



Mathematic Modeling

reference book

Author
Đào Nguyễn Quốc Vinh

Mục lục

Lời nói đầu	2
1 Bổ trợ kiến thức	3
1.1 Regexp to FA	3
1.2 FA to Regexp	4
2 Hướng dẫn giải đề ôn tập	6
Phụ lục	14
3 Đáp án bài tập chương 3	14
4 Đáp án bài tập chương 4	21
4.1 Đáp án bài tập 4.1	21
4.2 Đáp án bài tập 4.2	25

Lời nói đầu

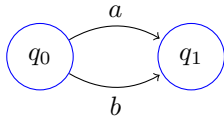
MÔ HÌNH HÓA TOÁN HỌC là một môn học mới mẻ trong chương trình đào tạo của Khoa KHMT. Nắm được nhu cầu học tập, quyển tài liệu này được biên soạn nhằm giúp sinh viên giải các bài tập trong quá trình học và ÔN THI CUỐI KỲ. Để giải một số bài tập, người đọc cần quan tâm đến phần phụ lục. Sách cũng có thể làm tài liệu tham khảo cho sinh viên đang làm luận án tốt nghiệp hay trong quá trình công tác sau này khi có nhu cầu quan tâm đến nội dung MÔ HÌNH HÓA TOÁN HỌC. Sau một thời gian thực hiện, tiếp nhận sự giúp đỡ của các bạn Lê Quốc Huy, Nguyễn Trường Duy,..., sách đã được sửa chữa, bổ sung. Tuy nhiên, do lần đầu xuất bản, có những hạn chế khách quan và chủ quan nên vẫn còn những nội dung cần tiếp tục được bổ sung và sửa đổi, tác giả mong nhận được nhiều góp ý để tài liệu này được hoàn chỉnh hơn.

Đào Nguyễn Quốc Vinh

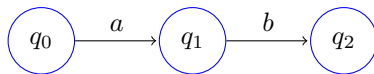
Bổ trợ kiến thức

1.1 Regexp to FA

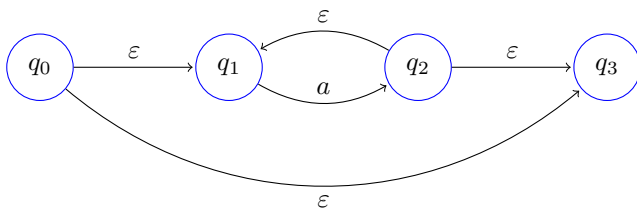
Ghi nhớ:



a+b



a.b

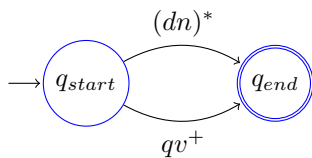


a*

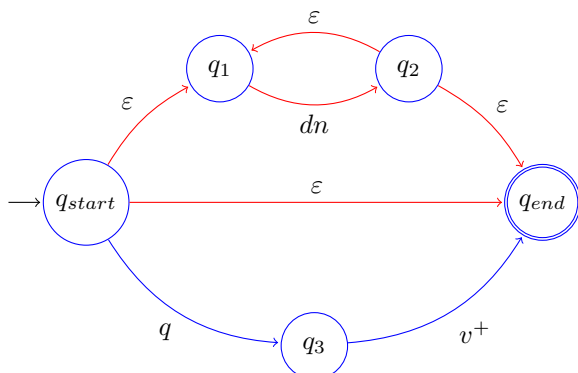
Cách làm: Vẽ 2 trạng thái khởi đầu và kết thúc rồi nhận dạng và thêm các trạng thái trung gian vào.

Ví dụ: $(dn)^* + qv^+$

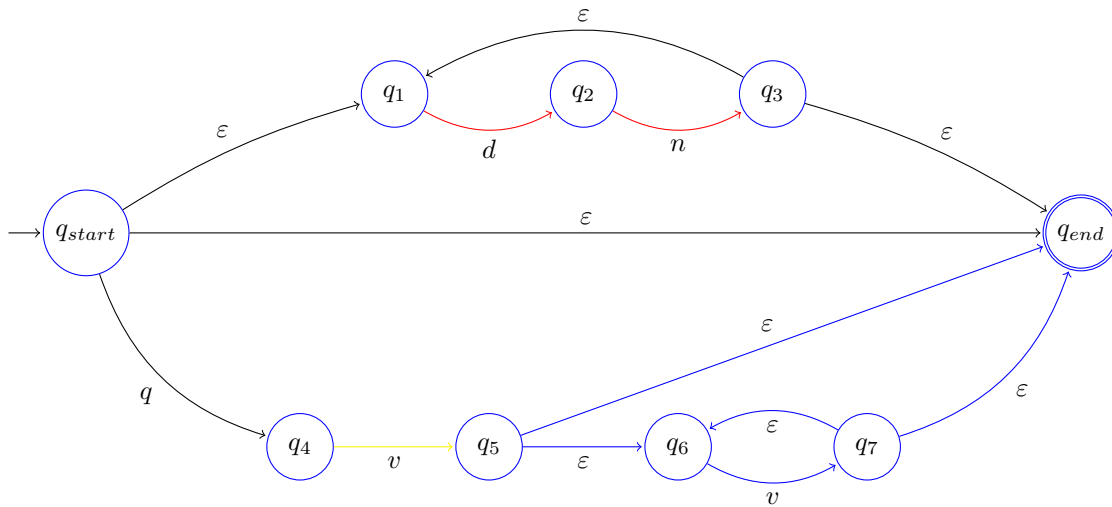
Ta thấy biểu thức trên có dạng **a+b**:



$(dn)^*$ có dạng **a***, qv^+ có dạng **ab**:

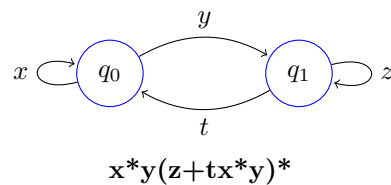
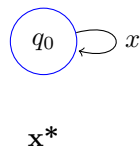
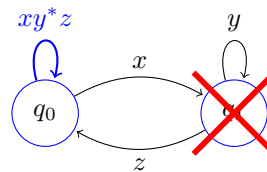
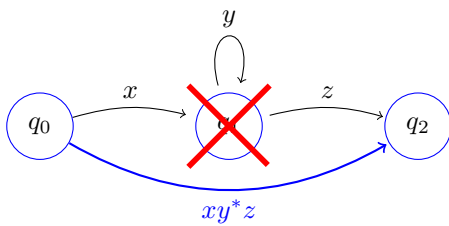


Tiếp tục với $dn, v^+ (=v.v^*)$:



1.2 FA to Regexp

Ghi nhớ:

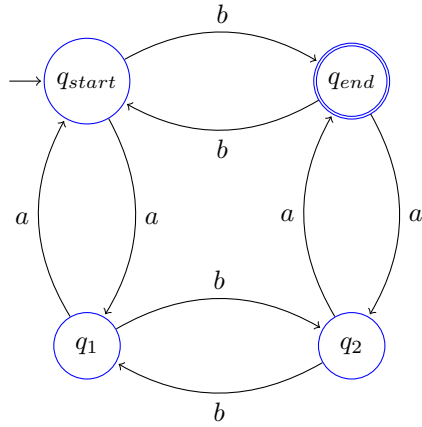


Lưu ý:

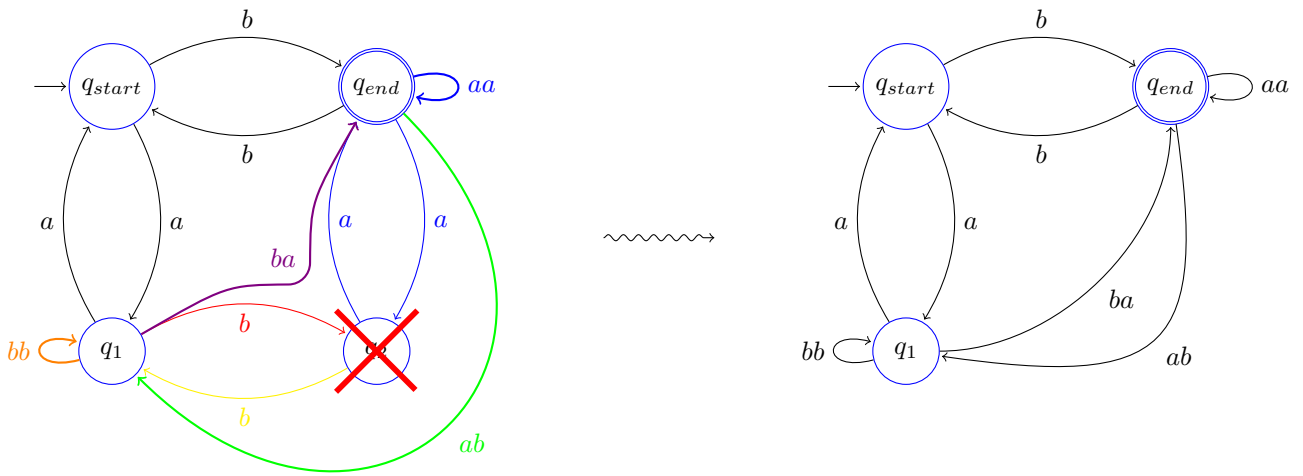
- Trạng thái bị loại bỏ không thể là trạng thái khởi đầu hoặc kết thúc.
- x, y, z, t có thể là ϵ

Cách làm: Loại bỏ các trạng thái trung gian bằng cách biểu diễn các đường đi đến trạng thái đó bằng các trạng thái còn lại đến khi chỉ còn các trạng thái khởi đầu và kết thúc.

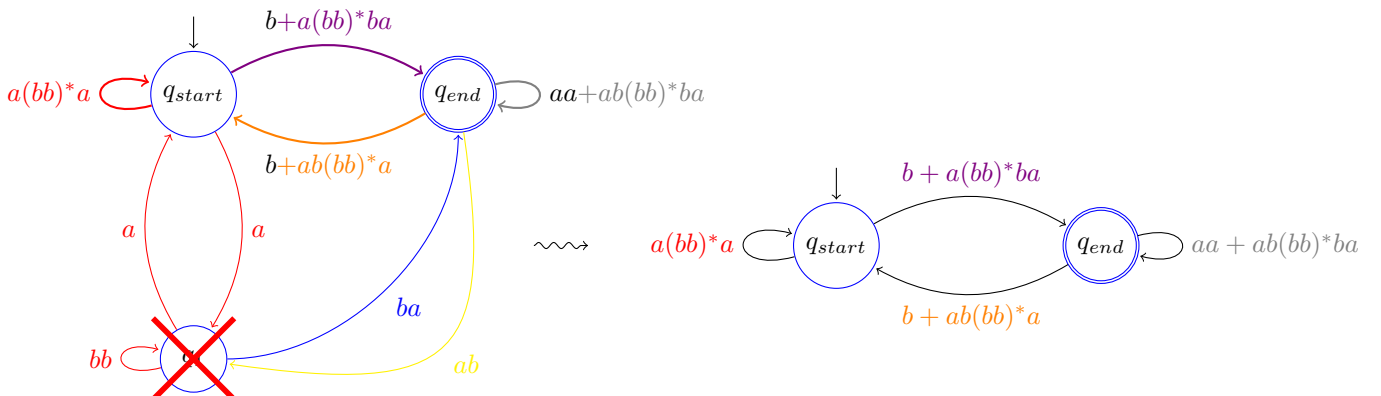
Ví dụ: xem trang kế



Loại bỏ trạng thái q_2 :



Loại bỏ trạng thái q_1 :



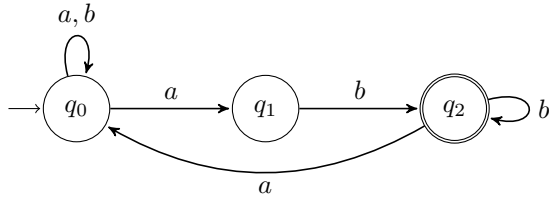
Automata cuối cùng có dạng $x^*y(z+tx^*y)^*$:

Kết quả: $(a(bb)^*a)^*(b+a(bb)^*ba)((aa+ab(bb)^*ba)+(b+ab(bb)^*a)(a(bb)^*a)^*(b+a(bb)^*ba))^*$

2 Hướng dẫn giải đề ôn tập

Câu 1.

Cho automata như hình dưới:



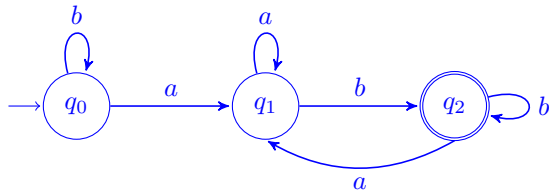
- Viết biểu thức chính qui cho automata bên trên
- Hãy chuyển NFA trên thành DFA tối giản
- Xây dựng luồng thực thi (execution) cho DFA đề xuất từ $aabbbbabbba$
- Tìm một từ không hợp lệ trong automata bên trên.

Lời giải.

a)

$$(a + b)^* ab(b^* + a(a + b)^* ab)^*$$

b)



c)

$$(q_0, aabbbbabbba) \rightarrow (q_1, abbbbabbba) \rightarrow (q_1, bbbbabbba) \rightarrow (q_2, bbbabbba) \\ \rightarrow \dots \rightarrow (q_2, abba) \rightarrow (q_1, bba) \rightarrow (q_2, ba) \rightarrow \dots \rightarrow (q_2, a) \rightarrow (q_1, _)$$

d) Ta thấy: $\forall q \in Q, \forall u \in \Sigma^*, \exists \delta(q, u) \in Q$

\Rightarrow DFA trên là complet automata. □

Câu 2.

Hai biểu thức chính qui: $E_1 = (a^* + b + ca)^*$ và $E_2 = ((a^* + b)^* + (cab)^*)^*$ có biểu diễn cùng một ngôn ngữ không? Nếu không hãy đưa phản ví dụ.

Lời giải.

Không.

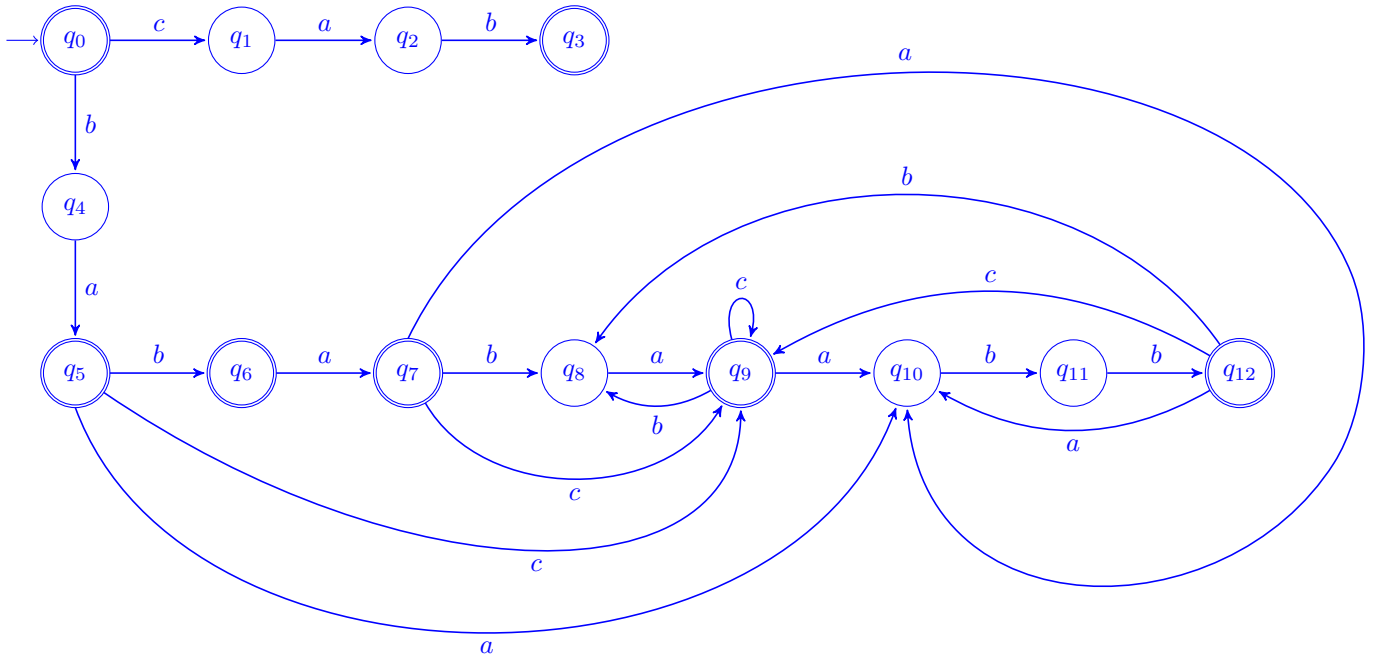
VD: ca thỏa E_1 nhưng không thỏa E_2 □

Câu 3.

Hãy vẽ DFA biểu diễn ngôn ngữ được biểu diễn bằng biểu thức chính qui

$$(b + c)ab + (ba(c + ab^2)^*)^*$$

Lời giải.



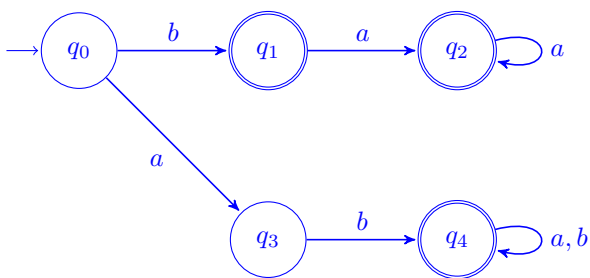
□

Câu 4.

Hãy vẽ DFA biểu diễn ngôn ngữ được biểu diễn bằng biểu thức chính qui

$$ab^*ba^* + b + ba^*a$$

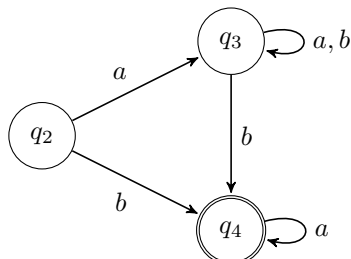
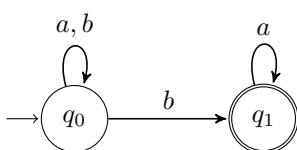
Lời giải.



□

Câu 5.

Hai automata bên dưới có tương đương không? Nếu không hãy đưa phản ví dụ.



Lời giải.

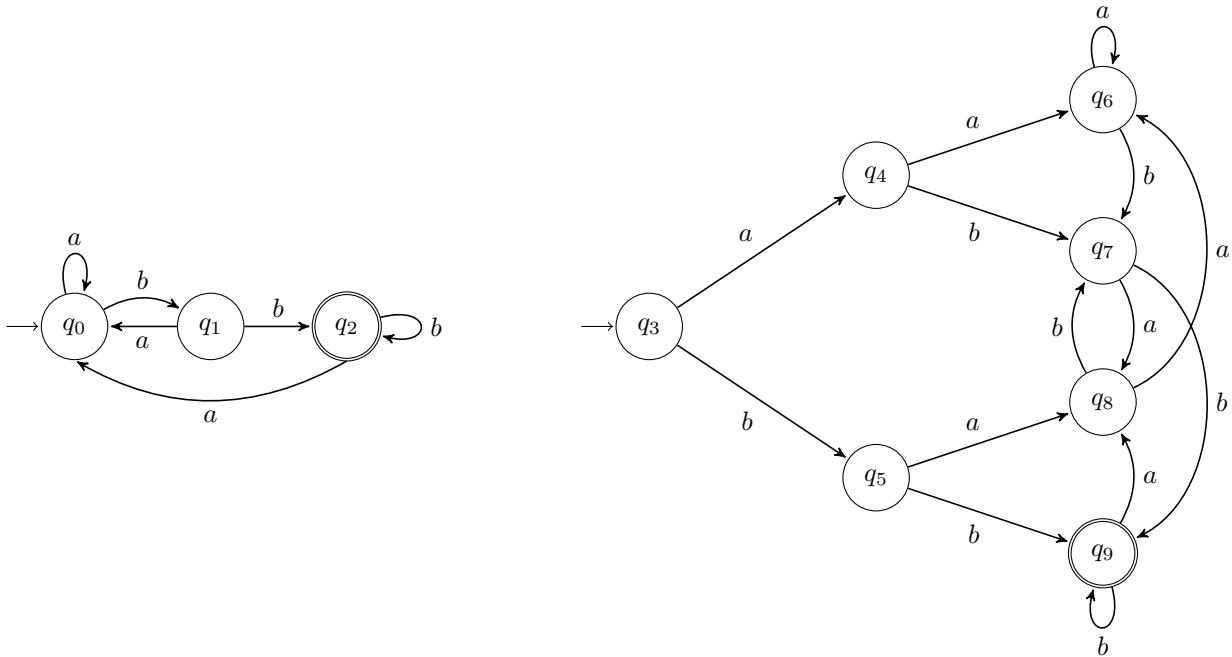
Hai automata không tương đương.

VD: *bab* thỏa automata thứ nhất nhưng không thỏa automata thứ hai.

□

Câu 6.

Hai automata bên dưới có tương đương không? Nếu không hãy đưa phản ví dụ.



Lời giải.

Hai automata tương đương nhau.

□

Câu 7.

Một xưởng sản xuất làm 4 sản phẩm : máy truyền hình, máy phát thanh, loa thường và loa surround. Mỗi sản phẩm được lắp ráp từ những phụ kiện có sẵn trong kho. Có 5 loại vật tư phụ kiện : khung máy, đèn hình, bộ loa, bộ nguồn, bảng mạch điện tử. Mục tiêu là sản xuất đầy đủ các sản phẩm để có lãi nhiều nhất với số vật tư phụ kiện còn tồn trong kho. Số vật tư tồn đầu kỳ là : 450 khung máy, 250 đèn hình, 800 bộ loa, 480 bộ nguồn và 600 bảng mạch điện tử.

Định mức cho :

- máy truyền hình: 1 khung, 1 đèn hình, 1 bộ loa, 1 bộ nguồn, 3 bảng mạch điện tử
- máy phát thanh: 1 khung, 2 bộ loa, 1 bộ nguồn, 1 bảng mạch điện tử
- loa: 1 bộ loa, 1 bảng mạch điện tử
- loa surround: 4 bộ loa, 1 bộ nguồn, 1 bảng mạch điện tử

Cho biết lãi cho mỗi sản phẩm được dự tính là:

máy truyền hình: 7\$

máy phát thanh: 6\$

loa: 3\$

loa surround: 4\$

Xét x_1, x_2, x_3, x_4 lần lượt là số lượng máy truyền hình, máy phát thanh, loa thường và loa surround được quyết định sản xuất. Hãy xác định các ràng buộc về giới hạn vật tư tồn kho đầu kỳ và hàm mục tiêu.

Lời giải.

Các ràng buộc:

Xưởng có 450 khung máy:

$$x_1 + x_2 \leq 450$$

Xưởng có 250 đèn hình:

$$x_1 \leq 250$$

Xưởng có 800 bộ loa:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 800$$

Xưởng có 480 bộ nguồn:

$$x_1 + x_2 + x_4 \leq 480$$

Xưởng có 600 bản mạch điện tử:

$$3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 600$$

Hàm mục tiêu:

Z: Tổng lãi

$$\text{Maximize } Z = 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4$$

□

Câu 8.

Một nhóm người gồm 2 nam (A, B), 3 nữ (X, Y, Z) quyết định tổ chức một chuyến đi phượt bằng 3 xe máy (chỉ chở tối đa 2 người). Khối lượng hành lý mà mỗi thành viên của nhóm mang theo là như trong Bảng 1. Để cho chuyến đi đầy “tình cảm” thì cả nhóm quyết định là trên mỗi xe nếu chở 2 người thì phải khác giới. Với mọi cặp nam và nữ, do tâm đầu ý hợp giữa họ khi nói chuyện nên nếu họ đi cùng 1 xe thì có thể chở thêm số lượng kilogram (kg) như trong Bảng 2. Dĩ nhiên, nhóm đi phượt này muốn sắp xếp các cặp lên các xe thế nào đó để có thể chở được nhiều nhất có thể (ngoài số hành lý phải mang theo).

	Hành lý
A	40
B	60
X	75
Y	80
Z	45

Bảng 1: Khối lượng hành lý thành viên mang theo

	X	Y	Z
A	15	40	0
B	28	30	15

Bảng 2: Khối lượng chở thêm của các cặp

a) Tìm mô hình toán học có thể giải bài toán trên.

b) Việc sắp xếp phải thỏa mãn thêm một yêu cầu khá tế nhị là: nếu chị Y đi cùng xe với anh nào đó thì chị Z cũng phải đi với anh kia. Tìm ràng buộc miêu tả yêu cầu trên.

Lời giải.

a) Ta sử dụng mô hình quy hoạch tuyến tính sau đây:

Đặt các biến:

x_1 : Khối lượng chở thêm của cặp A và X
 x_2 : Khối lượng chở thêm của cặp A và Y
 x_3 : Khối lượng chở thêm của cặp A và Z
 x_4 : Khối lượng chở thêm của cặp B và X
 x_5 : Khối lượng chở thêm của cặp B và Y
 x_6 : Khối lượng chở thêm của cặp B và Z

Các ràng buộc:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\y_1 + y_2 + y_3 &= 1 \\x_1 + y_1 &\leq 1 \\x_2 + y_2 &\leq 1 \\x_3 + y_3 &\leq 1 \\x_i &\in \{0, 1\}, i = 1, \dots, 3 \\y_i &\in \{0, 1\}, i = 1, \dots, 3\end{aligned}$$

Hàm mục tiêu: $\max 15x_1 + 40x_2 + 28y_1 + 30y_2 + 15y_3$

b)

Ta thấy: $x_2 = 1 \rightarrow x_3 = 1, y_2 = 1 \rightarrow y_3 = 1$

Hay: $x_2 \leq x_3, y_2 \leq y_3$

$$\Rightarrow x_2 + y_2 \leq x_3 + y_3$$

□

Câu 9.

Giả sử dân số trên một hòn đảo bị cô lập là M . Giả sử rằng trên hòn đảo này hiện đang có một dịch bệnh xảy ra với tốc độ lây lan nhanh chóng do một số cư dân của hòn đảo đi du lịch vào trong đất liền, nhiễm bệnh dịch và mang bệnh dịch trở về đảo. Gọi X là số cư dân bị nhiễm bệnh trên hòn đảo tại một thời điểm t .

- Tìm mô hình phù hợp để ước tính X
- Tìm nghiệm của mô hình trên
- Giả sử dân số ban đầu trên đảo là $M = 5000$, vào ngày thứ hai ($t = 2$) sau dịch bệnh đã có đến 1887 người bị nhiễm bệnh. Hãy dự đoán số người bị nhiễm bệnh vào ngày thứ 12 ($t = 12$) trong đợt dịch này?

Lời giải.

Tốc độ lây lan dịch bệnh là đạo hàm $\frac{dX}{dt}$. Ta giả sử tốc độ lây lan tỷ lệ thuận với số lượng cá thể, được viết theo phương trình:

$$\frac{dX}{dt} = rX \quad (1)$$

trong đó r là hằng số tỷ lệ.

Phương trình (1) phù hợp trong điều kiện lý tưởng. Nhưng trên thực tế, tốc độ lây lan sẽ giảm khi kích cỡ quần thể bị nhiễm bệnh tiến đến ngưỡng M , và sẽ dừng khi đến M . Ta có 2 giả định:

- $\frac{dX}{dt} \approx rX$ nếu X nhỏ
- $\frac{dX}{dt} \leq 0$ nếu $X \geq M$

Phương trình sau thỏa mãn cả 2 giả định trên:

$$\frac{dX}{dt} = rX \left(1 - \frac{X}{M}\right) \quad (2)$$

Đặt $k = \frac{r}{M}$, lúc này phương trình (2) trở thành:

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow \frac{dX}{dt} = kMX \left(1 - \frac{X}{M}\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{dX}{dt} = kX(M - X) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow \frac{M}{X(M - X)} dX = r dt \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{X} + \frac{1}{M - X}\right) dX = r dt \\ &\Leftrightarrow \ln \left| \frac{X}{M - X} \right| = rt + c \\ &\Leftrightarrow \frac{X}{M - X} = e^c e^{rt} \end{aligned}$$

Tại $X = X_0, t = 0$: $e^c = \frac{X_0}{M - X_0}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{X}{M - X} = \frac{X_0}{M - X_0} e^{rt} \\ &\Leftrightarrow X = \frac{X_0}{M - X_0} e^{rt} (M - X) \\ &\Leftrightarrow X \left(1 + \frac{X_0}{M - X_0} e^{rt}\right) = \frac{X_0}{M - X_0} M e^{rt} \\ &\Leftrightarrow X = \frac{X_0 M}{(M - X_0) e^{-rt} \left(\frac{X_0}{M - X_0} e^{rt} + 1\right)} = \frac{X_0 M}{X_0 + (M - X_0) e^{-rt}} \end{aligned}$$

c) Tại thời điểm bắt đầu:

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{5000 X_0}{X_0(5000 - X_0) e^{-r \cdot 0}} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_0 \approx 4999 \\ X_0 \approx 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$X_0 = 0 \rightarrow \forall t, X(t) = 0$ (loại)

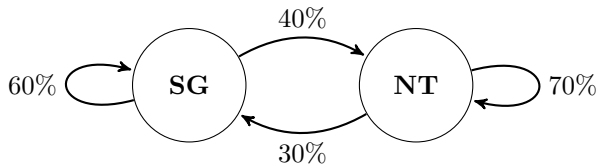
$X_0 = 4999 \rightarrow$ quá lớn (loại)

Nhận nghiệm $X_0 = 1$

$$\begin{aligned} X(2) &= \frac{X_0 M}{X_0 + (M - X_0) e^{-r \cdot 2}} \\ &\Leftrightarrow 1887 = \frac{5000}{1 + 4999 e^{-2r}} \\ &\Leftrightarrow r \approx 4 \\ X(12) &= \frac{5000}{1 + 4999 e^{-2 \cdot 12}} \approx 5000 \end{aligned}$$

Câu 10.

Một công ty cho thuê xe hơi du lịch có hai địa điểm cho thuê tại Sài Gòn (SG) và Nha Trang (NT). Công ty chú trọng vào nhóm khách hàng là các hãng dịch vụ du lịch cần xe để sắp xếp các hoạt động du lịch ở cả hai thành phố. Do đó, một khách du lịch có thể thuê một chiếc xe hơi trong một thành phố này và trả xe tại thành phố kia. Du khách có thể bắt đầu hành trình của mình tại một trong hai thành phố. Công ty muốn xác định chi phí dự kiến của đặc điểm hoạt động này bằng cách tính toán lượng xe cung-cầu tại mỗi thành phố. Dữ liệu trong quá khứ cho thấy rằng khoảng 60% số lượng xe thuê ở SG sẽ được trả trở về SG, và 40% còn lại sẽ được trả ở NT. Trong số những chiếc xe được thuê tại NT, 70% là được trả trở về NT, và 30% sẽ được trả ở SG. Hình dưới đây tóm lược dữ liệu này:



a) Gọi n là số ngày hoạt động của công ty và đặt

- X_n là số xe hiện có tại SG vào cuối ngày thứ n
- Y_n là số xe hiện có tại NT vào cuối ngày thứ n

Tìm hệ động lực rời rạc dưới dạng ma trận nào sau đây diễn tả dữ liệu quá khứ nói trên.

b) Trạng thái cân bằng của mô hình hệ động lực trên xảy ra khi số lượng xe tại SG và NT vào cuối ngày sẽ không thay đổi theo thời gian, tức là khi $X_{n+1} = X_n = X$ và $Y_{n+1} = Y_n = Y, \forall n$. Tìm hệ phương trình tuyến tính thuần nhất khi trạng thái cân bằng xảy ra.

c) Giả sử số xe của công ty là 7000, tìm số lượng xe ở mỗi thành phố khi hệ cân bằng.

d) Nếu ban đầu, 7000 xe của công ty đều được đặt tại SG thì sau bao nhiêu ngày số lượng xe ở hai thành phố sẽ đạt đến trạng thái gần như cân bằng trong mô hình hệ động lực rời rạc trên?

Lời giải.

a)

$$X_{n+1} = 0,6X_n + 0,4Y_n \quad (1)$$

$$Y_{n+1} = 0,4X_n + 0,7Y_n \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{pmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$$

b) Thay $X_{n+1} = X_n = X$ và $Y_{n+1} = Y_n = Y, \forall n$ vào (1) và (2):

$$\begin{cases} X = 0.6X + 0.4Y \Leftrightarrow -0.4X + 0.4Y = 0 \\ Y = 0.4X + 0.7Y \Leftrightarrow 0.4X - 0.3Y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -0.4 & 0.4 \\ 0.4 & -0.3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Từ câu b ta dễ dàng suy ra ở trạng thái cân bằng: $4X = 3Y$

Số xe ở mỗi thành phố là nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} X + Y = 7000 \\ 4X = 3Y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = 3000 \\ Y = 4000 \end{cases}$$

d) Ta tính số xe tại 2 thành phố ở ngày thứ n bằng công thức (1) và (2):

n	X_n	Y_n
0	7000	0
1	4200	2800
2	3360	3640
3	3108	3892
4	3032,4	3967,6
5	3009,72	3990,28
6	3002,916	3997,084
7	3000,8748	3999,1252
8	3000,26244	3999,73756
9	3000,078732	3999,921268
10	3000,02362	3999,97638
11	3000,007086	3999,992914
...

Ta thấy n càng lớn thì hệ càng gần trạng thái cân bằng.

□

Phụ lục

3 Đáp án bài tập chương 3

Câu 3.

Một công ty sản xuất đồ nội thất sản xuất bàn và ghế gỗ. Lợi nhuận cho 1 cái bàn là 6\$, lợi nhuận cho 1 cái ghế là 8\$. Một cái bàn tốn 30 tấm gỗ và 5 giờ để làm, còn 1 cái ghế tốn 20 tấm gỗ và 10 giờ để làm. Công ty chỉ còn 300 tấm gỗ và 100 giờ lao động cho tuần tiếp theo. Xây dựng mô hình toán học để tối đa hóa lợi nhuận cho công ty trong tuần tiếp theo.

Lời giải.

1. *Decision variables:*

X_1 : số bàn

X_2 : số ghế

2. *Constraints:*

Công ty còn 300 tấm gỗ:

$$30X_1 + 20X_2 \leq 300$$

Công ty còn 100 giờ lao động:

$$5X_1 + 10X_2 \leq 100$$

3. *Objective function:*

Z : tổng lợi nhuận thu được

Maximize $Z = 6X_1 + 8X_2$

□

Câu 4.

Một nhà máy dự định tiến hành sản xuất 4 loại sản phẩm Correction Tape CT1, CT2, CT3, CT4. Cả 4 loại sản phẩm này đều sử dụng 3 loại nhựa ABS, GPPS, POM.

Mức tiêu hao vật liệu cho trong bảng sau:

Nguyên liệu	CT1	CT2	CT3	CT4
ABS	2	5	7	4
GPPS	3	1	5	6
POM	6	5	4	5

Dự trữ nguyên liệu cho trong bảng sau:

Dự trữ nguyên liệu	ABS	GPPS	POM
	1200	800	2000

Lợi nhuận thu được theo từng đơn vị sản phẩm cho trong bảng sau:

Lợi nhuận /1 sản phẩm	CT1	CT2	CT3	CT4
	300	250	500	150

Cần xây dựng phương án để nhà máy đạt tổng lợi nhuận lớn nhất.

Lời giải.

1. *Decision variables:*

X_1 : Số sản phẩm CT1

X_2 : Số sản phẩm CT2

X_3 : Số sản phẩm CT3

X_4 : Số sản phẩm CT4

2. *Constraints:*

Nhà máy còn 1200 đơn vị nhựa ABS:

$$2X_1 + 5X_2 + 7X_3 + 4X_4 \leq 1200$$

Nhà máy còn 800 đơn vị nhựa GGPS:

$$3X_1 + X_2 + 5X_3 + 6X_4 \leq 800$$

Nhà máy còn 2000 đơn vị nhựa BOM:

$$6X_1 + 5X_2 + 4X_3 + 5X_4 \leq 2000$$

3. *Objective function:*

Z : Lợi nhuận

Maximize $Z = 300X_1 + 250X_2 + 500X_3 + 150X_4$

□

Câu 5.

Một doanh nghiệp cần vận chuyển hàng hóa từ 2 kho đến 3 cửa hàng bán lẻ. Lượng hàng hóa ở các kho s_i , nhu cầu tiêu thụ hàng hóa ở các cửa hàng d_j và chi phí vận chuyển từ kho i đến cửa hàng j là c_{ij} được cho ở bảng dưới.

	Cửa hàng 1 ($d_1 = 50$)	Cửa hàng 2 ($d_2 = 80$)	Cửa hàng 3 ($d_3 = 100$)
Kho 1 ($s_1 = 400$)	$c_{11} = 100$	$c_{12} = 180$	$c_{13} = 100$
Kho 2 ($s_2 = 90$)	$c_{21} = 50$	$c_{22} = 120$	$c_{23} = 80$

Hãy lập kế hoạch vận chuyển từ mỗi kho đến mỗi cửa hàng sao cho các kho đều phân phối hết hàng, các cửa hàng đều nhận đủ hàng và tổng chi phí phải trả là ít nhất.

Lời giải.

1. *Decision variables:*

X_{ij} : số lần vận chuyển từ kho i đến cửa hàng j

2. *Constraints:*

Tổng số hàng lấy từ kho 1 không quá 400:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} \leq 400$$

Tổng số hàng lấy từ kho 2 không quá 90:

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 90$$

Cửa hàng 1 nhận đủ 50 hàng:

$$X_{11} + X_{21} = 50$$

Cửa hàng 2 nhận đủ 80 hàng:

$$X_{12} + X_{22} = 80$$

Cửa hàng 3 nhận đủ 100 hàng:

$$X_{13} + X_{23} = 100$$

3. *Objective function:*

Z: Chi phí

Minimize $Z = 100X_{11} + 180X_{12} + 100X_{13} + 50X_{21} + 120X_{22} + 80X_{23}$

□

Câu 6.

Cửa hàng bán quần áo A nhân dịp khai trương đã đưa ra chương trình bán hàng sau. Cửa hàng chỉ bán quần áo theo gói, không bán lẻ từng chiếc. Có hai loại gói như sau:

- Gói 1 giá 200 000 có 3 áo và 1 váy;
- Gói 2 giá 150 000 có 2 áo và 2 váy.

Mỗi khách hàng chỉ được mua tối đa 6 gói các loại. Lan muốn mua ít nhất 10 cái áo và 6 cái váy. Hãy giúp Lan mua được số lượng váy áo mong muốn với chi phí thấp nhất.

Lời giải.

1. *Decision variables:*

X_1 : số gói 1

X_2 : số gói 2

2. *Constraints:*

Mỗi khách hàng chỉ được mua tối đa 6 gói các loại:

$$X_1 + X_2 \leq 6$$

Lan muốn mua ít nhất 10 cái áo:

$$3X_1 + 2X_2 \geq 10$$

Lan muốn mua ít nhất 6 cái váy:

$$X_1 + 2X_2 \geq 6$$

3. *Objective function:*

Z: Chi phí

$$\text{Minimize } Z = 200000X_1 + 150000X_2$$

□

Câu 7.

Một xưởng sản xuất làm 3 sản phẩm : máy truyền hình, máy phát thanh và loa. Mỗi sản phẩm được lắp ráp từ những phụ kiện có sẵn trong kho. Có 5 loại vật tư phụ kiện : khung máy, đèn hình, bộ loa, bộ nguồn, bảng mạch điện tử. Mục tiêu là sản xuất đầy đủ các sản phẩm để có lãi nhiều nhất với số vật tư phụ kiện còn tồn trong kho. Số vật tư tồn đầu kỳ là : 450 khung máy, 250 đèn hình, 800 bộ loa, 450 bộ nguồn và 600 bảng mạch điện tử.

Định mức cho :

- máy truyền hình : 1 khung, 1 đèn hình, 2 bộ loa, 1 bộ nguồn, 2 bảng mạch điện tử
- máy phát thanh: 1 khung, 2 bộ loa, 1 bộ nguồn, 1 bảng mạch điện tử
- loa : 1 bộ loa, 1 bảng mạch điện tử

Cho biết lãi cho mỗi sản phẩm được dự tính là

- máy truyền hình: 75\$,
- máy phát thanh: 50\$,
- loa: 35\$.

Lời giải.

1. *Decision variables:*

X_1 : Số máy truyền hình

X_2 : Số máy phát thanh

X_3 : Số loa

2. *Constraints:*

Xưởng có 450 khung máy và có 450 bộ nguồn:

$$X_1 + X_2 \leq 450$$

Xưởng có 250 đèn hình:

$$X_1 \leq 250$$

Xưởng có 800 bộ loa:

$$2X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 800$$

Xưởng có 600 bản mạch điện tử:

$$2X_1 + X_2 + X_3 \leq 600$$

3. *Objective function:*

Z: Tổng lãi

$$\text{Maximize } Z = 75X_1 + 50X_2 + 35X_3$$

□

Câu 8.

Một nông dân cần quy hoạch sản phẩm nông nghiệp trồng tối ưu trên mảnh đất của mình. Vấn đề đặt ra là nên trồng bao nhiêu tấn lúa mì và bao nhiêu tấn lúa gạo để có lợi nhuận lớn nhất trong điều kiện hạn chế về đất, nước và con người. Biết:

- Diện tích đất cần để sản xuất 1 tấn lúa gạo là 2 ha và lúa mì là 3 ha,
- Lượng nước cần để sản xuất 1 tấn lúa gạo là $6m^3$ và lúa mì là $4m^3$,
- Nhân công cần để sản xuất 1 tấn lúa gạo là 20 công nhân và lúa mì là 5 công nhân,
- Nông dân này có tối đa : 25 ha đất, $50m^3$ nước, 125 nhân công,
- Lợi nhuận thu đc từ lúa gạo là 18 \$/tấn và lúa mì là 21 \$/tấn.

Lời giải.*1. Decision variables:* *X_1 : Số tấn lúa gạo* *X_2 : Số tấn lúa mì**2. Constraints:**Có 25 ha đất:*

$$2X_1 + 3X_2 \leq 25$$

Có $50 m^3$ nước:

$$6X_1 + 4X_2 \leq 50$$

Có 125 nhân công:

$$20X_1 + 5X_2 \leq 125$$

3. Objective function: *Z : Lợi nhuận**Maximize $Z = 18X_1 + 21X_2$*

□

Câu 9.

Một doanh nghiệp mua bán nông sản nhỏ chuyên mua bán các loại nông sản: tiêu, điều, cà phê. Năm nay, vào mùa thu hoạch giá các loại nông sản mua vào và bán ra như sau:

	Giá mua /kg	Giá bán/kg
Tiêu	40 000	42 000
Điều	20 000	21 500
Cà phê	10 000	10 800

Do nguồn lực có giới hạn, vốn lưu động của doanh nghiệp trong một ngày chỉ vồn vẹn trong 1 tỷ VND. Để giữ mối quan hệ, doanh nghiệp phải mua ít nhất 2 tấn tiêu mỗi ngày và không thể mua quá 0 tấn cà phê và 10 tấn điều mỗi ngày do điều kiện kho bãi không cho phép. không được phép quá 80 ắc mỗi ngày điều kiện của doanh nghiệp và nhu cầu về nông sản.
Hãy giúp doanh nghiệp tối ưu lợi nhuận thu được trong điều kiện cho phép mỗi ngày.

Lời giải.

1. *Decision variables:*

X_1 : Số tấn tiêu

X_2 : Số tấn điều

X_3 : Số tấn cà phê

2. *Constraints:*

Vốn lưu động giới hạn 1 tỷ:

$$40000X_1 + 20000X_2 + 10000X_3 \leq 1000000000$$

Mua ít nhất 2 tấn tiêu:

$$X_1 \geq 2$$

Không thể mua quá 40 tấn cà phê:

$$X_2 \leq 40$$

Không thể mua quá 10 tấn điều:

$$X_3 \leq 10$$

Không thể mua quá 80 tấn:

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 80$$

3. *Objective function:*

Z : Lợi nhuận

Maximize $Z = 2000X_1 + 1500X_2 + 800X_3$

□

Câu 10.

Một quán ăn cần mua 3 loại sản phẩm sau: cà chua, khoai tây, và thịt với tổng số kg mỗi loại lần lượt là 50, 100, 50. Quán ăn hiện có hai đối tác nhận cung cấp hàng, và đưa ra giá như sau:

	Cà chua	Khoai tây	Thịt	Giá
Đối tác A	10	10	5	25\$
Đối tác B	5	8	10	30\$

Tuy nhiên, hiện nay đối tác B đang đưa ra chương trình khuyến mãi, mua 2 tặng 1. Xác định số lượng cần mua tại cả 2 đối tác sao cho có lợi nhất cho quán ăn.

Lời giải.

1. Decision variables:

- X_1 : Số kg cà chua mua ở đối tác A
 X_2 : Số kg khoai tây mua ở đối tác A
 X_3 : Số kg thịt ở đối tác A
 Y_1 : Số kg cà chua mua ở đối tác B
 Y_2 : Số kg khoai tây mua ở đối tác B
 Y_3 : Số kg thịt ở đối tác B

2. Constraints:

Quán cần mua 50 kg cà chua:

$$X_1 + Y_1 + \lfloor \frac{Y_1}{2} \rfloor = 50$$

Quán cần mua 100 kg khoai tây:

$$X_2 + Y_2 + \lfloor \frac{Y_2}{2} \rfloor = 100$$

Quán cần mua 50 kg thịt:

$$X_3 + Y_3 + \lfloor \frac{Y_3}{2} \rfloor = 50$$

3. Objective function:

Z : Số tiền mua

$$\text{Minimize } Z = \frac{25}{10}X_1 + \frac{25}{10}X_2 + \frac{25}{5}X_3 + \frac{30}{5}Y_1 + \frac{30}{8}Y_2 + \frac{30}{10}Y_3$$

□

4 Đáp án bài tập chương 4

4.1 Đáp án bài tập 4.1

Exercise 4.

Let $\Sigma = \{a, b\}$.

Find all strings in $L = ((a + b)^*b(a + ab)^*)$ of length less than four.

Solution.

$b, ab, ba, bb, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb$

□

Exercise 5.

Let $\Sigma = \{a, b\}$.

For which language it is true that $L = L^*$?

a) $L = a^n b^{n+1} : n \geq 0$

b) $L = w : n_a(w) = n_b(w)$

Solution.

a) **FALSE**

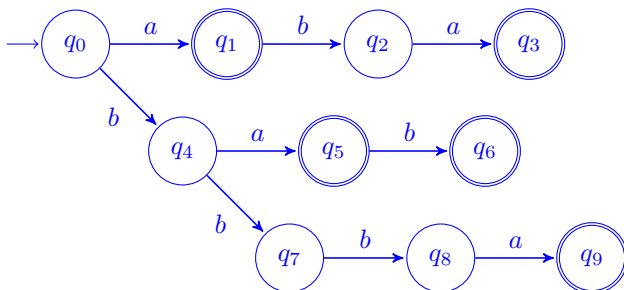
b) **TRUE**

□

Exercise 6.

Give a finite automata for the language $L = \{a, ba, aba, bab, bbba\}$.

Solution.



□

Exercise 7.

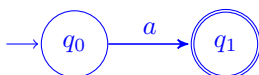
Let $\Sigma = \{a\}$. Give finite automata for the sets consisting of

a) all strings with exactly one a .

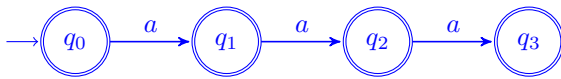
b) all strings with no more than three a 's.

Solution.

a)



b)



□

Exercise 8.

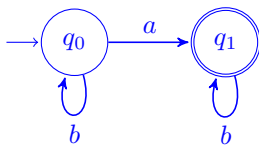
Let $\Sigma = \{a, b\}$. Give finite automata for the sets consisting of

a) all strings with exactly one a .

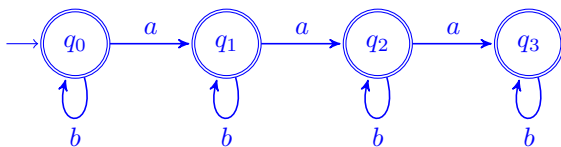
b) all strings with no more than three a 's.

Solution.

a)



b)

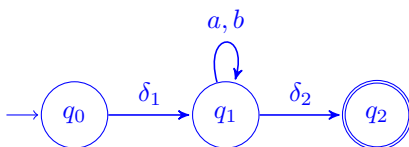


□

Exercise 9.

Give an automata for the language $L = \{ab^5wb^4 : w \in \{a, b\}^*\}$.

Solution.



$$\delta_1 = ab^5, \delta_2 = b^4$$

□

Exercise 10.

Find automatas for the following languages on $\Sigma = \{a, b\}$

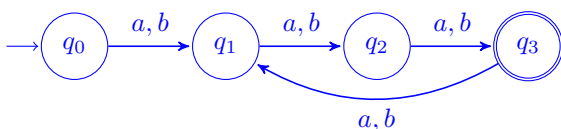
a) $L_1 = \{w : |w| \bmod 3 = 0\}$

b) $L_2 = \{w : |w| \bmod 5 \neq 0\}$

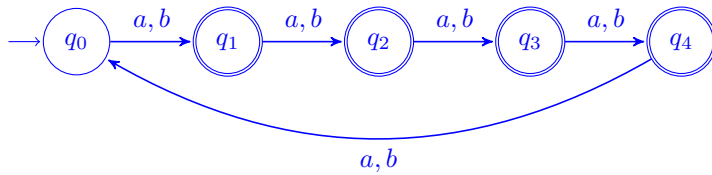
c) $L_3 = \{w : n_a(w) \bmod 3 > 1\}$

Solution.

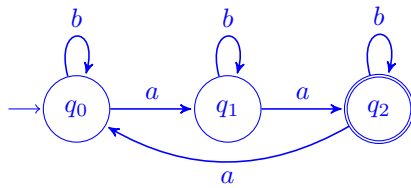
a)



b)



c)



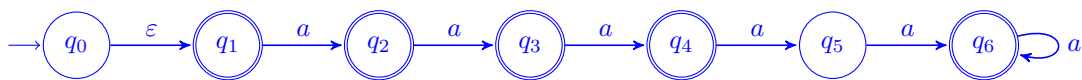
□

Exercise 11.

Show that the language $L = a^n : n \geq 0, n \neq 4$ is regular.

Solution.

The following shows an NFA $M = (\{q_0, q_1, q_2, \dots, q_6\}, \{a\}, \delta, q_0, \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_6\})$ that accepts $L = a^n : n \geq 0, n \neq 4$, where δ is described as in the graph.

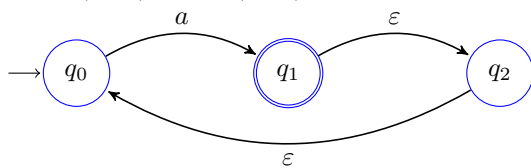


By theorem, we know that if L is accepted by an NFA, there exists a DFA that accepts L . Therefore, L is regular.

□

Exercise 12.

Find $\delta^*(q_0, a)$ and $\delta^*(q_1, a)$ for the following automata



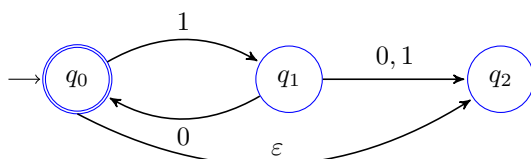
Solution.

$\delta^*(q_0, a) = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\delta^*(q_1, \epsilon) = \{q_0, q_2\}$

□

Exercise 13.

For the following automata, find $\delta^*(q_0, 1010)$ and $\delta^*(q_1, 00)$.



Solution.

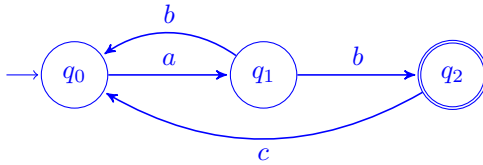
$$\delta^*(q_0, 1010) = \{q_0, q_2\}, \delta^*(q_1, 00) = \emptyset.\varepsilon$$

□

Exercise 14.

Find an automata with three states that accepts the language $\{ab, abc\}^*$.

Solution.



□

Exercise 15.

Let $\Sigma = \{a, b, c\}$.

Give complete automatas for the sets consisting of

- all strings with exactly one 'a'.
- all strings of even length.
- all strings which the number of appearances of 'b' is divisible by 3.
- all strings ending with 'a'.
- all strings not ending with 'a'.
- all non-empty strings not ending with 'a'.
- all strings with at least one 'a'.
- all strings with at most one 'a'.
- all strings without any 'a'.
- all strings including at least one a and whose the first appearance of 'a' is not followed by a 'c'.

Complete automata: a finite automata in which from each state, it is defined precisely when receiving any event.

Solution.

Refer to Solution Chap 4.2 Question 9.

□

Exercise 16.

Hãy vẽ sơ đồ biểu diễn hoạt động giao dịch tại một chi nhánh ngân hàng, biết rằng các hoạt động giao dịch như sau:

- lấy số thứ tự hàng chờ để giao dịch hoặc nhờ một trong hai quầy tư vấn riêng (A_1 và A_2).
- Quầy A_1 dùng để phục vụ đóng/mở tài khoản giao dịch hoặc tài khoản thẻ cho khách hàng.
- Quầy A_2 dùng để xử lý sự cố, như là mất thẻ ATM, bị máy ATM nuốt thẻ, giao dịch online bị lỗi, ...
- Ngân hàng có 2 loại giao dịch: nội tệ và ngoại tệ.
- Chi nhánh có 3 quầy giao dịch nội tệ B , C , D và 1 quầy giao dịch ngoại tệ E .

f) Người khách hàng sau khi giao dịch ngoại tệ, vẫn có thể tiếp tục giao dịch nội tệ. Trường hợp đó, anh ta sẽ được ưu tiên chuyển đến quầy giao dịch D mà không cần lấy số thứ tự lại.

g) Khách hàng sau khi thực hiện giao dịch nội tệ và kiểm tra, xác nhận giao dịch thành công, sẽ ra về. Trường hợp có trục trặc, sẽ được chuyển sang quầy đặc biệt A_2 để xử lý sự cố.

Solution.

Roses are red

Violets are blue

I do all this

Just for you

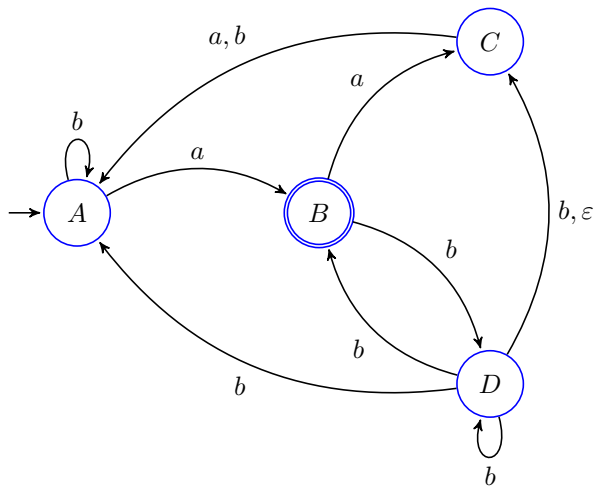
Better do it yourself, my young girl.

□

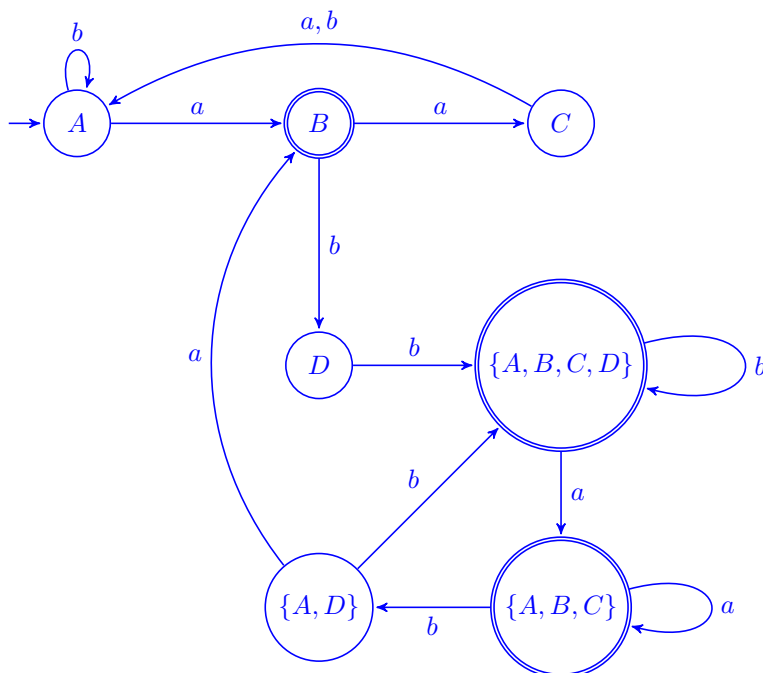
4.2 Đáp án bài tập 4.2

Question 4.

Convert the following NFA into DFA.



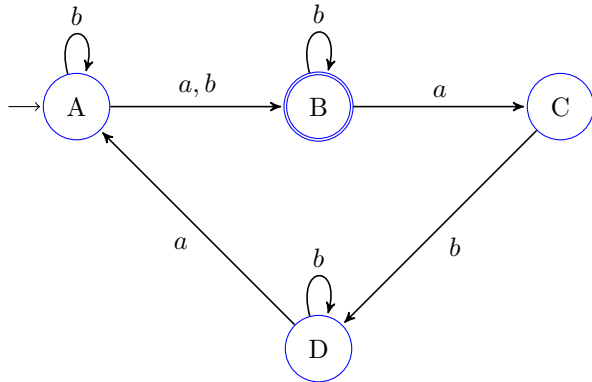
Solution.



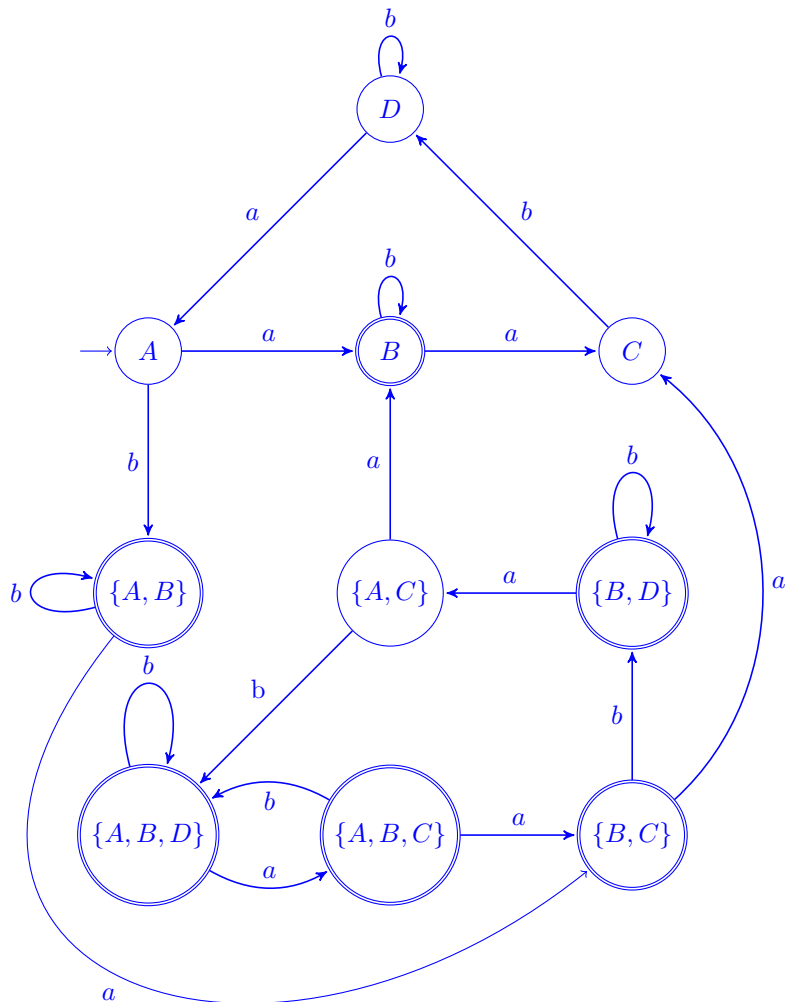
□

Question 3.

Convert the following NFA into DFA.



Solution.



□

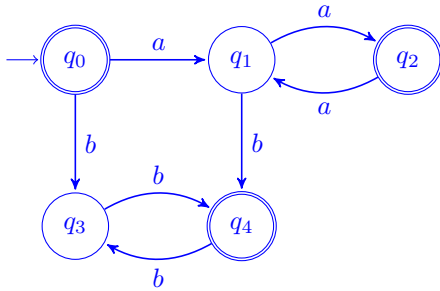
Question 5.

Find a regular expression for the set $\{a^m b^n : (n + m) \text{ is even}\}$.

Determine the corresponding DFA (or NFA and then convert NFA to DFA).

Solution.

$$(aa)^*(bb)^* + a(aa)^*b(bb)^*$$



□

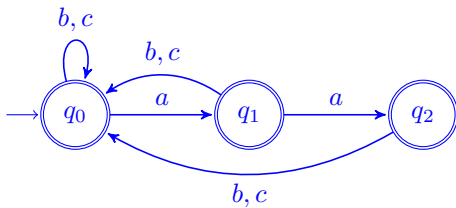
Question 6.

Give a regular expression for the language on $\Sigma\{a, b, c\}$ containing no any sequence of a with length greater than two.

Determine the corresponding DFA (or NFA and then convert NFA to DFA).

Solution.

$$((b + c)^* + (b + c)^*a(b + c)^* + (b + c)^*aa(b + c)^*)^*$$



□

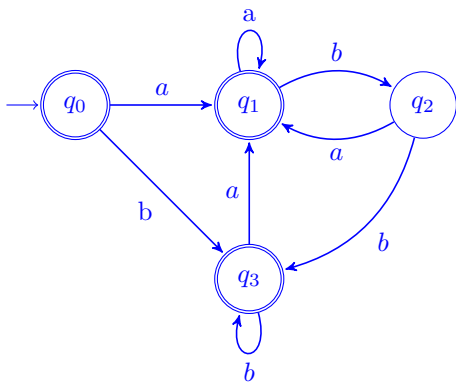
Question 7.

Give a regular expression for the language on $\Sigma = \{a, b\}$ containing all strings not ending in ab .

Determine the corresponding DFA (or NFA and then convert NFA to DFA).

Solution.

$$\varepsilon + a + b + (a + b)^*(aa + ba + bb)$$

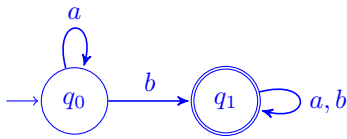


□

Question 8.

Give a DFA that accepts $L = ((a + b)^*b(a + ab)^*)$.

Solution.



□

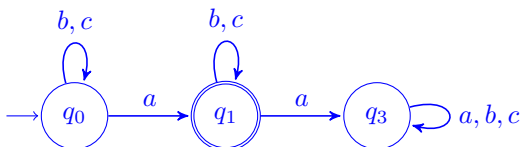
Question 9.

Let $\Sigma = \{a, b, c\}$. Give complete DFA's for the sets consisting of

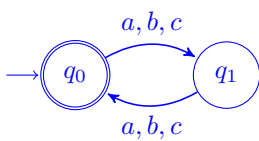
- all strings with exactly one 'a'.
- all strings of even length.
- all strings which the number of appearances of 'b' is divisible by 3.
- all strings ending with 'a'.
- all strings not ending with 'a'.
- all non-empty strings not ending with 'a'.
- all strings with at least one 'a'.
- all strings with at most one 'a'.
- all strings without any 'a'.
- all strings including at least one a and whose the first appearance of 'a' is not followed by a 'c'.

Solution.

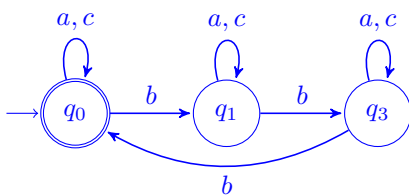
a)



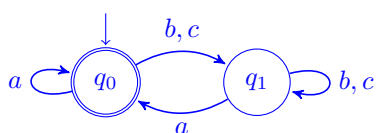
b)



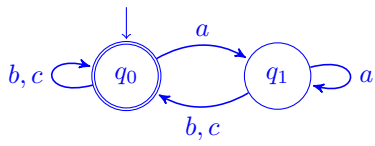
c)



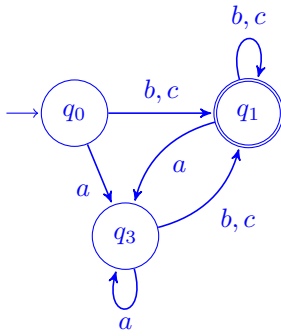
d)



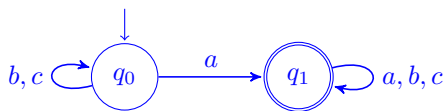
e)



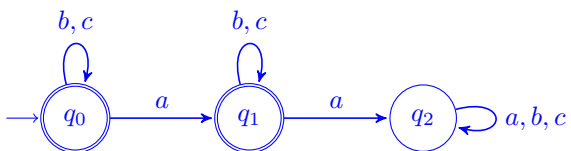
f)



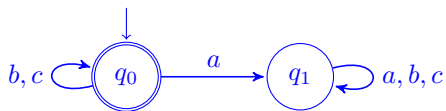
g)



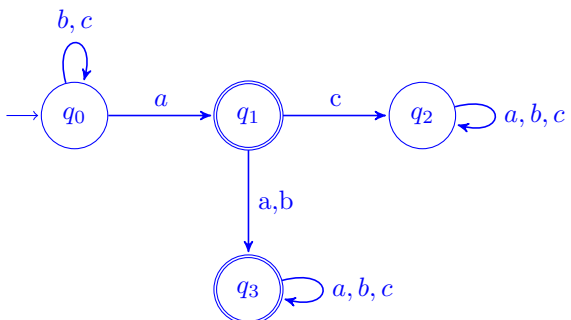
h)



i)



j)



□