

Các bài toán ứng dụng quy hoạch tuyến tính

1 Dẫn nhập

Trong bài tập dưới đây, chúng ta sẽ làm quen với cách đặt biến hỗ trợ ra quyết định và diễn dịch trong ngôn ngữ thông thường.

2 Bài tập mẫu

Câu 1.

Một xưởng hóa chất sản xuất ba loại hóa chất: A, B, và C. Chúng được sản xuất dựa trên hai qui trình sản xuất: P_1 và P_2 . Trong một giờ:

- qui trình P_1 có thể tạo 3 đơn vị A, 1 đơn vị B, 1 đơn vị C và chi phí tiêu tốn là 5 USD;
- qui trình P_2 có chi phí cho 1 giờ là 3 USD và có thể sản xuất ra 1 đơn vị A và một đơn vị B.

Để đáp ứng nhu cầu khách hàng, ít nhất 100 đơn vị A, 50 đơn vị B và 20 đơn vị C phải được sản xuất. Xác định kế hoạch sản xuất đáp ứng nhu cầu khách hàng với chi phí sản xuất thấp nhất.

Qui trình	Giá thành/giờ	Kết quả thu được		
P_1	5	3	1	1
P_2	3	1	1	0
Nhu cầu hàng ngày		100	50	20

Lời giải.

1. *Decision variables:*

X_1 : Số giờ thực thi qui trình P_1

X_2 : Số giờ thực thi qui trình P_2

2. *Constraints:*

Ít nhất 100 đơn vị A phải được sản xuất hàng ngày:

$$3X_1 + X_2 \geq 100$$

Ít nhất 50 đơn vị B phải được sản xuất hàng ngày:

$$X_1 + X_2 \geq 50$$

Ít nhất 20 đơn vị C phải được sản xuất hàng ngày:

$$X_1 \geq 20$$

Số giờ thực thi của từng qui trình phải không âm:

$$X_1, X_2 \geq 0$$

3. *Objective function:*

Z: tổng chi phí phải trả

$$\text{Minimize } Z = 5X_1 + 3X_2$$

□

Câu 2.

Mai sở hữu 35 mẫu đất trồng trọt. Cô ấy muốn trồng lúa mì hoặc ngô trên mảnh đất này. Mảnh đất có thể cho lợi nhuận là 200 triệu đồng/mẫu lúa mì hoặc 250 triệu/mẫu ngô. Các lao động và phân bón được sử dụng cho mỗi mẫu được liệt kê trong bảng dưới đây. Hiện tại mảnh đất, một trăm công nhân và 120 tấn phân bón có sẵn. Hãy xây dựng mô hình toán học nhằm hỗ trợ Mai đưa ra quyết định sao cho thu được lợi nhuận cao nhất.

	Loại cây trồng	
	lúa mì	Ngô
Nhân công	4 công nhân	2 công nhân
Phân bón	3 tấn	5 tấn

Lời giải.

1. *Decision variables:*

X_1 : Số mẫu canh tác lúa mì

X_2 : Số mẫu canh tác ngô

2. *Constraints:*

Mai sở hữu 35 mẫu đất trồng trọt tổng cộng:

$$X_1 + X_2 \leq 35$$

Mảnh đất có một trăm công nhân:

$$4X_1 + 2X_2 \leq 100$$

Mảnh đất có 120 tấn phân bón:

$$3X_1 + 5X_2 \leq 120$$

Số mẫu (diện tích) canh tác của từng loại lương thực phải không âm:

$$X_1, X_2 \geq 0$$

3. *Objective function:*

Z: tổng lợi nhuận có thể thu được

$$\text{Maximize } Z = 200X_1 + 250X_2$$

□

3 Bài tập cần giải

Câu 3.

Một công ty sản xuất đồ nội thất sản xuất bàn và ghế gỗ. Lợi nhuận cho 1 cái bàn là 6\$, lợi nhuận cho 1 cái ghế là 8\$. Một cái bàn tốn 30 tấm gỗ và 5 giờ để làm, còn 1 cái ghế tốn 20 tấm gỗ và 10 giờ để làm. Công ty chỉ còn 300 tấm gỗ và 100 giờ lao động cho tuần tiếp theo. Xây dựng mô hình toán

học để tối đa hóa lợi nhuận cho công ty trong tuần tiếp theo.

Câu 4.

Một nhà máy dự định tiến hành sản xuất 4 loại sản phẩm Correction Tape CT1, CT2, CT3, CT4. Cả 4 loại sản phẩm này đều sử dụng 3 loại nhựa ABS, GPPS, POM.

Mức tiêu hao vật liệu cho trong bảng sau:

Nguyên liệu	CT1	CT2	CT3	CT4
ABS	2	5	7	4
GPPS	3	1	5	6
POM	6	5	4	5

Dự trữ nguyên liệu cho trong bảng sau:

Dự trữ	ABS	GPPS	POM
nguyên liệu	1200	800	2000

Lợi nhuận thu được theo từng đơn vị sản phẩm cho trong bảng sau:

Lợi nhuận /1	CT1	CT2	CT3	CT4
sản phẩm	300	250	500	150

Cần xây dựng phương án để nhà máy đạt tổng lợi nhuận lớn nhất.

Câu 5.

Một doanh nghiệp cần vận chuyển hàng hóa từ 2 kho đến 3 cửa hàng bán lẻ. Lượng hàng hóa ở các kho s_i , nhu cầu tiêu thụ hàng hóa ở các cửa hàng d_j và chi phí vận chuyển từ kho i đến cửa hàng j là c_{ij} được cho ở bảng dưới.

	Cửa hàng 1 ($d_1 = 50$)	Cửa hàng 2 ($d_2 = 80$)	Cửa hàng 3 ($d_3 = 100$)
Kho 1 ($s_1 = 400$)	$c_{11} = 100$	$c_{12} = 180$	$c_{13} = 100$
Kho 2 ($s_2 = 90$)	$c_{21} = 50$	$c_{22} = 120$	$c_{23} = 80$

Hãy lập kế hoạch vận chuyển từ mỗi kho đến mỗi cửa hàng sao cho các kho đều phân phối hết hàng, các cửa hàng đều nhận đủ hàng và tổng chi phí phải trả là ít nhất

Câu 6.

Cửa hàng bán quần áo A nhân dịp khai trương đã đưa ra chương trình bán hàng sau. Cửa hàng chỉ bán quần áo theo gói, không bán lẻ từng chiếc. Có hai loại gói như sau:

- Gói 1 giá 200 000 có 3 áo và 1 váy;
- Gói 2 giá 150 000 có 2 áo và 2 váy.

Mỗi khách hàng chỉ được mua tối đa 6 gói các loại. Lan muốn mua ít nhất 10 cái áo và 6 cái váy. Hãy giúp Lan mua được số lượng váy áo mong muốn với chi phí thấp nhất.

Câu 7.

Một xưởng sản xuất làm 3 sản phẩm : máy truyền hình, máy phát thanh và loa. Mỗi sản phẩm được lắp ráp từ những phụ kiện có sẵn trong kho. Có 5 loại vật tư phụ kiện : khung máy, đèn hình, bộ loa, bộ nguồn, bảng mạch điện tử. Mục tiêu là sản xuất đầy đủ các sản phẩm để có lãi nhiều nhất với số vật tư phụ kiện còn tồn trong kho. Số vật tư tồn đầu kỳ là : 450 khung máy, 250 đèn hình, 800 bộ loa, 450 bộ nguồn và 600 bảng mạch điện tử.

Định mức cho :

- máy truyền hình : 1 khung, 1 đèn hình, 2 bộ loa, 1 bộ nguồn, 2 bảng mạch điện tử
- máy phát thanh: 1 khung, 2 bộ loa, 1 bộ nguồn, 1 bảng mạch điện tử
- loa : 1 bộ loa, 1 bảng mạch điện tử

Cho biết lãi cho mỗi sản phẩm được dự tính là

- máy truyền hình: 75\$,
- máy phát thanh: 50\$,
- loa: 35\$.

Câu 8.

Một nông dân cần quy hoạch sản phẩm nông nghiệp trồng tối ưu trên mảnh đất của mình. Vấn đề đặt ra là nên trồng bao nhiêu tấn lúa mì và bao nhiêu tấn lúa gạo để có lợi nhuận lớn nhất trong điều kiện hạn chế về đất, nước và con người. Biết:

- Diện tích đất cần để sản xuất 1 tấn lúa gạo là 2 ha và lúa mì là 3 ha,
- Lượng nước cần để sản xuất 1 tấn lúa gạo là $6m^3$ và lúa mì là $4m^3$,
- Nhân công cần để sản xuất 1 tấn lúa gạo là 20 công nhân và lúa mì là 5 công nhân,
- Nông dân này có tối đa : 25 ha đất, $50m^3$ nước, 125 nhân công,
- Lợi nhuận thu đc từ lúa gạo là 18 \$/tấn và lúa mì là 21 \$/tấn.

Câu 9.

Một doanh nghiệp mua bán nông sản nhỏ chuyên mua bán các loại nông sản: tiêu, điều, cà phê. Năm nay, vào mùa thu hoạch giá các loại nông sản mua vào và bán ra như sau:

	Giá mua /kg	Giá bán/kg
Tiêu	40 000	42 000
Điều	20 000	21 500
Cà phê	10 000	10 800

Do nguồn lực có giới hạn, vốn lưu động của doanh nghiệp trong một ngày chỉ vồn vện trong 1 tỷ VND.

Để giữ mối quan hệ, doanh nghiệp phải mua ít nhất 2 tấn tiêu mỗi ngày và không thể mua quá 40 tấn cà phê và 10 tấn điều mỗi ngày do điều kiện kho bãi không cho phép. không được phép quá 80 tấn mỗi ngày điều kiện của doanh nghiệp và nhu cầu về nông sản.

Hãy giúp doanh nghiệp tối ưu lợi nhuận thu được trong điều kiện cho phép mỗi ngày.

Câu 10.

Một quán ăn cần mua 3 loại sản phẩm sau: cà chua, khoai tây, và thịt với tổng số kg mỗi loại lần lượt là 50, 100, 50. Quán ăn hiện có hai đối tác nhận cung cấp hàng, và đưa ra giá như sau:

	Cà chua	Khoai tây	Thịt	Giá
Đối tác A	10	10	5	25\$
Đối tác B	5	8	10	30\$

Tuy nhiên, hiện nay đối tác B đang đưa ra chương trình khuyến mãi, mua 2 tặng 1. Xác định số lượng cần mua tại cả 2 đối tác sao cho có lợi nhất cho quán ăn.

4 Bài tập làm thêm

Câu 11.

Gia đình An có nguồn tài chính hạn chế vì vậy An cố gắng nuôi sống gia đình với nguồn tiền ít nhất có thể. Tuy nhiên, An vẫn muốn gia đình vẫn đầy đủ lượng dinh dưỡng cần thiết cho mỗi ngày. Có 2 loại thức ăn để An lựa chọn.

- Loại 1 được bán với giá 7 000/ 100 gram, mỗi một trăm gram chứa 3 đơn vị vitamin A và 1 đơn vị vitamin C.
- Loại 2 được bán với giá 5 000/ 100 gram, mỗi một trăm gram chứa 1 đơn vị mỗi loại vitamin.

Mỗi ngày, gia đình An cần ít nhất 12 đơn vị vitamin A và 6 đơn vị C.

- Kiểm chứng xem nếu An mua 12 đơn vị thức ăn loại 2 mỗi ngày thì lượng vitamin C vượt quá nhu cầu hàng ngày là 6 đơn vị.
- Chồng An đã yêu cầu An mua thức ăn sao cho thu được chính xác lượng vitamin hàng ngày cần thiết cho gia đình: 12 đơn vị A và 6 đơn vị C.

Hãy đưa ra giải pháp tối ưu nhất để cung cấp lượng vitamin C ít hơn giải pháp của An nhưng lại tốn nhiều tiền hơn.

Câu 12.

Mỗi ngày, viên chức tại cục cảnh sát thành phố ABC phải làm việc theo 2 trong 4 ca sau:

Ca 1	Ca 2	Ca 3	Ca 4
12 am - 6 am	6 am - 12 pm	12 pm - 6 pm	6 pm - 12 am

Số nhân viên cần thiết trong mỗi ca được thể hiện ở bảng dưới đây. Lao động có hai ca liên tiếp được trả 35 000/giờ; nhân viên làm việc trong 2 ca không liên tục được thanh toán 27 000/giờ. Xây dựng mô hình toán học tương ứng có thể được sử dụng để giảm thiểu chi phí đáp ứng nhu cầu lực lượng công việc hàng ngày của Cục Cảnh sát thành phố ABC.

Ca	Lượng nhân viên cần thiết
1	18
2	5
3	10
4	6

Câu 13.

Công ty cung cấp xăng dầu Petro có 5.000 thùng dầu loại 1 và 10.000 thùng dầu loại 2. Công ty bán hai sản phẩm: xăng và dầu sưởi ấm.

- Cả hai sản phẩm được sản xuất bằng cách kết hợp dầu loại 1 và dầu loại 2.
- Chất lượng của mỗi loại dầu như sau: dầu loại 1 có chất lượng 10; dầu loại 2 có chất lượng 5.
- Xăng phải có mức chất lượng trung bình ít nhất là 8 và dầu sưởi ấm có mức chất lượng ít nhất là 6.
- Nhu cầu cho mỗi sản phẩm phụ thuộc vào quảng cáo.
- Trung bình, mỗi đô la chi tiêu cho quảng cáo tạo ra nhu cầu 5 thùng xăng; và mỗi đơn vị đô la chi cho quảng cáo dầu sưởi ấm tạo ra nhu cầu 10 thùng.
- Xăng được bán với giá 25 USD/thùng, dầu sưởi ấm có giá 20 USD/thùng.

Hãy hỗ trợ để giúp tối đa hóa lợi nhuận cho công ty xăng dầu Petro (Giả sử không có loại dầu nào khác ngoài 2 loại trên).

Câu 14.

Công ty dược phẩm Antibiotic sản xuất bốn loại thuốc kháng sinh bằng việc phối hợp ba hóa chất cơ bản. Mỗi ngày họ phải cung cấp 1.000 viên thuốc. Ba thành phần hoạt động chính trong kháng sinh là A, B, và C. Do hạn chế của quá trình lên men sản xuất ra các hoạt chất A, B, C nằm trong giới hạn lần lượt là : $[18,24]$, $[22,30]$ và $[20,30]$ (đơn vị gram).

Chi phí cho mỗi hóa chất và tỷ trọng của từng thành phần trong 1 viên của mỗi loại thuốc được đưa ra trong bảng dưới đây. Điều cần thiết là ít nhất 100 viên của hóa chất 2 được sử dụng. Xây dựng một mô hình quy hoạch tuyến tính (LP) nhằm xác định cách thức sản xuất hàng loạt thuốc kháng sinh với giá thành rẻ nhất.

Loại thuốc	giá/viên	A	B	C
1	\$8	30 mg	20 mg	10 mg
2	\$10	25 mg	40 mg	10 mg
3	\$11	10 mg	30 mg	40 mg
4	\$14	15 mg	35 mg	40 mg

Câu 15.

Bạn có 100.000.000 VND để đầu tư vào 3 loại cổ phiếu sau: A, B, C. Loại A thu được 7% tiền lời cuối năm, loại B: 8% và loại C: 12%. Loại C sinh lợi nhiều nhưng đem lại rủi ro cao nên bạn quyết định không đầu tư quá 20 triệu vào loại này. Vì những vấn đề liên quan đến thuế, bạn cần đầu tư vào loại A ít nhất là nhiều hơn 3 lần so với loại B.

Hãy chỉ ra cách đầu tư để bạn thu lợi nhiều nhất vào cuối năm sau.

Câu 16.

Một công ty sản xuất ra 2 sản phẩm X và Y. Mỗi sản phẩm được sản xuất thông qua 2 giai đoạn: giai đoạn do máy thực hiện tự động và giai đoạn thủ công do người thực hiện. Bảng bên dưới cho biết thời gian sản xuất (tính bằng phút) của từng giai đoạn ứng với mỗi sản phẩm.

	Giai đoạn tự động	Giai đoạn thủ công
Sản phẩm X	13	20
Sản phẩm Y	19	29

Công ty có sẵn 40 giờ cho giai đoạn tự động trong tuần làm việc kế tiếp nhưng chỉ có 35 giờ cho giai đoạn thủ công. Giai đoạn tự động tốn 50.000 VND trên 1 giờ làm việc và giai đoạn thủ công tốn 10.000 VND trên 1 giờ làm việc. Sản phẩm X bán với giá là 100 ngàn, còn Y là 150 ngàn. Công ty có hợp đồng phải sản xuất 10 sản phẩm X trên 1 tuần cho 1 khách hàng nào đó.

Hãy lập mô hình bài toán để quyết định xem sản xuất bao nhiêu sản phẩm trong tuần kế tiếp được lợi cao nhất.

Câu 17.

Công ty sản xuất bia có 2 kho hàng A, B với số lượng thùng bia ở mỗi kho lần lượt là: 100, 80. Đồng thời có 3 cửa hàng giải khát (C1, C2, C3) đang cần số lượng bia tương ứng là: 70, 55, 45. Chi phí vận chuyển bia từ kho hàng đến cửa hàng được cho trong bảng bên dưới:

	Cửa hàng C1	Cửa hàng C2	Cửa hàng C3
Kho hàng A	20000VND	50000VND	80000VND
Kho hàng B	60000VND	90000VND	30000VND

Hãy lập kế hoạch vận chuyển thỏa mãn được nhu cầu của mỗi cửa hàng mà chi phí vận chuyển thấp nhất.

Câu 18.

Trong ngày lễ hiến máu tình nguyện, có 170 sinh viên Đại Học Bách Khoa đã đăng ký hiến máu tại trung tâm hiến máu. Kết quả kiểm nghiệm và nhu cầu thực tế được mô tả trong bảng sau.

Loại máu	A	B	O	AB
Khả năng đáp ứng	46	34	45	45
Nhu cầu	39	38	42	50

Biết rằng:

- bệnh nhân có máu loại A chỉ được nhận máu các loại A hoặc O;
- bệnh nhân có máu loại B chỉ được nhận máu các loại B hoặc O;
- bệnh nhân có máu loại O chỉ được nhận máu loại O;

- bệnh nhân có máu loại AB có thể nhận bất kỳ loại máu nào.

Hãy giúp trung tâm quản lý máu xác định giải pháp tốt nhất để có thể phục vụ cho nhiều bệnh nhân nhất.

5 Tổng kết

Thông qua các bài tập trong phần này, chúng ta đã làm quen với việc diễn dịch một bài toán tối ưu đơn giản ngoài thực tế bằng cách đặt các biến hỗ trợ ra quyết định và diễn dịch các ràng buộc cũng như là hàm tối ưu. Bài tập này cũng giúp chúng ta phần nào hiểu thêm về ứng dụng lý thuyết toán (đặc biệt là toán rời rạc) trong đời sống thực tế.