Preuve d'une conjecture de Frenkel-Gaitsgory-Kazhdan-Vilonen

Ngô Bao Châu

Abstract

We prove a conjecture of Frenkel-Gaitsgory-Kazhdan-Vilonen on some exponential sums related to the geometric Langlands correspondence. Our main ingredients are the resolution of Lusztig scheme of lattices introduced by Laumon and the decomposition theorem of Beilinson-Bernstein-Deligne-Gabber.

1 L'énoncé

Soient $k = \mathbb{F}_q$ un corps fini, $\mathcal{O} = k[[\varpi]]$ le corps des séries formelles à une variable ϖ et F son corps des fractions. Soient d et n deux entiers naturels. A la suite de Lusztig ([6]), considérons le schéma X_d de type fini sur k dont l'ensemble des k-points est celui des réseaux $\mathcal{R} \subset \mathcal{O}^n$ tels que $\dim(\mathcal{O}^n/\mathcal{R}) = d$. L'action de $\mathrm{GL}(n,\mathcal{O})$ sur l'ensemble de ces réseaux peut être vue comme l'action d'un groupe algébrique G_d avec $G_d(k) = \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}/\varpi^d\mathcal{O})$, sur X_d.

Les orbites de cette action sont en nombre fini. Pour chaque n-partition λ de d, c'est-à-dire $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0)$ avec $|\lambda| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = d$, notons X_λ l'orbite de G_d passant par le réseau $\varpi^\lambda \mathcal{O}^n$ où ϖ^λ désigne la matrice diagonale $\mathrm{diag}\,(\varpi^{\lambda_1}, \ldots, \varpi^{\lambda_n})$. On a la stratification en parties localement fermées $X = \bigcup_{|\lambda|=n} X_\lambda$ qui reflète la décomposition de Cartan

$$\mathrm{GL}(n,F) = \coprod_{\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n} \mathrm{GL}(n,\mathcal{O})\varpi^\lambda \mathrm{GL}(n,\mathcal{O}).$$

En effet, on a

$$X_\lambda(k) = \mathrm{GL}(n,\mathcal{O})\varpi^\lambda \mathrm{GL}(n,\mathcal{O})/\mathrm{GL}(n,\mathcal{O}).$$

Pour chaque λ, notons $\bar{X}_\lambda$ l'adhérence de l'orbite X_λ dans X_d. Rappelons que $X_\mu \subset \bar{X}_\lambda$ si et seulement si $\mu \leq \lambda$ selon l'ordre partiel habituel entre les n-partitions de d :

$$\mu_1 + \cdots + \mu_i \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_i$$

pour tout $i = 1, \ldots, n-1$ ([6]).

Fixons un nombre premier ℓ différent de la caractéristique p de k. Soit $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_\ell$. Notons $\mathcal{A}_\lambda$ le complexe d'intersection ℓ-adique de $\bar{X}_\lambda$.

Pour chaque $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| = d$, notons S_α la partie localement fermée de X_d dont l'ensemble des k-points est celui des réseaux $\mathcal{R} \subset \mathcal{O}^n$ tels que pour tout i, on a

$$(\mathcal{R} \cap \bigoplus_{j=1}^{i} e_j\mathcal{O})/(\mathcal{R} \cap \bigoplus_{j=1}^{i-1} e_j\mathcal{O}) = (\bigoplus_{j=1}^{i-1} e_j\mathcal{O} \oplus \varpi^{\alpha_i} e_i\mathcal{O})/\bigoplus_{j=1}^{i-1} e_j\mathcal{O}$$

où (e_i) désigne la base standard de $\mathcal{O}^n$. La stratification $X_d = \bigcup_{|\alpha|=d} S_\alpha$ reflète la décomposition d'Iwasawa

$$\mathrm{GL}(n, F) = \coprod_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} N(F)\varpi^\alpha \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}),$$

où N désigne le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures unipotentes de $\mathrm{GL}(n)$. En effet, on a

$$S_\alpha(k) = N(F)\varpi^\alpha \mathrm{GL}(n, \mathcal{O})/\mathrm{GL}(n, \mathcal{O}).$$

La fonction trace de Frobenius de $\mathcal{A}_\lambda$ s'identifie naturellement à une fonction A_λ à support compact dans $\mathrm{GL}(n, F)$ qui est bi-$\mathrm{GL}(n, \mathcal{O})$-invariante. Fixons un caractère additif non trivial $\psi : k \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ et notons $\theta : N(F) \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ le caractère défini par

$$\theta(n) = \psi(\sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{res}\,(n_{i,i+1} \mathrm{d}\varpi)).$$

Considérons l'intégrale

$$I(\varpi^\alpha, A_\lambda) = \int_{N(F)} A_\lambda(n\varpi^\alpha)\theta(n)\mathrm{d}n,$$

où la mesure de Haar normalisée dn de $N(F)$ attribue à $N(\mathcal{O})$ la mesure 1. Dans [4], Frenkel, Gaitsgory, Kazhdan et Vilonen ont démontré le théorème suivant.

Théorème 1 *Si $\alpha \neq \lambda$, on a*

$$I(\varpi^\alpha, A_\lambda) = 0.$$

Si $\alpha = \lambda$, on a

$$I(\varpi^\lambda, A_\lambda) = q^{\langle \lambda, \delta \rangle}$$

où

$$\delta = \frac{1}{2}(n-1, n-3, \ldots, 1-n)$$

et où

$$\langle \lambda, \delta \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_i.$$

Lorsque la suite $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ n'est pas décroissante, on peut trouver $n' \in N(F) \cap \varpi^\alpha \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}) \varpi^{-\alpha}$ tel que $\theta(n') \neq 1$. Or, comme A_λ est bi-$\mathrm{GL}(n, \mathcal{O})$-invariante, on a

$$\begin{aligned} \int_{N(F)} A_\lambda(n\varpi^\alpha)\theta(n)\mathrm{d}n &= \int_{N(F)} A_\lambda(nn'\varpi^\alpha)\theta(n)\mathrm{d}n \\ &= \theta(n')^{-1} \int_{N(F)} A_\lambda(n\varpi^\alpha)\theta(n)\mathrm{d}n \end{aligned}$$

donc $I(\varpi^\alpha, A_\lambda) = 0$. Le cas intéressant est donc celui où α est une n-partition de d. Dans ce cas, on a

$$N(F) \cap \varpi^\alpha \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}) \varpi^{-\alpha} \subset N(\mathcal{O})$$

si bien que le caractère $N(F) \to k$ défini par

$$n \mapsto \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{res}\,(n_{i,i+1} \mathrm{d}\varpi)$$

induit un morphisme $h_\alpha : S_\alpha \to \mathbb{G}_a$. Frenkel, Gaitsgory, Kazhdan et Vilonen ont conjecturé dans [4] l'énoncé suivant.

Théorème 2 *Si $\alpha \neq \lambda$, on a*

$$\mathrm{R}\Gamma_c(S_\alpha \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_\lambda \otimes h_\alpha^* \mathcal{L}_\psi) = 0.$$

Si $\alpha = \lambda$, on a

$$\mathrm{R}\Gamma_c(S_\alpha \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_\lambda \otimes h_\alpha^* \mathcal{L}_\psi) = \bar{\mathbb{Q}}_\ell[-2\langle \lambda, \delta \rangle](-\langle \lambda, \delta \rangle).$$

Ici, $\bar{k}$ désigne une clôture algébrique de k et $\mathcal{L}_\psi$ le faisceau d'Artin-Schreier sur $\mathbb{G}_{a,k}$ associé à ψ.

On peut déduire de cet énoncé géométrique le théorème de Frenkel-Gaitsgory-Kazhdan-Vilonen cité plus haut, via la formule des traces de Grothendieck.

Voici les grandes lignes de la démonstration du théorème 2.

On considère d'abord le cas plus facile $\alpha = \lambda$. On démontre que si $\mu < \lambda$ l'intersection $S_\lambda \cap X_\mu$ est vide si bien que celle de S_λ avec le support de $\mathcal{A}_\lambda$ est incluse dans X_λ. On démontre aussi que $S_\lambda \cap X_\lambda$ est un espace affine et que le morphisme h_α restreint à $S_\lambda \cap X_\lambda$ est constant à valeur 0 d'où le résultat dans le cas $\alpha = \lambda$. C'est le contenu de la section 2.

Pour démontrer l'assertion concernant le cas $\alpha \neq \lambda$, on utilise la résolution suivante du schéma X_d. Cette résolution a été introduite par Laumon dans un contexte légèrement différent ([5]). Soit $\tilde{X}_d$ le schéma de type fini sur k dont l'ensemble des k-points est celui des drapeaux de réseaux

$$\mathcal{O}^n = \mathcal{R}_0 \supset \mathcal{R}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{R}_d = \mathcal{R}$$

tels que $\dim(R_{i-1}/\mathcal{R}_i) = 1$. Le morphisme $\pi : \tilde{X}_d \to X_d$ défini par

$$(\mathcal{R}_0 \supset \mathcal{R}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{R}_n) \mapsto \mathcal{R}_n$$

est une résolution semi-petite au sens de Goresky et MacPherson. De plus, elle est équivariante relativement à l'action de G_d si bien qu'on a

$$\mathrm{R}\pi_* \bar{\mathbb{Q}}_\ell[\dim(X_d)](\frac{1}{2}\dim(X_d)) = \bigoplus_\lambda \mathcal{A}_\lambda \boxtimes V_\lambda$$

où les V_λ sont des $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-espaces vectoriels, grâce au théorème de décomposition ([1]) et à ce que les sous-groupes stabilisateurs dans G_d sont tous géométriquement connexes.

Par comparaison avec la construction de Lusztig de la correspondance de Springer, on voit que V_λ est l'espace de la représentation du groupe symétrique $\mathfrak{S}_d$ correspondant à la partition λ de d ([6],[2]). On utilisera seulement le fait que la dimension V_λ est égal au nombre de λ-tableaux standards.

Il suffit clairement de démontrer que

$$\begin{aligned} &\mathrm{R}\Gamma_c(S_\lambda \otimes_k \bar{k}, \mathrm{R}\pi_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell \otimes h_\lambda^*\mathcal{L}_\psi) \\ &= V_\lambda[-2\langle\lambda,\delta\rangle - d(n-1)](-\langle\lambda,\delta\rangle - \frac{1}{2}d(n-1)). \end{aligned}$$

Pour cela, on étudie la géométrie de $\tilde{S}_\lambda = S_\lambda \times_{X_d} \tilde{X}_d$. On a

$$\mathrm{R}\Gamma_c(S_\lambda \otimes_k \bar{k}, \mathrm{R}\pi_*\bar{\mathbb{Q}}_\ell \otimes h_\lambda^*\mathcal{L}_\psi) = \mathrm{R}\Gamma_c(\tilde{S}_\lambda \otimes_k \bar{k}, \tilde{h}_\lambda^*\mathcal{L}_\psi)$$

où $\tilde{h}_\lambda$ est le morphisme composé $h_\lambda \circ (\pi|_{\tilde{S}_\lambda})$.

On démontre que $\tilde{S}_\lambda$ est une réunion disjointe de parties localement fermées $\tilde{S}_\tau$ qui sont des espaces affines de même dimension

$$\langle\lambda,\delta\rangle + \frac{1}{2}d(n-1) = \langle\lambda,(n-1,\ldots,1,0)\rangle$$

où τ parcourt l'ensemble des suites $(\alpha^i)_{i=0}^d$ avec $\alpha^i = (\alpha^i_j)_{j=1}^n \in \mathbb{N}^n$ vérifiant

- $\alpha^{i-1}_j \leq \alpha^i_j$ pour $i = 1,\ldots,d$ et pour $j = 1,\ldots,n$;
- $|\alpha^i| = \sum_{j=1}^n \alpha^i_j = i$ pour $i = 0,\ldots,d$;
- $\alpha^d = \lambda$.

Si l'une de ces suites α^i n'est pas décroissante, on démontre comme dans le cas évoqué plus haut où λ n'est pas décroissante, que

$$\mathrm{R}\Gamma_c(S_\tau \otimes_k \bar{k}, \tilde{h}_\lambda^*\mathcal{L}_\psi) = 0.$$

Les τ dont les membres α_i sont tous des suites décroissantes d'entiers naturels, correspondent bijectivement aux λ-tableaux standards. C'est le contenu de la section 3.

2 Etude de S_α

Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, S_α est isomorphe à un espace affine dont on peut construire les coordonnées explicites à l'aide de l'uniformisante ϖ. Notons $\bar{\mathcal{O}} = \mathcal{O} \otimes_k \bar{k}$ et $\bar{F} = F \otimes_k \bar{k}$.

Lemme **2.1** *Pour tout réseau $\mathcal{R} \in S_\alpha(\bar{k})$, il existe une unique matrice triangulaire supérieure de la forme*

$$x = \begin{pmatrix} \varpi^{\alpha_1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ & \varpi^{\alpha_2} & \cdots & x_{2,n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \varpi^{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

où les $x_{i,j}$ sont des polynômes en ϖ à coefficients dans $\bar{k}$ de degré strictement inférieur à α_i, telle que $\mathcal{R} = x\bar{\mathcal{O}}^n$.

Démonstration. Du fait que $\mathcal{R} \in S_\alpha(\bar{k})$, il se décompose en

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}' \oplus (\varpi^{\alpha_n} e_n + y)\bar{\mathcal{O}}$$

où

$$\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cap \bigoplus_{j=1}^{n-1} e_j \bar{\mathcal{O}} \in S_{\alpha'}(\bar{k})$$

avec $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ et où $y \in \bigoplus_{j=1}^{n-1} e_j \bar{\mathcal{O}}$ est bien déterminé modulo $\mathcal{R}'$.

Le lemme résulte de ce que l'espace vectoriel $V_{\alpha'}$ formé des éléments de la forme $\sum_{j=1}^{n-1} x_j e_j$ où x_j sont des polynômes de degré strictement inférieur à α_j est supplémentaire à tout $\mathcal{R}' \in S'_\alpha(\bar{k})$ dans $\bigoplus_{j=1}^{n-1} e_j \bar{\mathcal{O}}$. □

Corollaire **2.2** *S_α est isomorphe à l'espace affine de dimension*

$$\langle \alpha, (n-1, \ldots, 1, 0) \rangle.$$

Lemme **2.3**

1. *Soient μ et λ deux n-partitions de d avec $\mu < \lambda$. On a $S_\lambda \cap X_\mu = \emptyset$.*
2. *L'intersection $S_\lambda \cap X_\lambda$ est un espace affine de dimension $2\langle \lambda, \delta \rangle$.*
3. *La restriction de h_λ à $S_\lambda \cap X_\lambda$ est constante de valeur 0.*

Démonstration.

1. Soit $\mathcal{R} = x\bar{\mathcal{O}}^n \in (S_\lambda \cap X_\mu)(\bar{k})$ où x est une matrice comme dans le lemme précédent et où μ et λ sont deux n-partitions de d. Tous les mineurs d'ordre i de x sont alors divisibles par $\varpi^{\mu_{n-i+1}+\cdots+\mu_n}$. En considérant la sous-matrice formée des i dernières lignes et des i dernière colonnes, on obtient l'inégalité

   $$\lambda_{n-i+1} + \cdots + \lambda_n \geq \mu_{n-i+1} + \cdots + \mu_n$$

   d'où $\mu \geq \lambda$.

2. Supposons maintenant que $\mu = \lambda$. Considérons la sous-matrice $(i+1) \times (i+1)$ de x incluant le coefficient $x_{j,n-i}$ avec $j < n-i$ et incluant les i dernières lignes ainsi que les i dernières colonnes de x. Il résulte de la condition portée sur les mineurs que le polynôme $x_{j,n-i}$ est divisible par $\varpi^{\lambda_{n-i}}$.

   Si les coefficients $x_{j,k}$ sont divisibles par ϖ^{λ_k} pour tout $j < k$, alors $x \in N(\bar{\mathcal{O}})\varpi^\lambda$ si bien que $x\bar{\mathcal{O}}^n \in (S_\lambda \cap X_\lambda)(\bar{k})$.

   Il s'ensuit que $S_\lambda \cap X_\lambda$ est isomorphe à l'espace affine de dimension

   $$\begin{aligned}&\langle \lambda, (n-1, \ldots, 1, 0) \rangle - \langle \lambda, (0, 1, \ldots, n-1) \rangle \\ &= \langle \lambda, (n-1, n-3, \ldots, 1-n) \rangle.\end{aligned}$$

3. On a démontré que

   $$(S_\lambda \cap X_\lambda)(\bar{k}) = N(\bar{\mathcal{O}})\varpi^\lambda \bar{\mathcal{O}}^n$$

   si bien que la restriction de h_λ à $S_\lambda \cap X_\lambda$ est constante et de valeur nulle. □

Corollaire **2.4** *On a un isomorphisme*

$$\mathrm{R}\Gamma_c(S_\lambda \otimes_k \bar{k}, \mathcal{A}_\lambda \otimes h_\lambda^* \mathcal{L}_\psi) = \bar{\mathbb{Q}}_\ell[-2\langle \lambda, \delta \rangle](-\langle \lambda, \delta \rangle).$$

Démonstration. On sait d'après le lemme précédent que

$$S_\lambda \cap \bar{X}_\lambda = S_\lambda \cap X_\lambda$$

si bien que la restriction de $\mathcal{A}_\lambda$ à S_λ est isomorphe à $\bar{\mathbb{Q}}_\ell[2\langle \lambda, \delta \rangle](\langle \lambda, \delta \rangle)$ supporté par l'espace affine $S_\lambda \cap X_\lambda$ de dimension $2\langle \lambda, \delta \rangle$. □

3 Etude de $\tilde{S}_\lambda$

Posons $\tilde{S}_\lambda = S_\lambda \times_{X_d} \tilde{X}_d$. L'ensemble des $\bar{k}$-points de $\tilde{S}_\lambda$ est l'ensemble des drapeaux de réseaux

$$\bar{\mathcal{O}}^n = \mathcal{R}_0 \supset \mathcal{R}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{R}_d = \mathcal{R}$$

où $\dim_{\bar{k}}(\mathcal{R}_{i-1}/\mathcal{R}_i) = 1$ et où $\mathcal{R} \in S_\lambda(\bar{k})$.

Un tel drapeau étant fixé, Pour chaque $i = 0, \ldots, d$, il existe $\alpha^i \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha^i| = i$ tel que $\mathcal{R}_i \in S_{\alpha_i}(\bar{k})$ Le schéma $\tilde{S}_\alpha$ est ainsi stratifié selon la donnée d'une matrice $\tau = (\alpha^i_j)^{0\leq i\leq d}_{1\leq j\leq n} \in \mathbb{N}^{(d+1)n}$ telle que

- $\alpha^{i-1}_j \leq \alpha^i_j$;
- $\sum_{j=1}^n \alpha^i_j = i$;
- $\alpha^d = \lambda$.

Notons S_τ la strate correspondant à τ. Désignons par $\tilde{h}_\lambda$ la restriction de $h_\lambda \circ \pi|_{\tilde{S}_\lambda}$ à S_τ.

Proposition **3.1** *S'il existe un d' avec $1 \leq d' \leq d-1$ tel que la suite $(\alpha^{d'}_j)_{1\leq j\leq n}$ n'est pas décroissante, alors on a*

$$\mathrm{R}\Gamma_c(S_\tau \otimes_k \bar{k}, \tilde{h}^*_\lambda \mathcal{L}_\psi) = 0.$$

Démonstration. Soit $\tau' = (\alpha^{i'}_j)^{0\leq i\leq d'}_{1\leq j\leq n}$ la sous-matrice formée des $d'+1$ premières colonnes de τ. Notons $\pi' : S_\tau \to S_{\tau'}$ le morphisme défini par

$$\pi'(\mathcal{R}_0 \supset \mathcal{R}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{R}_d) = (\mathcal{R}_0 \supset \mathcal{R}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{R}_{d'}).$$

On va démontrer que $\mathrm{R}\pi'_* \tilde{h}^*_\lambda \mathcal{L}_\psi = 0$ ce qui implique par la suite spectrale de Leray que

$$\mathrm{R}\Gamma_c(S_\tau \otimes_k \bar{k}, \tilde{h}^*_\lambda \mathcal{L}_\psi) = 0.$$

Fixons un point géométrique

$$\mathcal{R}_\bullet = (\mathcal{R}_0 \supset \cdots \supset \mathcal{R}_{d'} = \mathcal{R}') \in S_{\tau'}(\bar{k}).$$

Le groupe $\mathrm{GL}(\mathcal{R}') \cap N(\bar{F})$ vu comme $\bar{k}$-groupe algébrique de dimension infinie, agit naturellement sur la fibre

$$\pi'^{-1}(\mathcal{R}_\bullet) = \{\mathcal{R}' = \mathcal{R}_{d'} \supset \mathcal{R}_{d'+1} \supset \cdots \supset \mathcal{R}_d \mid \dim_{\bar{k}}(\mathcal{R}_{i-1}/\mathcal{R}_i) = 1 \text{ et } \mathcal{R}_i \in S_{\alpha_i}(\bar{k})\}.$$

Lemme **3.2** *Si $\alpha^{d'}$ n'est pas décroissante, pour tout $\mathcal{R}' \in S_{\alpha^{d'}}(\bar{k})$, il existe un sous-groupe*

$$\mathbb{G}_{a,\bar{k}} \subset \mathrm{GL}(\mathcal{R}') \cap N(\bar{F})$$

tel que la restriction du caractère $N(\bar{F}) \to \mathbb{G}_{a,\bar{k}}$ défini par

$$n \mapsto \mathrm{res}\,(\sum_{i=1}^{n-1} n_{i,i+1}\mathrm{d}\varpi)$$

à ce sous-groupe est l'identité de $\mathbb{G}_{a,\bar{k}}$.

Démonstration du lemme. Considérons d'abord le cas $\mathcal{R}' = \varpi^{\alpha^{d'}}\bar{\mathcal{O}}^n$. Il existe un entier j tel que $\alpha_j^{d'} < \alpha_{j+1}^{d'}$. Le sous-groupe formé des éléments $n \in N(\bar{F})$ tels que $n_{k,l} = 0$ avec $k < l$, $(k,l) \neq (j, j+1)$ et $n_{j,j+1} \in \mathbb{G}_{a,\bar{k}}\varpi^{-1}\mathrm{d}\varpi$ stabilise le réseau $\varpi^{\alpha^{d'}}\bar{\mathcal{O}}^n$ et donc remplit toutes les conditions requises par le lemme.

Si $\mathcal{R} = x\bar{\mathcal{O}}^n$ pour un certain $x \in N(\bar{F})$, il suffit de conjuguer le $\mathbb{G}_{a,\bar{k}}$ précédent par x. $\square$

Fin de la démonstration de la proposition. Notons $Z = \pi'^{-1}(\mathcal{R}_\bullet)$ et h la restriction de $\tilde{h}_\lambda$ à Z. On a une action ξ de $\mathbb{G}_a$ sur Z tel que $h(\xi(t,z)) = t + h(z)$ pour tout $t \in \bar{k}$ et $z \in Z(\bar{k})$. En particulier, on a un isomorphisme

$$\xi^* h^* \mathcal{L}_\psi \tilde{\rightarrow} h^*\mathcal{L}_\psi \boxtimes \mathcal{L}_\psi.$$

La proposition résulte de lemme général suivant qui est déjà implicite dans [3].

Lemme **3.3** *Soit Z un schéma de type fini sur $\bar{k}$, muni d'une action $\xi : \mathbb{G}_a \times Z \to Z$. Soit $\mathcal{F}$ un complexe borné sur Z muni d'un isomorphisme $\xi^*\mathcal{F} = \mathcal{L}_\psi \boxtimes \mathcal{F}$. Alors on a $\mathrm{R}\Gamma_c(Z, \mathcal{F}) = 0$.*

Démonstration. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G}_a \times Z \arrow[r, "\Xi"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{\mathbb{G}_a}"'] & \mathbb{G}_a \times Z \arrow[d, "\mathrm{pr}_{\mathbb{G}_a}"] \\
\mathbb{G}_a \arrow[r, "\mathrm{Id}"'] & \mathbb{G}_a
\end{tikzcd}$$

où

$$\Xi(t,z) = (t, \xi(t,z))$$

est un isomorphisme. L'isomorphisme

$$\Xi^*(\bar{\mathbb{Q}}_\ell \boxtimes \mathcal{F}) \tilde{\to} \mathcal{L}_\psi \boxtimes \mathcal{F}$$

induit par adjonction un isomorphisme

$$\bar{\mathbb{Q}}_\ell \boxtimes \mathcal{F} \tilde{\to} \Xi_*(\mathcal{L}_\psi \boxtimes \mathcal{F})$$

et donc un isomorphisme

$$\bar{\mathbb{Q}}_\ell \boxtimes \mathrm{R}\Gamma_c(Z, \mathcal{F}) \tilde{\to} \mathcal{L}_\psi \boxtimes \mathrm{R}\Gamma_c(Z, \mathcal{F})$$

lequel ne peut exister que si $\mathrm{R}\Gamma_c(Z, \mathcal{F}) = 0$. □

PROPOSITION **3.4** *Si pour tout $i = 0, \ldots, d$, α^i est une suite décroissante alors on a un isomorphisme*

$$\begin{aligned} &\mathrm{R}\Gamma_c(S_\tau \otimes_k \bar{k}, \tilde{h}_\lambda^* \mathcal{L}_\psi) \\ &= \bar{\mathbb{Q}}_\ell[-2\langle \lambda, (n-1, \ldots, 1, 0)\rangle](-\langle \lambda, (n-1, \ldots, 1, 0)\rangle). \end{aligned}$$

Démonstration. La proposition résulte du lemme suivant.

LEMME **3.5** *1. Pour tout τ, S_τ est isomorphe à un espace affine de dimension*

$$\langle \lambda, (n-1, \ldots, 1, 0)\rangle.$$

2. Si de plus, pour tout i, α^i est une suite décroissante alors la restriction de $\tilde{h}_\lambda$ à S_τ est constante à l'image nulle.

Démonstration.

1. Pour tout $i = 1, \ldots, d$, vu les contraintes portées sur les α_j^i, il existe un unique j tel que $\alpha_j^i = \alpha_j^{i-1} + 1$. On peut en fait voir τ comme une application
$$\{1, 2, \ldots, d\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$$
telle que pour tout $j = 1, \ldots, n$, on a $|\tau^{-1}(j)| = \lambda_j$.

On démontre par récurrence sur d que S_τ est isomorphe à un espace affine de dimension

$$\sum_{i=1}^{d}(n-\tau(i)) = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j(n-j).$$

Notons τ' la matrice $(\alpha_j^i)_{1\leq j\leq n}^{0\leq i\leq d-1} \in \mathbb{N}^{dn}$. Supposons que $S_{\tau'}$ est isomorphe à un espace affine de dimension

$$\sum_{i=1}^{d-1}(n-\tau(i))$$

Notons $\mathcal{F}$ le fibré vectoriel de rang n dont la fibre au-dessus d'un point

$$\mathcal{R}'_\bullet = (\mathcal{R}_0 \supset \mathcal{R}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{R}_{d-1} = \mathcal{R}') \in S_{\tau'}(\bar{k})$$

est l'espace vectoriel $\mathcal{R}'/\varpi\mathcal{R}'$.

On peut écrire de manière unique $\mathcal{R}' = x'\bar{\mathcal{O}}^n$ avec une matrice triangulaire supérieure x' vérifiant les conditions de l'énoncé du lemme 2.1. En particulier, on a

$$\mathcal{F}_{\mathcal{R}'_\bullet} = \bigoplus_{i=1}^{n}\epsilon_i\bar{k}$$

où ϵ_i est la réduction de $e_i\varpi^{\alpha_i} + \sum_{j=1}^{i-1}x_{j,i}e_j$ modulo $\varpi\mathcal{R}'$ si bien que le fibré $\mathcal{F}$ est en fait un fibré trivial.

De plus, la donnée d'un $\bar{k}$-point $\mathcal{R}_\bullet$ de S_τ au-dessus de $\mathcal{R}'_\bullet$ est équivalente à la donnée d'un sous-espace vectoriel de codimension 1 de $\mathcal{F}_{\mathcal{R}'_\bullet}$ qui contient

$$\epsilon_1\bar{k} \oplus \cdots \oplus \epsilon_{\tau(d)-1}\bar{k}$$

mais qui ne contient pas

$$\epsilon_1\bar{k} \oplus \cdots \oplus \epsilon_{\tau(d)}\bar{k}.$$

Ce sous-espace vectoriel s'écrit de manière unique sous la forme

$$\bigoplus_{j=1}^{\tau(d)-1}\epsilon_j\bar{k} \oplus (x_{\tau(d)+1}\epsilon_{\tau(d)} + \epsilon_{\tau(d)+1})\bar{k} \oplus \cdots \oplus (x_n\epsilon_{\tau(d)} + \epsilon_n)\bar{k}$$

si bien qu'on a un isomorphisme

$$S_{\tau'} \times \mathbb{G}_a{}^{n-\tau(d)} \tilde{\to} S_\tau.$$

Compte tenu de l'hypothèse de récurrence, S_τ est isomorphe à un espace affine de dimension $\sum_{i=1}^{d}(n-\tau(i))$.

2. Supposons que toutes les suites α^i sont décroissantes. On démontre par récurrence sur d que si

$$\mathcal{R}_\bullet = (\bar{\mathcal{O}}^n = \mathcal{R}_0 \supset \mathcal{R}_1 \supset \cdots \supset \mathcal{R}_d = \mathcal{R}) \in S_\tau(\bar{k})$$

alors

$$\mathcal{R} \in \mathrm{N}(\bar{\mathcal{O}})\varpi^\lambda \bar{\mathcal{O}}^n.$$

Par récurrence, on peut supposer que

$$\mathcal{R}' = \mathcal{R}_{d-1} \in N(\bar{\mathcal{O}})\varpi^{\alpha'}\bar{\mathcal{O}}^{n-1}$$

où $\alpha' = \alpha^{d-1}$ et quitte à utiliser l'action de $N(\bar{\mathcal{O}})$, on peut en fait supposer que

$$\mathcal{R}' = \varpi^{\alpha'}\bar{\mathcal{O}}^n.$$

Notons $l = \tau(d)$. On peut écrire

$$\mathcal{R} = \bigoplus_{j=1}^{l} \varpi^{\lambda_j} e_j \bar{\mathcal{O}} \oplus \bigoplus_{j=l+1}^{n} (\varpi^{\lambda_j} e_j + x_j \varpi^{\lambda_l - 1} e_l)\bar{\mathcal{O}}$$

avec $x_j \in \bar{k}$ pour $j = l+1, \ldots, n$. Du fait que $\lambda_l - 1 \geq \lambda_j$ pour tout $j = l+1, \ldots, n$, on a $\mathcal{R} \in N(\bar{\mathcal{O}})\varpi^\lambda \bar{\mathcal{O}}^n$. $\square$

Fin de la démonstration du théorème 2. Pour terminer la démonstration, il suffit de montrer que les matrices $\tau = (\alpha_j^i)_{1\leq j\leq n}^{0\leq i\leq d} \in \mathbb{N}^{(d+1)n}$ telles que

- $\alpha_j^{i-1} \leq \alpha_j^i$;
- $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i = i$;
- $\alpha^d = \lambda$;

- $\alpha^i_{j-1} \geq \alpha^i_j$.

sont en correspondance univoque avec les λ-tableaux standards.

On a vu que les τ vérifiant les trois premières conditions et ne vérifiant pas obligatoirement la quatrième peuvent être vus comme une application

$$\tau : \{1, \ldots, d\} \to \{1, \ldots, n\}$$

telle que pour tout j, on a $|\tau^{-1}(j)| = \lambda_j$. Etant donnée une telle application, on peut inscrire successivement $1, 2, \ldots, d$ dans le diagramme de Young λ en écrivant le nombre i dans la première case encore vide de la $j = \tau(i)$-ème ligne.

Un tel tableau est standard si et seulement si

$$\alpha^i_{j-1} \geq \alpha^i_j$$

pour tous les $i = 1, \ldots, d$ et $j = 1, \ldots, n$.

On peut aussi raisonner de manière plus directe comme suit. L'espace vectoriel V_λ admet une base indexée par l'ensemble des composantes irréductibles de dimension maximale de la fibre de $\pi : \tilde{X}_d \to X_d$ au-dessus d'un point géométrique de X_λ par exemple de $\varpi^\lambda \bar{\mathcal{O}}^n \in X_\lambda(\bar{k})$. En utilisant les lemmes 3.2 et 3.5, on voit facilement que ces composantes sont précisément les fibres des S_τ au-dessus de $\varpi^\lambda \bar{\mathcal{O}}^n$ pour les τ dont toutes les suites α^i sont décroissantes.

Remerciement Je voudrais exprimer ma profonde gratitude envers Gérard Laumon qui, par ses encouragements, m'a constamment soutenu.

Références

[1] A. Beilinson, J. Bernstein et P. Deligne. *Faisceaux pervers*, *Astérisque* 100. Soc.Math.de France, 1982.

[2] W. Borho and R. MacPherson. Représentations des groupes de Weyl et homologie d'intersection pour les variétés nilpotentes. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 292:707–710, 1981.

[3] P. Deligne. Application de la formule des traces aux sommes trigonométriques. In *SGA 4 1/2*, *LNM* 569. Springer, 1977.

[4] E. Frenkel, D. Gaitsgory, D. Kazhdan et K. Vilonen. Geometric realization of Whittaker functions and Langlands conjecture. *Preprint alg-geom* 9703022 ,1997.

[5] G. Laumon. Correspondance de Langlands géométrique pour les corps de fonctions. *Duke Math. J.*, 54:309–359, 1987.

[6] G. Lusztig. Green polynomials and singularities of unipotent classes. *Adv. Math.*, 42:208–227, 1983.

Ngô Bao Châu
INSTITUT GALILÉE
av. J.-B. Clément
93430 Villetaneuse
FRANCE
ngo@math.univ-paris13.fr