1, \ldots, a_r \quad \text{dans} \quad A \; ;$$

par passage au quotient, $\mathfrak{F}^r$ induit un homomorphisme de $I^{*r}/I^{*(r+1)}$ dans $\hat{P}^r$. D'autre part, considérons l'homomorphisme composé

$$\hat{P}^r \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}} I^{*r} \longrightarrow I^{*r}/I^{*(r+1)} \; ;$$

on a $\hat{\mathfrak{F}}(\ell_{a_1}\cdots\ell_{a_r}) = (-1)^g\,\gamma(a_1)*\cdots*\gamma(a_r)$

$$\equiv (-1)^{g-r}([a_1]-[o])*\cdots*([a_r]-[o]) \quad (\text{mod. } I^{*(r+1)}).$$

Par conséquent :

COROLLAIRE 3. _Pour_ $r \geqslant 2$, _les homomorphismes_ $\mathfrak{F}^r$ _et_ $(-1)^{g-r}\,\hat{\mathfrak{F}}$ _induisent des isomorphismes réciproques l'un de l'autre entre_ $I^{*r}/I^{*(r+1)}$ _et_ $\hat{P}^r$.

Ces isomorphismes généralisent l'isomorphisme canonique de $I/I^{*2} = A$ sur $\hat{P} = \mathrm{Pic}^o(\hat{A})$.

Remarques. 1) Les groupes P^r (ou $I^{*r}/I^{*(r+1)}$) pour $r \geqslant 2$ ne sont pas de nature algébrique ; plus précisément, il n'existe aucun homomorphisme raisonnable φ de P^r dans un groupe algébrique G (en effet l'application $(a_1,\ldots,a_r) \longmapsto \varphi(\ell_{a_1}\cdots\ell_{a_r})$ devrait être un morphisme r-linéaire de A^r dans G , et un tel morphisme est nécessairement trivial). D'autre part les résultats de Roitman entraînent que P^r est très gros pour $r \geqslant 2$ (cf. [B], §3). Les groupes P^r ou $I^{*r}/I^{*(r+1)}$ doivent être considérés comme des produits symétriques de A divisés par certaines relations (dont malheureusement j'ignore tout).

2) On déduit en particulier du cor. 2 une graduation de $CH^g(A)$:

$$CH^g(A) = \mathbf{Z}[o] \oplus d^{g-1}P \oplus d^{g-2}P^2 \oplus \cdots \oplus P^g ,$$

qui d'après la prop. 7 est indépendante de d . La filtration associée à cette graduation est la filtration (I^{*r}).

3) Le cor. 2 entraîne aussi que le groupe $d^r * I^{*r}$ est égal à P^r , et donc indépendant de d . Ceci amène assez naturellement à conjecturer que cette égalité est encore satisfaite si l'on remplace d^r par n'importe quel élément de $CH^r(A)$, autrement dit qu'on a $P^r = I^{*r} * CH^r(A)$. C'est là essentiellement la conjecture (0.2) de [B], que nous allons examiner maintenant.

§5. APPLICATIONS : 2. LES RÉSULTATS DE BLOCH.

Pour $p \geqslant 0$, nous poserons $CH_{\mathbb{Q}}^{\geqslant p}(A) = \sum_{r \geqslant p} CH_{\mathbb{Q}}^{r}(A)$. Nous allons considérer l'assertion suivante :

(F_p) <u>Pour tout</u> $x \in CH_{\mathbb{Q}}^{p}(A)$, <u>on a</u> $\mathcal{F}x \in CH_{\mathbb{Q}}^{\geqslant g-p}(\hat{A})$.

PROPOSITION 8.

(i) <u>L'assertion</u> (F_p) <u>est vraie pour</u> $p = 0, 1, g-2, g-1, g$.

(ii) <u>Si</u> $p \leqslant g-2$ <u>et</u> $x \in CH_{\mathbb{Q}}^{p}(A)$, <u>on a</u> $\mathcal{F}x \in CH^{\geqslant 2}(\hat{A})$.

Le cas $p = g$ est trivial, le cas $p = 0$ résulte du cor. 1 à la prop. 3, et le cas $p = 1$ résulte de la prop. 4 (iii) et du cor. 1 à la prop. 5. Si $x \in CH_{\mathbb{Q}}^{g-1}(A)$, la composante de $\mathcal{F}x$ dans $CH_{\mathbb{Q}}^{o}(\hat{A}) = H^{o}(\hat{A},\mathbb{Q})$ est nulle par la prop. 1. Il suffit donc de démontrer l'assertion (ii).

Soit d un élément ample symétrique de Pic(A) et φ la polarisation associée. On a $x * d = 0$ et par suite $\mathcal{F}x . \mathcal{F}d = 0$, soit encore $\varphi^*(\mathcal{F}x) . d^{g-1} = 0$ (prop. 5). Or la multiplication par d^{g-1} définit une isogénie de $Pic^{o}(A)$ sur Alb(A) (elle induit en effet un isomorphisme de $H^{1}(A,\mathbb{Q})$ sur $H^{2g-1}(A,\mathbb{Q})$ par le théorème de Lefschetz). Il en résulte que la composante de codimension un de $\mathcal{F}x$ est nulle, d'où la proposition.

L'ensemble des éléments $x = \sum x_p$ (avec $x_p \in CH_{\mathbb{Q}}^{p}(A)$) tels que $\mathcal{F}x_p \in CH_{\mathbb{Q}}^{\geqslant g-p}(\hat{A})$ est un sous-anneau gradué de $CH_{\mathbb{Q}}(A)$, stable pour $*$, contenant les courbes, les surfaces et les diviseurs. Cela indique qu'il faudra chercher assez loin un contre-exemple éventuel à (F_p). Il est tentant de conjecturer que l'assertion (F_p) est vraie pour tout p ; mais je dois dire que cette conjecture me semble actuellement inaccessible vu notre faible connaissance de l'anneau de Chow.

Nous allons maintenant montrer que l'assertion (F_p) entraîne la conjecture de Bloch ([B], 0.2). On utilisera les notations $I, \hat{P}$ introduites au paragraphe précédent. On va d'abord se débarrasser des problèmes de torsion en les regroupant dans le lemme suivant, qui fait intervenir l'homomorphisme $\mathcal{F}_N : CH(A) \longrightarrow CH(\hat{A})$ défini dans la prop. 3' du §2 :

LEMME 1. <u>Soit</u> x <u>un élément de</u> $CH^p(A)$ <u>tel que</u> $\mathcal{F}x \in CH_{\mathbb{Q}}^{\geq g-p}(\hat{A})$.

(i) <u>On a</u> $\mathcal{F}_N(x*I^{*r}) \subset \hat{P}^r.CH^{\geq g-p}(\hat{A})$ <u>pour tout</u> $r \geq 1$.

(ii) <u>Si</u> $r > p$, <u>on a</u> $x*I^{*r} = 0$.

(iii) <u>Si l'assertion</u> (F_r) <u>est satisfaite et</u> $r \geq 2$, <u>le groupe</u> $I^{*r}*CH^r(A)$ <u>est sans torsion</u>.

L'hypothèse entraîne que les composantes de codimension $< g-p$ de $\mathcal{F}_N x$ sont annulées par un entier m . D'autre part, pour tout $t \in I^{*r}$, on a d'après la prop. 3'

$$N^{r-1}\,\mathcal{F}_N t \in \hat{P}^r.CH(\hat{A}), \text{ et par conséquent}$$

$$(N^{r-1}m)\mathcal{F}_N t.\mathcal{F}_N x \in \hat{P}^r.CH^{\geq g-p}(\hat{A}) .$$

Soit $s \in I^{*r}$; choisissant t de façon que $s = (N^r m)t$, on obtient $\mathcal{F}_N(s \otimes x) \in \hat{P}^r.CH^{\geq g-p}(\hat{A})$, d'où (i). Si $r > p$ on déduit alors de la prop. 3' que le groupe $x*I^{*r}$ est annulé par N^2 ; comme il est divisible, il est nécessairement réduit à zéro, d'où (ii).

Enfin si (F_r) est vrai, le groupe $\mathcal{F}_N(I^{*r}*CH^r(A))$ est contenu d'après (i) dans $\hat{P}^r.CH^{g-r}(\hat{A})$. Or pour $r \geq 2$, ce dernier groupe est contenu dans $\hat{I}^{*2}$: en effet pour tout $y \in CH^{g-2}(\hat{A})$, le morphisme bilinéaire $(d,d') \longmapsto S(dd'y)$ de $\hat{P} \times \hat{P}$ dans $\hat{A}$ est nécessairement nul, de sorte que $\hat{P}^2.CH^{g-2}(\hat{A}) \subset \operatorname{Ker} S = \hat{I}^{*2}$. Comme $\hat{I}^{*2}$ est sans torsion, on déduit alors de la prop. 3' que le sous-groupe de torsion de $I^{*r}*CH^r(A)$ est annulé par N^2 , donc réduit à zéro, d'où (iii).

Du lemme 1 (ii) résulte en particulier :

PROPOSITION 9. <u>L'assertion</u> (F_r) <u>entraîne</u> $I^{*(r+1)}*CH^r(A) = 0$. <u>En particulier les groupes</u> $I^{*(g+1)}$, $I^{*g}*CH^{g-1}(A)$ <u>et</u> $I^{*(g-1)}*CH^{g-2}(A)$ <u>sont nuls</u>.

Soient d la classe dans $\operatorname{Pic}(A)$ d'un diviseur ample et φ la polarisation associée. Considérons comme dans [B] l'homomorphisme $\Phi_{d^r} : I^{*r} \longrightarrow I^{*r}*CH^r(A)$ tel que $\Phi_{d^r}(s) = s*d^r$. Considérons d'autre part l'homomorphisme $\mathcal{F}^r : I^{*r} \longrightarrow CH_{\mathbb{Q}}^r(\hat{A})$ qui associe à un cycle s de

I^{*r} la composante de codimension r de $\mathfrak{F}s$.

LEMME 2.

(i) On a $\Phi_{d^r}(s) = r!\varphi^*\mathfrak{F}^r(s)$ dans $CH^r_{\mathbb{Q}}(\hat{A})$.

(ii) Les homomorphismes $\Phi_{d^r} : I^{*r}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow I^{*r}_{\mathbb{Q}} * CH^r_{\mathbb{Q}}(A)$ et $\mathfrak{F}^r : I^{*r}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow CH^r_{\mathbb{Q}}(\hat{A})$ ont pour noyau $I^{*(r+1)}_{\mathbb{Q}}$.

(iii) Le sous-espace de $CH^g_{\mathbb{Q}}(A)$ formé des éléments x tels que $\mathfrak{F}x \in CH^{\geq r}_{\mathbb{Q}}(\hat{A})$ est égal à $I^{*r}_{\mathbb{Q}}$.

Il suffit de vérifier (i) pour les éléments $s = ([a_1]-[o])*\ldots$ $\ldots*([a_r]-[o])$, avec $a_1,\ldots,a_r$. On est alors ramené à prouver dans $CH^g_{\mathbb{Q}}(A)$ l'égalité

$$d^r*([a_1]-[o])*\ldots*([a_r]-[o]) = r!(d_{a_1}-d)\ldots(d_{a_r}-d) ,$$

qui résulte aussitôt de la prop. 6 (compte tenu de $d^r*I^{*(r+1)} = 0$).

L'assertion (ii) pour $\mathfrak{F}^r$ a déjà été démontrée (cor. 3 à la prop.7). On en déduit à l'aide de (i) l'assertion analogue pour Φ_{d^r} .

Posons enfin $F^r = \{s \in CH^g_{\mathbb{Q}}(A) \mid \mathfrak{F}s \in CH^{\geq r}_{\mathbb{Q}}(\hat{A})\}$, et démontrons par récurrence l'égalité $F^r = I^{*r}_{\mathbb{Q}}$. Le cas $r=1$ est immédiat ; supposons $F^{r-1} = I^{*(r-1)}_{\mathbb{Q}}$. On a alors

$$I^{*r}_{\mathbb{Q}} = \operatorname{Ker}(\mathfrak{F}^r|_{I^{*(r-1)}_{\mathbb{Q}}}) = \operatorname{Ker}(\mathfrak{F}^r|_{F^{r-1}}) = F^r ,$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

PROPOSITION 10. Soit $r \geq 2$; supposons l'assertion (F_r) vérifiée. Alors l'homomorphisme $\Phi_{d^r} : I^{*r}/I^{*(r+1)} \longrightarrow I^{*r}*CH^r(A)$ est bijectif.

Pour $r=1$, Φ_d s'identifie à la polarisation $\varphi : A \longrightarrow \operatorname{Pic}^o(A)$ associée à d .

D'après le lemme 1 (iii), tous les groupes considérés sont des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels ; on peut donc raisonner dans $CH_{\mathbb{Q}}(A)$. Il résulte du lemme 2 (ii) que Φ_{d^r} est injectif. L'assertion F_r entraîne $\mathfrak{F}(I^{*r}*CH^r_{\mathbb{Q}}(A)) \subset CH^g_{\mathbb{Q}}(\hat{A})$. De plus on a alors $\mathfrak{F}(I^{*r}*CH^r_{\mathbb{Q}}(A)) \subset \hat{I}^{*r}_{\mathbb{Q}}$ en raison du lemme 2 (ii), d'où en appliquant $\hat{\mathfrak{F}}$

$$I^{*r} * CH^r_{\mathbb{Q}}(A) \subset \hat{\mathfrak{F}}^r(\hat{I}^{*r}) \ .$$

Mais on a $\hat{\mathfrak{F}}^r(\hat{I}^{*r}) = \hat{\mathfrak{F}}^r(\varphi_* I^{*r}) = \varphi^* \mathfrak{F}^r(I^{*r}) = \Phi_{d^r}(I^{*r})$, d'où la surjectivité de Φ_{d^r} .

Je voudrais terminer ce paragraphe par quelques spéculations sur la structure de l'anneau de Chow (il est recommandé au lecteur positiviste de les sauter). Les résultats qui précèdent suggèrent l'existence d'une filtration décroissante $(\mathrm{Fil}^p)_{p \geqslant 0}$ de $CH(A)$, possédant certaines des propriétés suivantes :

a) Fil^p est une filtration d'anneau, à la fois pour le produit usuel et pour le produit $*$;

b) on a $\mathrm{Fil}^{p+1} CH^p(A) = 0$;

c) Fil^1 contient les cycles algébriquement équivalents à zéro ;

d) la filtration est stable par $\mathfrak{F}$ (c'est-à-dire $\mathfrak{F}(\mathrm{Fil}^p) \subset \mathrm{Fil}^p CH_{\mathbb{Q}}(\hat{A})$).

Je ne sais pas définir une filtration possédant toutes ces propriétés. Les résultats précédents indiquent qu'on doit avoir

$$\mathrm{Fil}^p CH^g(A) = I^{*p} \quad \text{et} \quad \mathrm{Fil}^p CH^p(A) = I^{*p} * CH^p(A) = P^p \quad \text{pour tout } p \ .$$

Si l'assertion (F_r) est satisfaite pour tout r , et si l'on néglige la torsion, un candidat très raisonnable est la "filtration de Fourier" définie par

$$F^r CH^p(A) = \{ x \in CH^p(A) \mid \mathfrak{F}x \in CH_{\mathbb{Q}}^{\geqslant g-p+r}(\hat{A}) \} \ ;$$

elle possède les propriétés a) et b), mais je ne sais pas démontrer c) ni d).

§6. APPENDICE : TORSION DE $CH^g(A)$.

Ce paragraphe n'utilise pas la transformation $\mathfrak{F}$; on se sert par contre de la relation $I^{*(g+1)} = 0$ pour préciser le résultat de Roitman sur la torsion de $CH^g(A)$.

LEMME. _Soient_ R _un anneau commutatif_, x _un élément de_ R , p _un nombre premier_, n _un entier_. _Il existe alors un entier_ N _tel que l'élément_ $p^N(x-1)$ _appartienne à l'idéal de_ R _engendré par_ x^p-1 _et_ $(x-1)^n$.

Démonstration : Notons $\bar{R}$ l'anneau quotient $R/(x^p-1,(x-1)^n)$. Soit $y = x-1$, et soit $\bar{y}$ la classe de y dans $\bar{R}$. On a

$$x^p-1 = (y+1)^p - 1 = y^p + py(1+ry) \quad , \quad r \in R \; ;$$

d'où, comme $\bar{y}$ est nilpotent,

$$p\bar{y} \in (\bar{y}^p) \quad \text{dans } \bar{R} \, .$$

On en déduit aussitôt $p^{p+1}\bar{y} \in (\bar{y}^{p^2})$, puis par récurrence $p^{n(k)}\bar{y} \in (\bar{y}^{p^k})$, avec $n(k) = 1 + p + \ldots + p^{k-1}$, d'où notre assertion puisque $\bar{y}$ est nilpotent.

Nous noterons $T(G)$ le sous-groupe de torsion d'un groupe commutatif G . Rappelons que l'homomorphisme $S : CH^g(A) \longrightarrow A$ induit un isomorphisme sur les groupes de torsion.

PROPOSITION 11. _L'application_ $t : T(A) \longrightarrow CH^g(A)$ _telle que_ $t(a) = [a] - [o]$ _définit un isomorphisme de_ $T(A)$ _sur_ $T(CH^g(A))$, _inverse de_ S .

Les éléments de torsion de $CH^g(A)$ sont donc les cycles $[a] - [o]$, pour $a \in T(A)$.

Remarquons qu'il suffit de prouver que le cycle $[a] - [o]$ est de torsion pour $a \in T(A)$: en effet la relation $S \circ t = Id_{T(A)}$ entraîne alors que $t : T(A) \longrightarrow T(CH^g(A))$ est l'isomorphisme inverse de S .

Démontrons par récurrence sur n que si a est un élément d'ordre n de A , le cycle $[a] - [o]$ est de torsion. L'assertion est triviale pour $n = 1$; supposons-la vérifiée pour les entiers $< n$. Soit p un nombre premier divisant n . Appliquons le lemme à l'anneau $CH^g(A)$ (muni du produit $*$) et à $x = [a]$; puisque $([a]-[o])^{*(g+1)}$ est nul et que $[pa]-[o]$ est de torsion par hypothèse de récurrence, on obtient que $[a]-[o]$ est de torsion, ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[B] S. BLOCH.- Some elementary theorems about algebraic cycles on abelian varieties. Inventiones math. 37 (1976), 215-228.

[Be] A. BEAUVILLE.- Diviseurs spéciaux et intersection de cycles dans la jacobienne d'une courbe algébrique. Enumerative geometry and classical algebraic geometry. Birkhäuser, Boston (1982), 133-142.

[G] P. GRIFFITHS.- Some transcendental methods in the study of algebraic cycles. Several complex variables II, Maryland 1970 : Springer Lecture Notes 185 (1971), 1-46.

[K] S. KLEIMAN.- Algebraic cycles and the Weil conjectures. Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North-Holland (1968), 359-386.

[M] S. MUKAI.- Duality between $D(X)$ and $D(\hat{X})$ with its application to Picard Sheaves. Nagoya Math. J. 81 (1981), 153-175.

[Md] D. MUMFORD.- Abelian varieties. Oxford University Press (1970).

[R] A.A. ROITMAN.- The torsion of the group of 0-cycles modulo rational equivalence. Annals of Math. 111 (1980), 553-569.

[SGA 6] Séminaire de Géométrie algébrique du Bois Marie 66-67 : Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch. Springer Lecture Notes 225 (1971).

A. BEAUVILLE
Université de Paris-Sud
Mathématique
91405 ORSAY (France)