CHƯƠNG 6. BÀI TOÁN LUỒNG CỰC ĐẠI TRONG MẠNG

<u>NỘI DUNG:</u>

- Giới thiệu bài toán
- Định lý Ford-Fulkerson
- Thuật toán tìm luồng cực đại trong mạng
- Một số bài toán luồng tổng quát
- Ứng dụng

6.1 Giới thiệu bài toán

1. Mạng

Mạng là đồ thị có hướng G = (V, E) thỏa mãn:

- Có duy nhất đỉnh s không có cung đi vào gọi là điểm phát;
- Có duy nhất đỉnh t không có cung đi ra gọi là điểm thu;
- Mỗi cung $e = (u, v) \in E$ có trọng số không âm $c(e) = c(u, v)$ gọi là khả năng thông qua của cung e.

2. Luồng trong mạng

Luồng f trong mạng G = (V, E) là ánh xạ f: $E \to R$ gán mỗi cung e = (u, v) $\in$ E một số thực không âm f(e) = f(u, v) gọi là luồng trên cung e thỏa mãn các điều kiện:

(1) Luồng trên mỗi cung e $\in$ E không vượt quá khả năng thông qua:

$$0 \le f(e) \le c(e);$$

(2) Điều kiện cân bằng luồng tại mỗi đỉnh v $\in$ V, v $\neq$ s, t: Tổng luồng trên các cung đi vào v bằng tổng luồng trên các cung đi ra khỏi v.

Ký hiệu $\Gamma^-(v) = \{u \in V: (u, v) \in E\}$,

$\Gamma^+(v) = \{w \in V: (v, w) \in E\}$.

$$Div_f(v) = \sum_{u \in \Gamma^-(v)} f(u, v) - \sum_{w \in \Gamma^+(v)} f(v, w) = 0.$$

3. Giá trị luồng

Giá trị của luồng f là $val(f) = \sum_{v \in \Gamma^{+}(s)} f(s, v) = \sum_{u \in \Gamma^{-}(t)} f(u, t)$.

4. Bài toán luồng cực đại

Input: Mạng $G = (V, E)$;

Output: Luồng f^* có giá trị luồng $val(f^*)$ lớn nhất;

Ví dụ về luồng:

- Hệ thống ống dẫn dầu bơm từ tàu chở dầu vào bể chứa dầu.
- Hệ thống các tuyến đường giao thông nối sân bay Nội bài về Hồ Hoàn kiếm.

6.2 Định lý Ford-Fulkerson

<u>1. Lát cắt:</u>

Cho X là tập các đỉnh và $X^* = V\backslash X$ với $s \in X$ và $t \in X^*$ $\Rightarrow (X, X^*)$ gọi là một lát cắt.
Khả năng thông qua của lát cắt:

$$c(X, X^*) = \sum_{u \in X,\ v \in X^*} c(u, v).$$

Lát cắt có khả năng thông qua nhỏ nhất gọi là lát cắt hẹp nhất.

Bổ đề 1. Giá trị của mọi luồng f không vượt quá khả năng thông qua của lát cắt bất kỳ:

$$val(f) \le c(X, X^*).$$

$\Rightarrow$ Giá trị luồng cực đại không vượt quá khả năng thông qua của lát cắt hẹp nhất.

2. Một số khái niệm

- Cho luồng f trong mạng G = (V, E). Xét đồ thị có trọng số G_f như sau:
(1) Nếu e = (u, v) $\in$ E với f(u, v) = 0 $\Rightarrow$ e = (u, v) $\in E_f$ với trọng số c(u, v);
(2) Nếu e = (u, v) $\in$ E với f(u, v) = c(u, v) $\Rightarrow$ e = (v, u) $\in E_f$ với trọng số f(u, v);
(3) Nếu e = (u, v) $\in$ E với 0 < f(u, v) < c(u, v) $\Rightarrow$ e = (u, v) $\in E_f$ với trọng số c(u, v) - f(u, v) và e = (v, u) $\in E_f$ với trọng số f(u, v).

- Các cung của G_f cũng là cung của G gọi là cung thuận.

- Các cung của G_f không là cung của G gọi là cung nghịch.

- G_f gọi là đồ thị tăng luồng.

- Gọi $P = (s = v_0, v_1, ..., v_k = t)$ là một đường đi từ s đến t trên G_f và δ là giá trị nhỏ nhất của các trọng số trên các cung thuộc P. Xây dựng luồng f':

(1) Nếu $(u, v) \in P$ là cung thuận thì $f'(u, v) = f(u, v) + \delta$;

(2) Nếu $(u, v) \in P$ là cung nghịch thì $f'(u, v) = f(u, v) - \delta$;

(3) Nếu $(u, v) \notin P$ thì $f'(u, v) = f(u, v)$.

$\Rightarrow val(f^*) = val(f) + \delta$

$\Rightarrow$ Thủ tục tăng luồng dọc theo P.

- Mọi đường đi từ s đến t trên G_f là đường tăng luồng f.

Định lý Ford-Fullkerson

Các mệnh đề sau là tương đương:

(1) f là luồng cực đại trong mạng;

(2) Không tìm được đường tăng luồng;

(3) Giá trị luồng f bằng khả năng thông qua của một lát cắt nào đó: val(f) = c(X, X^*).

6.3 Thuật toán tìm luồng cực đại trong mạng

Input: Mạng G = (V, E) cho bởi ma trận trọng số c[i][j];

Đỉnh phát s; Đỉnh thu t;

Output: Luồng cực đại f; giá trị luồng val(f);

Thuật toán Max_Flow {

```
// Khởi tạo
 for u ∈V
    for v  ∈V  {f(u, v) = 0; }
//Lặp
 Stop = 0;
 while (!Stop) {
 if (Tìm được được đường tăng luồng P) {
     <Tăng luồng f dọc theo P>;
    }
  else Stop = 1;
  }
  return (f, val(f));
  }
```

```
void  FindPath(){
 int cq, dq, u, v;
 int Stop = 1;
 for (u = 1; u <= n; u++) vs[u] = 0;
cq = 1; dq = 1; q[cq] = s; vs[s] = 1;   p[s] = 0; d[s] = 10000;
  while (dq <= cq){
      u = q[dq];  dq++;
      for  (v = 1; v <= n; v++)
        if (!vs[v]) {
               if (c[u][v] > 0 && fl[u][v] < c[u][v]) {
                p[v] = u;  d[v] = Min(d[u], c[u][v] - fl[u][v]);
                cq++; q[cq] = v; vs[v] = 1;
                if (v = t) return;
               }
             if (c[v][u] > 0 && fl[v][u] > 0) {
               p[v] = -u;  d[v] = Min(d[u], fl[v][u]);  cq++; q[cq] = v; vs[v] = 1;
                if (v = t) return;
                 }
           }
         }
     Stop = 0;
    }
```

6.4 Một số bài toán luồng tổng quát

1. Mạng có nhiều điểm phát, nhiều điểm thu

Xét mạng G có p điểm phát $s_1, \ldots, s_p$ và q điểm thu $t_1, \ldots, t_q$. Một luồng có thể xuất phát từ một đỉnh phát bất kỳ đến một trong các đỉnh thu và được định nghĩa tương tự như trên.

- Bài toán luồng cực đại trên G được đưa về bài toán trên bằng cách bổ sung 1 đỉnh phát giả s và 1 đỉnh thu giả t.
- Từ đỉnh phát giả s có cạnh nối đến các đỉnh phát $s_1, \ldots, s_p$ với khả năng thông qua là vô cùng lớn.
- Từ các đỉnh thu $t_1, \ldots, t_q$ có cạnh nối đến đỉnh thu giả t với khả năng thông qua là vô cùng lớn.

Thuật toán tìm luồng cực đại:

- Tìm luồng cực đại f* trên mạng G $\cup$ {s, t} bằng thuật toán Max_Flow;

- Bỏ hai đỉnh giả s và t $\Rightarrow$ có luồng cực đại f* trên G với val(f*).

2. Bài toán với khả năng thông qua của đỉnh và cạnh

Xét mạng G.

Ngoài khả năng thông qua c[u][v] trên cạnh $(u, v) \in E$, còn có khả năng thông qua của đỉnh v là số nguyên không âm d[v], $v \in V$.

Luồng f trên mạng G phải thỏa mãn thêm điều kiện: tổng luồng đi vào đỉnh v không vượt quá d[v].

Yêu cầu: Tìm luồng cực đại giữa s và t.

Thuật toán:

(1) Xây dựng mạng G’sao cho mỗi $v \in G$ tương ứng hai đỉnh v^+, v^- trong G’ với khả năng thông qua:

$c[u^-][v^+] = c[u][v]$; $c[v^-][w^+] = c[v][w]$; $c[v^-][v^+] = d[v]$;

(2) Tìm luồng cực đại f* trên G’;

(3) Xuất f* trên G và val(f*);

3. Mạng có khả năng thông qua bị chặn hai phía

Xét mạng G.

Khả năng thông qua trên cạnh $(u, v) \in E$ có cận trên là c[u][v] và cận dưới là d[u][v].

Luồng f trên mạng G phải thỏa mãn thêm điều kiện:

$$d[u][v] \leq f[u][v] \leq c[u][v].$$

Yêu cầu: Tìm luồng cực đại giữa s và t.

Thuật toán:

(1) Đưa vào hai đỉnh phát giả s_u và thu giả t_u;

Xây dựng mạng G_u sao cho mỗi cung (u, v) có $d[u][v] \neq 0$ tương ứng hai cung (s_u, v) và (u, t_u) với khả năng thông qua d[u][v]; khả năng thông qua của (u, v) là c[u][v] – d[u][v];

(2) $d^* = \sum_{(u, v) \in E} d[u][v]$;

(3) Tìm luồng cực đại f* trên G_u;

(4) Nếu val(f*) = d* $\Rightarrow$ Xuất luồng f tương thích f* trên G và val(f);

6.5 Ứng dụng

1. Bộ ghép cực đại

Cho đồ thị hai phía G với $V = X \cup Y$, $X \cap Y = \emptyset$;
Bộ ghép M trên G là các cặp (x, f(x)) với đơn ánh $f: X \rightarrow Y$.
Yêu cầu: Tìm M có số lượng phần tử lớn nhất.

Ví dụ:
1) Bài toán phân việc;
2) Bài toán đám cưới vùng quê.

Thuật toán:

(1) Đưa vào hai đỉnh phát giả s_u và thu giả t_u;

Xây dựng mạng G_u gồm các cung $(u, v) \in E$ và thêm các cung (s_u, u) và (v, t_u), $u \in X$ và $v \in Y$ với khả năng thông qua 1;

(2) Tìm luồng cực đại f trên G_u;

(3) Xuất các cặp (u, v) nếu $f[u][v] > 0$, $u \in X$ và $v \in Y$ và val(f);

Ghi chú

- Xét đồ thị hai phía có trọng số không âm;

- Tìm bộ ghép M có số cặp lớn nhất và tổng trọng số lớn nhất;

- Thuật toán tương tự trên.

2. Hệ đại diện chung

Cho $X = \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$ và hai dãy tập con của X: $<A_1, \ldots, A_n>$ và $<B_1, \ldots, B_n>$;
Dãy n phần tử khác nhau của X: $(a_1, \ldots, a_n)$ gọi là hệ đại diện chung của hai dãy trên $\Leftrightarrow$ tồn tại hoán vị của các số $\{1, .., n\}$ là $(h_1, \ldots, h_n)$ thỏa mãn $a_i \in A_i \cap B_{hi}$, với $i = 1, \ldots, n$.

<u>Yêu cầu</u>: Tìm hệ đại diện chung $(a_1, \ldots, a_n)$.

Thuật toán:

(1) Xây dựng mạng G = (V, E) với:

$V = \{s, t\} \cup \{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{u_1, \ldots, u_m\} \cup \{v_1, \ldots, v_m\} \cup \{y_1, \ldots, y_n\}$;

trong đó x_i tương ứng A_i, y_i tương ứng B_i, u_j, v_j tương ứng z_j;

$E = \{(s, x_i) | i = 1, \ldots, n\} \cup \{(x_i, u_j | z_j \in A_i\} \cup \{(u_i, u_j)\} \cup \{v_j, y_i)\} \cup \{(y_i, t)\}$;

khả năng thông qua trên các cung là 1;

(2) Tìm luồng cực đại f trên G;

(3) Nếu val(f) = n $\Rightarrow$ Xuất $(a_1, \ldots, a_n)$, với a_j tương ứng z_j;