Actes, Congrès intern. math., 1970. Tome 1, p. 425 à 430.

THÉORIE DE HODGE I

par PIERRE DELIGNE

On se propose de donner un dictionnaire heuristique entre énoncés en cohomologie l-adique et énoncés en théorie de Hodge. Ce dictionnaire a notamment pour sources [3] et la théorie conjecturale des motifs de Grothendieck [2]. Jusqu'ici, il a surtout servi à formuler, en théorie de Hodge, des conjectures, et il en a parfois suggéré une démonstration.

DÉFINITION 1.1. — *Une* structure de Hodge mixte H *consiste en*

(*a*) *Un* $\mathbb{Z}$*-module de type fini* $H_{\mathbb{Z}}$ (*le* « réseau entier »);

(*b*) *Une filtration croissance finie* W *sur* $H_{\mathbb{Q}} = H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}$ (*la* « filtration par le poids »);

(*c*) *Une filtration décroissante finie* F *sur* $H_{\mathbb{C}} = H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$ (*la* « filtration de Hodge »).

Ces données sont soumises à l'axiome:

Il existe sur $\mathrm{Gr}_W(H_{\mathbb{C}})$ *une* (*unique*) *bigraduation par des sous-espaces* $H^{p,q}$ *telle que*

(*i*) $\mathrm{Gr}_W^n(H_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}$

(*ii*) *la filtration* F *induit sur* $\mathrm{Gr}_W(H_{\mathbb{C}})$ *la filtration*

$$\mathrm{Gr}_W(F)^p = \bigoplus_{p' \geq p} H^{p',q'}$$

(*iii*) $\overline{H^{pq}} = H^{qp}$.

Un *morphisme* $f : H \to H'$ est un homomorphisme $f_{\mathbb{Z}} : H_{\mathbb{Z}} \to H'_{\mathbb{Z}}$ tel que $f_{\mathbb{Q}}: H_{\mathbb{Q}} \to H'_{\mathbb{Q}}$ et $f_{\mathbb{C}}: H_{\mathbb{C}} \to H'_{\mathbb{C}}$ soient respectivement compatibles aux filtrations W et F.

Les *nombres de Hodge* de H sont les entiers

$$h^{pq} = \dim H^{pq} = h^{qp}. \tag{1.2}$$

On dit que H est pure de *poids* n si $h^{pq} = 0$ pour $p + q \neq n$ (i. e. si $\mathrm{Gr}_W^i(H) = 0$ pour $i \neq n$). On dit encore que H est une *structure de Hodge de poids* n.

La *structure de Hodge de Tate* $\mathbb{Z}(1)$ est la structure de Hodge de poids -2, purement de type $(-1, -1)$, pour laquelle $\mathbb{Z}(1)_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$ et $\mathbb{Z}(1)_{\mathbb{Z}} = 2\pi i\mathbb{Z} = \mathrm{Ker}(\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*) \subset \mathbb{C}$. On pose $\mathbb{Z}(n) = \mathbb{Z}(1)^{\otimes n}$.

On peut montrer que les structures de Hodge mixtes forment une catégorie abélienne. Si $f : H \to H'$ est un morphisme, alors $f_{\mathbb{Q}}$ et $f_{\mathbb{C}}$ sont strictement compatibles aux filtrations W et F ([1], 2.3.5).

2. Soient A un anneau normal intègre de type fini sur $\mathbb{Z}$, K son corps des fractions

et $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. Soit K_{nr} la plus grande sous-extension de $\overline{K}$ non ramifiée en chaque idéal premier de A. On sait que, ou on pose

$$\pi_1(\mathrm{Spec}(A), \overline{K}) = \mathrm{Gal}(K_{nr}/K).$$

Pour chaque point fermé x de Spec(A), défini par un idéal maximal m_x de A, le corps résiduel $k_x = A/m_x$ est fini; le point x définit une classe de conjugaison de « substitutions de Frobenius » $\varphi_x \in \pi_1(\mathrm{Spec}(A), \overline{K})$. On pose $q_x = \# k_x$ et $F_x = \varphi_x^{-1}$.

Soient K un corps de type fini sur le corps premier de caractéristique p, $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, l un nombre premier $\neq p$ et H un $\mathbb{Z}_l$- (ou un $\mathbb{Q}_l$-) module de type fini muni d'une action continue ρ de Gal $(\overline{K}/K)$. On supposera toujours par la suite qu'il existe A comme plus haut, avec l inversible dans A, tel que ρ se factorise par $\pi_1(\mathrm{Spec}(A), \overline{K}) = \mathrm{Gal}(K_{nr}/K)$. On dira que H est *pur de poids n* si pour tout point fermé x d'un ouvert non vide de Spec(A), les valeurs propres α de F_x agissant sur H sont des entiers algébriques dont tous les conjugués complexes sont de valeur absolue $|\alpha| = q_x^{n/2}$.

PRINCIPE 2.1. — *Si le module galoisien H « provient de la géométrie algébrique », il existe sur* $H_{\mathbb{Q}_l} = H \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$ *une (unique) filtration croissante W (la* « filtration par le poids »*), invariante par Galois, telle que* $\mathrm{Gr}_n^W(H)$ *soit pur de poids n.*

On peut penser que $\mathrm{Gr}_n^W(H)$ est de plus semi-simple.

Lorsqu'on dispose de la résolution des singularités, on peut souvent donner de W une définition conjecturale, dont la correction résulte des conjectures de Weil [5] (cf. 6).

Soit μ le sous-groupe de $\overline{K}^*$ formé des racines de l'unité. Le *module de Tate* $\mathbb{Z}_l(1)$, défini par

$$\mathbb{Z}_l(1) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l, \mu)$$

est pur de poids -2. On pose $\mathbb{Z}_l(n) = \mathbb{Z}_l(1)^{\otimes n}$.

Il est trivial que tout morphisme $f: H \to H'$ est strictement compatible à la filtration par le poids.

Le principe 2.1 concorde avec le fait que toute extension de $\mathbb{G}_m$ (« poids -2 ») par une variété abélienne (« poids $-1 > -2$ ») est triviale.

3. TRADUCTION. — *Les modules galoisiens qui apparaissent en cohomologie l-adique ont pour analogue, sur* $\mathbb{C}$*, les structures de Hodge mixte. On a de plus le dictionnaire*

module pur de poids n	structure de Hodge de poids n
filtration par le poids	filtration par le poids
homomorphisme compatible à Galois	morphisme
module de Tate $\mathbb{Z}_l(1)$	structure de Hodge de Tate $\mathbb{Z}(1)$

4. Soit X une variété algébrique complexe (= schéma de type fini sur $\mathbb{C}$, qu'on supposera séparé). Il existe un sous-corps K de $\mathbb{C}$, de type fini sur $\mathbb{Q}$ tel que X puisse être défini sur K (i. e. provienne par extension des scalaires de K à $\mathbb{C}$ d'un K-schéma X'). Soit $\overline{K}$ la fermeture algébrique de K dans $\mathbb{C}$. Le groupe de Galois Gal$(\overline{K}/K)$ agit alors sur les groupes de cohomologie l-adique $H^*(X, \mathbb{Z}_l)$; on a

$$H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_l = H^*(X, \mathbb{Z}_l) = H^*(X'_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_l).$$

D'après 3, il y a lieu de s'attendre à ce que les groupes de cohomologie $H^n(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ portent des structures de Hodge mixtes naturelles. C'est ce qu'on peut prouver (voir [1], 3.2.5, pour le cas où X est lisse ; la démonstration est algébrique, à partir de la théorie de Hodge classique [6]). Pour X projectif et lisse, les conjectures de Weil impliquent que $H^n(X, \mathbb{Z}_l)$ est pur de poids n, tandis que la théorie de Hodge classique munit $H^n(X, \mathbb{Z})$ d'une structure de Hodge de poids n. Pour tout morphisme $f : X \to Y$ et pour K assez grand, $f^* : H^*(Y, \mathbb{Z}_l) \to H^*(X, \mathbb{Z}_l)$ commute à Galois (par transport de structure); de même, $f^* : H^*(Y, \mathbb{Z}) \to H^*(X, \mathbb{Z})$ est un morphisme de structures de Hodge mixte. Pour X lisse, la classe de cohomologie dans $H^{2n}(X, \mathbb{Z}_l(n))$ d'un cycle algébrique de codimension n, Z, défini sur K, est invariante par Galois, i. e. définit

$$c(Z) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}}(\mathbb{Z}_l(-n), H^{2n}(X, \mathbb{Z}_l)).$$

De même, la classe de cohomologie $c(Z) \in H^{2n}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ est purement de type (n, n), i. e. correspond à

$$c(Z) \in \mathrm{Hom}_{H.M.}(\mathbb{Z}(-n), H^{2n}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})).$$

5. Si $f : H \to H'$ est un morphisme, compatible à Galois, entre $\mathbb{Q}_l$-vectoriels de poids différents, on a $f = 0$. De même, si $f : H \to H'$ est un morphisme de structures de Hodge mixte pures de poids différents, alors f est de torsion. Une remarque plus utile est la

SCHOLIE 5.1. — *Soient H et H' des structures de Hodge de poids n et n', avec $n > n'$. Soit $f : H_{\mathbb{Q}} \to H'_{\mathbb{Q}}$ un homomorphisme tel que $f : H_{\mathbb{C}} \to H'_{\mathbb{C}}$ respecte F. Alors $f = 0$.*

6. Soient X une variété projective et lisse sur $\mathbb{C}$, $D = \sum_1^n D_i$ un diviseur à croisements normaux dans X, somme de diviseurs lisses, et j l'inclusion dans X de $U = X - D$. Pour $Q \subset [1, n]$, on pose $D_Q = \bigcap_{i \in Q} D_i$.

En cohomologie l-adique, on a canoniquement

$$R^q j_* \mathbb{Z}_l = \bigoplus_{\#Q = q} \mathbb{Z}_l(-q)_{D_Q}, \tag{6.1}$$

et la suite spectrale de Leray pour j s'écrit

$$E_2^{pq} = \bigoplus_{\#Q = q} H^p(D_Q, \mathbb{Q}_l) \otimes \mathbb{Z}_l(-q) \Rightarrow H^{p+q}(U, \mathbb{Q}_l). \tag{6.2}$$

D'après les conjectures de Weil [5], $H^p(D_Q, \mathbb{Q}_l)$ est pur de poids p, de sorte que E_2^{pq} est pur de poids $p + 2q$. En tant que quotient d'un sous-objet de E_2^{pq}, E_r^{pq} aussi est pur de poids $p + 2q$. D'après 5, $d_r = 0$ pour $r \geq 3$, car les poids $p + 2q$ et $p + 2q - r + 2$ de E_r^{pq} et $E_r^{p+r, q-r+1}$ sont différents. On a donc $E_3^{pq} = E_\infty^{pq}$. A une renumérotation près, la filtration par le poids de $H^*(U, \mathbb{Q}_l)$ est l'aboutissement de (6.2)

$$\mathrm{Gr}_n^W(H^k(U, \mathbb{Q}_l)) = E_3^{2k-n, n-k} \tag{6.3}$$

7. En cohomologie entière, pour la topologie usuelle, la suite spectrale de Leray pour j s'écrit

$$'E_2^{pq} = \bigoplus_{\#Q = q} H^p(D_Q, \mathbb{Z}) \Rightarrow H^{p+q}(U, \mathbb{Z}). \tag{7.1}$$

Puisque chaque D_Q est une variété projective non singulière, $'E_2^{pq}$ est muni d'une structure de Hodge de poids p. On pose $E_2^{pq} = 'E_2^{pq} \otimes \mathbb{Z}(-q)$ (structure de Hodge de poids $p + 2q$). Comme groupe abélien, $E_2^{pq} = 'E_2^{pq}$; il y a intérêt à considérer (7.1) comme une suite spectrale de terme initial E_2^{pq}. D'après 3, il faut s'attendre à ce que $d_2 \colon E_2^{pq} \to E_2^{p+2,q-1}$ soit un morphisme de structure de Hodge. On le prouve en interprétant d_2 comme un morphisme de Gysin. Dès lors, E_3^{pq} est muni d'une structure de Hodge de poids $p + 2q$. D'après 3, on s'attend à ce que, *modulo torsion*, la suite spectrale (6.4) dégénère au terme E_3 ($E_3 = E_\infty$), et à ce que la nullité des d_r ($r \geq 3$) soit une application de 5.1. Ce programme est mené à bien dans [1] 3.2. On y *définit* la filtration par le poids de $H^*(U, \mathbb{Q})$ comme aboutissement de (7.1), à la renumérotation (6.3) près.

En fait, pour munir des groupes de cohomologie H^* d'une structure de Hodge mixte, le point clef a toujours été jusqu'ici de trouver une suite spectrale E d'aboutissement H^* telle que l'analogue l-adique de E_2^{pq} soit conjecturalement pur (de poids $p + 2q$); E_2^{pq} doit alors porter une structure de Hodge naturelle (de poids $p + 2q$), et la filtration W est l'aboutissement de E.

8. Soit Spec(V) le spectre d'un anneau de valuation discrète hensélien (un *trait hensélien*) de corps de fractions K et de corps résiduel k de type fini sur le corps premier de caractéristique p. Soient $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et H un vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{Q}_l$ ($l \neq p$), sur lequel Gal$(\overline{K}/K)$ agit continûment. D'après Grothendieck, on sait ([4], appendice) qu'un sous-groupe d'indice fini du groupe d'inertie I agit de façon unipotente. Remplaçant V par une extension finie, on se ramène au cas où l'action de I tout entier est unipotente (cas *semi-stable*) ; elle se factorise alors le plus grand pro-l-groupe I_l quotient de I, canoniquement isomorphe à $\mathbb{Z}_l(1)$.

Principe 8.1. — *Dans le cas semi-stable, si le module galoisien H « provient de la géométrie algébrique », il existe une (unique) filtration croissante W de H (la* « filtration par le poids ») *telle que I agisse trivialement sur* $\mathrm{Gr}_n^W(H)$ *et que* $\mathrm{Gr}_n^W(H)$, *en tant que module galoisien sous* $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \simeq \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)/I$, *soit pur de poids n.*

On comparera à 2.1 et à l'appendice de [4].

Lorsqu'on dispose de la résolution des singularités, on peut parfois donner de W une définition conjecturale, dont la validité résulte des conjectures de Weil. A l'aide de la résolution et de Weil, il est souvent facile de montrer qu'en tout cas H se dévisse en modules galoisiens (sous Gal$(\overline{k}/k)$) purs.

Supposons H semi-stable. Pour $T \in I_l$, on définit $\log T$ comme la somme *finie* $-\sum_{n>0} (Id - T)^n/n$. L'application $(T, x) \to \log T(x)$ s'identifie à un homomorphisme

$$M \colon \mathbb{Z}_l(1) \otimes H \to H. \tag{8.2}$$

Puisque $\mathbb{Z}_l(1)$ est de poids -2, on a nécessairement (cf. 5)

$$M(\mathbb{Z}_l(1) \otimes W_n(H)) \subset W_{n-2}(H) \tag{8.3}$$

et M induit

$$\mathrm{Gr}(M) \colon \mathbb{Z}_l(1) \otimes \mathrm{Gr}_n^W(H) \to \mathrm{Gr}_{n-2}^W(H). \tag{8.4}$$

8.5. Si X est une variété projective non singulière sur un corps algébriquement clos k_0, on définit

$$L: \quad \mathbb{Z}_l(-1) \otimes H^*(X, \mathbb{Z}_l) \to H^*(X, \mathbb{Z}_l)$$

comme étant le cup-produit avec la classe de cohomologie d'une section hyperplane. On notera une analogie formelle entre L et M ; de même que M est défini par une action de $\mathbb{Z}_l(1)$, on peut regarder L comme défini par une action de $\mathbb{Z}_l(-1)$; L augmente le degré de 2, et $\mathrm{Gr}\, M$ (8.4) le diminue de 2.

9. Soient D le disque unité, $D^* = D - \{0\}$ et X

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{P}^r(\mathbb{C}) \times D \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] \\ & D \end{tikzcd}$$

une famille de variétés projectives paramétrée par D, avec f propre et $f \mid D^*$ lisse. Gardons les notations de 8, et rappelons que dans l'analogie entre trait hensélien et petit voisinage de 0 dans la droite complexe on a le dictionnaire suivant (noter que le spectre de l'anneau des germes de fonctions holomorphes en 0 est un trait hensélien):

9.1.

D	$\mathrm{Spec}\,(V)$
D^*	$\mathrm{Spec}\,(K)$
un revêtement universel $\tilde{D}^*$ de D^*	$\mathrm{Spec}\,(\bar{K})$
groupe fondamental $\pi_1(D^*)$	groupe d'inertie I
(avec $\pi_1(D^*) = \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}(1)_{\mathbb{Z}}$)	(avec $I_l = \mathbb{Z}_l(1)$)
X	schéma projectif X sur $\mathrm{Spec}\,(V)$
$X^* = f^{-1}(D^*)$	X_K
$\tilde{X} = X \times_D \tilde{D}^*$	$X_{\bar{K}}$
système local $R^i f_* \mathbb{Z} \mid D^*$	module galoisien $H^i(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}_l)$
$H^i(\tilde{X}, \mathbb{Z})$	$H^i(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}_l)$

On notera que $\tilde{X}$ est homotopiquement équivalent à chacune des fibres $X_t = f^{-1}(t)$ $(t \in D^*)$: $H^i(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}_l)$ a encore pour analogue $H^i(X_t, \mathbb{Z})$ et à l'action de I correspond la transformation de monodromie T.

Ici encore, on sait qu'un sous-groupe d'indice fini de $\pi_1(D^*)$ agit de façon unipotente sur $H^i(\tilde{X}, \mathbb{Q}) = H^i(X_t, \mathbb{Q})$. Plaçons-nous dans le cas semi-stable où $\pi_1(D^*)$ tout entier agit de façon unipotente (ceci revient à remplacer D par un revêtement fini), et soit T l'action du générateur canonique de $\pi_1(D^*)$.

Par 3 et 8, on s'attend à ce que $H^i(\tilde{X}, \mathbb{Q}) \simeq H^i(X_t, \mathbb{Q})$ soit muni d'une filtration croissante W, que $\mathrm{Gr}_n^W(H^i(\tilde{X}, \mathbb{Q})$ soit muni d'une structure de Hodge de poids n, que $\log T(W_n) \subset W_{n-2}$ et que $\log T$ induise un morphisme de structures de Hodge

$$M_n: \quad \mathbb{Z}(-1) \otimes \mathrm{Gr}_n^W(H^i) \to \mathrm{Gr}_{n-2}^W(H^i).$$

On aimerait de plus que (8.2), et non seulement (8.3) et (8.4), aient un analogue.

On parvient en fait à définir, pour chaque vecteur u de l'espace tangent à D en $\{0\}$, une structure de Hodge mixte $\mathscr{H}_u$ sur $H^i(\tilde{X}, \mathbb{Z})$. La filtration W et les structures de Hodge sur les $\mathrm{Gr}_n^W(H^i)$ sont indépendantes de u, et la dépendance en u de $\mathscr{H}_u$ s'exprime simplement en terme de T. En analogie avec (8.2), on trouve que, quel que soit u, log T induit un homomorphisme de structures de Hodge mixtes

$$M: \quad \mathbb{Z}(1) \otimes H^i(\tilde{X}, \mathbb{Z}) \to H^i(\tilde{X}, \mathbb{Z}).$$

Enfin, l'analogie 8.5 n'est pas trompeuse (mais ici, le fait que $f \mid D^*$ soit supposé propre et lisse est sans doute essentiel). On prouve que

$$(\log T)^k: \quad \mathrm{Gr}^W_{n+k}(H^n(\tilde{X}, \mathbb{Q})) \to \mathrm{Gr}^W_{n-k}(H^n(\tilde{X}, \mathbb{Q}))$$

est un isomorphisme pour tout k (cf. [6], IV 6, cor. au th. 5). Ceci caractérise la filtration W. Jusqu'ici, on ne dispose d'un analogue du théorème de positivité de Hodge (cf. [6], IV 7, cor. au th. 7) que dans des cas très particuliers. On espère que les structures mixtes $\mathscr{H}_u$ déterminent le comportement asymptotique, pour $t \to 0$, de la famille de structures pures $H^i(X_t, \mathbb{Z})$ $(t \in D^*)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Deligne. — Théorie de Hodge, à paraître aux *Publ. Math. I. H. E. S.*, 40.

[2] M. Demazure. — Motifs des variétés algébriques, *Sém. Bourbaki* (1969-1970), exp. 365.

[3] J.-P. Serre. — Analogues kählériens de certaines conjectures de Weil, *Ann. of Math.*, 71, 2 (1960), pp. 392-394.

[4] — and J. Tate. — Good reduction of abelian varieties, *Ann. of Math.*, 88, 3 (1968), pp. 492-517.

[5] A. Weil. — Number of solutions of equations in finite fields, *Bull. Amer. math. Soc.*, 55 (1949), pp. 497-508.

[6] —. — Introduction à l'étude des variétés kählériennes, *Act. Sci. et Ind.*, 1267, Hermann (1958).

I. H. E. S.
35, route de Chartres,
91-Bures-sur-Yvette
(France)