Jean-Pierre Serre

Groupes p-divisibles

Séminaire N. Bourbaki, 1968, exp. n° 318, p. 73-86
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1966-1968__10__73_0>

Séminaire BOURBAKI
19e année, 1966/67, n° 318 Novembre 1966

GROUPES p-DIVISIBLES (d'après J. TATE)

par Jean-Pierre SERRE

On sait que de nombreuses propriétés des variétés abéliennes (par exemple celles liées à leur fonction zêta) peuvent se "lire" sur le <u>groupe des points d'ordre fini</u> de la variété, considéré comme module galoisien. Dans le cas local, l'étude de ce groupe s'est d'abord faite en utilisant le <u>groupe formel</u> (au sens de Dieudonné et Lazard) attaché à la variété abélienne ; c'est ainsi, par exemple, que l'on démontre le théorème de Lutz-Nagell [7], ou que l'on étudie les courbes elliptiques ayant une réduction de hauteur 2 (cf.[9]). Toutefois, on s'est aperçu récemment qu'il y a intérêt à remplacer les groupes formels par une nouvelle notion, plus souple, celle de <u>groupe</u> p-<u>divisible</u>. Le but de cet exposé est d'indiquer les principaux résultats connus sur ces groupes. Ces résultats sont en très grande partie dus à Tate - parfois en collaboration. Ils ont été exposés dans plusieurs séminaires : Woods Hole [4], Collège de France [10], Driebergen [13].

§ 1. <u>La notion de groupe</u> p-<u>divisible</u>.

Dans tout ce qui suit, p désigne un nombre premier.

Soit R un anneau commutatif (ou un schéma, si l'on préfère) et soit h un entier $\geqslant 0$. Un <u>groupe</u> p-<u>divisible de hauteur</u> h sur R est un système

$$G = (G_n , i_n), \qquad n \geqslant 1 ,$$

vérifiant les conditions suivantes :

(a) G_n est un schéma en groupes commutatif [1] sur R, localement libre de rang p^{nh}.

(b) $i_n : G_n \to G_{n+1}$ est un homomorphisme de schémas en groupes.

(c) La suite

$$0 \to G_n \xrightarrow{i_n} G_{n+1} \xrightarrow{p^n} G_{n+1}$$

est exacte.

Si A_n désigne l'algèbre affine associée à G_n, la condition (a) signifie que A_n est muni d'une structure de bigèbre vérifiant certaines conditions (bicommutativité et biassociativité, notamment), et que A_n est un R-module projectif de rang p^{nh}. Lorsque R est local (ce qui est le cas essentiel dans les applications), cette dernière condition revient simplement à dire que A_n est un R-module <u>libre</u> de rang p^{nh}.

Quant à (c), elle signifie simplement que G_n s'identifie, au moyen de i_n, au <u>noyau</u> de $p^n : G_{n+1} \to G_{n+1}$; en particulier, i_n est une <u>immersion fermée</u>, et l'on peut considérer G comme la "réunion" des G_n (exactement comme le groupe $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ est réunion des groupes $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$).

<u>Remarque</u>. Si n, m sont des entiers $\geqslant 0$, la multiplication par p^n applique G_{n+m} dans G_m, et l'on démontre que l'on a une suite <u>exacte</u> (au sens de [1], exposé IV) :

$$0 \to G_n \to G_{n+m} \to G_m \to 0 .$$

<u>Exemples de groupes p-divisibles.</u>

1/ <u>Groupes étales.</u>

Supposons que Spec(R) soit connexe, et soit π son groupe fondamental. Soit T un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang h sur lequel π opère continûment ;

les groupes $T_n = T/p^nT$ forment un système inductif de π-modules. On en déduit, par un procédé standard, un système (G_n, i_n), où les G_n sont étales sur R ; ce système est un groupe p-divisible de hauteur h. Inversement, tout groupe p-divisible étale de hauteur h s'obtient ainsi, de façon essentiellement unique.

Ceci s'applique notamment lorsque R est un corps, le groupe π étant simplement le groupe de Galois de la clôture algébrique de R. D'où une équivalence "groupes p-divisibles étales" $\Leftrightarrow$ "représentations p-adiques de π". De plus, lorsque R est de caractéristique différente de p, tout groupe p-divisible sur R est étale.

2/ Groupes définis par des schémas abéliens.

Soit A un schéma abélien sur R, de dimension relative r. Le noyau A_n de $p^n : A \to A$ est localement libre de rang p^{nh}, avec $h = 2r$. Le système A(p) formé des A_n est un groupe p-divisible de hauteur h.

Lorsque R est un corps de caractéristique $\neq$ p, le groupe A(p) est étale, et équivaut (d'après 1/ ci-dessus) à la donnée du "module de Tate" $T_p(A)$, considéré comme module galoisien.

3/ Dual d'un groupe p-divisible.

Soit $G = (G_n , i_n)$ un groupe p-divisible de hauteur h. Le dual (au sens de Cartier) G'_n de G_n est défini par la bigèbre duale de celle de G_n ; on peut aussi le définir comme représentant le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{gr}(G_n , \mathbb{G}_m)$, cf. [1], exposé VIII. Les homomorphismes $G_{n+1} \to G_n$ induits par la multiplication par p définissent par transposition des homomorphismes $i'_n : G'_n \to G'_{n+1}$. Le système $G' = (G'_n , i'_n)$ est un groupe p-divisible de hauteur h, appelé le dual de G.

Le dual d'un groupe étale est un groupe de type multiplicatif, au sens de [1], loc.cit.

4/ Groupes p-divisibles et groupes formels.

Supposons, pour simplifier, que R soit un anneau local noethérien complet, de caractéristique résiduelle p. Soit Γ un groupe formel commutatif de dimension d sur R, au sens de Dieudonné-Lazard ; l'algèbre Λ associée à Γ est isomorphe à $R[[T_1,\ldots,T_d]]$. Supposons en outre que la multiplication par p dans Γ soit une isogénie de degré p^h (i.e. fasse de Λ un Λ-module libre de rang p^h). On peut alors définir le noyau Γ_n de $p^n : \Gamma \to \Gamma$ comme un schéma en groupes sur R. Le système $\Gamma(p)$ des Γ_n est un groupe p-divisible de hauteur h sur R ; sa connaissance équivaut à celle de Γ (en effet, Λ est limite projective des algèbres des Γ_n). On obtient ainsi une équivalence de catégories entre :

- groupes p-divisibles connexes
- groupes formels commutatifs où p est une isogénie.

De plus, on montre que tout groupe p-divisible G sur R est extension d'un groupe étale par un groupe connexe G°, sa composante neutre. La dimension d de G° (considéré comme groupe formel) est appelée la dimension de G. Si G' est le dual de G, et si $d' = \dim(G')$, on a :

$$h = d + d' .$$

Cela résulte des propriétés des opérateurs V et F de la théorie de Dieudonné, cf. par exemple Manin [8], ou [1], exposé VII.

Cas particulier. Soit E une courbe elliptique définie sur R, et ayant une "bonne réduction" (i.e. définissant un schéma abélien). Le groupe p-divisible $E(p)$ attaché à E a pour invariants $d = 1$, $d' = 1$ et $h = 2$. Si la réduction $\tilde{E}$ de E est de hauteur 2 (cf.[9], § 2), $E(p)$ est connexe ; c'est un groupe formel de hauteur 2. Si $\tilde{E}$ est de hauteur 1, $E(p)$ est une extension d'un groupe formel de hauteur 1 (de type multiplicatif) par un groupe étale de hauteur 1 correspondant aux points d'ordre une puissance de p de $\tilde{E}$; lorsque cette extension est <u>triviale</u>, E est le "relèvement canonique" de $\tilde{E}$, cf. § 5.

§ 2. <u>Le premier théorème fondamental</u>.(Tate [13]).

On suppose R intègre, intégralement clos, noethérien, et de corps des fractions K de caractéristique zéro. On s'intéresse au foncteur qui associe à tout groupe p-divisible G sur R le groupe correspondant $G_K = G \times_R K$ sur K.

THÉORÈME 1. <u>Sous les hypothèses ci-dessus, le foncteur</u> $G \longmapsto G \times_R K$ <u>est pleinement fidèle</u>.

Noter que, puisque K est de caractéristique zéro, le groupe G_K est <u>étale</u>, donc équivaut à la donnée d'un module galoisien T_pG, appelé le module de Tate de G. Le théorème 1 peut donc se reformuler ainsi :

THÉORÈME 1'. <u>Si</u> G_1 <u>et</u> G_2 <u>sont deux groupes</u> p-<u>divisibles sur</u> R, <u>l'homomorphisme canonique</u>

$$\mathrm{Hom}_R(G_1\ ,\ G_2) \rightarrow \mathrm{Hom}_{Gal}(T_pG_1\ ,\ T_pG_2)$$

<u>est un isomorphisme</u>.

COROLLAIRE 1. <u>Si</u> $f : G_1 \rightarrow G_2$ <u>définit un isomorphisme de</u> T_pG_1 <u>sur</u> T_pG_2, <u>c'est un isomorphisme</u>.

COROLLAIRE 2. <u>Si</u> G <u>est un groupe</u> p-<u>divisible, tout endomorphisme du module galoisien</u> T_pG <u>provient d'un endomorphisme de</u> G.

Pour la démonstration de ces résultats, voir Tate [13]. Indiquons simplement quelles sont les différentes étapes :

(i) On se ramène au cas où R est un anneau de valuation discrète complet, de caractéristique résiduelle p, et de corps résiduel algébriquement clos.

(ii) Si d et d' désignent les dimensions de G et G' (cf. § 1, 4/), on montre que le module galoisien T_pG détermine (d, d'). On utilise pour cela les propriétés de T_pG données au § 4 ci-après (cor. au théorème 2).

(iii) On montre que le discriminant de l'algèbre A_n associée au groupe G_n est engendré par $p^{dnp^{hn}}$.

(iv) En combinant (ii) et (iii), on établit le cor. 1.

(v) On déduit le théorème 1' du corollaire 1 par une construction de "graphe" convenable.

Remarques.

1) On ignore si le théorème 1 reste vrai lorsque K est un corps de caractéristique p.

2) On aimerait pouvoir compléter le théorème 1' en disant quels sont les modules galoisiens qui sont de la forme T_pG, avec G p-divisible. Les résultats du § 4 donnent en tout cas des conditions nécessaires (cf. cor. au théorème 3).

§ 3. Quelques propriétés de la complétion de la clôture algébrique d'un corps local. (Tate [13], Sen (non-publié).)

Soit R un anneau de valuation discrète complet, de corps résiduel k de caractéristique p, et de corps des fractions K. Soit $\bar{K}$ une clôture algébrique de K, et soit π le groupe de Galois de $\bar{K}/K$. On sait que la valuation de K se prolonge de manière unique en une valuation (à valeurs dans Q) de $\bar{K}$; soit C le <u>complété</u> de $\bar{K}$ pour la topologie correspondante. Le groupe π <u>opère par continuité sur</u> C. Tate s'est aperçu que les propriétés du π-module C sont intimement liées à celles des groupes p-divisibles sur R (cf. § 4, ainsi que [13]). Il a été amené en particulier aux résultats suivants :

(i) <u>Le corps des invariants de</u> π <u>dans</u> C <u>est réduit à</u> K.

Cela résulte de :

(ii) <u>Il existe un entier</u> n(K) <u>jouissant de la propriété suivante</u> : <u>Pour toute extension galoisienne finie</u> L/K, <u>d'anneau de valuation</u> A_L , <u>le groupe</u> $H^1(\mathrm{Gal}(L/K), A_L)$ <u>est annulé par</u> $p^{n(K)}$.

Tate démontre (ii) en "montant" de K à $\bar{K}$ au moyen d'une extension intermédiaire K' à groupe de Galois isomorphe à $\mathbb{Z}_p$ (cf. [13]).

Comme autres résultats, signalons :

(iii) <u>Le</u> K-<u>espace vectoriel</u> $H^1(\pi,C)$ <u>est de dimension</u> 1. (Noter la différence entre C et $\bar{K}$!)

Soit H le module de Tate du groupe multiplicatif G_m , et soit C(n) le produit tensoriel de C avec la puissance tensorielle n-ème de H. Alors :

(iv) <u>Si</u> $n \neq 0$, <u>on a</u> $H^0(\pi,C(n)) = H^1(\pi, C(n)) = 0$.

<u>Remarque</u>. Shankar SEN a récemment amélioré (ii), en montrant qu'on peut prendre n(K) égal à 1 si $p \neq 2$ et $n(K) = 2$ si $p = 2$.

§ 4. <u>La décomposition de</u> $T_pG \otimes C$. (Tate [13].)

On conserve les notations et hypothèses du § 3, et l'on note m l'idéal maximal de R. On considère un groupe p-divisible G de hauteur h sur

R ; on note G' son dual.

a/ Le groupe des points de G à valeurs dans R.

Si N est un entier $\geqslant 1$, définissons le groupe des points de G à valeurs dans $R/\mathfrak{m}^N R$ par la formule $G(R/\mathfrak{m}^N R) = \varinjlim . G_n(R/\mathfrak{m}^N R)$ et définissons $G(R)$ comme la limite projective des $G(R/\mathfrak{m}^N R)$ pour $N \to \infty$. Lorsque G est connexe, cette définition coïncide avec la définition habituelle des points d'un groupe formel, au moyen de coordonnées. Dans le cas général, si t_G désigne l'espace tangent à la composante neutre G° de G, le logarithme donne un isomorphisme

$$L : G(R) \otimes \mathbb{Q}_p \to t_G \otimes_R K .$$

b/ Le module $T_p G$.

Il a été défini au § 2 comme le π-module correspondant au groupe p-divisible $G \times_R K$. On peut également définir directement $T_p G/p^n T_p G$ comme le noyau de p^n dans $G(R'_n)$, où R'_n est l'anneau de valuation d'une extension finie assez grande de K.

c/ Relations entre G et G'.

Soit R_C l'anneau de valuation de C. Utilisant la définition de la dualité de Cartier, on obtient un isomorphisme

$$T_p G' \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{R_C}(G \times_R R_C , \mathbb{G}_m) .$$

Si $H = T_p(\mathbb{G}_m)$, on déduit d'abord de là un accouplement

$$T_p G' \times T_p G \to H ,$$

dont on montre facilement qu'il met ces deux modules en dualité.

Si U_C est le groupe des éléments inversibles de R_C congrus à 1, on en déduit aussi un homomorphisme.

$$G(R_C) \to \mathrm{Hom}(T_p G' , U_C) ,$$

d'où, par restriction à $G(R)$, un homomorphisme

$$\alpha : G(R) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\pi}(T_pG' , U_C) .$$

Par passage au logarithme, α définit une application K-linéaire

$$d\alpha : t_G \otimes K \rightarrow \mathrm{Hom}_{\pi}(T_pG', C).$$

THÉORÈME 2. Les applications α et $d\alpha$ sont des isomorphismes.

La démonstration utilise l'égalité $h = d + d'$, ainsi que les propriétés de C énoncées au § 3 (cf. [13]).

COROLLAIRE. Le module galoisien T_pG détermine les invariants d et d' de G.

En effet, T_pG détermine T_pG', et le th. 2 montre que $d = \mathrm{rg}.t_G$ est égal à la dimension du K-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\pi}(T_pG', C)$.

d/ La décomposition de Hodge de $T_pG \otimes C$.

THÉORÈME 3. Le π-module $T_pG \otimes C$ est canoniquement isomorphe à la somme directe

$$t_G \otimes C(1) \oplus \mathrm{Hom}(t_{G'} , C) .$$

(On note $C(1)$ le produit tensoriel de C et de H, cf. § 3.)

Plus précisément, l'homomorphisme $d\alpha$, appliqué à G et G' , permet de définir des applications :

$$0 \rightarrow t_G \otimes C(1) \rightarrow T_pG \otimes C \rightarrow \mathrm{Hom}(t_{G'} , C) \rightarrow 0 .$$

Tate démontre, par un calcul de dimensions, que cette suite est exacte, puis, en utilisant la propriété (iv) du § 3, il montre qu'elle se scinde de façon unique.

COROLLAIRE. <u>Le</u> π-<u>module</u> $T_pG \otimes C$ <u>est somme directe de</u> d <u>modules isomorphes à</u> $C(1)$ <u>et de</u> d' <u>modules isomorphes à</u> C.

<u>Remarque</u>. Soit X un schéma projectif et lisse sur R, et soit G le groupe p-divisible associé à la variété d'Albanese de X. On peut interpréter T_pG comme le premier groupe d'homologie p-adique (étale) de $X_C = X \times_R C$ (à torsion près), et le théorème 3 apparaît comme un analogue p-adique de la décomposition de Hodge

$$H^1(X_{\mathbb{C}}) = H^{1,0}(X_{\mathbb{C}}) \oplus H^{0,1}(X_{\mathbb{C}}) ,$$

le corps C jouant le rôle du corps des nombres complexes.

On peut se demander s'il existe des décompositions analogues en dimension $\geqslant 2$ (elles ne peuvent en tout cas pas correspondre à des groupes p-divisibles - il faut trouver autre chose). Même en dimension 1, le cas d'une variété abélienne ayant une mauvaise réduction n'est pas réglé.

§ 5. <u>Relèvement des variétés abéliennes</u>.

Soit R un anneau artinien local de corps résiduel de caractéristique p. Soit A_o une variété abélienne définie sur k, et soit $A_o(p)$ le groupe p-divisible correspondant. Un <u>relèvement</u> de A_o sur R est un schéma abélien A sur R muni d'un isomorphisme de la réduction $\tilde{A} = A \times_R k$ sur A_o ; définition analogue pour $A_o(p)$.

THÉORÈME 4. <u>Les relèvements de</u> A_o <u>et de</u> $A_o(p)$ <u>se correspondent bijectivement</u> (à isomorphisme près); <u>cette correspondance est fonctorielle</u>.

Plus correctement, soit $\underline{C}$ la catégorie des schémas abéliens sur R, et $\underline{C}(p)$ la catégorie des couples (A_o , G) où A_o est une variété abélienne sur k et G un relevement de $A_o(p)$ sur R. Le théoreme 4 signifie que le foncteur $A \mapsto (A \times_R k, A(p))$ est une <u>équivalence</u> $\underline{C} \to \underline{C}(p)$.

La démonstration du théorème 4 est esquissée dans les notes de Woods Hole [4]. Elle repose essentiellement sur la technique de relèvement de Grothendieck [2], combinée avec une cohomologie fabriquée par Tate.

COROLLAIRE. <u>Soient</u> A <u>et</u> B <u>deux schémas abéliens sur un anneau local noethérien complet, de corps résiduel</u> k <u>de caractéristique</u> p, <u>et soient</u> A_o <u>et</u> B_o <u>leurs réductions. Pour qu'un homomorphisme</u> $f_o : A_o \to B_o$ <u>se relève en</u> $f : A \to B$, <u>il faut et il suffit que l'homomorphisme correspondant de</u> $A_o(p)$ <u>dans</u> $B_o(p)$ <u>se relève en un homomorphisme de</u> $A(p)$ <u>dans</u> $B(p)$.

Lorsque l'anneau est artinien, c'est un cas particulier du théorème. Le cas général en résulte, par passage à la limite, en utilisant [2].

<u>Remarque</u>.

Le théorème 4 équivaut à dire que la <u>variété formelle des modules</u> est la même pour une variété abélienne et pour le groupe p-divisible correspondant. Cela explique l'intérêt qui s'attache à la détermination des modules de groupes p-divisibles, et en particulier des modules de groupes formels (cf. [6], pour le cas de la dimension 1).

<u>Un exemple : le relèvement canonique</u>.

Supposons k parfait, et prenons pour A_o une variété abélienne de dimension r, telle que le groupe de ses points d'ordre divisant p soit de rang r. (Pour une courbe elliptique, c'est le cas "général", où l'invariant de Hasse est non nul.) On montre alors facilement que $A_o(p)$ est somme directe d'un groupe étale E_o de hauteur r et d'un groupe M_o de type multiplicatif. Chacun de ces groupes se relève de façon unique à R ; soient E et M les groupes correspondants. Vu le théorème 4, il existe un relèvement A de A_o tel que $A(p)$ soit isomorphe à la somme directe de E et de M (un relèvement pris au hasard donne simplement une extension de E par M). On appelle A le relèvement canonique de A_o ; il est fonctoriel en A_o. Etant défini sur tout anneau local artinien R, de corps résiduel k, il peut aussi être défini (par passage à la limite) sur l'anneau des vecteurs de Witt sur k ; comme l'a remarqué Mumford, le schéma formel ainsi obtenu est un schéma abélien, car toute polarisation $\lambda_o : A_o \to A'_o$ se relève en une polarisation λ de A.

Le foncteur "relèvement canonique" a de nombreuses propriétés agréables. Par exemple, lorsque le corps résiduel k est fini, il fournit des variétés abéliennes de type (CM) au sens de Shimura-Taniyama ; cela résulte de la fonctorialité, combinée avec un résultat récent de Tate [12]. Dans le cas elliptique, il n'est nullement facile d'expliciter les relations entre les invariants modulaires j_o et j de la courbe et de son relèvement canonique. Pour $p = 5$, par exemple, et $j_o = 1, 2, 3, 4$, on trouve que la courbe a pour anneau d'endomorphismes $\mathbb{Z} \oplus 2i\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \oplus \frac{1+\sqrt{-11}}{2}\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}$, et $\mathbb{Z} \oplus \frac{1+\sqrt{-19}}{2}\mathbb{Z}$; on en déduit que j est égal à $2^3 3^3 11^3$, -2^{15}, $2^6 3^3$ et $-2^{15} 3^3$ respectivement.

§ 6. Applications et compléments.

Signalons :

(1) Un théorème de prolongement des morphismes de schémas abéliens, utilisant essentiellement les théorèmes 1 et 4 (Grothendieck [3]).

(2) Les hypothèses et notations étant celles du § 4, supposons que G soit connexe, et de dimension 1. Soit L l'anneau des endomorphismes de G

sur $R_{\overline{K}}$, et soit π_p l'image du groupe de Galois π dans $\mathrm{Aut}(T_pG)$. Le groupe π_p <u>contient un sous-groupe ouvert du groupe</u> $\mathrm{Aut}_L(T_pG)$; plus précisément les algèbres de Lie de ces deux groupes p-adiques <u>coïncident</u>. (La démonstration utilise la décomposition de Hodge de $T_pG \otimes C$, cf. [11].)

Lorsque L est de rang h sur $\mathbb{Z}_p$, $\mathrm{Aut}_L(T_pG)$ s'identifie au groupe L*, et l'on a des résultats beaucoup plus précis (ils se déduisent facilement de ceux de Lubin-Tate [5]).

Terminons par une question (cf. [13]) :

(3) Y a-t-il d'autres groupes p-divisibles sur $\mathbb{Z}$ que les groupes "triviaux" ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. DEMAZURE et A. GROTHENDIECK - Schémas en groupes, Séminaire de Géom. alg., I.H.E.S., 1963-64.

[2] A. GROTHENDIECK - Géométrie formelle et géométrie algébrique, Séminaire Bourbaki, Mai 1959, n° 182.

[3] A. GROTHENDIECK - Un théorème sur les homomorphismes de schémas abéliens, Invent. Math., 2, 1966, p. 59-78.

[4] J. LUBIN, J.-P. SERRE et J. TATE - Elliptic curves and formal groups, Woods Hole Summer Institute, 1964 (notes de séminaire polycopiées, tirées à un nombre restreint d'exemplaires).

[5] J. LUBIN et J. TATE - One-parameter formal Lie groups over p-adic integer rings, Ann. of Maths., 80, 1964, p. 464-484.

[6] J. LUBIN et J. TATE - Formal moduli for one-parameter formal Lie groups, Bull. Soc. Math. France, 94, 1966, p. 49-60.

[7] E. LUTZ - Sur l'équation $y^2 = x^2 - Ax - B$ dans les corps p-adiques, J. reine ang. Math., 177, 1937, p. 237-247.

[8] J.I. MANIN - La théorie des groupes formels commutatifs sur les corps de caractéristique finie (en russe), Usp. Mat. Nauk, 18, 1963, p. 3-90 [traduction anglaise : Russian Math. Surv., 18, n° 6, p. 1-83].

[9] J.-P. SERRE - Groupes de Lie ℓ-adiques attachés aux courbes elliptiques, Coll. CNRS, n° 143, Clermont-Ferrand, 1964, p. 239-256.

[10] J.-P. SERRE - Résumé des cours 1965-66, Annuaire du Collège de France, 1966-67.

[11] J.-P. SERRE - Sur les groupes de Galois attachés aux groupes p-divisibles, Ecole d'été de Driebergen, 1966.

[12] J. TATE - Endomorphisms of Abelian varieties over finite fields, Invent. Math., 2, 1966, p. 134-144.

[13] J. TATE - p-divisible groups, Ecole d'été de Driebergen, 1966.