Chương 2 : PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH

Phương pháp đơn hình do G.B. Dantzig đề xuất năm 1947 cho đến hiện nay vẫn là phương pháp được sử dụng nhiều nhất trong việc giải các bài toán qui hoạch tuyến tính.

Đối với các bài toán cỡ lớn (có thể đến hàng nghìn biến và hàng trăm ràng buộc) phải dùng đến máy tính, phương pháp đơn hình cũng đã được kiểm nghiệm qua mấy chục năm áp dụng là rất hiệu quả, với thời gian tính toán khá ngắn.

§1. CƠ SỞ CỦA PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH

Phương pháp đơn hình giải bài toán QHTT dựa trên hai tính chất quan trọng sau đây của bài toán QHTT:

a) *Nếu bài toán qui hoạch tuyến tính chính tắc có phương án tối ưu thì cũng có phương án cực biên tối ưu*, nghĩa là có ít nhất một đỉnh của miền ràng buộc là lời giải của bài toán.

b) *Mỗi điểm cực tiểu địa phương của hàm tuyến tính trên miền ràng buộc D (một tập hợp lồi) là một điểm cực tiểu tuyệt đối*.

Tính chất a) cho phép tìm phương án tối ưu trong số các phương án cực biên của bài toán (số này là hữu hạn). Tính chất b) cho phép khi kiểm tra tối ưu đối với một phương án cực biên (đỉnh) chỉ cần so sánh nó với các đỉnh lân cận (đỉnh kề) là đủ.

Vì thế, phương pháp đơn hình bắt đầu từ một phương án cực biên nào đó (tuỳ ý) của bài toán (tức là một đỉnh của miền ràng buộc). Tiếp đó kiểm tra xem phương án hiện có đã phải là phương án tối ưu hay chưa, bằng cách so sánh giá trị hàm mục tiêu tại đỉnh đó với giá trị hàm mục tiêu tại các đỉnh kề với nó. Nếu đúng thì dừng quá trình tính toán. Trái lại, phương pháp sẽ cho cách tìm một phương án cực biên mới tốt hơn (với giá trị hàm mục tiêu nhỏ hơn) mà nó là một đỉnh kề với đỉnh trước đó. Quá trình này tiến hành cho tới khi tìm được phương án tối ưu hoặc phát hiện bài toán đã cho không có lời giải.

Như vậy, phương pháp đơn hình tiến hành khảo sát các đỉnh của miền ràng buộc để tìm ra đỉnh tối ưu. Mặc dù số đỉnh của bài toán nói chung rất lớn, nhưng trên thực tế phương pháp này chỉ đòi hỏi kiểm tra một phần tương đối nhỏ các đỉnh. Chính điều đó thể hiện hiệu quả thực tế của phương pháp đơn hình.

§2. THUẬT TOÁN ĐƠN HÌNH

Để giải bìa toán QHTT (G) bằng phương pháp đơn hình ta thực hiện các bước dưới đây.

- **Bước chuẩn bị:** Đưa (G) về dạng chính tắc chuẩn (N) nếu cần.
- **Bước 1:** Xác định PACB x^o xuất phát, chỉ ra các biến và các hệ số cơ sở. (Nếu bài toán dạng (N) thì một PACB được tìm dễ dàng từ ma trận con sơ cấp của A – trong bảng đơn hình ở bước 2, ma trận con sơ cấp được giả định là ma trận đơn vị cấp m tạo thành từ m dòng và m cột đầu tiên, khi đó PACB xuất phát chính là $x^0 = (b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, \ldots, 0)$).
- **Bước 2:** Lập bảng đơn hình, tính giá trị của hàm mục tiêu và các số ước lượng Δ_j.

Hệ số cơ sở	Biến cơ sở	PA CB	x_1	x_2	……	x_m	x_{m+1}	……	x_n	λ_i
			c_1	c_2	……	c_m	c_{m+1}	……	c_n	
c_1	x_1	b_1	1	0	……	0	$a_{1,m+1}$	……	a_{1n}	
c_2	x_2	b_2	0	1	……	0	$a_{2,m+1}$	……	a_{2n}	
.	.	.	.	.	……	.	.	……	.	
.	.	.	.	.	……	.	.	……	.	
.	.	.	.	.	……	.	.	……	.	
c_m	x_m	b_m	0	0	……	1	$a_{m,m+1}$	……	a_{mn}	
Bảng 1		$f(x^0)$	0	0	……	0	Δ_{m+1}	……	Δ_n	

Ở đây $f(x^0) = c_1b_1 + c_2b_2 + \ldots + c_mb_m$;

$$\Delta_j = 0 \ (j=1,\ldots, m); \quad \Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j;\ m+1 \le j \le n.$$

- **Bước 3:** Kiểm tra điều kiện tối ưu (Đối với bài toán MIN)

  a) Nếu mọi $\Delta_j \le 0$ phương án đang xét tối ưu $\rightarrow$ STOP.

  b) Nếu tồn tại $\Delta_j > 0$ mà mọi $a_{ij} \le 0$ thì hàm mục tiêu không bị chặn, do đó bài toán đã cho vô nghiệm $\rightarrow$ STOP.

  c) Nếu tồn tại $\Delta_j > 0$ và với mỗi $\Delta_j > 0$ đều có ít nhất một $a_{ij} > 0$ thì phương án đang xét chưa tối ưu $\rightarrow$ Làm tiếp bước 4.

- **Bước 4:** Cải tiến PACB đang xét để được PACB tốt hơn (Đối với bài toán *MIN*)

  a) Chọn biến cơ bản mới x_v sao cho $\Delta_v = \max\{\Delta_j > 0\}$ để đưa vào.

b) Chọn biến cơ bản cũ x_r sao cho $\lambda_r = \min\{\lambda_i = \dfrac{b_i}{a_{iv}} / a_{iv} > 0\}$ để đưa ra.

c) Tiếp theo chọn dòng thứ r làm dòng xoay, cột thứ v làm cột xoay, phần tử a_{rv} làm phần tử xoay rồi biến đổi sơ cấp để được bảng đơn hình mới với PACB mới tốt hơn.

Cách biến đổi bảng đơn hình để nhận được bảng mới và PACB mới tốt hơn

- Đổi cột biến cơ sở: biến cơ sở mới là x_v thay cho biến cơ sở cũ là x_r ở dòng r.
- Đổi cột hệ số cơ sở: hệ số c_v thay cho hệ số c_r ở dòng r.
- Biến đổi dòng xoay:

Dòng mới = dòng cũ / phần tử xoay,

Nghĩa là chia mỗi phần tử ở dòng xoay cho phần tử xoay ($a_{rv} > 0$). Kết quả nhận được gọi là *dòng chính* (số 1 xuất hiện ở vị trí của a_{rv} cũ).

- Biến đổi các dòng khác theo qui tắc *hình chữ nhật*:

Dòng mới = dòng cũ tương ứng - phần tử của nó trên cột xoay × dòng chính,

nghĩa là

	Cột ≠ cột xoay	Cột xoay (cột v)
Dòng ≠ dòng xoay :	**a**	**b**
	a’ = a – b×c	
Dòng chính (dòng r mới) :	**c**	**1**

Sau đó lặp lại các bước 2, 3, 4 cho đến khi được P.A.C.B tối ưu thì dừng và kết luận về đáp số của bài toán đã cho

<u>Chú ý</u>

- Ở bước 3 khi kiểm tra điều kiện tối ưu đối với bài toán MAX, ta làm như sau:

  a) Nếu mọi $\Delta_j \geq 0$ phương án đang xét tối ưu → STOP.

  b) Nếu tồn tại $\Delta_j < 0$ mà mọi $a_{ij} \leq 0$ thì hàm mục tiêu không bị chặn, do đó bài toán đã cho vô nghiệm → STOP.

  c) Nếu tồn tại $\Delta_j < 0$ mà với mỗi $\Delta_j < 0$ đều có ít nhất một $a_{ij} > 0$ thì phương án đang xét chưa tối ưu → Làm tiếp bước 4.

- Còn ở bước 4 khi cải tiến PACB đối với bài toán MAX, ta làm như sau:

  a) Chọn biến cơ bản mới x_v sao cho $\Delta_v = \min\{\Delta_j < 0\}$ để đưa vào.

  b) Chọn biến cơ bản cũ x_r sao cho $\lambda_r = \min\{\lambda_i = \dfrac{b_i}{a_{iv}} / a_{iv} > 0\}$ để đưa ra.

  c) Tiếp theo chọn dòng thứ r làm dòng xoay, phần tử a_{rv} làm phần tử xoay rồi biến đổi sơ cấp để được bảng đơn hình mới.

- Cũng có thể quy bài toán MAX về bài toán MIN hoặc ngược lại bằng cách đối dấu hàm mục tiêu.
- **Dấu hiệu bài toán vô số nghiệm**: Khi kiểm tra điều kiện tối ưu ở bước 3, nếu mọi $\Delta_j \le 0$ (đối với bài toán MIN) hoặc $\Delta_j \ge 0$ (đối với bài toán MAX) đồng thời tồn tại một $\Delta_j = 0$ ứng với biến phi cơ sở x_j thì bài toán có vô số nghiệm.
- **Cách tìm hết tất cả các PATU của bài toán QHTT**: Giả sử đã tìm ra một PATU x^0. Khi đó giải hệ gồm phương trình $f(x) = f(x^0)$ và các ràng buộc ta sẽ được tất cả các PATU của bài toán đã cho.

Ví dụ 1. Giải bài toán qui hoạch tuyến tính (N) sau đây

$$f = x_1 - x_2 - 2x_4 + 2x_5 - 3x_6 \rightarrow \min,$$

với các điều kiện

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 - x_6 = 2, \\ x_2 + x_4 + x_6 = 12, \\ x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 3x_6 = 9, \\ x_j \ge 0,\ j = 1, 2, \dots, 6. \end{cases}$$

Cho $x_4 = x_5 = x_6 = 0$ ta được phương án cực biên ban đầu $x^0 = (2; 12; 9; 0; 0; 0)$ với trị mục tiêu $f_0 = -10$. Cơ sở của x^0 là $\{A_1, A_2, A_3\}$, tức là $J_0 = \{1, 2, 3\}$. Các biến cơ sở là x_1, x_2, x_3. Các biến phi cơ sở là x_4, x_5, x_6. Các hệ số cơ sở $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = 0$.

Bảng đơn hình đầu tiên như sau:

Hệ số cơ sở	Biến cơ sở	PACB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	λ_i
			1	-1	0	-2	2	-3	
1	x_1	2	1	0	0	1	1	–1	**2**
–1	x_2	12	0	1	0	1	0	1	12

0	x_3	9	0	0	1	2	4	3	9/2
Bảng 1		-10	0	0	0	**2**	–1	1	

Trong dòng mục tiêu (dòng cuối) còn $\Delta_4 = 2 > 0$, $\Delta_6 = 1 > 0$ và trên mỗi cột chứa mỗi số ước lượn dương đó đều có những hệ số dương nên phương án x^0 ở bảng này chưa tối ưu. Ta cần biến đổi bảng để được PACB mới tốt hơn.

- Biến cơ sở mới cần đưa vào là x_4 (ứng với $\Delta_4 = 2$ lớn nhất).
- Biến loại khỏi cơ sở là x_1 (ứng với λ_1 = min{2, 12, 9/2} = 2 nhỏ nhất).
- Phần tử xoay là $a_{14} = 1$ (trong ô được tô bóng mờ).

Biến đổi bảng 1 theo các qui tắc đã nêu ta nhận được bảng 2 dưới đây.

Hệ số cơ sở	Biến cơ sở	PACB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	λ_i
			1	–1	0	–2	2	–3	
–2	x_4	2	1	0	0	1	1	–1	
–1	x_2	10	–1	1	0	0	–1	2	5
0	x_3	5	–2	0	1	0	2	5	**1**
Bảng 2		–14	–2	0	0	0	–3	**3**	

Trong dòng cuối của bảng này còn phần tử $\Delta_6 = 3 > 0$ và trên cột chứa nó có hai hệ số dương nên phương án ở bảng này vẫn chưa tối ưu. Ta cần biến đổi bảng để được PACB mới tốt hơn.

- Biến cơ sở mới cần đưa vào x_6 (ứng với $\Delta_6 = 3$ lớn nhất).
- Biến loại khỏi cơ sở là x_3 (ứng với tỉ số nhỏ nhất λ_3 = min{5, 1} = 1).

- Phần tử xoay là $a_{36} = 5$.

Biến đổi bảng 2 ta nhận được bảng 3 dưới đây.

Hệ số cơ sở	Biến cơ sở	PACB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	λ_i
			1	–1	0	–2	2	–3	
–2	x_4	3	3/5	0	1/5	1	7/5	0	
–1	x_2	8	–1/5	1	–2/5	0	–9/5	0	
–3	x_6	1	–2/5	0	1/5	0	2/5	1	
Bảng 3		–17	–4/5	0	–3/5	0	–21/5	0	

Trong bảng này mọi $\Delta_k \le 0$, nên phương án x* = (0; 8; 0; 3; 0; 1) là **PATU** với $f_{min} = f(x^*) = -17$.

Ví dụ 2. Ví dụ sau cho thấy bài toán không có phương án tối ưu

$$f = x_2 - 3x_3 + 2x_5 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 7, \\ -4x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, \\ -5x_2 + 3x_3 + x_5 + x_6 = 10, \\ x_j \ge 0, j = 1, 2, \dots, 6. \end{cases}$$

Ta giải bài toán trên bằng phương pháp đơn hình, xuất phát từ phương án cực biên $x^0 = (7, 0, 0, 12, 0, 10)$ với cơ sở là các vectơ cột đơn vị A_1, A_4, A_6, tức là $J_0 = \{1, 4, 6\}$. Lập bảng đơn hình rồi thụ hiện các tính toán biến đổi theo thuật toán đơn hình ta được:

Biến cơ sở	Hệ số C_B	Phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	λ_i
			0	1	-3	0	2	0	
x_1	0	7	1	1	-1	0	1	0	
x_4	0	12	0	-4	4	1	0	0	**3**
x_6	0	10	0	-5	3	0	1	1	10/3
Bảng 1		0	0	-1	**3**	0	-2	0	
x_1	0	10	1	0	0	1/4	1	0	

x_3	-3	3	0	-1	1	1/4	0	0	
x_6	0	1	0	-2	0	-3/4	1	1	
Bảng 2		-9	0	2	0	-3/4	-2	0	

Trong bảng 2 có $\Delta_2 = 2 > 0$ nhưng mọi phần tử $a_{i2} \leq 0$ (i = 1, 2, 3) nên bài toán trên không có PATU (vì hàm mục tiêu của bài toán giảm vô hạn trong miền ràng buộc của nó). Nói cách khác, bài toán QHTT đã cho không có lời giải.

Chú ý: Bài toán tìm $g \to \max$ được thay bằng bài toán tìm $f = -g \to \min$.

Ví dụ 3. Giải bài toán qui hoạch tuyến tính sau.

$$f = 3x_1 - x_2 - 2x_3 \quad \to \max,$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ 3x_1 - 4x_2 + 8x_3 + x_5 = 10, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_6 = 12, \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, 6. \end{cases}$$

Ta thay f bằng $g = -f = -3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \min$ với cùng các điều kiện như trên.

Xuất phát từ phương án cực biên $x^0 = (0, 0, 0, 7, 10, 12)$, ta giải bài toán bằng phương pháp đơn hình (các Bảng 1 - 3). Lời giải thu được là $x^* = (5, 4, 0, 0, 11, 0)$ với $g_{min} = -11$. Từ đó $f_{max} = 11$.

Biến cơ sở	Hệ số C_B	Phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	λ_i
			-3	1	2	0	0	0	
x_4	0	7	-1	3	1	1	0	0	
x_5	0	10	3	-4	8	0	1	0	10/3
x_6	0	12	4	-2	0	0	0	1	**3**
Bảng 1		0	**3**	-1	-2	0	0	0	
x_4	0	10	0	5/2	1	1	0	1/4	**4**
x_5	0	1	0	-5/2	8	0	1	-3/4	
x_1	-3	3	1	-1/2	0	0	0	1/4	
Bảng 2		-9	0	**1/2**	-2	0	0	-3/4	
x_2	1	4	0	1	2/5	2/5	0	1/10	
x_5	0	11	0	0	9	1	1	-1/2	

x_1	-3	5	1	0	1/5	1/5	0	3/10	
Bảng 3		-11	0	0	-11/5	-1/5	0	-4/5	

Ví dụ 4. Giải bài toán (C) : $f(x) = 3x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min$,

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 9, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Đưa vào ba biến giả $x_5, x_6, x_7 \geq 0$ với hệ số giả $M > 0$ (đủ lớn) ta được bài toán (N)

$$F = 3x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + M(x_5 + x_6 + x_7) \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_6 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 3x_4 + x_7 = 9, \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7). \end{cases}$$

Ta giải bài toán (N) bằng phương pháp đơn hình, xuất phát từ phương án cực biên $x^0 = (0, 0, 0, 0, 2, 6, 9)$.

Quá trình giải bài toán (N) được ghi tóm tắt trong các bảng sau (Bảng 1 - 4).

Biến cơ sở	C_B	Phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
			3	-3	1	-1	M	M	M	
x_5	M	2	-1	1	2	1	1	0	0	**2**
x_6	M	6	1	1	-1	-1	0	1	0	6
x_7	M	9	3	2	-6	3	0	0	1	4.5
Bảng 1		17M	3M-3	**4M+3**	< 0	3M+1	0	0	0	
x_2	-3	2	-1	1	2	1		0	0	
x_6	M	4	2	0	-3	-2		1	0	2
x_7	M	5	5	0	-10	1		0	1	**1**
Bảng 2		9M-6	**7M**	0	< 0	< 0		0	0	
x_2	-3	3	0	1	0	6/5		0		
x_6	M	2	0	0	1	-12/5		1		**2**
x_1	3	1	1	0	-2	1/5		0		
Bảng 3		2M-6	0	0	**M-7**	< 0		0		
x_2	-3	3	0	1	0	6/5				
x_3	1	2	0	0	1	-12/5				
x_1	3	5	1	0	0	-23/5				
Bảng 4		8	0	0	0	-94/5				

Ở Bảng 4 ta thấy $\Delta_k \leq 0$ với mọi k = 1, 2, 3, 4, nên phương án cho ở bảng này x = (5, 3, 2, 0, 0, 0, 0) là phương án tối ưu của bài toán (M). Vậy x* = (5, 3, 2, 0) là phương án tối ưu của bài toán ban đầu với $f_{min} = 8$.

§4. VÍ DỤ GIẢI BÀI TOÁN QHTT DẠNG TỔNG QUÁT (G)

Ví dụ 1. Giải bài toán sau bằng phương pháp đơn hình.

$$\begin{cases} f = 5x_1 + 8x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 \leq 1, \\ x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Trước hết ta chuyển bài toán trên về bài toán tìm min và có dạng (N) bằng cách đưa vào các biến phụ $x_3, x_4 \geq 0$. Ta được bài toán

$$\begin{cases} g = -5x_1 - 8x_2 \rightarrow \min, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 2, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Ta giải bài toán này bằng phương pháp đơn hình, xuất phát từ phương án cực biên x^0 = (0, 0, 1, 2). Cơ sở của x^0 là $\{A_3, A_4\}$. Quá trình giải như sau (Bảng 1 - 3).

Biến cơ sở	C_B	Phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	λ_i
			-5	-8	0	0	
x_3	0	1	1	2	1	0	½
x_4	0	2	1	1	0	1	2
Bảng 1		0	5	**8**	0	0	
x_2	-8	1/2	1/2	1	1/2	0	**1**
x_4	0	3/2	1/2	0	-1/2	1	3
Bảng 2		-4	**1**	0	-4	0	
x_1	-5	1	1	2	1	0	
x_4	0	1	0	-1	-1	1	
Bảng 3		-5	0	-2	-5	0	

Ở Bảng 3 mọi $\Delta_k \leq 0$ nên x^*_N = (1, 0, 0, 1) là phương án tối ưu của bài toán chính tắc với $g_{min} = -5$. Từ đó suy ra lời giải bài toán ban đầu là x* = (1, 0) với $f_{max} = -g_{min} = 5$.

Ví dụ 2. Giải bài toán sau $f = -3x_1 + x_2 - 2x_3 \rightarrow \min$,

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 10, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \geq 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Trước hết ta thêm vào hai biến phụ $x_4, x_5 \geq 0$ để đưa bài toán về dạng chính tắc (C). Tiếp đó ta đưa vào hai biến giả $x_6, x_7 \geq 0$ để được bài toán (N) như sau.

$$\begin{cases} f_M = -3x_1 + x_2 - 2x_3 + M(x_6 + x_7) \to \min, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 10, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_5 + x_6 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_7 = 2, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, 7. \end{cases}$$

Ta giải bài toán (N) bằng phương pháp đơn hình với M > 0 (đủ lớn). Quá trình giải ghi ở các bảng sau (bỏ qua hai cột biến giả).

Biến cơ sở	C_B	Phương án	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	λ_i
			-3	1	-2	0	0	
x_4	0	10	2	4	-1	1	0	5
x_6	M	4	3	1	1	0	-1	**4/3**
x_7	M	2	1	-1	1	0	0	2
Bảng 1		60	**4M+3**	– 1	2M +2	0	– M	
x_4	0	22/3	0	10/3	-5/3	1	2/3	
x_1	-3	4/3	1	1/3	1/3	0	-1/3	4
x_7	M	2/3	0	-4/3	2/3	0	1/3	**1**
Bảng 2		2M/3- 4	0	< 0	**2M/3 +1**	0	M/3+ 1	
x_4	0	9	0	0	0	1	3/2	6
x_1	-3	1	1	1	0	0	-1/2	
x_3	-2	1	0	-2	1	0	1/2	**2**
Bảng 3		-5	0	0	0	0	**1/2**	
x_4	0	6	0	6	-3	1	0	**1**
x_1	-3	2	1	-1	1	0	0	
x_5	0	2	0	-4	2	0	1	
Bảng 4		-6	0	**2**	-1	0	0	
x_2	1	1	0	1	-1/2	1/6	0	
x_1	-3	3	1	0	1/2	1/6	0	
x_5	0	6	0	0	0	2/3	1	
Bảng 5		-8	0	0	0	-1/3	0	

Ở Bảng 5 mọi $\Delta_k \leq 0$ nên $x_N^* = (3, 1, 0, 0, 6, 0, 0)$ là phương án tối ưu của bài toán (N). Từ đó suy ra lời giải bài toán ban đầu là $x^* = (3, 1, 0)$ với $f_{min} = -8$.

BÀI TẬP

1. Dùng phương pháp đơn hình giải các bài toán dưới đây

a) $f = -50x_1 - 60x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ 9x_1 + 4x_2 \le 36, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

b) $f = 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 - 5x_5 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_5 = 152, \\ 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 60, \\ 3x_2 + x_5 \le 36, \\ x_j \ge 0\ (j = 1,2,...,5). \end{cases}$$

c) $f = 6x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 - 7x_6 + 6x_7 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_4 + x_6 + x_7 = 15, \\ 2x_1 - x_3 + 2x_6 + x_7 = -9, \\ 4x_1 + 2x_4 + x_5 - 3x_6 = 2, \\ x_j \ge 0\ (j = 1,...,7). \end{cases}$$

d) $f = x_1 - x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -1, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ -3x_1 - x_2 \ge -9, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

e) $f = 2x_1 + x_2 + x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 8, \\ x_1 + x_2 = 2, \\ x_3 + x_4 + x_5 = 3, \\ x_j \ge 0\ (j = 1,...,4). \end{cases}$$

f)) $f = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 \rightarrow \min,$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ x_j \geq 0 \ (j = 1,\ldots,4). \end{cases}$$

g) $f = x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow \max,$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

h) $f = -x_1 - x_2 + 1 \rightarrow \max,$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -1, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ -3x_1 - x_2 \geq -9, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2. Giải các bài toán thực tế cho ở bài tập 1), 2) và 5) Chương 1.