CHƯƠNG 2. CÁC THUẬT TOÁN TÌM KIẾM TRÊN ĐỒ THỊ

Đặt bài toán:

Input: Đồ thị $G = (V, E)$ gồm n đỉnh, m cạnh;

Một đỉnh $u \in G$;

Output: Thứ tự thăm các đỉnh $v \in G$ bắt đầu từ đỉnh u;

<u>**2.1 Thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu** (Depth - first Search)</u>

2.1.1 Giới thiệu thuật toán

- Bước khởi tạo: Tất cả các đỉnh v $\in$ G chưa được xét (vs[v]= 0);
- Bước 1: Tìm kiếm theo chiều sâu bắt đầu từ v = u bằng cách thăm v và đánh dấu v được xét (vs[v] = 1);
- Bước 2: Chọn một đỉnh t kề với v và chưa được xét;
- Bước 3: Nếu chọn được t thì quay lại bước 1 với t đóng vai trò u;
- Bước 4: Nếu không chọn được t thì quay lại bước 2 và đỉnh đóng vai trò v là đỉnh i có thứ tự duyệt ngay trước v;
- Bước 5: Nếu tất cả các đỉnh kề của u đều đã được xét thì dừng;

2.1.2 Mô tả thuật toán

Thuật toán: DfsDequy(u){

```
Thăm(u);
vs[u] = 1;
for v ∈ ke(u)  do
        if  (vs[v] = 0)  DfsDequy(v);
}
```

2.1.3 Cài đặt và kiểm nghiệm thuật toán

Cài đặt 1: (Đệ qui)

```
// G cho bởi ma trận kề a[i][j]
int a[100][100], vs[100], n, u;
void DfsDequy(int u)
    { int v;
    cout << u << " ";
     vs[u]= 1;
     for (v= 1; v<=n; v++)
     if (vs[v]==0 && a[u][v]==1)  DfsDequy(v);
    }
```

Cài đặt 2: (Sử dụng ngăn xếp)

```
// G cho bởi ma trận kề a[i][j]
int vs[100], n, u, s[100];
void DfsNx(int u)
    { int top = 1; s[top] = u; vs[u] = 1;
       while (top > 0){
      int v = s[top];
      for (int i= 1; i<=n; i++) { int ok = 1;
          if (vs[i]==0 && a[v][i]==1) {
       top++; s[top] = i; vs[i] = 1; int ok = 0;
       break;        }
       if (ok) top--;
      }
}
```

2.2 Thuật toán tìm kiếm theo chiều rộng (Breadth - first Search)

2.2.1 Giới thiệu thuật toán

- Bước khởi tạo: Tất cả các đỉnh v ∈ G chưa được xét (vs[v]= 0);
- Bước 1 : Xây dựng hàng đợi q bắt đầu từ u và đánh dấu u đã xét (vs[u] = 1);
- Bước 2 (lặp): Nếu q rỗng thì kết thúc. Ngược lại, lấy v ra khỏi hàng đợi và thăm v;
- Bước 3: Đưa vào hàng đợi tất các đỉnh i kề với v và chưa được xét, đánh dấu i đã xét (vs[i]= 1);
- Bước 4: Quay lại bước 2.

2.2.2 Mô tả thuật toán

Thuật toán: Bfs(u){

```
q = ∅;
 <Đưa u vào q>;
 vs[u] = 1;
  while q ≠ ∅  { <Lấy v ra khỏi q>; Thăm(v);
   for i ∈ ke(v)  do
          if  (vs[i] = 0)
               {<Đưa i vào q>;  vs[i] = 1;
                  }
      }
     }
```

2.2.3 Cài đặt và kiểm nghiệm thuật toán

```
// G cho bởi ma trận kề a[i][j]
int vs[100], n, u, q[100];
void bfs(int u)
    { int v, dq = cq = 1; q[cq] = u; vs[u] = 1;
       while (dq <= cq){
      v = q[dq]; dq++; cout << v << " ";
      for (int i= 1; i<=n; i++)
      if (vs[i]==0 && a[v][i]==1) {
            cq++; q[cq] = i; vs[i] = 1;        }
      }
}
```

2.3 Ứng dụng của các thuật toán tìm kiếm trên đồ thị

2.3.1 Duyệt tất cả các đỉnh của đồ thị

Input: Đồ thị G = (V, E) gồm n đỉnh, m cạnh;

Output: Thứ tự thăm tất cả các đỉnh $v \in G$ bắt đầu từ đỉnh 1;

<u>Giải thuật 1</u>: Duyệt tất cả các đỉnh của đồ thị;

- Bước khởi tạo: Tất cả các đỉnh v ∈ G chưa được thăm (vs[v]= 0);
- Bước 1: Nếu tất cả các đỉnh đều được thăm thì kết thúc;
- Bước 2: Chọn v ∈ G chưa được thăm (bắt đầu từ v = 1);
- Bước 3: Duyệt theo chiều sâu/chiều rộng (DFS/BFS) bắt đầu từ v;
- Bước 4: Quay lại bước 1;

Cài đặt 1 (Sử dụng DFS):

```
void  Duyet1(){int v;
    for (v = 1; v <= n; v++) vs[v] = 0;
    for (v = 1; v <= n; v++)
        if (vs[v] == 0) dfsDequy(v);
    }
```

<u>Cài đặt 2</u> (Sử dụng BFS):

```
void  Duyet2(){int v;
    for (v = 1; v <= n; v++) vs[v] = 0;
    for (v = 1; v <= n; v++)
        if (vs[v] == 0) Bfs(v);
    }
```

2.3.2 Tính liên thông của đồ thị

1) Đường đi trên đồ thị

Khái niệm

- Đường đi độ dài k từ u tới $v \in G$ là dãy các đỉnh $x_0, x_1, \ldots, x_k$, trong đó $x_0 = u$, $x_n = v$ và $(x_{i-1}, x_i) \in E$, $1 \le i \le k$.
- Đường đi là chu trình nếu bắt đầu và kết thúc tại cùng một đỉnh, tức là $u = v$.
- Đường đi hoặc chu trình là đơn nếu không chứa một cạnh quá một lần.
- Đường đi là đường đi sơ cấp nếu đi qua các đỉnh không quá một lần, trừ đỉnh đầu và đỉnh cuối.
- Đường đi sơ cấp có đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau được là chu trình s*ơ cấp*.

Đếm đường đi giữa các đỉnh

Định lý. Cho G là đồ thị với ma trận kề A gồm n đỉnh đánh số 1, 2, …, n. Số các đường đi khác nhau độ dài r từ i đến j, r nguyên dương, bằng giá trị của phần tử (i, j) của ma trận A^r.

Chứng minh.

Theo định nghĩa, a_{ij} tại vị trí (i, j) của ma trận A chính là số đường đi độ dài 1 từ đỉnh i đến đỉnh j $\Rightarrow$ với $r = 1$ định lý đúng.

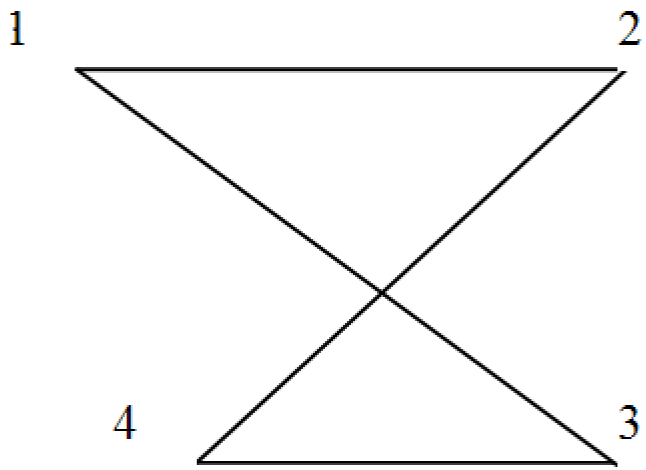
Giả sử định lý đúng với $r = k \Rightarrow A^k(i, j)$ là số đường đi khác nhau có độ dài k từ i đến j.

Chứng minh định lý đúng với $r = k+1$. Vì $A^{k+1} = A^k A \Rightarrow A^k(i, j) = b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \dots + b_{in}a_{nj}$, trong đó $b_{ih} = A^k(i, h)$. Theo giả thiết quy nạp, b_{ih} là số đường đi độ dài k từ i đến h.

Đường đi độ dài k+1 từ i đến j sẽ được tạo bởi đường đi độ dài k từ i đến đỉnh trung gian h và một cạnh từ h đến j.

Theo quy tắc nhân, số các đường đi như thế là tích của số đường đi độ dài k từ i đến h tức là b_{ih} và số các cạnh từ h tới j, tức là a_{hj}. Khi cộng các tích này lại theo tất cả các đỉnh trung gian ta được kết quả mong muốn.

Ví dụ . Có bao nhiêu đường đi độ dài 4 từ đỉnh 1 tới đỉnh 4 trong đồ thị G dưới đây:



Giải:

Có ma trận kề của G:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^4 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{có 8 đường đi từ đỉnh 1 đến 4.}$$

2) Tìm đường đi trên đồ thị bắt đầu từ đỉnh u

Input: Đồ thị G = (V, E) gồm n đỉnh, m cạnh;

Một đỉnh u $\in$ G;

Output: Đường đi từ đỉnh u đến các đỉnh v $\in$ G;

Giải thuật 2: Tìm đường đi từ u đến các đỉnh của đồ thị;

//pr[v] là đỉnh trước của v trên đường đi từ u đến v

- Bước khởi tạo: Tất cả $v \in G$ chưa được thăm (vs[v]= 0), pr[v] = 0;
- Bước 1: Duyệt theo chiều sâu/chiều rộng (DFS/BFS) bắt đầu từ u;
- Bước 2: Tại mỗi đỉnh $v \in G$ (trừ u) được duyệt đến cập nhật pr[v];
- Bước 3: (Trả lại kết quả) Xét $v \in G$ (trừ u):

  Nếu vs[v] = 0 $\Rightarrow$ không có đường đi từ u đến v;

  Nếu vs[v] = 1 $\Rightarrow$ xuất đường đi từ u đến v;

<u>Cài đặt 1</u> (Sử dụng DFS):

```
// G cho bởi ma trận kề a[i][j]
int vs[100], n, u, pr[100];
void DfsDequy(int u) { int v;
    vs[u]= 1;
    for (v= 1; v<=n; v++)
    if (vs[v]==0 && a[u][v]==1){ pr[v] = u; DfsDequy(v);   }
    }
```

Cài đặt 2 (Sử dụng BFS):

```
int vs[100], n, u, q[100], pr[100];
void bfs(int u) {
    int v, dq = cq = 1;
    q[cq] = u; vs[u] = 1; pr[u] = 0;
       while (dq <= cq){
         v = q[dq]; dq++;
         for (int i= 1; i<=n; i++)
              if (vs[i]==0 && a[v][i]==1) {
              cq++; q[cq] = i; vs[i] = 1; pr[i] = v;
                    }
      }
```

2)Tính liên thông trong đồ thị vô hướng

Định nghĩa . Một đồ thị vô hướng *liên thông* ⇔ có đường đi giữa hai đỉnh bất kỳ.

- Đồ thị G không liên thông là hợp các đồ thị con liên thông, không có đỉnh chung gọi là các *thành phần liên thông* của G.
- *Đỉnh* $v \in G$ *là đỉnh cắt* hay *đỉnh khớp, đỉnh trụ* ⇔ xóa v và các cạnh liên thuộc sẽ tạo ra một đồ thị con có nhiều thành phần liên thông hơn G.
- *Cạnh* $e \in G$ *là cạnh cắt hay cầu* ⇔ khi xóa e sẽ được đồ thị con có nhiều thành phần liên thông hơn G.

Thuật toán kiểm tra tính liên thông của đồ thị vô hướng

Giải thuật 3: Kiểm tra tính liên thông của đồ thị vô hướng.

Input: Đồ thị vô hướng G = (V, E) gồm n đỉnh cho bởi ma trận kề a[i][j];

Output: Giá trị 1 nếu G liên thông, giá trị 0 nếu G không liên thông;

Bước 1: Sử dụng giải thuật duyệt theo chiều sâu (hoặc chiều rộng) bắt đầu từ đỉnh 1.

Bước 2: Tính số lượng k các đỉnh được duyệt.

Bước 3: Nếu k= n xuất 1; nếu k < n xuất 0.

Cài đặt 1: Sử dụng DFS

```
// G cho bởi ma trận kề a[i][j]
int vs[100], n, k;
void DfsDequy(int u){ int v;
      vs[u]= 1; k++;
      for (v = 1; v <=n; v++)
      if (vs[v]==0 && a[u][v]==1) dfsDequy(v);
    }
int  lt() {int v;
  for (v= 1; v<= n; v++) vs[v]= 0;
  k= 0;
  DfsDequy(1);
  if (k < n) return(0) else return(1);
}
```

Sử dụng DFS

```
// G cho bởi ma trận kề a[i][j]
int vs[100], n;
void dfsDequy(int u){ int v;
      vs[u]= 1;
      for (v = 1; v <=n; v++)
      if (vs[v]==0 && a[u][v]==1) dfsDequy(v);
    }
int  lt() {int v;
  for (v= 1; v<= n; v++) vs[v]= 0;
  dfsDequy(1);
  for (v= 1; v<= n; v++)
           if (vs[v] == 0) return(0);
   return(1);
}
```

Cài đặt 2: Sử dụng BFS

```
// G cho bởi ma trận kề a[i][j]
int vs[100], n, k;
void bfs(int u) { int q[100], dq, cq, i;
      dq= 1; cq= 1; q[cq]= u; vs[u]= 1; k++ ;
     while (dq <= cq)
     { int v= q[dq] ; dq++ ;
      for (i= 1; i<=n; i++)
        if (vs[i]==0 && a[u][i]==1) {cq++; q[cq]= i; vs[i]= 1; k++}
      }
     }
int  lt(){int i;
  for (i= 1; i<= n; i++) vs[i]= 0;
   k= 0;
  bfs(1);
  if (k < n) return(0) else return(1);
}
```

3) Tính liên thông trong đồ thị có hướng

Định nghĩa.

- Đồ thị có hướng G là *liên thông mạnh* $\Leftrightarrow$ có đường giữa hai đỉnh bất kỳ u, v $\in$ G.
- Đồ thị có hướng G là *liên thông yếu* $\Leftrightarrow$ đồ thị vô hướng nền là liên thông $\Rightarrow$ đồ thị liên thông mạnh thì cũng liên thông yếu.
- Một đồ thị có hướng G không liên thông mạnh là hợp các đồ thị con có hướng liên thông mạnh, không có đỉnh chung gọi là các *thành phần liên thông mạnh* của G.

Thuật toán kiểm tra tính liên thông của đồ thị có hướng

Giải thuật 4: Kiểm tra tính liên thông của đồ thị có hướng.

Input: Đồ thị có hướng G = (V, E) gồm n đỉnh cho bởi ma trận kề a[i][j];

Output: Giá trị 1 nếu G liên thông mạnh, giá trị 2 nếu G không liên thông mạnh nhưng liên thông yếu, giá trị trong trường hợp còn lại;

Bước khởi tạo: i = 1;

Bước 1: Sử dụng giải thuật duyệt theo chiều sâu (hoặc chiều rộng) bắt đầu từ đỉnh i;

Bước 2: Tính số lượng k các đỉnh được duyệt;

Bước 3: Nếu k < n chuyển bước 5; nếu k = n thì chuyển bước 4;

Bước 4: Nếu i = n thì xuất 1, nếu i< n thì i= i + 1 và quay lại bước 1;

Bước 5: Sử dụng giải thuật duyệt theo chiều sâu (hoặc chiều rộng) bắt đầu từ đỉnh 1 khi coi các cạnh của đồ thị là vô hướng;

Bước 6: Tính số lượng k các đỉnh được duyệt;

Bước 7: Nếu k < n xuất 0; nếu k = n thì xuất 2;

Cài đặt

```
// G cho bởi ma trận kề a[i]j]
int vs[100], n, k;
void dfs1(int v)
   { int i;
    vs[v]= 1; k++;
    for (i= 1; i<=n; i++)  if (vs[i]==0 && a[v][i]==1) dfs1(i);
   }
void dfs2(int v)
   { int i;
    vs[v]= 1; k++;
    for (i= 1; i<=n; i++)
      if ((vs[i]==0 && (a[v][i]==1 || a[i][v])) dfs2(i);
   }
```

```
int  lt()
{int i;
  for (i= 1; i<= n; i++)
    { for (int v= 1; v<= n; v++) vs[v]= 0;
       k= 0;   dfs1(i);
       if (k < n) {
        for (int v= 1; v<= n; v++) vs[v]= 0;
        k = 0; dfs2(1);
        if (k < n) return(0) else return(2);
       }
     return(1);
}
```

4) Giải thuật tìm các thành phần liên thông của đồ thị

Giải thuật 5: Tìm các thành phần liên thông của đồ thị vô hướng.

Input: Đồ thị vô hướng G = (V, E) gồm n đỉnh cho bởi ma trận kề.

Output: Số k các thành phần liên thông của G; Mỗi đỉnh $u \in G$ được gán nhãn theo số thứ tự của thành phần liên thông chứa u.

Bước khởi tạo: k= 0; lt[u]= 0 với mọi đỉnh u;

Bước 1: Nếu mọi đỉnh u đều có lt[u] > 0 thì chuyển bước 3, ngược lại chọn đỉnh u có lt[u] = 0;

Bước 2: k= k + 1, duyệt theo chiều sâu (hoặc theo chiều rộng) bắt đầu từ u và gán cho các đỉnh i được duyệt tới lt[i]= k; quay lại bước 1;

Bước 3: Xuất k và lt[u] với mọi đỉnh u;

Giải thuật duyệt theo chiều sâu:

```
void dfs(int u, int k)
{lt[u]= k;
 for (int i= 1; i<= n; i++)
    if (lt[i]==0 && a[u,i]==1) dfs(i, k);}
 int tplt()
 { for (int i= 1; i<= n; i++) lt[i]= 0;
    k= 0;
    for (i= 1; i<= n; i++)
      if (lt[i] == 0)
        {k= k + 1;
          dfs(i, k); }
   return(k);
   }
```

Giải thuật duyệt theo chiều rộng:	int tplt()

Giải thuật duyệt theo chiều rộng:

```
void bfs(int v, int k)
  {int q[100], dq, cq, u;
   dq= 1; cq= 1; q[cq]= v; lt[v]= k;
   while (dq <= cq)
    {u= q[dq]; dq++;
      for (int i= 1; i<= n; i++)
        if (lt[i]==0 && a[u][i]==1)
       {cq++; q[cq]= u; lt[u]= k; }
    }
  }
```

```
int tplt()
{ for (int i= 1; i<= n; i++) lt[i]= 0;
  k= 0;
  for (i= 1; i<= n; i++)
      if (lt[i] == 0)
         {k= k + 1;
            bfs(i, k); }
  return(k);
  }
```

Giải thuật 6: Tìm các thành phần liên thông mạnh của đồ thị có hướng.

Input: Đồ thị có hướng G = (V, E) gồm n đỉnh cho bởi ma trận kề.

Output: Số k các thành phần liên thông mạnh của G; Mỗi đỉnh u ∈ G được gán nhãn theo số thứ tự của thành phần liên thông mạnh chứa u.

Giải thuật duyệt theo chiều sâu:

```
int a[100][100], lt[100], vs[100] ;
int  tt[100], n, k, t;
void dfsx(int u)
{ int i;
  t++; vs[u]= 1; tt[t]= u;
   for (i= 1; i<= n; i++)
     if (lt[i] == 0 && a[u][i] == 1  && vs[i]==0)
              dfsx(i);
 }
 void dfsn(int v)
 { int i;
     lt[u]= k;
     for (i= 1; i<= n; i++)
       if (lt[i]==0 && a[u][i]==1)  dfsn(i);
 }
```

```
int tplt()
{ int i, j;
   for (i= 1; i<= n; i++) lt[i]= 0;
   k= 0;
   for (i= 1; i<= n; i++)
       if (lt[i] == 0)
         {for (j=1; j<= n; j++) vs[j]= 0;
          t= 0;  dfsx(i);
           while (t > 0)
            {u= tt[t] ; t-- ;
              if (lt[u]==0)
               {k++;
                 dfsn(u); }
             }   }
 return k;
 }
```

5) Giải thuật tìm các đỉnh trụ của đồ thị

Input: Đồ thị vô hướng G = (V, E) gồm n đỉnh cho bởi ma trận kề a[i][j];

Output: Các đỉnh trụ của G;

Giải thuật 7: Tìm đỉnh trụ của đồ thị vô hướng G;

Bước khởi tạo: Tìm số k thành phần liên thông của G;

Bước 1: Xét mọi đỉnh u $\in$ G:

- **1.1**: Bỏ u và các cạnh liên thuộc u và tính số thành phần liên thông l;
- **1.2.** Nếu l > k thì ghi nhận lại u là đỉnh trụ;
- **1.3.** Trả lại u và các cạnh lien thuộc u;

Bước 2: Xuất danh sách các đỉnh trụ;

6) Giải thuật tìm các cạnh cầu của đồ thị

Input: Đồ thị vô hướng G = (V, E) gồm n đỉnh cho bởi ma trận kề a[i][j];

Output: Các cạnh cầu của G;

Giải thuật 8: Tìm cạnh cầu của đồ thị vô hướng G;

Bước khởi tạo: Tìm số k thành phần liên thông của G;

Bước 1: Xét mọi cạnh e $\in$ G:

  1.1: Bỏ cạnh e và tính số thành phần liên thông l;

  1.2. Nếu l > k thì ghi nhận lại e là cạnh cầu;

  1.3. Trả lại cạnh e;

Bước 2: Xuất danh sách các cạnh cầu;