BETA Mathematic Modeling

exercise book

Author
Đào Nguyễn Quốc Vinh

Mục lục

Lời nói đầu

MÔ HÌNH HÓA TOÁN HỌC là một môn học mới mẻ trong chương trình đào tạo của Khoa KHMT. Nắm được nhu cầu học tập, quyển tài liệu này được biên soạn nhằm giúp sinh viên giải các bài tập trong quá trình học và ÔN THI CUỐI KỲ. Để giải một số bài tập, người đọc cần quan tâm đến phần phụ lục. Sách cũng có thể làm tài liệu tham khảo cho sinh viên đang làm luận án tốt nghiệp hay trong quá trình công tác sau này khi có nhu cầu quan tâm đến nội dung MÔ HÌNH HÓA TOÁN HỌC. Sau một thời gian thực hiện, tiếp nhận sự giúp đỡ của các bạn Nguyễn Trường Duy, Lê Quốc Huy,..., sách đã được sửa chữa, bổ sung. Tuy nhiên, do lần đầu xuất bản, có những hạn chế khách quan và chủ quan nên vẫn còn những nội dung cần tiếp tục được bổ sung và sửa đổi, tác giả mong nhận được nhiều góp ý để tài liệu này được hoàn chỉnh hơn.

Đào Nguyễn Quốc Vinh

1 Integer Linear Programming

Câu 1.

Một công ty sản xuất đồ nội thất sản xuất bàn và ghế gỗ. Lợi nhuận cho 1 cái bàn là 6$, lợi nhuận cho 1 cái ghế là 8$. Một cái bàn tốn 30 tấm gỗ và 5 giờ để làm, còn 1 cái ghế tốn 20 tấm gỗ và 10 giờ để làm. Công ty chỉ còn 300 tấm gỗ và 100 giờ lao động cho tuần tiếp theo. Xây dựng mô hình toán học để tối đa hóa lợi nhuận cho công ty trong tuần tiếp theo.

Lời giải.

1. *Decision variables:*
   X_1*: số bàn*
   X_2*: số ghế*

2. *Constraints:*
   Công ty còn 300 tấm gỗ:
   $$30X_1 + 20X_2 \leq 300$$
   Công ty còn 100 giờ lao động:
   $$5X1 + 10X_2 \leq 100$$

3. *Objective function:*
   Z: tổng lợi nhuận thu được
   Maximize $Z = 6X_1 + 8X_2$

Câu 2.

Một nhà máy dự định tiến hành sản xuất 4 loại sản phẩm Correction Tape CT1, CT2, CT3, CT4. Cả 4 loại sản phẩm này đều sử dụng 3 loại nhựa ABS, GPPS, POM.

Mức tiêu hao vật liệu cho trong bảng sau:

Nguyên liệu	CT1	CT2	CT3	CT4
ABS	2	5	7	4
GPPS	3	1	5	6
POM	6	5	4	5

Dự trữ nguyên liệu cho trong bảng sau:

Dự trữ nguyên liệu	ABS	GPPS	POM
	1200	800	2000

Lợi nhuận thu được theo từng đơn vị sản phẩm cho trong bảng sau:

Lợi nhuận /1 sản phẩm	CT1	CT2	CT3	CT4
	300	250	500	150

Cần xây dựng phương án để nhà máy đạt tổng lợi nhuận lớn nhất.

Lời giải.

1. *Decision variables:*
   X_1*: Số sản phẩm CT1*
   X_2*: Số sản phẩm CT2*
   X_3*: Số sản phẩm CT3*
   X_4*: Số sản phẩm CT4*

2. *Constraints:*
   Nhà máy còn 1200 đơn vị nhựa ABS:

$$2X_1 + 5X_2 + 7X_3 + 4X_4 \leq 1200$$

   Nhà máy còn 800 đơn vị nhựa GGPS:

$$3X_1 + X_2 + 5X_3 + 6X_4 \leq 800$$

   Nhà máy còn 2000 đơn vị nhựa BOM:

$$6X_1 + 5X_2 + 4X_3 + 5X_4 \leq 2000$$

3. *Objective function:*
   Z: Lợi nhuận
   Maximize $Z = 300X_1 + 250X_2 + 500X_3 + 150X_4$

Câu 3.

Một doanh nghiệp cần vận chuyển hàng hóa từ 2 kho đến 3 cửa hàng bán lẻ. Lượng hàng hóa ở các kho s_i, nhu cầu tiêu thụ hàng hóa ở các cửa hàng d_j và chi phí vận chuyển từ kho i đến cửa hàng j là c_{ij} được cho ở bảng dưới.

	Cửa hàng 1 ($d_1 = 50$)	Cửa hàng 2 ($d_2 = 80$)	Cửa hàng 3 ($d_3 = 100$)
Kho 1 ($s_1 = 400$)	$c_{11} = 100$	$c_{12} = 180$	$c_{13} = 100$
Kho 2 ($s_2 = 90$)	$c_{21} = 50$	$c_{22} = 120$	$c_{23} = 80$

Hãy lập kế hoạch vận chuyển từ mỗi kho đến mỗi cửa hàng sao cho các kho đều phân phối hết hàng, các cửa hàng đều nhận đủ hàng và tổng chi phí phải trả là ít nhất.

Lời giải.

1. *Decision variables:*
   X_{ij}*: số lần vận chuyển từ kho i đến cửa hàng j*

2. *Constraints:*
Tổng số hàng lấy từ kho 1 không quá 400:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq 400$$

Tổng số hàng lấy từ kho 2 không quá 90:

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 90$$

Cửa hàng 1 nhận đủ 50 hàng:

$$X_{11} + X_{21} = 50$$

Cửa hàng 2 nhận đủ 80 hàng:

$$X_{12} + X_{22} = 80$$

Cửa hàng 3 nhận đủ 100 hàng:

$$X_{13} + X_{23} = 100$$

3. *Objective function:*
Z: Chi phí
Minimize $Z = 100X_{11} + 180X_{12} + 100X_{13} + 50X_{21} + 120X_{22} + 80X_{23}$

Câu 4.

Cửa hàng bán quần áo A nhân dịp khai trương đã đưa ra chương trình bán hàng sau. Cửa hàng chỉ bán quần áo theo gói, không bán lẻ từng chiếc. Có hai loại gói như sau:

- Gói 1 giá 200 000 có 3 áo và 1 váy;
- Gói 2 giá 150 000 có 2 áo và 2 váy.

Mỗi khách hàng chỉ được mua tối đa 6 gói các loại. Lan muốn mua ít nhất 10 cái áo và 6 cái váy. Hãy giúp Lan mua được số lượng váy áo mong muốn với chi phí thấp nhất.

Lời giải.

1. *Decision variables:*
X_1*: số gói 1*
X_2*: số gói 2*

2. *Constraints:*
Mỗi khách hàng chỉ được mua tối đa 6 gói các loại:

$$X_1 + X_2 \leq 6$$

Lan muốn mua ít nhất 10 cái áo:

$$3X_1 + 2X_2 \geq 10$$

Lan muốn mua ít nhất 6 cái váy:

$$X_1 + 2X_2 \geq 6$$

3. *Objective function:*
   Z: Chi phí
   Minimize $Z = 200000X_1 + 150000X_2$

Câu 5.

Một xưởng sản xuất làm 3 sản phẩm : máy truyền hình, máy phát thanh và loa. Mỗi sản phẩm được lắp ráp từ những phụ kiện có sẵn trong kho. Có 5 loại vật tư phụ kiện : khung máy, đèn hình, bộ loa, bộ nguồn, bảng mạch điện tử. Mục tiêu là sản xuất đầy đủ các sản phẩm để có lãi nhiều nhất với số vật tư phụ kiện còn tồn trong kho. Số vật tư tồn đầu kỳ là : 450 khung máy, 250 đèn hình, 800 bộ loa, 450 bộ nguồn và 600 bảng mạch điện tử.
Định mức cho :

- máy truyền hình : 1 khung, 1 đèn hình, 2 bộ loa, 1 bộ nguồn, 2 bảng mạch điện tử
- máy phát thanh: 1 khung, 2 bộ loa, 1 bộ nguồn, 1 bảng mạch điện tử
- loa : 1 bộ loa, 1 bảng mạch điện tử

Cho biết lãi cho mỗi sản phẩm được dự tính là

- máy truyền hình: 75$,
- máy phát thanh: 50$,
- loa: 35$.

Lời giải.

1. *Decision variables:*
   X_1*: Số máy truyền hình*
   X_2*: Số máy phát thanh*
   X_3*: Số loa*

2. *Constraints:*
   Xưởng có 450 khung máy và có 450 bộ nguồn:

$$X_1 + X_2 \leq 450$$

   Xưởng có 250 đèn hình:

$$X_1 \leq 250$$

   Xưởng có 800 bộ loa:

$$2X_1 + 2X2 + X_3 \leq 800$$

   Xưởng có 600 bản mạch điện tử:

$$2X_1 + X_2 + X_3 \leq 600$$

3. *Objective function:*
   Z: Tổng lãi
   Maximize $Z = 75X_1 + 50X_2 + 35X_3$

Câu 6.

Một nông dân cần quy hoạch sản phẩm nông nghiệp trồng tối ưu trên mảnh đất của mình. Vấn đề đặt ra là nên trồng bao nhiêu tấn lúa mì và bao nhiêu tấn lúa gạo để có lợi nhuận lớn nhất trong điều kiện hạn chế về đất, nước và con người. Biết:

- Diện tích đất cần để sản xuất 1 tấn lúa gạo là 2 ha và lúa mì là 3 ha,
- Lượng nước cần để sản xuất 1 tấn lúa gạo là $6m^3$ và lúa mì là $4m^3$,
- Nhân công cần để sản xuất 1 tấn lúa gạo là 20 công nhân và lúa mì là 5 công nhân,
- Nông dân này có tối đa : 25 ha đất, $50m^3$ nước, 125 nhân công,
- Lợi nhuận thu đc từ lúa gạo là 18 $/tấn và lúa mì là 21 $/tấn.

Lời giải.

1. *Decision variables:*
   X_1*: Số tấn lúa gạo*
   X_2*: Số tấn lúa mì*

2. *Constraints:*
   Có 25 ha đất:
   $$2X_1 + 3X_2 \leq 25$$
   Có 50 m^3 *nước:*
   $$6X_1 + 4X_2 \leq 50$$
   Có 125 nhân công:
   $$20X_1 + 5X2 \leq 125$$

3. *Objective function:*
   Z: Lợi nhuận
   Maximize $Z = 18X_1 + 21X_2$

Câu 7.

Một doanh nghiệp mua bán nông sản nhỏ chuyên mua bán các loại nông sản: tiêu, điều, cà phê. Năm nay, vào mùa thu hoạch giá các loại nông sản mua vào và bán ra như sau:

	Giá mua /kg	Giá bán/kg
Tiêu	40 000	42 000
Điều	20 000	21 500
Cà phê	10 000	10 800

Do nguồn lực có giới hạn, vốn lưu động của doanh nghiệp trong một ngày chỉ vỏn vẹn trong 1 tỷ VND. Để giữ mối quan hệ, doanh nghiệp phải mua ít nhất 2 tấn tiêu mỗi ngày và không thể mua quá 0 tấn cà phê và 10 tấn điều mỗi ngày do điều kiện kho bãi không cho phép. không được phép quá 80 ấn mỗi ngày điều kiện của doanh nghiệp và nhu cầu về nông sản.
Hãy giúp doanh nghiệp tối ưu lợi nhuận thu được trong điều kiện cho phép mỗi ngày.

Lời giải.

1. *Decision variables:*
   X_1*: Số tấn tiêu*
   X_2*: Số tấn điều*
   X_3*: Số tấn cà phê*

2. *Constraints:*
   Vốn lưu động giới hạn 1 tỷ:
   $$40000X_1 + 20000X_2 + 10000X_3 \leq 1000000000$$
   Mua ít nhất 2 tấn tiêu:
   $$X_1 \geq 2$$
   Không thể mua quá 40 tấn cà phê:
   $$X_2 \leq 40$$
   Không thể mua quá 10 tấn điều:
   $$X_3 \leq 10$$
   Không thể mua quá 80 tấn:
   $$X_1 + X_2 + X_3 \leq 80$$

3. *Objective function:*
   Z: Lợi nhuận
   Maximize $Z = 2000X_1 + 1500X_2 + 800X_3$

Câu 8.

Một quán ăn cần mua 3 loại sản phẩm sau: cà chua, khoai tây, và thịt với tổng số kg mỗi loại lần lượt là 50, 100, 50. Quán ăn hiện có hai đối tác nhận cung cấp hàng, và đưa ra giá như sau:

	Cà chua	Khoai tây	Thịt	Giá
Đối tác A	10	10	5	25$
Đối tác B	5	8	10	30$

Tuy nhiên, hiện nay đối tác B đang đưa ra chương trình khuyến mãi, mua 2 tặng 1. Xác định số lượng cần mua tại cả 2 đối tác sao cho có lợi nhất cho quán ăn.

Lời giải.

1. *Decision variables:*
   X_1*: Số kg cà chua mua ở đối tác A*
   X_2*: Số kg khoai tây mua ở đối tác A*
   X_3*: Số kg thịt ở đối tác A*
   Y_1*: Số kg cà chua mua ở đối tác B*
   Y_2*: Số kg khoai tây mua ở đối tác B*
   Y_3*: Số kg thịt ở đối tác B*

2. *Constraints:*
   Quán cần mua 50 kg cà chua:

$$X_1 + Y_1 + \lfloor \frac{Y_1}{2} \rfloor = 50$$

   Quán cần mua 100 kg khoai tây:

$$X_2 + Y_2 + \lfloor \frac{Y_2}{2} \rfloor = 100$$

   Quán cần mua 50 kg thịt:

$$X_3 + Y_3 + \lfloor \frac{Y_3}{2} \rfloor = 50$$

3. *Objective function:*
   Z: Số tiền mua
   Minimize $Z = \frac{25}{10}X_1 + \frac{25}{10}X_2 + \frac{25}{5}X_3 + \frac{30}{5}Y_1 + \frac{30}{8}Y_2 + \frac{30}{10}Y_3$

2 Automata

Câu 1.

Cho $\Sigma = \{a, b\}$.
Tìm tất cả các chuỗi trong $L = ((a+b)^* b(a+ab)^*)$ có độ dài nhỏ hơn 4.

Lời giải.

$b, ab, ba, bb, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb$

Câu 2.

Cho $\Sigma = \{a, b\}$.
Ngôn ngữ nào dưới đây thỏa $L = L^*$?

a)$L = a^n b^{n+1} : n \geq 0$

b) $L = w : n_a(w) = n_b(w)$

Lời giải.

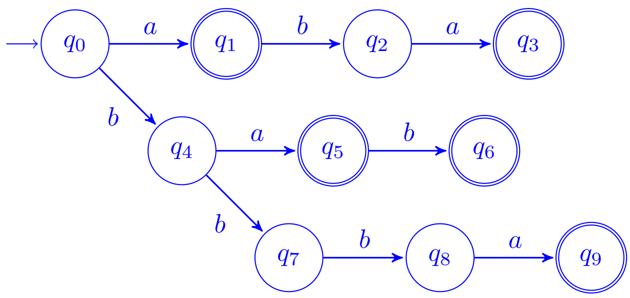
a) **SAI**

b) **ĐÚNG**

Câu 3.

Tìm một automata hữu hạn cho ngôn ngữ $L = \{a, ba, aba, bab, bbba\}$.

Lời giải.



Câu 4.

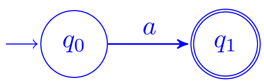
Cho $\Sigma = \{a\}$. Tìm một automata hữu hạn thỏa:

a) tất cả các chuỗi có đúng một 'a'.

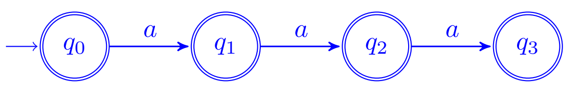
b) tất cả các chuỗi có không quá ba 'a'.

Lời giải.

a)



b)



Câu 5.

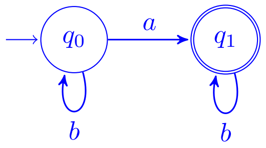
Cho $\Sigma = \{a, b\}$.Tìm một automata hữu hạn thỏa:

a) tất cả các chuỗi có đúng một 'a'.

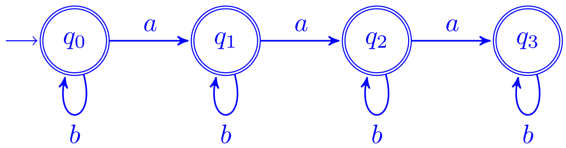
b) tất cả các chuỗi có không quá ba 'a'.

Lời giải.

a)



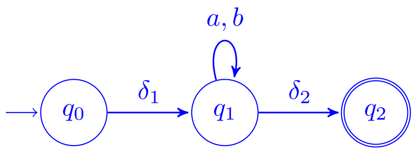
b)



Câu 6.

Tìm một automata cho ngôn ngữ $L = \{ab^5wb^4 : w \in \{a, b\}^*\}$.

Lời giải.



$\delta_1 = ab^5$, $\delta_2 = b^4$

Câu 7.

Tìm các automata tương ứng cho các ngôn ngữ dưới đây thuộc $\Sigma = \{a, b\}$

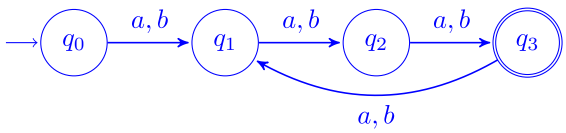
a) $L_1 = \{w : |w|\ mod\ 3 = 0\}$

b) $L_2 = \{w : |w|\ mod\ 5 \neq 0\}$

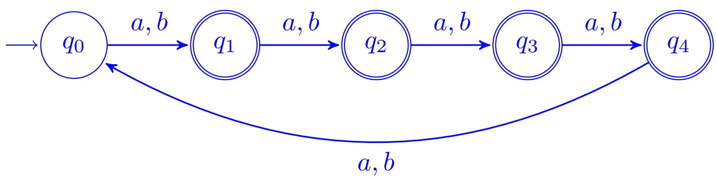
c) $L_3 = \{w : n_a(w)\ mod\ 3 > 1\}$

Lời giải.

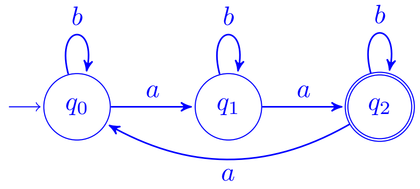
a)



b)



c)

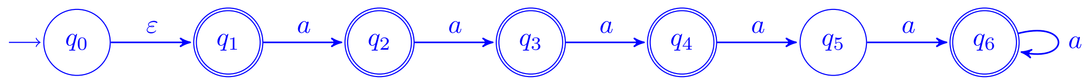


Câu 8.

Chứng minh ngôn ngữ $L = a^n : n \geq 0, n \neq 4$ là chính quy.

Lời giải.

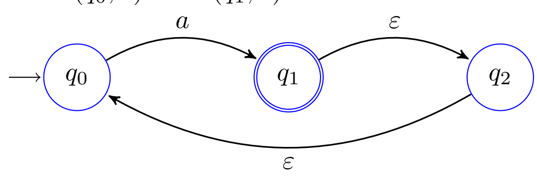
Hình dưới đây biểu diễn một NFA $M = (\{q_0, q_1, q_2, ..., q_6\}, \{a\}, \delta, q_0, \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_6, \})$ *chấp nhận* $L = a^n : n \geq 0, n \neq 4$, δ *được mô tả trong hình.*



Theo định lý, nếu L được chấp nhận bởi một NFA, thì cũng tồn tại một DFA chấp nhận L.
Vậy L là ngôn ngữ chính quy.

Câu 9.

Tìm $\delta^*(q_0, a)$ và $\delta^*(q_1, a)$ cho automata sau:

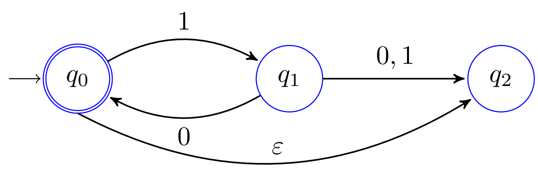


Lời giải.

$\delta^*(q_0, a) = \{q_0, q_1, q_2\}, \delta^*(q_1, \varepsilon) = \{q_0, q_2\}$

Câu 10.

Tìm $\delta^*(q_0, 1010)$ và $\delta^*(q_1, 00)$ cho automata sau:



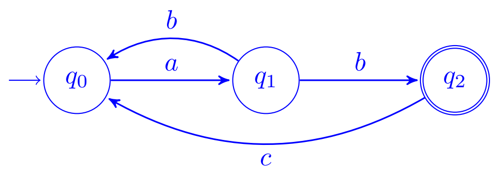
Lời giải.

$\delta^*(q_0, 1010) = \{q_0, q_2\}, \delta^*(q_1, 00) = \emptyset.\varepsilon$

Câu 11.

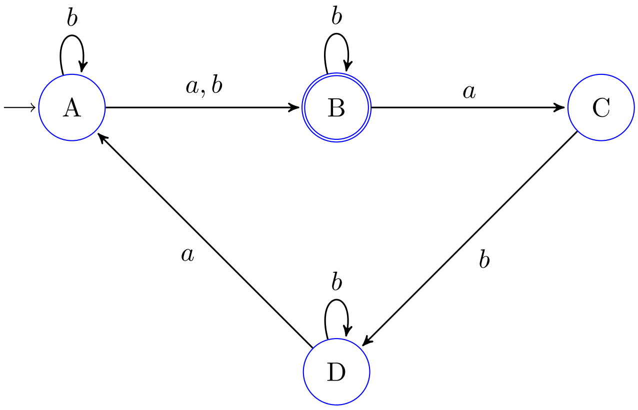
Tìm một automata có 3 trạng thái chấp nhận ngôn ngữ $\{ab, abc\}^*$.

Lời giải.

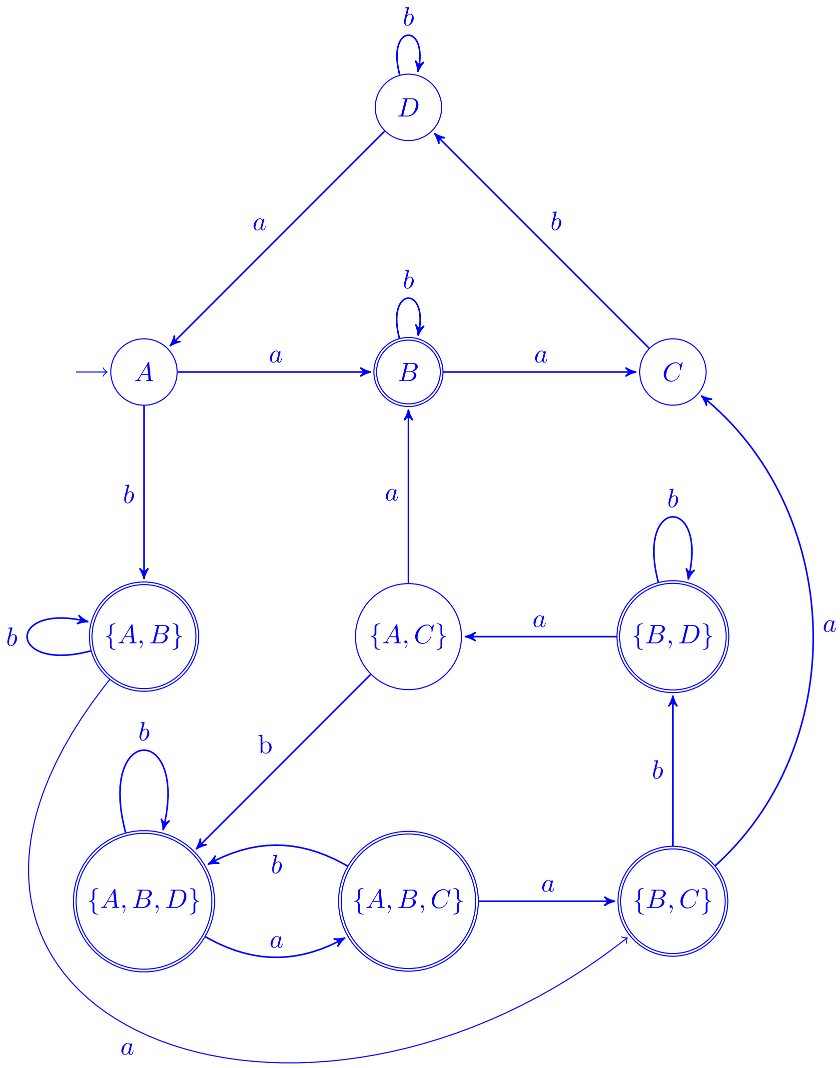


Câu 12.

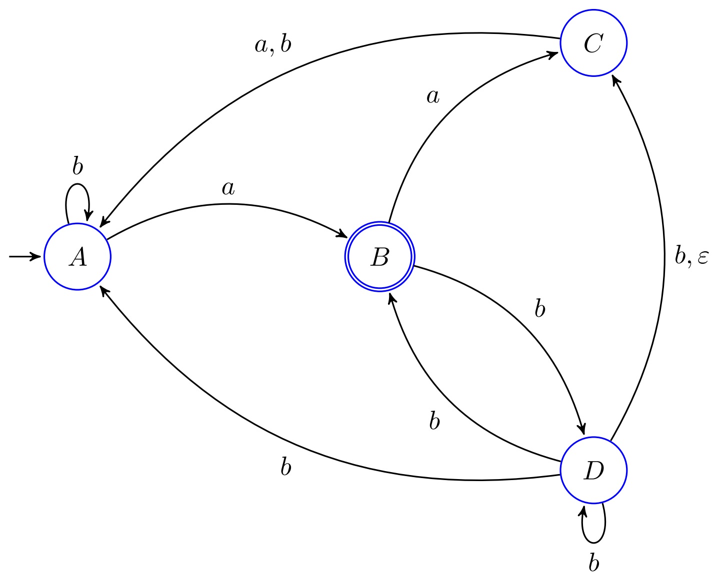
Chuyển NFA sau thành DFA.



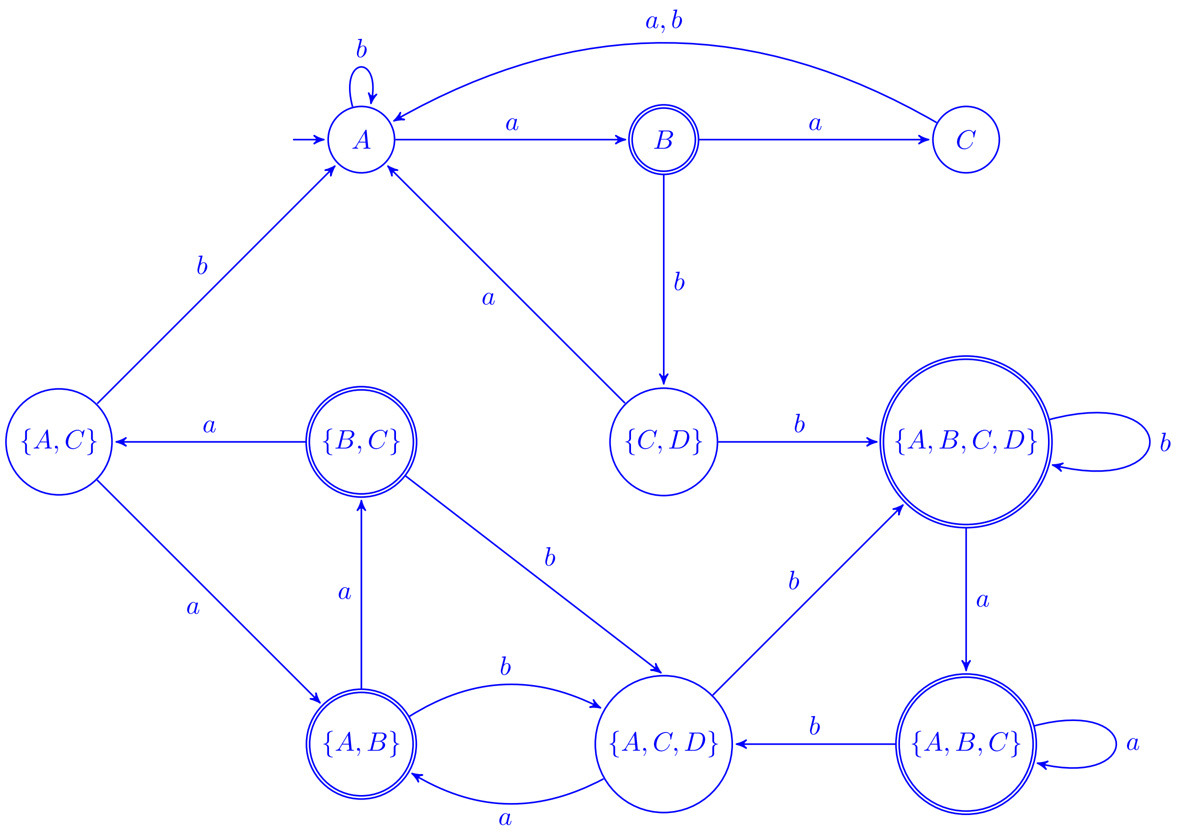
Lời giải.



Câu 13.
Chuyển NFA sau thành DFA.



Lời giải.

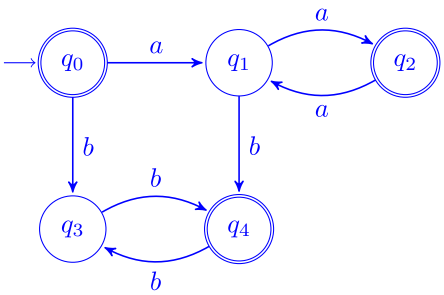


Câu 14.

Tìm một biểu thức chính quy thỏa $\{a^m b^n : (n+m)\ is\ even\ \}$.
Biểu diễn kết quả bằng DFA (hoặc NFA rồi chuyển thành DFA).

Lời giải.

$(aa)^*(bb)^* + a(aa)^*b(bb)^*$

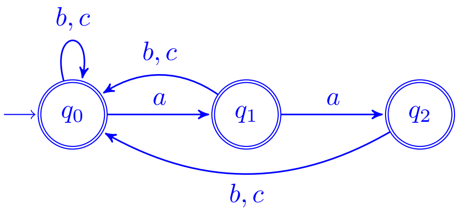


Câu 15.

Tìm một biểu thức chính quy cho ngôn ngữ thuộc $\Sigma\{a, b, c\}$không chứa chuỗi nào có quá 2 a liên tiếp nhau.
Biểu diễn kết quả bằng DFA (hoặc NFA rồi chuyển thành DFA).

Lời giải.

$((b+c)^* + (b+c)^*a(b+c)^* + (b+c)^*aa(b+c)^*)^*$

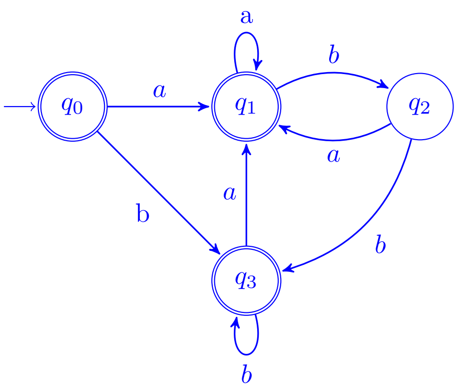


Câu 16.

Tìm một biểu thức chính quy cho ngôn ngữ thuộc $\Sigma = \{a, b\}$ không chứa chuỗi nào kết thúc bằng ab.
Biểu diễn kết quả bằng DFA (hoặc NFA rồi chuyển thành DFA).

Lời giải.

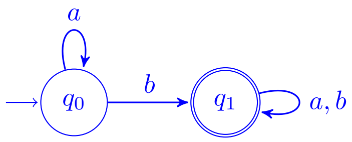
$\varepsilon + a + b + (a+b)^*(aa + ba + bb)$



Câu 17.

Tìm một DFA chấp nhận $L = ((a+b)^*b(a+ab)^*)$.

Lời giải.



Câu 18.

Cho $\Sigma = \{a, b, c\}$. Tìm một complet automata thỏa các điều kiện sau:

a) tất cả các chuỗi có đúng một 'a'.

b) tất cả các chuỗi chẵn.

c) tất cả các chuỗi có số lượng 'b' chia hết cho 3.

d) tất cả các chuỗi kết thúc bằng 'a'.

e) tất cả các chuỗi không kết thúc bằng 'a'.

f) tất cả các chuỗi không rỗng không kết thúc bằng 'a'.

g) tất cả các chuỗi có ít nhất một 'a'.

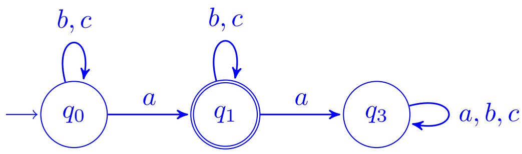
h) tất cả các chuỗi có nhiều nhất một 'a'.

i) tất cả các chuỗi không có 'a'.

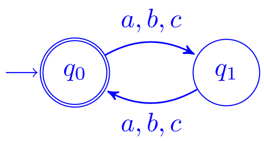
j) tất cả các chuỗi chứa ít nhất một 'a' và theo sau 'a' không phải là 'c'.

Lời giải.

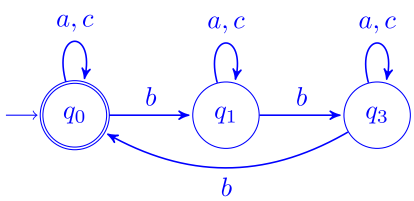
a)



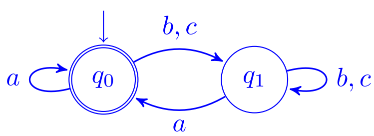
b)



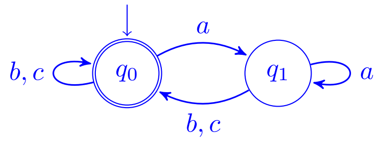
c)



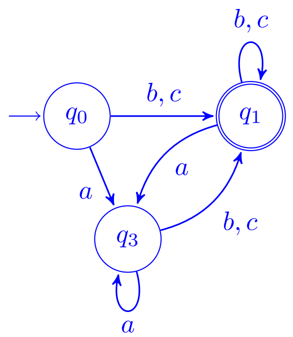
d)



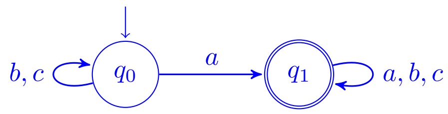
e)


b, c
q_0
a
q_1
a
b, c

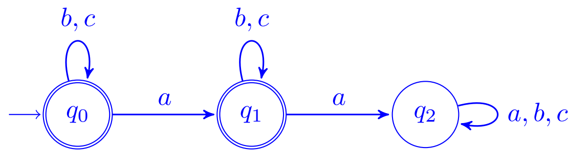
f)


b, c
q_0
b, c
q_1
a
a
q_3
b, c
a

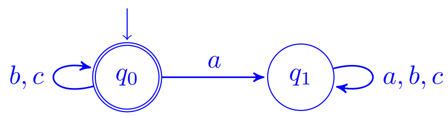
g)


b, c
q_0
a
q_1
a, b, c

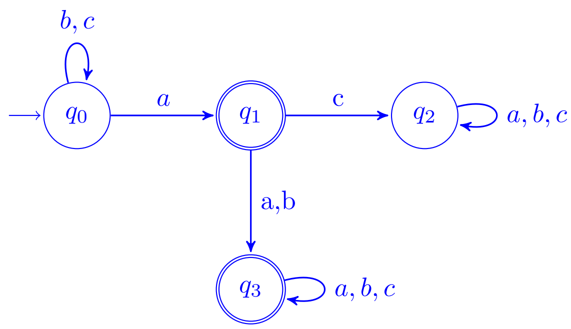
h)


b, c
b, c
q_0
a
q_1
a
q_2
a, b, c

i)

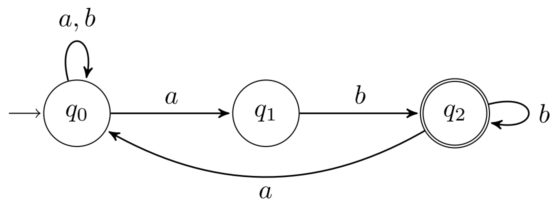

b, c
q_0
a
q_1
a, b, c

j)


b, c
q_0
a
q_1
c
q_2
a, b, c
a,b
q_3
a, b, c

Câu 19.

Cho automata như hình dưới:



a) Viết biểu thức chính qui cho automata bên trên

b) Hãy chuyển NFA trên thành DFA tối giản

c) Xây dựng luồng thực thi (execution) cho DFA đề xuất từ *aabbbbabbba*

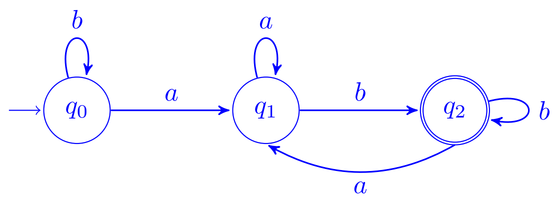
d) Tìm một từ không hợp lệ trong automata bên trên.

Lời giải.

a)

$$(a+b)^*ab(b^* + a(a+b)^*ab)^*$$

b)



c)

$(q_0, aabbbbabbba) \to (q_1, abbbbabbba) \to (q_1, bbbbabbba) \to (q_2, bbbabbba)$
$\to ... \to (q_2, abbba) \to (q_1, bbba) \to (q_2, bba) \to ... \to (q_2, a) \to (q_1, \_)$

d) Ta thấy: $\forall q \in Q, \forall u \in \Sigma^*, \exists \delta(q, u) \in Q$

$\Rightarrow$ DFA trên là complet automata.

Câu 20.

Hai biểu thức chính qui: $E_1 = (a^* + b + ca)^*$ và $E_2 = ((a^* + b)^* + (cab)^*)^*$ có biểu diễn cùng một ngôn ngữ không? Nếu không hãy đưa phản ví dụ.

Lời giải.

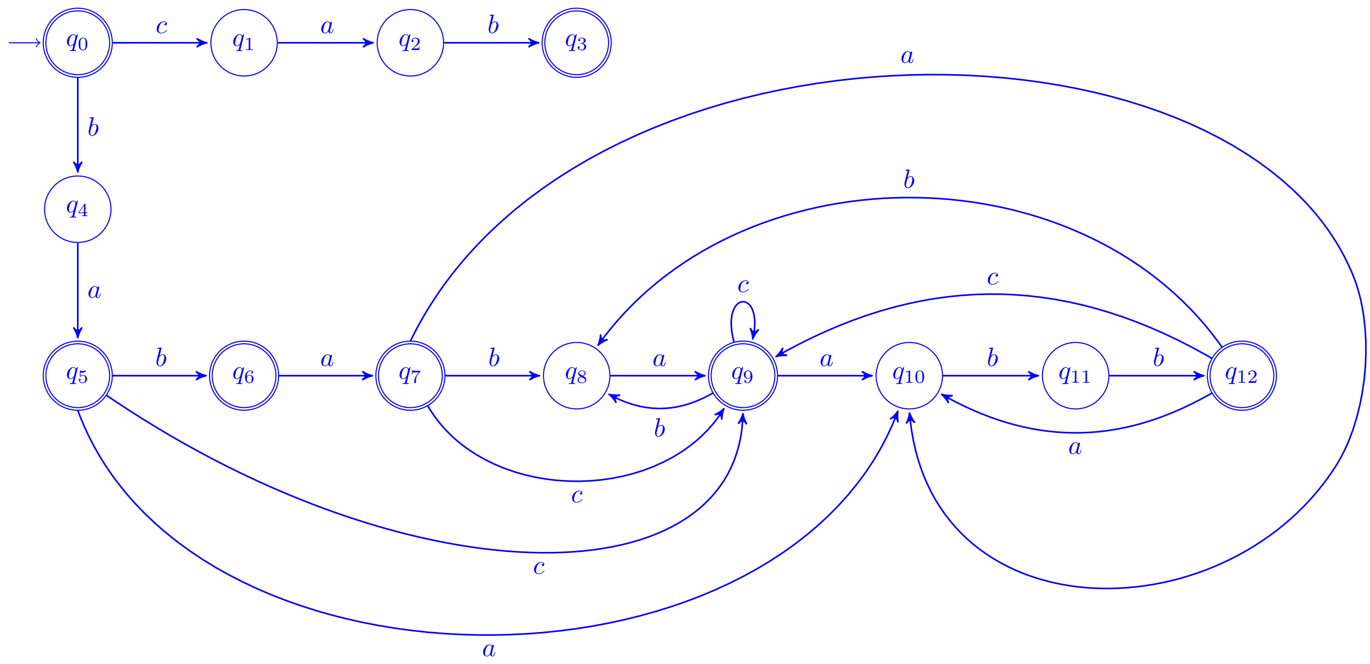
Không.
VD: *ca* thỏa E_1 nhưng không thỏa E_2

Câu 21.

Hãy vẽ DFA biểu diễn ngôn ngữ được biểu diễn bằng biểu thức chính qui

$$(b+c)ab + (ba(c+ab^2)^*)^*$$

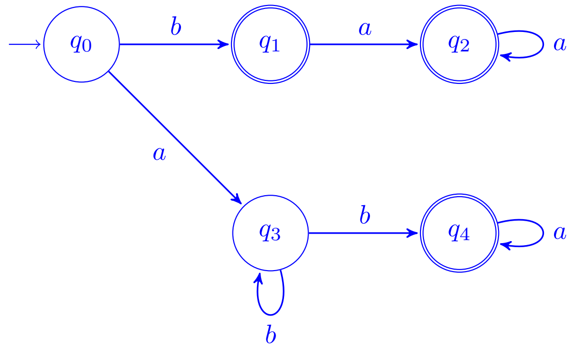
Lời giải.



Câu 22.
Hãy vẽ DFA biểu diễn ngôn ngữ được biểu diễn bằng biểu thức chính qui

$$ab^*ba^* + b + ba^*a$$

Lời giải.

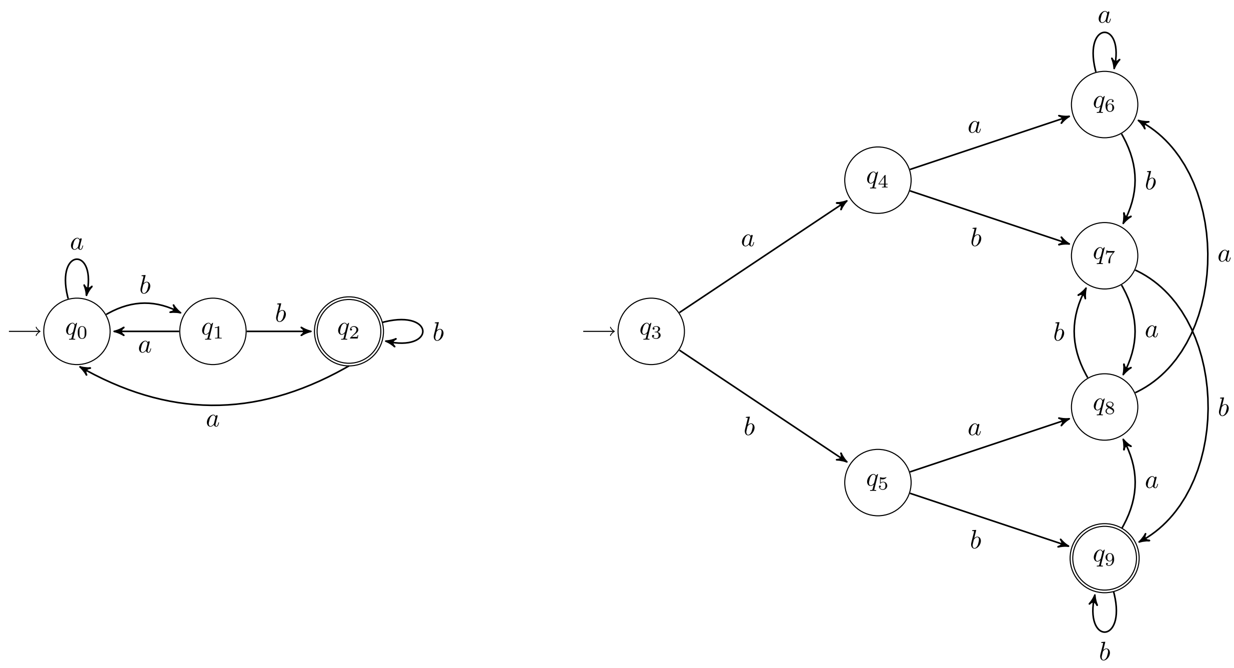


Câu 23.
Hai automata bên dưới có tương đương không? Nếu không hãy đưa phản ví dụ.

Lời giải.

Hai automata không tương đương.
VD: *bab* thỏa automata thứ nhất nhưng không thỏa automata thứ hai.

Câu 24.
Hai automata bên dưới có tương đương không? Nếu không hãy đưa phản ví dụ.



Lời giải.

Hai automata tương đương nhau.

3 Dynamical Systems

Câu 1.

Một hệ thống xử lý nước thải lọc các chất gây ô nhiễm để tái chế thành nước sạch và sản xuất phân bón. Giả sử mỗi giờ hệ thống này lọc được 12% lượng chất thải trong bể.

a) Còn bao nhiêu chất thải trong bể sau một ngày ?

b) Sau bao lâu thì lượng chất thải còn một nửa ?

c) Sau bao lâu thì lượng chất thải còn dưới 10% ?

Lời giải.

Giả sử lượng chất thải trong bể lúc đầu là a_0 và sau n giờ là a_n.Ta được mô hình

$$a_{n+1} = a_n - 0.12a_n = 0.88a_n$$

là hệ động lực tuyến tính. Nghiệm của hệ này là:

$$a_k = (0.88)^k a_0$$

a)

Sau một ngày, $k = 24$ giờ nên lượng chất thải còn lại là:

$$a_{24} = (0.88)^{24} a_0 = 0.0465a_0$$

b)

$$\begin{aligned} a_k &= 0.5a_0 = (0.88)^k a_0 \\ \Leftrightarrow (0.88)^k &= 0.5 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{\log 0.5}{\log 0.88} = 5.42 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} (0.88)^k a_0 &= 0.1a_0 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{\log 0.1}{\log 0.88} = 18.01 \end{aligned}$$

Câu 2.

Botulinum là một protein và là một độc tố thần kinh do vi khuẩn Clostridium botulinum tạo ra. Nó là chất độc gây chết người mạnh nhất từng được biết, với liều gây chết trung bình ở người khoảng 1,3-2,1 ng/kg tiêm tĩnh mạch hoặc tiêm bắp và 10-13 ng/kg khi hít vào. Botulinum có thể gây ngộ độc thịt, một căn bệnh nghiêm trọng đe dọa tính mạng của con người và động vật. Ba botulinum loại A (Botox, Dysport và Xeomin) và một botulinum loại B (Myobloc) có mặt trong nhiều loại sản phẩm y tế và mỹ phẩm thương mại khác nhau. Botox được sử dụng nhiều trong thẩm mỹ để chống lão hóa, đặc biệt là các nếp nhăn trên da mặt. Mục tiêu của vấn đề là xem xét sự phân hủy của botox để quyết định liều lượng nhằm giữ nồng độ ở mức cho phép (đủ an toàn và hiệu quả). Giả sử quy định một liều tiêm định kỳ là 2 UI và còn tồn lại một nửa ở cuối kỳ.

a) Tìm một mô hình thích hợp để ước tính lượng botox trong cơ thể ngay sau khi tiêm.

b) Tìm một liều lượng ổn định cho lần tiêm đầu tiên.

c) Biết liều đầu tiêm 6 UI. Tính lượng botox trong cơ thể ngay sau lần tiêm thứ 5 ?

Lời giải.

a) Gọi a_0 và a_n lần lượt là lượng botox ngay sau lần tiêm đầu tiên và lần thứ $n-1$. Ta được mô hình

$$a_{n+1} = ra_n + b$$

với $r = 0.5$, $b = 2$. Nghiệm của mô hình là:

$$a_k = r^k c + \frac{b}{1-r}$$

với $c = a_0 - \frac{b}{1-r}$.

b)

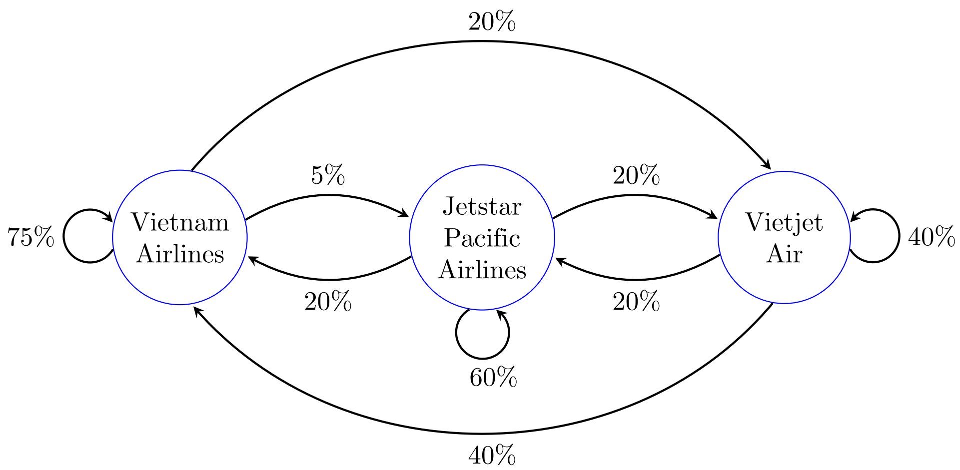
$$a_0 = \frac{b}{1-r} = \frac{2}{1-0.5} = 4$$

c)

$$c = 6 - \frac{2}{1-0.5} = 2$$
$$a_4 = (0.5)^4.2 + \frac{2}{1-0.5} = 4.125$$

Câu 3.

Xét một sân bay nội địa gồm 3 hãng: Vietnam Airlines, Jetstar Pacific Airlines và Vietjet Air. Khảo sát các hành khách theo tuần cho thấy 75% hành khách của Vietnam Airlines tiếp tục sử dụng dịch vụ của hãng, 5% chuyển sang Jetstar Pacific Airlines và 25% chuyển sang Vietjet Air. Đối với Jetstar Pacific Airlines, 60% hành khách ở lại với hãng, 20% chuyển sang Vietjet Air và 20% chuyển sang Vietnam Airlines. Chỉ có 40% hành khách tiếp tục gắn bó với Vietjet Air, 40% chuyển sang Vietnam Airlines và 20% chuyển sang Jetstar Pacific Airlines. Giả sử xu hướng này tiếp tục ở các tuần tiếp theo và không có hành khách nào được thêm vào hay rời khỏi hệ thống. Hình dưới đây tóm lược dữ liệu này.



Gọi n là số tuần bay và đặt

- X_n là số hành khách của Vietnam Airlines ở tuần thứ n
- Y_n là số hành khách của Jetstar Pacific Airlines ở tuần thứ n
- Z_n là số hành khách của Vietjet Air ở tuần thứ n

a) Tìm hệ động lực rời rạc dưới dạng ma trận diễn tả dữ liệu trên.

b) Trạng thái cân bằng của mô hình hệ động lực trên xảy ra khi số lượng hành khách mỗi tuần sẽ không thay đổi theo thời gian, tức là khi $X_{n+1} = X_n = X$, $Y_{n+1} = Y_n = Y$ và $Z_{n+1} = Z_n = Z, \forall n$. Tìm hệ phương trình tuyến tính thuần nhất khi trạng thái cân bằng xảy ra.

c) Giả sử tổng số hành khách ban đầu là 9000, tìm số hành khách của mỗi hãng khi hệ cân bằng.

d) Nếu ban đầu toàn bộ 9000 hành khách đều của Vietnam Airlines thì số hành khách của mỗi hãng ở tuần thứ 3 là bao nhiêu ?

Lời giải.

a)

$$X_{n+1} = 0.75X_n + 0.2Y_n + 0.4Z_n \tag{3.1}$$

$$Y_{n+1} = 0.05X_n + 0.6Y_n + 0.2Z_n \tag{3.2}$$

$$Z_{n+1} = 0.2X_n + 0.2Y_n + 0.4Z_n \tag{3.3}$$

$$(3.1), (3.2), (3.3) \Rightarrow \begin{pmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \\ Z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.2 & 0.4 \\ 0.05 & 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{pmatrix}$$

b) Thay $X_{n+1} = X_n = X$, $Y_{n+1} = Y_n = Y$ và $Z_{n+1} = Z_n = Z \ \ \forall n$ vào (3.1), (3.2) và (3.3):

$$\begin{cases} X = 0.75X + 0.2Y + 0.4Z \\ Y = 0.05X + 0.6Y + 0.2Z \\ Z = \ \ 0.2X + 0.2Y + 0.4Z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -0.25X + 0.2Y + 0.4Z = 0 \\ 0.05X - 0.4Y + 0.2Z = 0 \\ 0.2X + 0.2Y - 0.6Z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -0.25 & 0.2 & 0.4 \\ 0.05 & -0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & -0.6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{cases} X + Y + Z = 9000 \\ 0.05X - 0.4Y + 0.2Z = 0 \\ 0.2X + 0.2Y - 0.6Z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = 5000 \\ Y = 1750 \\ Z = 2250 \end{cases}$$

d)

$$\begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.2 & 0.4 \\ 0.05 & 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}^3 \times \begin{pmatrix} 9000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5461.875 \\ 1306.125 \\ 2232 \end{pmatrix}$$

4 Systems of Differential Equations

Câu 1.

Giả sử dân số trên một hòn đảo bị cô lập là M. Giả sử rằng trên hòn đảo này hiện đang có một dịch bệnh xảy ra với tốc độ lây lan nhanh chóng do một số cư dân của hòn đảo đi du lịch vào trong đất liền, nhiễm bệnh dịch và mang bệnh dịch trở về đảo. Gọi X là số cư dân bị nhiễm bệnh trên hòn đảo tại một thời điểm t.

a) Tìm mô hình phù hợp để ước tính X

b) Tìm nghiệm của mô hình trên

c) Giả sử dân số ban đầu trên đảo là $M = 5000$, ban đầu có 2 người bị nhiễm bệnh và vào ngày thứ hai ($t = 2$) sau dịch bệnh đã có đến 695 người bị nhiễm bệnh. Hãy dự đoán số người bị nhiễm bệnh vào ngày thứ ($t = 5$) trong đợt dịch này?

Lời giải.

a)
Số lượng người bị nhiễm bệnh ở thời điểm $t_0 + \Delta t$ là $X(t_0 + \Delta t)$ bằng số lượng người bị nhiễm tại thời điểm t_0 cộng với số người bị nhiễm trong khoảng thời gian Δt:

$$X(t_0 + \Delta t) = X(t_0) + rX(t_0)\Delta t$$

hay

$$\frac{\Delta X}{\Delta t} = rX$$

với r là hằng số tỷ lệ. Giả sử tốc độ lây lan tỷ lệ thuận với quy mô dân số, và tốc độ lây nhiễm tức thời xấp xỉ bằng tốc độ lây nhiễm trung bình. Ta viết lại phương trình:

$$\frac{dX}{dt} = rX \tag{4.1}$$

Phương trình (4.1) phù hợp trong điều kiện lý tưởng. Nhưng trên thực tế, tốc độ lây lan sẽ giảm khi kích cỡ quần thể bị nhiễm bệnh tiến đến ngưỡng M, và sẽ dừng khi đến M. Ta đặt 2 giả định:

- $\frac{dX}{dt} \approx rX$ nếu X nhỏ
- $\frac{dX}{dt} \leq 0$ nếu $X \geq M$

Phương trình sau thỏa mãn cả 2 giả định trên:

$$\frac{dX}{dt} = rX\left(1 - \frac{X}{M}\right) \tag{4.2}$$

Đặt $k = \frac{r}{M}$, lúc này phương trình (4.2) trở thành:

$$\begin{aligned}(4.2) \Leftrightarrow \frac{dX}{dt} &= kMX\left(1 - \frac{X}{M}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{dX}{dt} &= kX(M - X) \qquad (4.3)\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
(4.2) \Leftrightarrow \frac{M}{X(M-X)}dX &= rdt \\
\Leftrightarrow \left(\frac{1}{X} + \frac{1}{M-X}\right) dX &= rdt \\
\Leftrightarrow \ln\left|\frac{X}{M-X}\right| &= rt + c \\
\Leftrightarrow \frac{X}{M-X} &= e^c e^{rt} \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

$$(4.5)$$

Tại $X = X_0, t = 0$: $e^c = \frac{X_0}{M-X_0}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{X}{M-X} &= \frac{X_0}{M-X_0}e^{rt} \\
\Leftrightarrow X &= \frac{X_0}{M-X_0}e^{rt}(M-X) \\
\Leftrightarrow X\left(1 + \frac{X_0}{M-X_0}e^{rt}\right) &= \frac{X_0}{M-X_0}Me^{rt} \\
\Leftrightarrow X &= \frac{X_0 M}{(M-X_0)e^{-rt}\left(\frac{X_0}{M-X_0}e^{rt} + 1\right)} = \frac{X_0 M}{X_0 + (M-X_0)e^{-rt}}
\end{aligned}$$

c)

Tại thời điểm bắt đầu, $X_0 = 2$

$$\begin{aligned}
X(2) &= \frac{X_0 M}{X_0 + (M-X_0)e^{-r.2}} \\
\Leftrightarrow 695 &= \frac{10000}{2 + 4998e^{-2r}} \\
\Leftrightarrow r &\approx 3
\end{aligned}$$

$$X(5) = \frac{10000}{2 + 4998e^{-3.5}} \approx 4996$$

Câu 2.

Digoxin được sử dụng trong y học để điều trị bệnh tim. Việc xác định liều lượng thuốc mỗi đợt và giãn cách giữa các đợt là cực kỳ quan trọng. Ở nồng độ thấp thuốc sẽ không đạt hiệu quả và nếu nồng độ quá cao sẽ nguy hiểm đến bệnh nhân. Biết nồng độ thấp nhất để thuốc có tác dụng là 5 $\mu g/l$ máu và không được vượt quá 12 $\mu g/l$. Gọi k là hằng số biểu thị tốc độ đào thải thuốc khỏi cơ thể, C_0 là liều lượng thuốc mỗi lần tiêm, T là chu kỳ tiêm thuốc. Giả sử rằng toàn bộ thuốc đều có tác dụng ngay lập tức. Tìm một mô hình thích hợp để:

a) Tìm một giá trị thích hợp cho C_0 để tối thiểu hóa số lần tiêm thuốc.

b) Ước tính nồng độ thuốc C trong máu tại thời điểm t.

c) Tính T.

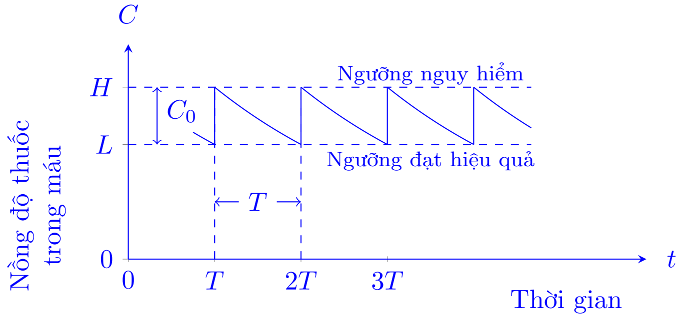
Lời giải.

a)
Giả định nồng độ của thuốc trong máu tại thời điểm t là một hàm khả vi $C(t)$, thì:

$$C'(t) = -kC(t)$$

Trong công thức này k là một hằng số dương, $C'(t)$ mang giá trị âm để biểu thị sự giảm dần nồng độ.
Gọi H và L lần lượt là ngưỡng nguy hiểm và ngưỡng đạt hiệu quả. Để tối thiểu hóa số lần tiêm, ta cần đảm bảo lượng thuốc $C(t)$ không xuống thấp hơn ngưỡng L và liều lượng C_0 phải không vượt quá $C_0 + L \leq H$. Lượng thuốc mỗi lần tiêm sẽ là:

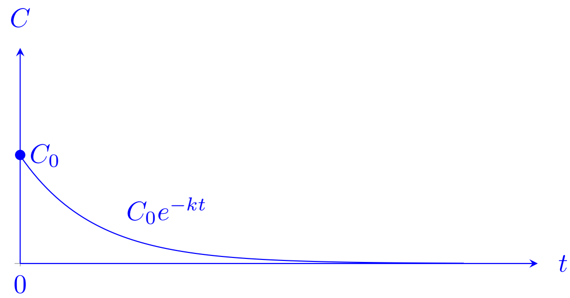
$$C_0 = H - L \tag{4.6}$$



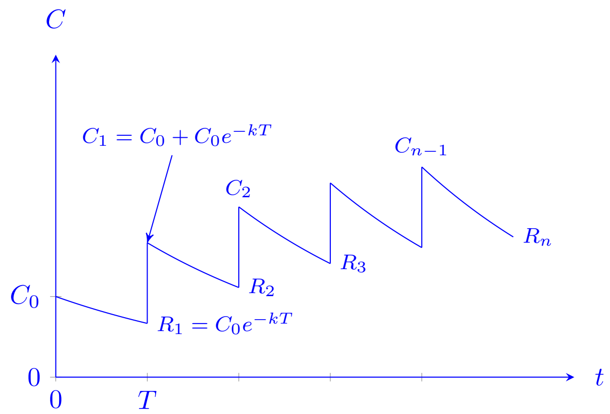
b)
Giả sử rằng C_0 là nồng độ thuốc trong máu tại thời điểm $t = 0$, ta có được mô hình sau:

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= -kC, \quad C(0) = C_0 \\ \Leftrightarrow \frac{dC}{C} &= -kdt \\ \Leftrightarrow \log C(t) &= -kt \\ \Leftrightarrow C(t) &= C_0 e^{-kt}, \quad T > t \geq 0 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Để biết được nồng độ thuốc tại thời điểm $T > t \geq 0$, ta nhân giá trị ban đầu C_0 với e^{-kt}.



Giả sử tiêm liều đầu tiên tại thời điểm $t = 0$, theo như mô hình trên, sau T giờ, còn lại $R_1 = C_0 e^{-kT}$ thuốc trong máu, và tiếp tục tiêm liều thứ hai. Theo như giả định, lượng thuốc trong máu sẽ tăng lên $C_1 = C_0 + C_0 e^{-kT}$. Và sau T giờ kế tiếp, lượng thuốc trong máu còn $R_2 = C_1 e^{-kT} = C_0 e^{-kT} + C_0 e^{-2kT}$:



Gọi C_{i-1} là lượng thuốc trong máu ngay sau lần tiêm thứ i và R_i là lượng thuốc còn lại ở cuối chu kì, ta dễ dàng tìm được công thức tính lượng thuốc còn lại R_n ở cuối chu kì n:

$$\begin{aligned} R_n &= C_0e^{-kT} + C_0e^{-2kT} + \ldots + C_0e^{-nkT} \\ &= C_0e^{-kT}(1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1}) \end{aligned} \tag{4.8}$$

với $r = e^{-kT}$.
Ta dễ dàng chứng minh được:

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r} \tag{4.9}$$

Thay (4.9) vào (4.8), ta có:

$$R_n = \frac{C_0e^{-kT}(1 - e^{-nkT})}{1 - e^{-kT}} \tag{4.10}$$

Với n càng lớn, e^{-nkT} càng tiến gần đến 0. Chuỗi số R_n sẽ tiến tới giá trị R:

$$R = \lim_{n\to\infty} R_n = \frac{C_0e^{-kT}}{1 - e^{-kT}} = \frac{C_0}{e^{kT} - 1} \tag{4.11}$$

Ta cũng có thể dễ dàng thấy được:

$$C_{n-1} = C_0 + R_{n-1} \tag{4.12}$$

Nếu nồng độ thuốc cao nhất có thể là H, theo như hình trên, ta có thể thấy C_{n-1} tiến tới H khi n càng lớn:

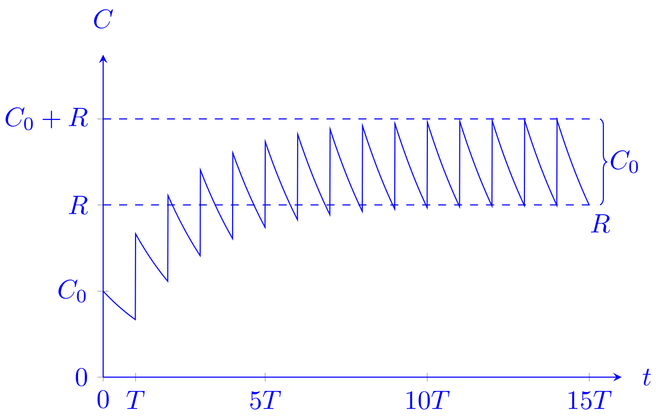
$$H = \lim_{n\to\infty} C_{n-1} = \lim_{n\to\infty} (C_0 + R_{n-1}) = C_0 + R \tag{4.13}$$

Với kết quả $C_0 = H - L$ ở trên:

$$R = L \tag{4.14}$$

Từ các công thức (4.7), (4.12), ta có được mô hình:

$$C(t) = C_{\lfloor \frac{t}{T} \rfloor} e^{-kT(\frac{t}{T} - \lfloor \frac{t}{T} \rfloor)}, \quad t \geq 0 \tag{4.15}$$



c)

$$
\begin{aligned}
(4.11), (4.6), (4.14) \Rightarrow L &= \frac{H - L}{e^{kT} - 1} \\
\Leftrightarrow e^{kT} &= \frac{H}{L} \\
\Leftrightarrow kT &= \ln \frac{H}{L} \\
\Leftrightarrow T &= \frac{1}{k} \ln \frac{H}{L} \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

Câu 3.

Một con sông có tốc độ dòng chảy 1000 $m^3/phút$ chảy vào một con đập đang chứa 210×10^6 m^3 nước. Cạnh con sông người ta xây dựng một trang trại nuôi bò sữa. Để nuôi bò, người ta cần trồng cỏ nên phun rất nhiều thuốc diệt cỏ làm nước sông bị ô nhiễm với nồng độ 60 *ppm*. Ban đầu nồng độ ô nhiễm trong đập là 5 *ppm*, người ta mở đập để nước thoát ra với tốc độ 1200 $m^3/phút$. Giả sử rằng nước sông là nguồn ô nhiễm duy nhất, các chất ô nhiễm phân tán đều trong đập và không có bất kỳ cơ chế loại bỏ chất ô nhiễm nào ngoại trừ dòng nước thoát ra đập. Hỏi sau bao lâu thì nước trong đập vượt quá nồng độ ô nhiễm cho phép là 25 *ppm* ?

Lời giải.

Gọi $V(t)$ và $p(t)$ lần lượt là hàm biểu diễn lượng nước và lượng chất ô nhiễm trong đập tại thời điểm t. Khi đó nồng độ ô nhiễm là tỉ số $c(t) = p(t)/V(t)$.
Trong khoảng thời gian $[t, t + \Delta t]$, lượng chất ô nhiễm trong đập thay đổi một khoảng Δp bằng với lượng chất ô nhiễm chảy vào đập trừ đi lượng thoát ra:

$$\Delta p = p_{in} - p_{out}$$

Gọi r_{in} và c_{in} lần lượt là tốc độ dòng chảy và nồng độ ô nhiễm của sông:

$$p_{in} = r_{in} c_{in} \Delta = \alpha \Delta t$$

Gọi r_{out} là tốc độ nước thoát ra đập, nồng độ ô nhiễm nước trong đập được tính bằng $c = p/V$, ta có:

$$p_{out} = r_{out} \frac{p}{V} \Delta t$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \Delta p &= \left(\alpha - \frac{p r_{out}}{V}\right) \Delta t \\
\Leftrightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} &= \alpha - \frac{p r_{out}}{V}
\end{aligned}
$$

Khi $\Delta t \to 0$:

$$\frac{dp}{dt} = \alpha - \frac{pr_{out}}{V} \tag{4.17}$$

Tại thời điểm ban đầu $V(0) = 210 \times 10^6\ m^3$. Khi đó:

$$V(t) = V_0 + (r_{in} - r_{out})t = 210 \times 10^6 - 200t$$

biểu diễn lượng nước trong đập tại thời điểm t, với $r_{in} - r_{out} = -200m^3/phút$, đập sẽ cạn khi $V(t) = 0$ hay $t = 1050000\ phút \approx 2\ năm$ .Ta thay V và $\alpha = 1000 \times 60 \times 10^{-6} = 0.06$ vào phương trình (4.17):

$$\Rightarrow \frac{dp}{dt} + \frac{1200p}{210 \times 10^6 - 200t} = 0.06 \tag{4.18}$$

(4.18) là phương trình tuyến tính không thuần nhất có dạng $p' + a(t)p = b(t)$ với $p' = dp/dt$, $a(t) = 1200/(210 \times 10^6 - 200t)$, $b(t) = 0.06$ (xem lại giáo trình Giải tích 2)

$$\begin{aligned}
\Rightarrow p &= e^{-\int a(t)dt}(\int b(t)e^{\int a(t)dt}dt + C) \\
&= e^{-\int \frac{1200}{210\times 10^6 - 200t}dt}(\int 0.06e^{\int \frac{1200}{210\times 10^6 - 200t}dt}dt + C) \\
&= 0.012(1.05 \times 10^6 - t) + C(1.05 \times 10^6 - t)^6, \quad t \leq 1.05 \times 10^6
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Ban đầu, $c_0 = p(0)/V_0 = 5 \times 10^{-6}$, vì vậy:

$$p(0) = c_0 V_0 = 1050$$

Thay kết quả này vào (4.19), ta tính được giá trị của C:

$$\begin{aligned}
&1050 = 0.012 \times 1.05 \times 10^6 + C \times (1.05 \times 10^6)^6 \\
&\Leftrightarrow C = -9.324 \times 10^{-32}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow p(t) = 0.012(1.05 \times 10^6 - t) - 9.324 \times 10^{-32}(1.05 \times 10^6 - t)^6, t \leq 1.05 \times 10^6 \tag{4.20}$$

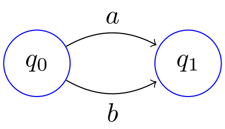
Tại thời điểm nồng độ ô nhiễm trong đập là $c(t) = p(t)/V(t) = 25 \times 10^{-6}$:

$$\begin{aligned}
25 \times 10^{-6} &= \frac{0.012(1.05 \times 10^6 - t) - 9.324 \times 10^{-32}(1.05 \times 10^6 - t)^6}{210 \times 10^6 - 200t} \\
&\Leftrightarrow 9.324 \times 10^{-29}(1.05 \times 10^6 - t)^5 - 7 = 0 \\
&\Leftrightarrow t \approx 454201\ phút \approx 10.4\ tháng
\end{aligned}$$

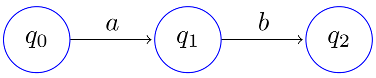
Phụ lục

A Regexps to FA

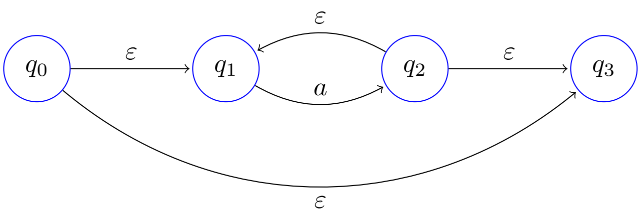
Ráng nhớ:



a+b



a.b

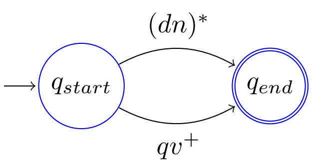


a*

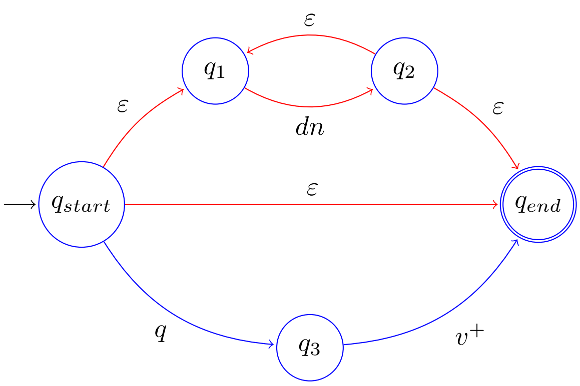
Cách làm: Vẽ 2 trạng thái khởi đầu và kết thúc rồi nhận dạng và thêm các trạng thái trung gian vào.

Ví dụ: $(dn)^* + qv^+$

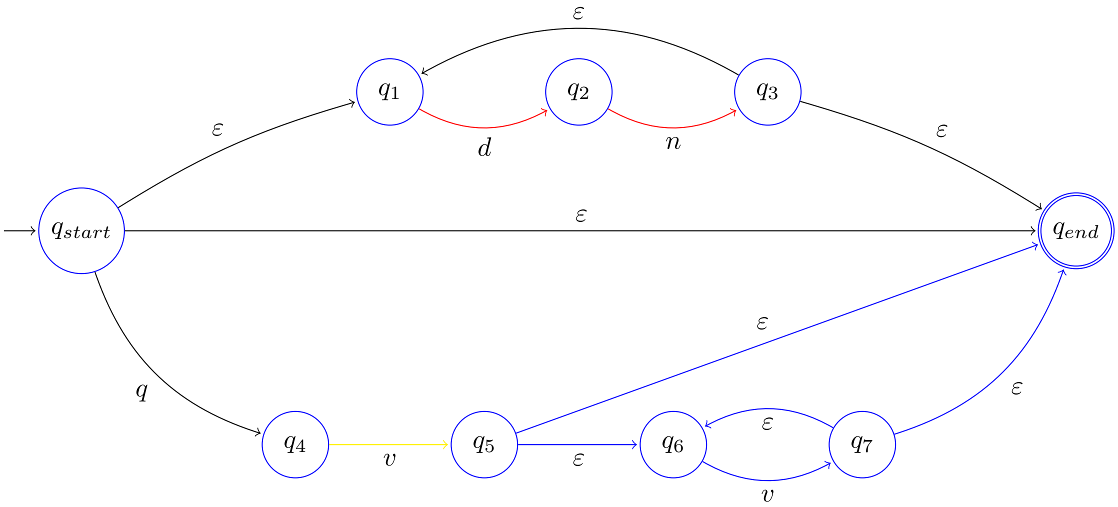
Ta thấy biểu thức trên có dạng **a+b**:



$(dn)^*$ có dạng **a***, qv^+ có dạng **ab**:

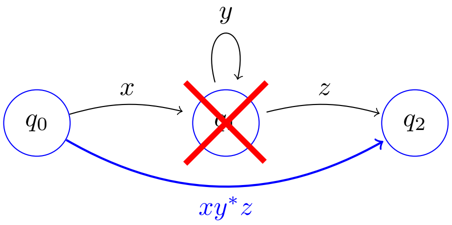


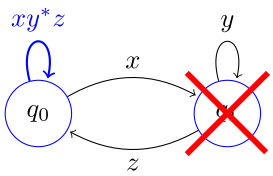
Tiếp tục với dn, $v^+(=v.v^*)$:

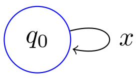


B FA to Regexps

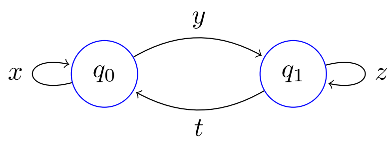
Ghi nhớ:







x*



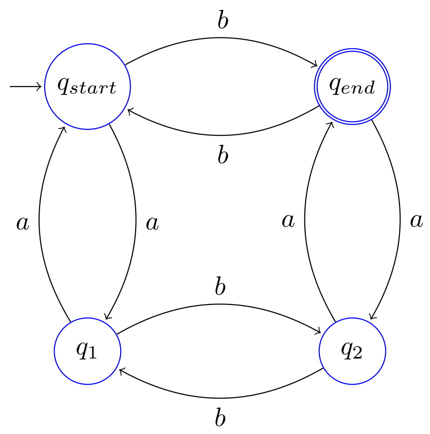
x*y(z+tx*y)*

Lưu ý:

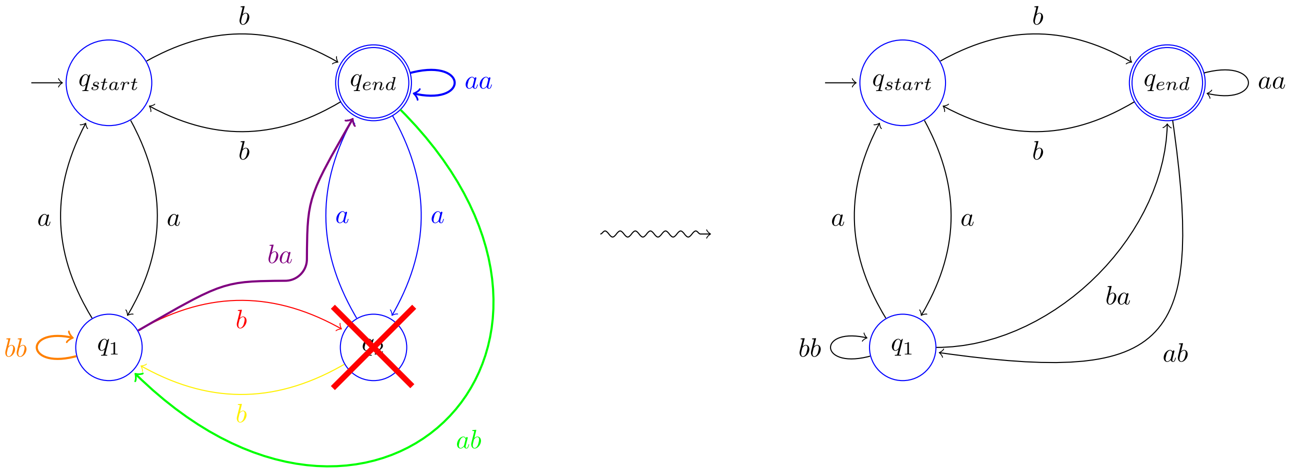
- Trạng thái bị loại bỏ không thể là trạng thái khởi đầu hoặc kết thúc.
- x, y, z, t có thể là ε

Cách làm: Loại bỏ các trạng thái trung gian bằng cách biểu diễn các đường đi đến trạng thái đó bằng các trạng thái còn lại đến khi chỉ còn các trạng thái khởi đầu và kết thúc.

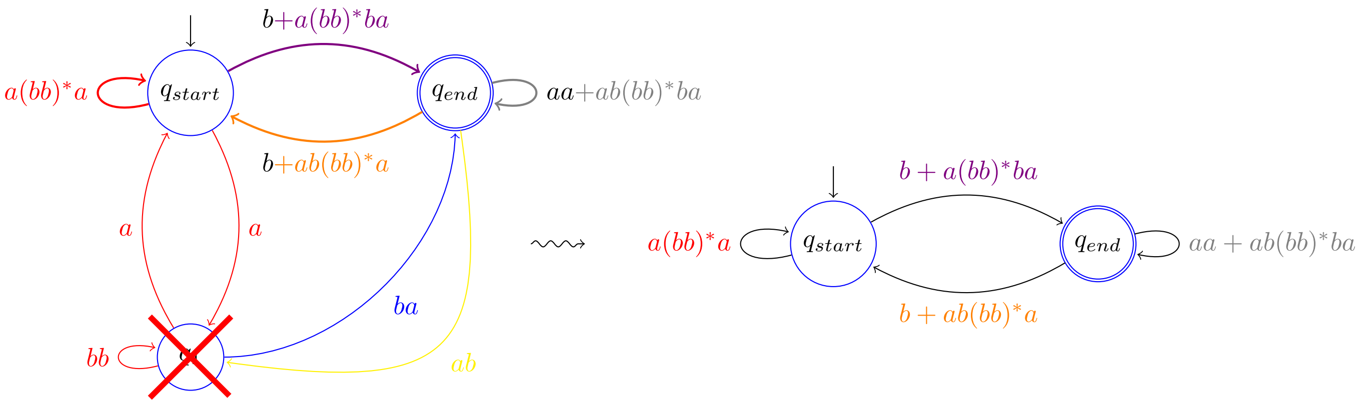
Ví dụ: xem trang kế



Loại bỏ trạng thái q_2:



Loại bỏ trạng thái q_1:



Automata cuối cùng có dạng $\mathbf{x^*y(z+tx^*y)^*}$:

Kết quả: $(a(bb)^*a)^*(b + a(bb)^*ba)((aa + ab(bb)^*ba) + (b + ab(bb)^*a)(a(bb)^*a)^*(b + a(bb)^*ba))^*$