

Chương 1

BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

1.1 MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

Ví dụ 1. Một xí nghiệp cần sản xuất 3 loại bánh: **bánh đậu xanh**, **bánh thập cẩm** và **bánh dẻo**. Lượng nguyên liệu đường, đậu cho một bánh mỗi loại, lượng dự trữ nguyên liệu, tiền lãi cho một bánh mỗi loại được cho trong bảng sau:

Nguyên liệu	Bánh đậu xanh	Bánh thập cẩm	Bánh dẻo	Lượng dự trữ
Đường	0,04kg	0,06kg	0,05kg	500kg
Đậu	0,07kg	0kg	0,02kg	300kg
Lãi	3000	2000	2500	

Hãy lập mô hình bài toán tìm số lượng mỗi loại bánh cần sản xuất sao cho không bị động về nguyên liệu mà lãi đạt được cao nhất.

Giải

Gọi x_1, x_2, x_3 lần lượt là số bánh đậu xanh, bánh thập cẩm, bánh dẻo cần phải sản xuất.

Điều kiện: $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3$. Khi đó

1) Tiền lãi thu được là: $f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 2x_2 + 2,5x_3$ (ngàn).

2) Lượng đường được sử dụng là: $0,04x_1 + 0,06x_2 + 0,05x_3$ (kg)

Để không bị động về nguyên liệu thì: $0,04x_1 + 0,06x_2 + 0,05x_3 \leq 500$.

3) Lượng đậu được sử dụng là: $0,07x_1 + 0,02x_3$ (kg)

Để không bị động về nguyên liệu thì: $0,07x_1 + 0,02x_3 \leq 300$.

Vậy ta có mô hình bài toán

(1) $f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 2x_2 + 2,5x_3 \rightarrow \max$

(2) $0,04x_1 + 0,06x_2 + 0,05x_3 \leq 500$

$0,07x_1 + 0,02x_3 \leq 300$

(3) $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3$.

Ta nói đây là bài toán quy hoạch tuyến tính 3 ẩn tìm max của hàm mục tiêu.

Ví dụ 2. Giả sử yêu cầu tối thiểu mỗi ngày về các chất dinh dưỡng đạm, đường, khoáng cho một loại gia súc tương ứng là 90g, 130g, 10g. Cho biết hàm lượng các chất dinh dưỡng trên có trong 1g thức ăn A, B, C và giá mua 1kg thức ăn mỗi loại được cho trong bảng sau:

Chất dinh dưỡng	A	B	C
Đạm	0,1g	0,2g	0,3g
Đường	0,3g	0,4g	0,2g
Khoáng	0,02g	0,01g	0,03g
Giá mua	3000	4000	5000

Hãy lập mô hình toán học của bài toán xác định khối lượng thức ăn mỗi loại phải mua để tổng số tiền chi cho mua thức ăn ít nhất nhưng đáp ứng được nhu cầu dinh dưỡng mỗi ngày.

Giải

Gọi x_1, x_2, x_3 lần lượt là khối lượng (g) thức ăn A, B, C cần mua.

Điều kiện: $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3$. Khi đó

Tổng khối lượng các chất dinh dưỡng có trong thức ăn cần mua là

Đạm: $0,1x_1 + 0,2x_2 + 0,3x_3$ (g)

Đường: $0,3x_1 + 0,4x_2 + 0,2x_3$ (g)

Khoáng: $0,02x_1 + 0,01x_2 + 0,03x_3$ (g)

Để đáp ứng được nhu cầu dinh dưỡng tối thiểu mỗi ngày thì tổng khối lượng các chất dinh dưỡng có trong thức ăn cần mua không thể nhỏ hơn các nhu cầu tối thiểu mỗi ngày về các chất dinh dưỡng đó nên ta có các điều kiện:

$$0,1x_1 + 0,2x_2 + 0,3x_3 \geq 90$$

$$0,3x_1 + 0,4x_2 + 0,2x_3 \geq 130$$

$$0,02x_1 + 0,01x_2 + 0,03x_3 \geq 10$$

Tổng số tiền phải chi để mua số thức ăn trên là

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \text{ (đồng)}$$

Yêu cầu bài toán là số tiền chi cho mua thức ăn ít nhất nên ta có điều kiện

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \rightarrow \min$$

Vậy ta có mô hình bài toán

$$(1) f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \rightarrow \min$$

$$(2) 0,1x_1 + 0,2x_2 + 0,3x_3 \geq 90$$

$$0,3x_1 + 0,4x_2 + 0,2x_3 \geq 130$$

$$0,02x_1 + 0,01x_2 + 0,03x_3 \geq 10$$

$$(3) x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$$

Ví dụ 3. (CHLH 2009) Một cơ sở sản xuất đồ gỗ dự định sản xuất ba loại sản phẩm là bàn, ghế và tủ. Định mức sử dụng lao động, chi phí sản xuất và giá bán mỗi sản phẩm mỗi loại ước tính trong bảng sau:

Các yếu tố	Bàn	Ghế	Tủ
Lao động (ngày công)	2	1	3
Chi phí sản xuất (ngàn đồng)	100	40	250
Giá bán (ngàn đồng)	260	120	600

Hãy lập mô hình toán học của bài toán xác định số sản phẩm mỗi loại cần phải sản xuất sao cho không bị động trong sản xuất và tổng doanh thu đạt được cao nhất, biết rằng cơ sở có số lao động tương đương với 500 ngày công, số tiền dành cho chi phí sản xuất là 40 triệu đồng và số bàn, ghế phải theo tỉ lệ 1/6.

Giải

Gọi x_1, x_2, x_3 lần lượt là số bàn, ghế, tủ cần phải sản xuất. Ta có các điều kiện: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Tổng ngày công và chi phí dự định để sản xuất là:

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \text{ (ngày công)}$$

$$100x_1 + 40x_2 + 250x_3 \text{ (ngàn đồng)}$$

Để không bị động trong sản xuất ta có các điều kiện sau

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 500$$

$$100x_1 + 40x_2 + 250x_3 \leq 40000$$

Theo tỉ lệ giữa số bàn và số ghế ta có điều kiện sau

$$6x_1 = x_2$$

Tổng doanh thu theo dự kiến là

$$260x_1 + 120x_2 + 600x_3 \text{ (ngàn đồng)}$$

Để tổng doanh thu đạt được cao nhất ta có điều kiện

$$260x_1 + 120x_2 + 600x_3 \rightarrow \max$$

Như vậy, mô hình toán học của bài toán là

$$(1) \quad 260x_1 + 120x_2 + 600x_3 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 500$$

$$(2) \quad 100x_1 + 40x_2 + 250x_3 \leq 40000$$

$$6x_1 = x_2$$

$$(3) \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

1.2 PHÂN LOẠI DẠNG BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

1.2.1 Dạng tổng quát của bài toán quy hoạch tuyến tính

Bài toán QHTT dạng **tổng quát** với n ẩn là bài toán có dạng

$$(1) \quad f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max(\min)$$

$$(2) \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \begin{cases} \geq \\ \leq \\ = \end{cases} b_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$(3) \quad x_j \begin{cases} \geq 0 \\ \leq 0 \\ \text{tùy ý} \end{cases}, j = 1, 2, \dots, n$$

Trong đó

- (1) là hàm mục tiêu.
- (2) là hệ ràng buộc chính.
- (3) là ràng buộc dấu.
- (2) và (3) được gọi chung là hệ ràng buộc của bài toán.

Khi đó

- Mỗi vector $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ thỏa (2) và (3) được gọi là một **phương án** (PA) của bài toán.
- Mỗi phương án x thỏa (1), nghĩa là tại đó hàm mục tiêu đạt giá trị nhỏ nhất (lớn nhất) trên tập các phương án được gọi là một **phương án tối ưu** (PATU) của bài toán.
- Giải một bài toán QHTT là đi tìm **một phương án tối ưu** của nó hoặc chỉ ra rằng bài toán **vô nghiệm**, nghĩa là bài toán không có PATU.

1.2.2 Dạng chính tắc của bài toán QHTT

$$(1) f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max(\min)$$

$$(2) a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$(3) x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

Nhận xét. Bài toán QHTT **dạng chính tắc** là bài toán QHTT dạng tổng quát trong đó

- Các ràng buộc chính đều là phương trình.
- Các ẩn đều không âm.

Ví dụ. Bài toán sau có dạng chính tắc

$$(1) f(x) = 2x_1 - 4x_2 - x_3 + 6x_4 \rightarrow \min$$

$$(2) \begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_4 = 12 \\ 12x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -6 \end{cases}$$

$$(3) x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4$$

1.2.3 Dạng chuẩn của bài toán QHTT

Bài toán QHTT **dạng chuẩn** là bài toán QHTT dạng chính tắc

$$(1) f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max(\min)$$

$$(2) a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$(3) x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

Trong đó

- Các hệ số tự do đều không âm.
- Trong ma trận hệ số tự do có đủ m vector cột đơn vị: e_1, e_2, \dots, e_m .

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Khi đó:

- Các ẩn ứng với các vector cột đơn vị được gọi là các **ẩn cơ bản**. Cụ thể ẩn ứng với vector cột đơn vị e_k là ẩn cơ bản thứ k .

- Một phương án mà các ẩn cơ bản đều bằng 0 được gọi là **phương án cơ bản**.
- Một phương án cơ bản có đủ m thành phần dương được gọi là **không suy biến**. Ngược lại một phương án cơ bản có ít hơn m thành phần dương được gọi là **suy biến**.

Ví dụ. Xét bài toán QHTT sau

$$(1) f(x) = 2x_1 - 4x_2 - x_3 + 6x_4 \rightarrow \min$$

$$(2) \begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 = 12 \\ 12x_1 + x_3 + x_6 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$

$$(3) x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Ta thấy bài toán trên có dạng chính tắc, hơn nữa

Các hệ số tự do đều không âm

Ma trận hệ số ràng buộc A là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 12 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Có chứa đầy đủ 3 vector cột đơn vị e_1 (cột 5), e_2 (cột 6), e_3 (cột 2).

Do đó bài toán có dạng chuẩn, trong đó

- Ẩn cơ bản thứ nhất là x_5
- Ẩn cơ bản thứ hai là x_6
- Ẩn cơ bản thứ ba là x_2

Nhận xét. Trong bài toán trên, khi cho ẩn cơ bản thứ k bằng hệ số tự do thứ k , còn các ẩn không cơ bản bằng 0, nghĩa là cho $x_2 = 15, x_6 = 3, x_2 = 6, x_1 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$ ta được một phương án cơ bản của bài toán $x = (0, 6, 0, 0, 12, 3)$.

Phương án này không suy biến vì có đủ 3 thành phần dương. Ta gọi đây là phương án cơ bản ban đầu của bài toán.

Chú ý. Tổng quát, trong bài toán QHTT dạng chuẩn bất kì, khi cho ẩn cơ bản thứ k bằng hệ số tự do thứ k ($k = 1, 2, \dots, m$), còn các ẩn không cơ bản bằng 0, ta được một phương án cơ bản của bài toán. Ta gọi đây là phương án cơ bản ban đầu của bài toán.

1.3 BIẾN ĐỔI DẠNG BÀI TOÁN QHTT

1.3.1 Dạng tổng quát về dạng chính tắc

Ta có thể biến đổi bài toán **dạng tổng quát** về **dạng chính tắc** bằng các bước sau

Bước 1. Kiểm tra hệ ràng buộc chính

- 1) Nếu có ràng buộc chính dạng $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$ thì ta cộng vào vế trái ràng buộc đó ẩn phụ x_{n+k} , nghĩa là ta thay ràng buộc $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$ trong bài toán bằng ràng buộc $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_{n+k} = b_i$.

- 2) Nếu có ràng buộc chính dạng $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$ thì ta trừ vào về trái ràng buộc đó ẩn phụ x_{n+k} , nghĩa là ta thay ràng buộc $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$ trong bài toán bằng ràng buộc $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - x_{n+k} = b_i$.

Chú ý. Các ẩn phụ là các ẩn không âm và hệ số của các ẩn phụ đó trong hàm mục tiêu là 0.

Bước 2. Kiểm tra điều kiện dấu của ẩn số

- 1) Nếu có ẩn $x_j \leq 0$ thì ta thực hiện phép đổi ẩn số $x_j = -x'_j$ với $x'_j \geq 0$.
- 2) Nếu có ẩn x_j có dấu tùy ý thì ta thực hiện phép đổi ẩn số $x_j = x'_j - x''_j$ với $x'_j, x''_j \geq 0$.

Chú ý. Khi tìm được PATU của bài toán dạng chính tắc ta chỉ cần tính giá trị của các ẩn ban đầu và bỏ đi các ẩn phụ thì sẽ được PATU của bài toán dạng tổng quát đã cho.

Ví dụ. Biến đổi bài toán sau về dạng chính tắc

$$(1) f(x) = 2x_1 - 4x_2 - x_3 + 6x_4 \rightarrow \min$$

$$(2) \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 \leq 50 \\ 7x_1 + x_3 \geq 30 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -25 \end{cases}$$

$$(3) x_1 \geq 0, x_2 \leq 0$$

Giải

Thêm vào bài toán ẩn phụ $x_4 \geq 0$ để biến bất phương trình $4x_1 - 6x_2 + 5x_3 \leq 50$ về phương trình $4x_1 - 6x_2 + 5x_3 + x_4 = 50$.

Thêm vào bài toán ẩn phụ $x_5 \geq 0$ để biến bất phương trình $7x_1 + x_3 \geq 30$ về phương trình $7x_1 + x_3 - x_5 = 30$.

Đổi biến $x_2 = -x'_2$ với $x'_2 \geq 0$.

Đổi biến $x_3 = x'_3 - x''_3$ với $x'_3, x''_3 \geq 0$.

Ta đưa bài toán về dạng chính tắc

$$(1) f(x) = 3x_1 - 2x'_2 + 2,5(x'_3 - x''_3) \rightarrow \max$$

$$(2) \begin{cases} 4x_1 + 6x'_2 + 5(x'_3 - x''_3) + x_4 = 50 \\ 7x_1 + (x'_3 - x''_3) - x_5 = 30 \\ 2x_1 - 3x'_2 - 5(x'_3 - x''_3) = -25 \end{cases}$$

$$(3) x_1 \geq 0, x'_2 \geq 0, x'_3 \geq 0, x''_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

1.3.2 Dạng chính tắc về dạng chuẩn

Từ bài toán **dạng chính tắc** ta có thể xây dựng bài toán **dạng chuẩn** như sau

- 1) Khi gặp hệ số tự do $b_i < 0$ ta đổi dấu hai vế của ràng buộc thứ i.

- 2) Khi ma trận hệ số ràng buộc A không chứa cột đơn vị thứ k là e_k , ta đưa vào ẩn giả $x_{n+k} \geq 0$ và cộng thêm ẩn giả x_{n+k} vào vế trái phương trình ràng buộc thứ k để được phương trình ràng buộc mới: $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n + x_{n+k} = b_k$.
- 3) Hàm mục tiêu mở rộng $f(x)$ được xây dựng từ hàm mục tiêu ban đầu như sau
- Đối với bài toán min: $f(x) = f(x) + M(\sum an \text{ gia})$.
 - Đối với bài toán max: $f(x) = f(x) - M(\sum an \text{ gia})$.

Trong đó M là đại lượng rất lớn, lớn hơn bất kỳ số nào cho trước.

Ví dụ 1. Biến đổi bài toán QHTT sau về dạng chuẩn

$$(1) f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \rightarrow \min$$

$$(2) \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 50 \\ 7x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -25 \end{cases}$$

$$(3) x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4$$

Giải

Bài toán trên đã có dạng chính tắc, trong đó vế phải của phương trình ràng buộc thứ ba là $-25 < 0$. Đổi dấu hai vế của phương trình này ta được $-2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 25$

Và (2) trở thành

$$\begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 50 \\ 7x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 25 \end{cases}$$

Ma trận hệ số của ràng buộc là

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vì A còn thiếu 2 vector cột đơn vị là e_1 và e_3 nên bài toán chưa có dạng chuẩn.

Thêm vào bài toán hai ẩn giả $x_5, x_6 \geq 0$ và xây dựng bài toán mở rộng có dạng chuẩn như sau

$$(1) f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + Mx_5 + Mx_6 \rightarrow \min$$

$$(2) \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 + x_5 = 50 \\ 7x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_6 = 25 \end{cases}$$

$$(3) x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6$$

Ví dụ 2. Biến đổi bài toán QHTT sau về dạng chuẩn

$$(1) f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$(2) \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 50 \\ 7x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -25 \end{cases}$$

$$(3) x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4$$

Ta xây dựng bài toán mở rộng dạng chuẩn như sau

$$(1) f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 - Mx_5 - Mx_6 \rightarrow \max$$

$$(2) \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 + x_5 = 50 \\ 7x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_6 = 25 \end{cases}$$

$$(3) x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6$$

Chú ý.

- Ấn phụ: Tổng quát chuyển thành chính tắc
- Ấn giả: Chính tắc chuyển thành chuẩn

Ví dụ 3. Biến đổi bài toán QHTT sau về dạng chuẩn

$$(1) f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \rightarrow \min$$

$$(2) \begin{cases} -9x_1 + 15x_3 \leq 50 \\ -6x_3 + 2x_4 = -120 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 \geq -45 \end{cases}$$

$$(3) x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4$$

Giải

Thêm vào bài toán 2 ấn phụ $x_5, x_6 \geq 0$ ta được bài toán có dạng chính tắc như sau

$$(1) f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \rightarrow \min$$

$$(2) \begin{cases} -9x_1 + 15x_3 + x_5 = 50 \\ -6x_3 + 2x_4 = -120 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 - x_6 = -45 \end{cases}$$

$$(3) x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6.$$

Bài toán trên chưa có dạng chuẩn.

Ta thấy các vế phải của hai phương trình ràng buộc thứ 2 và 3 đều âm nên bằng cách đổi dấu hai vế của các phương trình này ta được

$$(2) \begin{cases} -9x_1 + 15x_3 + x_5 = 50 \\ 6x_3 - 2x_4 = 120 \\ -x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_6 = 45 \end{cases}$$

Mã trận hệ số ràng buộc là

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -9 & 15 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$$

Vì A còn thiếu một vector cột là e_2 nên bài toán chưa có dạng chuẩn.

Thêm vào ràng buộc chính thứ hai ẩn giả $x_7 \geq 0$ ta được bài toán dạng chuẩn như sau

$$(1) f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + Mx_7 \rightarrow \min$$

$$(2) \begin{cases} -9x_1 + 15x_3 + x_5 = 50 \\ 6x_3 - 2x_4 + x_7 = 120 \\ -x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_6 = 45 \end{cases}$$

$$(3) x_j \geq 0, j = 1, \dots, 7.$$

Chú ý. Quan hệ giữa bài toán xuất phát và bài toán mở rộng

Mối quan hệ giữa bài toán xuất phát (A) và bài toán mở rộng (B) như sau

- B vô nghiệm suy ra A vô nghiệm
- B có nghiệm có hai trường hợp:
 - 1) Nếu mọi ẩn giả của PATU bằng 0 thì bỏ ẩn giả ta được PATU của A
 - 2) Nếu có ít nhất một ẩn giả > 0 suy ra A không có PATU

Chương 2

PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH

2.1 PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH GIẢI BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH DẠNG CHUẨN

2.1.1 Thuật toán giải bài toán max

Bước lập thứ nhất (bảng đơn hình thứ nhất)

1) *Lập bảng đơn hình xuất phát*

Vẽ bảng đơn hình và ghi vào đó các thành phần sau của bài toán dạng chuẩn

- Dòng 1. Ghi các ẩn của bài toán (kể cả ẩn phụ)
- Dòng 2. Ghi các hệ số của các ẩn trong hàm mục tiêu
- Cột 2. Ghi các ẩn cơ bản của bài toán theo thứ tự từ ẩn cơ bản thứ nhất đến ẩn cơ bản cuối cùng, ta gọi cột này là **cột ẩn cơ bản**.
- Cột 1: Ghi tương ứng các hệ số của các ẩn cơ bản trong hàm mục tiêu, ta gọi cột này là **cột hệ số cơ bản**.
- Cột 3. Ghi các số hạng tự do của hệ ràng buộc chính theo thứ tự từ trên xuống dưới, ta gọi cột này là **cột phương án**.
- Cột 4. Ghi ma trận điều kiện A của bài toán.

Tính **hệ số ước lượng** Δ_j của các ẩn $x_j (j = 1, 2, \dots, n)$ và ghi tương ứng vào dòng dưới cột 4, với Δ_j được tính theo công thức sau:

$$\Delta_j = (\text{cot } 1) \times (A_j) - (hsx_j) \quad (hsx_j: \text{hệ số của ẩn } x_j \text{ trong hàm mục tiêu}).$$

Chú ý. Nếu x_j là ẩn cơ bản thì $\Delta_j = 0$.

Tính trị số $f_0 = (\text{cot } 1) \times (\text{cot } 3)$ và ghi dưới cột 3.

2) *Xác định phương án cơ bản xuất phát*

Với bảng đơn hình vừa lập được thì phương án cơ bản xuất phát x^0 của bài toán được xác định như sau: Cho các ẩn ở cột 2 nhận giá trị tương ứng ở cột 3, các ẩn còn lại nhận giá trị 0. Trị số của hàm mục tiêu tại phương án cơ bản xuất phát x^0 là $f(x^0) = f_0$.

3) **Đánh giá tính tối ưu của phương án cơ bản xuất phát**

- **Dấu hiệu tối ưu.** Nếu hệ số ước lượng của các ẩn đều không âm, $\Delta_j \geq 0, \forall j$ thì phương án cơ bản xuất phát x^0 là phương án tối ưu của bài toán. Thuật toán kết thúc với kết luận: Bài toán có PATU là x^0 và GTTU là $f(x^0)$.
- **Dấu hiệu của bài toán không có PATU.** Nếu có ẩn không cơ bản x_k có hệ số ước lượng âm và cột điều kiện A_k của ẩn đó có các thành phần đều không dương, $\Delta_k < 0$ và $a_{ik} \leq 0; \forall i$ thì bài toán không có phương án tối ưu. Thuật toán kết thúc với kết luận: Bài toán không có PATU.

Nếu không xảy ra cả hai trường hợp trên thì thuật toán tiếp tục trong bước lặp thứ hai

Bước lặp thứ hai (Bảng đơn hình thứ hai)

1) **Tìm ẩn đưa vào**

Trong tất cả các $\Delta_j < 0$ ta chọn $\Delta_v < 0$ nhỏ nhất (ta đánh dấu * cho $\Delta_v < 0$ nhỏ nhất trong bảng). Khi đó, x_v là ẩn mà ta sẽ đưa vào hệ ẩn cơ bản. Cột A_v được gọi là **cột chủ yếu**.

2) **Tìm ẩn đưa ra**

Thực hiện phép chia lần lượt các số của cột phương án cho các số dương của cột chủ yếu và ghi các thương số λ_i đó vào cột cuối cùng.

Xác định $\lambda_r = \min\{\lambda_i\}$ (Ta đánh dấu * cho λ_r nhỏ nhất trong bảng). Khi đó x_r là ẩn mà ta đưa ra khỏi hệ ẩn cơ bản. Dòng có chứa x_r được gọi là **dòng chủ yếu**. Số dương nằm trên dòng chủ yếu và cột chủ yếu được gọi là **hệ số chủ yếu**.

Chú ý. Nếu cột chủ yếu chỉ có một số dương thì số dương đó là hệ số chủ yếu, dòng có số dương đó là dòng chủ yếu, ẩn nằm trên dòng chủ yếu là ẩn được đưa ra.

3) **Lập bảng đơn hình thứ hai**

- Cột 2: Thay ẩn đưa ra bằng ẩn đưa vào, các ẩn cơ bản còn lại giữ nguyên. Dòng có ẩn đưa vào gọi là **dòng chuẩn**.
- Cột 1: Thay hệ số của ẩn đưa ra bằng hệ số của ẩn đưa vào, các hệ số của các ẩn cơ bản còn lại giữ nguyên.

Các thành phần còn lại được xác định theo dòng như sau

- Dòng chuẩn = Dòng chủ yếu chia cho hệ số chủ yếu.
- Dòng thứ i = Dòng thứ i (cũ) – a_{iv} .dòng chuẩn. (a_{iv} : số nằm trên giao của dòng i và cột chủ yếu).

Các hệ số ước lượng và trị số của hàm mục tiêu trong bảng thứ hai được tính và ghi như bảng thứ nhất.

4) **Xác định và đánh giá phương án cơ bản thứ hai (như bước lặp thứ nhất)**

2.1.2 Thuật toán giải bài toán min

Giải tương tự bài toán max với chú ý sau

- Điều kiện tối ưu: $\Delta_j \leq 0, \forall j$
- Điều kiện không có PATU: $\exists \Delta_k > 0$ và $a_{ik} \leq 0, \forall i$
- Ấn được chọn đưa vào: Ấn ứng với $\Delta_k > 0$ lớn nhất.

Ví dụ 1. Giải bài toán QHTT sau

$$(1) f(x) = 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 - x_4 - 6x_5 \rightarrow \max$$

$$(2) \begin{cases} x_1 + 6x_2 - 2x_4 - 9x_5 = 32 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 30 \\ 3x_2 + x_5 + x_6 = 36 \end{cases}$$

$$(3) x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6.$$

Giải

Bài toán trên có dạng chính tắc với các vế phải của các phương trình ràng buộc trong (2) đều không âm.

Ma trận hệ số của ràng buộc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & -2 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vì A chứa đủ 3 cột đơn vị e_1 (cột 1), e_2 (cột 3), e_3 (cột 6) nên bài toán có dạng chuẩn trong đó:

- Ấn cơ bản thứ nhất: x_1
- Ấn cơ bản thứ hai: x_3
- Ấn cơ bản thứ ba: x_6

Ta giải bài toán bằng phương pháp đơn hình

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	λ_i
			2	-5	4	-1	-6	0	
2	x_1	32	1	6	0	-2	-9	0	
4	x_3	30	0	2	1	1	(3)	0	
0	x_6	36	0	3	0	0	1	1	
		184	0	-25	0	1	0	0	

$$f_0 = 2.32 + 4.30 = 184.$$

$$\Delta_1 = \Delta_3 = \Delta_6 = 0$$

$$\Delta_2 = 2.6 + 4.2 + 0.3 + 5 = 25$$

$$\Delta_4 = 2.(-2) + 4.1 + 0.0 + 1 = 1$$

$$\Delta_5 = 2.(-9) + 4.3 + 0.1 + 6 = 0$$

Trong bảng trên ta thấy $\Delta_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, 6$ nên bài toán có PATU là

$$x^0 = (32, 0, 30, 0, 0, 36) \text{ và } f_0 = 184.$$

Ví dụ 2. Giải bài toán QHTT sau

$$(1) f(x) = 6x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 - x_6 \rightarrow \min$$

$$(2) \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 15 \\ 2x_1 - x_3 + 2x_6 = -9 \\ 4x_1 + 2x_4 + x_5 - 3x_6 = 2 \end{cases}$$

$$(3) x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6.$$

Giải

Bài toán trên có dạng chính tắc với vế phải của phương trình ràng buộc chính thứ hai là -9 .

Đổi dấu hai vế của phương trình này, ta đưa về bài toán sau

$$(1) f(x) = 6x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 - 7x_6 \rightarrow \min$$

$$(2) \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 15 \\ -2x_1 + x_3 - 2x_6 = 9 \\ 4x_1 + 2x_4 + x_5 - 3x_6 = 2 \end{cases}$$

$$(3) x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6.$$

Ma trận hệ số của ràng buộc

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Vì A chứa đủ 3 cột đơn vị e_1 (cột 2), e_2 (cột 3), e_3 (cột 5) nên bài toán có dạng chuẩn trong đó:

- Ẩn cơ bản thứ nhất: x_2
- Ẩn cơ bản thứ hai: x_3
- Ẩn cơ bản thứ ba: x_5

Ta giải bài toán bằng phương pháp đơn hình

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	λ_i
			6	1	1	3	1	-7	
1	x_2	15	-1	1	0	-1	0	(1)	15
1	x_3	9	-2	0	1	0	0	-2	
1	x_5	2	4	0	0	2	1	-3	
		26	-5	0	0	-2	0	3*	
-7	x_6	15	-1	1	0	-1	0	1	
1	x_3	39	-4	2	1	-2	0	0	
1	x_5	47	1	3	0	-1	1	0	
		-19	-5	0	0	-2	0	0	

Trong bảng 1 ta thấy tồn tại $\Delta_6 = 3 > 0$ và trên cột tương ứng có $a_{13} = 1 > 0$ ($a_{23} = -2$ và $a_{33} = -3$) nên ta chọn ẩn đưa ra là x_6 , ẩn đưa vào là x_2 , hệ số chủ yếu là $a_{13} = 1$. Sau đó tính các dòng ở bảng 2 bằng công thức sau

$$d_c = d_{cy}, d_2 = d_2 + 2d_c, d_3 = d_3 + 3d_c.$$

Trong bảng 2 ta thấy tồn tại $\Delta_4 = 1 > 0$ mà $a_{i4} \leq 0, \forall i = 1, 2, 3$ nên bài toán min đang xét vô nghiệm.

Ví dụ 3. Giải bài toán QHTT sau

$$(1) f(x) = -2x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 3x_5 \rightarrow \max$$

$$(2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 52 \\ 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 60 \\ 3x_2 + x_5 = 36 \end{cases}$$

$$(3) x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5.$$

Giải

Bài toán trên có dạng chính tắc với vế phải của phương trình ràng buộc trong (2) đều không âm.

Ma trận hệ số ràng buộc là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vì A chứa đủ 3 cột đơn vị e_1 (cột 1), e_2 (cột 4), e_3 (cột 5) nên bài toán có dạng chuẩn trong đó:

- Ẩn cơ bản thứ nhất: x_1
- Ẩn cơ bản thứ hai: x_4
- Ẩn cơ bản thứ ba: x_5

Ta giải bài toán bằng phương pháp đơn hình

			x_1 -2	x_2 6	x_3 4	x_4 -2	x_5 3	λ_i
-2	x_1	52	1	2	(4)	0	0	52/4*
-2	x_4	60	0	4	2	1	0	60/2
3	x_5	36	0	3	0	0	1	
		-116	0	-9	-16*	0	0	
4	x_3	13	1/4	1/2	1	0	0	13.2
-2	x_4	34	-1/2	(3)	0	1	0	34/3*
3	x_5	36	0	3	0	0	1	36/3
		92	4	-1*	0	0	0	
4	x_3	22/3	1/3	0	1	-1/6	0	
6	x_2	34/3	-1/6	1	0	1/3	0	
3	x_5	2	1/2	0	0	-1	1	
		310/3	23/6	0	0	1/3	0	

Trong bảng I ta thấy tồn tại các $\Delta_j < 0$: $\Delta_2 = -9, \Delta_3 = -16$ và trên mỗi cột tương ứng có hệ số dương. Ta chọn $\Delta_3 = -16$ âm nhỏ nhất và ẩn đưa vào là x_3 , khi đó trên cột tương ứng có các hệ số dương là $a_{13} = 4, a_{23} = 2$ nên ta lập các tỉ số $\lambda_1 = 52/4, \lambda_2 = 60/2$. Ta chọn $\lambda_1 = 52/4$ nhỏ nhất và ẩn đưa ra là x_1 , hệ số chủ yếu là $a_{13} = 4$. Sau đó biến đổi bảng I bằng các phép biến đổi sau:

$$d_c = d_{cy}/4, d_2 = d_2 - 2d_c, d_3 = d_3.$$

Biến đổi tương tự cho bảng II.

Trong bảng III ta thấy $\Delta_j \geq 0, \forall j = 1, 2, \dots, 5$ nên bài toán đang xét có PATU là

$$x^0 = (0, 34/3, 22/3, 0, 2) \text{ với } f(x^0) = 310/3.$$

2.2 PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH MỞ RỘNG GIẢI BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH DẠNG CHÍNH TẮC

Thuật toán đơn hình mở rộng giải bài toán QHTT dạng chính tắc tương tự như thuật toán đơn hình giải bài toán QHTT dạng chuẩn nhưng có một số lưu ý như sau

- 1) Do hàm mục tiêu mở rộng là $f(x) = f(x) + \sum (angia)$ đối với bài toán min và $f(x) = f(x) - \sum (angia)$ đối với bài toán max, nên trong bảng đơn hình ở cột hệ số có thể có các hệ số phụ thuộc M. Khi đó ở dòng cuối các hệ số sẽ có dạng $aM + b$, do đó người ta thường chia dòng cuối thành hai dòng nhỏ: Dòng trên ghi a và dòng dưới ghi b.
- 2) Vì M là một đại lượng dương rất lớn, nên khi so sánh các số hạng $aM + b$ và $cM + d$ ta có quy tắc sau

$$aM + b = cM + d \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

$$aM + b > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \forall b \end{cases}$$

$$aM + b > cM + d \Leftrightarrow \begin{cases} a > c \\ \forall b, d \\ a = c \\ b > d \end{cases}$$

- 3) Trong bảng đơn hình đầu tiên các ẩn giả đều có trong ẩn cơ bản. Mỗi khi một ẩn giả bị đưa ra khỏi hệ ẩn cơ bản thì không bao giờ ta đưa ẩn giả đó trở lại nữa, vì vậy trong bảng đơn hình ta có thể bỏ đi các cột ứng với các ẩn giả.

Ví dụ 1. Giải bài toán QHTT sau

$$f(x) = 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 4$$

$$-x_1 + x_4 \leq 10$$

$$2x_2 + x_3 - 2x_4 = 12$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

Giải

Đưa bài toán về dạng chuẩn:

$$f(x) = 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 + Mx_6 + Mx_7 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_6 = 4$$

$$-x_1 + x_4 + x_5 = 10$$

$$2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_7 = 12$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$$

Giải bài toán mở rộng bằng phương pháp đơn hình

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			6	3	2	-3	0
M	x_6	4	1	(1)	1	-2	0
0	x_5	10	-1	0	0	1	1
M	x_7	12	0	2	1	-2	0
			-6	-3	-2	3	0
			1	3*	2	-4	0
3	x_2	4	1	1	1	-2	0
0	x_5	10	-1	0	0	1	1
M	x_7	4	-2	0	-1	(2)	0
			-3	0	1	-3	0
			-2	0	-1	2*	0
3	x_2	8	-1	1	0	0	0
0	x_5	8	0	0	1/2	0	1
-3	x_4	2	-1	0	-1/2	1	0
		18	-6	0	-1/2	0	0

$$\text{PATU: } x = (0, 8, 0, 2), f(x) = 18.$$

Ví dụ 2. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$f(x) = -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2$$

$$-x_2 - 7x_3 + 3x_4 \leq 3$$

$$-3x_3 + 2x_4 \leq 7$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4.$$

Giải

Đưa bài toán về dạng chuẩn:

$$f(x) = -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2$$

$$-x_2 - 7x_3 + 3x_4 + x_5 = 3$$

$$-3x_3 + 2x_4 + x_6 = 7$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Giải bài toán mở rộng bằng phương pháp đơn hình

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			-2	-1	1	1	0	0
-2	x_1	2	1	1	(2)	-1	0	0
0	x_5	3	0	-1	-7	3	1	0
0	x_6	7	0	0	-3	2	0	1
			0	-1	-5*	1	0	0
1	x_3	1	1/2	1/2	1	-1/2	0	0
0	x_5	9	7/2	5/2	0	-1/2	1	0
0	x_6	8	3/2	3/2	0	(1/2)	0	1
			5/2	3/2	0	-3/2*	0	0
1	x_3	11	2	2	1	0	0	1
0	x_4	20	5	4	0	0	1	1
1	x_5	20	3	3	0	1	0	2
		31	7	6	0	0	0	3

PATU: $x = (0, 0, 11, 20)$, $f(x) = 31$.

Chương 3

BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU

3.1 Định nghĩa

Cho (P) là bài toán QHTT có dạng chính tắc như sau

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max(\min)$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n.$$

Từ bài toán (P) ta lập được bài toán QHTT (D) như sau và ta gọi bài toán (D) là bài toán đối ngẫu của bài toán (P)

$$f(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \rightarrow \min(\max)$$

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq (\leq) c_1$$

$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \geq (\leq) c_2$$

.....

$$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \geq (\leq) c_n$$

Chú ý. Bài toán (D) được lập từ bài toán (P) theo nguyên tắc sau

1. Số ẩn của bài toán (D) bằng số ràng buộc chính của bài toán (P) và số ràng buộc chính của bài toán (D) bằng số ẩn của bài toán (P).
2. Hệ số của ẩn y_i trong hàm mục tiêu của bài toán (D) là số hạng tự do b_i trong hệ ràng buộc chính của bài toán (P).
3. Các hệ số của các ẩn và hệ số tự do trong ràng buộc chính thứ j của bài toán (D) là các hệ số tương ứng của ẩn x_j trong hệ ràng buộc chính và hàm mục tiêu của bài toán (P).
4. Nếu (P) là bài toán max thì (D) là bài toán min và hệ ràng buộc chính của bài toán (D) là hệ bất phương trình với dấu \geq . Nếu (P) là bài toán min thì (D) là bài toán max và hệ ràng buộc chính của bài toán (D) là hệ bất phương trình với dấu \leq .
5. Các ẩn của bài toán (D) đều có dấu tùy ý.

3.2 Cách lập bài toán đối ngẫu

Bài toán đối ngẫu được lập trực tiếp theo quy tắc sau, gọi là quy tắc đối ngẫu

(P)	(D)
$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$	$f(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \rightarrow \min$
$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \begin{cases} \geq \\ \leq \\ = \end{cases} b_i$	$y_i \begin{cases} \leq 0 \\ \geq 0 \\ \text{tùy} \end{cases}$
$x_j \begin{cases} \geq 0 \\ \leq 0 \\ \text{tùy} \end{cases}$	$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_m \begin{cases} \geq \\ \leq \\ = \end{cases} c_j$

Ví dụ. Tìm bài toán đối ngẫu của bài toán sau

a)

$$(1) f(x) = 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 \rightarrow \min$$

$$(2) \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 5x_4 \leq 50 \\ 7x_1 + x_3 + x_4 = 30 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \geq -25 \end{cases}$$

$$(3) x_1 \geq 0, x_2 \leq 0.$$

b)

$$(1) f(x) = 2x_1 + x_2 - 8x_3 \rightarrow \max$$

$$(2) \begin{cases} 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 28 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 15 \end{cases}$$

$$(3) x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Giải

a) Bài toán đối ngẫu là

$$(1) g(y) = 50y_1 + 30y_2 - 25y_3 \rightarrow \max$$

$$(2) \begin{cases} 4y_1 + 7y_2 + 2y_3 \leq 3 \\ -6y_1 + 3y_3 \geq 2 \\ 5y_1 + y_2 - 5y_3 = -5 \\ -5y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

$$(3) y_1 \leq 0, y_2 \text{ tùy ý}, y_3 \geq 0.$$

b) Bài toán đối ngẫu là

$$(1) g(y) = 28y_1 + 10y_2 + 15y_3 \rightarrow \min$$

$$(2) \begin{cases} 7y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 2 \\ 4y_1 - y_2 + 3y_3 \geq 1 \\ 2y_1 + 3y_2 - y_3 \geq -8 \end{cases}$$

$$(3) y_1 \geq 0, y_3 \leq 0.$$

3.3 Cặp ràng buộc đối ngẫu

Trong một cặp ràng buộc đối ngẫu (P) và (D) như trong định nghĩa thì ta có n cặp ràng buộc đối ngẫu như sau:

Trường hợp 1. $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$

$$x_j \geq 0 \Leftrightarrow a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_m \geq c_j, j = 1, 2, \dots, n$$

Trường hợp 2. $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min$

$$x_j \geq 0 \Leftrightarrow a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_m \leq c_j, j = 1, 2, \dots, n$$

Ví dụ. Tìm bài toán đối ngẫu và chỉ ra các cặp ràng buộc đối ngẫu của các bài toán QHTT sau:

a)

$$(1) f(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$$

$$(2) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 \leq -3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 6 \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 \leq 8 \end{cases}$$

$$(3) x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

b)

$$(1) f(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \rightarrow \max$$

$$(2) \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 \leq 9 \\ 10x_1 - 11x_2 + 12x_3 - 13x_4 = 14 \\ -15x_1 + 16x_2 - 17x_3 + 18x_4 \geq -19 \end{cases}$$

$$(3) x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Giải

a) Bài toán đối ngẫu

$$(1) g(y) = 2y_1 - 3y_2 + 6y_3 + 8y_4 \rightarrow \max$$

$$(2) \begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 + 3y_4 \leq 1 \\ 3y_1 - y_2 + y_3 + 7y_4 \leq 2 \\ y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 7y_4 \geq -3 \end{cases}$$

$$(3) y_2, y_4 \leq 0, y_3 \geq 0.$$

Hệ ràng buộc chính của bài toán (P) có 3 bất phương trình và bài toán (P) có 3 điều kiện về dấu của ẩn số nên cặp bài toán đối ngẫu (P) và (D) có 6 cặp ràng buộc đối ngẫu

$$x_1 - x_2 - 4x_3 \leq -3 \leftrightarrow y_2 \leq 0$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 6 \leftrightarrow y_3 \geq 0$$

$$3x_1 + 5x_2 - 7x_3 \leq 8 \leftrightarrow y_4 \leq 0$$

$$x_1 \geq 0 \leftrightarrow 2y_1 + y_2 + y_3 + 3y_4 \leq 1$$

$$x_2 \geq 0 \leftrightarrow 3y_1 - y_2 + y_3 + 7y_4 \leq 2$$

$$x_3 \geq 0 \leftrightarrow y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 7y_4 \geq -3$$

b) Bài toán đối ngẫu

$$(1) g(y) = 9y_1 + 14y_2 - 19y_3 \rightarrow \min$$

$$(2) \begin{cases} 5y_1 + 10y_2 - 15y_3 \geq 1 \\ 6y_1 - 11y_2 + 16y_3 \geq -2 \\ 7y_1 + 12y_2 - 17y_3 \geq 3 \\ 8y_1 - 13y_2 + 18y_3 = -4 \end{cases}$$

$$(3) y_1 \geq 0, y_2 \text{ tùy ý}, y_3 \leq 0.$$

Hệ ràng buộc chính của bài toán (P) có hai bất phương trình và bài toán (P) có ba điều kiện về dấu của ẩn số nên cặp bài toán đối ngẫu (P) và (D) có 5 cặp ràng buộc đối ngẫu sau:

$$5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 \leftrightarrow y_1 \geq 0$$

$$-15x_1 + 16x_2 - 17x_3 + 18x_4 \geq -19 \leftrightarrow y_3 \leq 0$$

$$x_1 \geq 0 \leftrightarrow 5y_1 + 10y_2 - 15y_3 \geq 1$$

$$x_2 \geq 0 \leftrightarrow 6y_1 - 11y_2 + 16y_3 \geq -2$$

$$x_3 \geq 0 \leftrightarrow 7y_1 + 12y_2 - 17y_3 \geq 3$$

3.4 Định lý đối ngẫu

Định lý độ lệch bù yếu. Điều kiện cần và đủ để phương án x^0 của bài toán (P) và phương án y^0 của bài toán (D) đều là phương án tối ưu là trong các cặp ràng buộc đối ngẫu của bài toán đó: Nếu một ràng buộc thỏa mãn phương án với dấu bất đẳng thức thực sự thì ràng buộc còn lại phải thỏa mãn phương án với dấu bằng.

Ứng dụng. Nhờ định lý độ lệch bù yếu, khi ta biết được một phương án tối ưu của một trong hai bài toán của cặp bài toán đối ngẫu thì ta có thể tìm được tập phương án tối ưu của bài toán còn lại. Ứng dụng này thường được sử dụng trong việc giải quyết các vấn đề của bài toán QHTT.

Ví dụ 1. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính sau

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \rightarrow \max \\
 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &\leq 20 \\
 x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 18 \\
 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &\geq 16 \\
 x_j &\geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4)
 \end{aligned}$$

a. Giải bài toán trên

b. Hãy lập bài toán đối ngẫu của bài toán trên và giải bài toán đối ngẫu đó.

Giải

a. Đưa bài toán về dạng chuẩn:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 - Mx_7 - Mx_8 \rightarrow \max \\
 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 20 \\
 x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_7 &= 18 \\
 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_6 + x_8 &= 16 \\
 x_j &\geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)
 \end{aligned}$$

Giải bài toán mở rộng bằng phương pháp đơn hình

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			1	2	3	3	0	0
0	x_5	20	2	1	1	2	1	0
-M	x_7	18	1	2	(3)	4	0	0
-M	x_8	16	2	1	2	1	0	-1
			-1	-2	-3	-3	0	0
			-3	-3	-5*	-5	0	1
0	x_5	14	5/3	1/3	0	2/3	1	0
3	x_3	6	1/3	2/3	1	4/3	0	0
-M	x_8	4	(4/3)	-1/3	0	-5/3	0	-1
			0	0	0	1	0	0
			-4/3*	1/3	0	5/3	0	1
0	x_5	9	0	3/4	0	11/4	1	5/4
3	x_3	5	0	3/4	1	7/4	0	1/4
1	x_1	3	1	-1/4	0	-5/4	0	-3/4
		18	0	0	0	1	0	0

PATU: $x = (3, 0, 5, 0)$, $f(x) = 18$.

b. Bài toán đối ngẫu

$$\begin{aligned}
 g(y) &= 20y_1 + 18y_2 + 16y_3 \rightarrow \min \\
 2y_1 + y_2 + 2y_3 &\geq 1 \\
 y_1 + 2y_2 + y_3 &\geq 2 \\
 y_1 + 3y_2 + 2y_3 &\geq 3 \\
 2y_1 + 4y_2 + y_3 &\geq 3 \\
 y_1 &\geq 0, y_3 \leq 0.
 \end{aligned}$$

Theo định lý độ lệch bù yếu, ta có hệ phương trình tối ưu sau

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 = 1 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 = 3 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được PATU: $y = (0, 1, 0)$ và $g(y) = 18$.

Ví dụ 2. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính sau

$$f(x) = 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 4$$

$$-x_1 + x_4 \leq 10$$

$$2x_2 + x_3 - 2x_4 = 12$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

a. Giải bài toán trên

b. Lập bài toán đối ngẫu của bài toán trên và giải bài toán đối ngẫu đó.

Giải

a. Đưa bài toán về dạng chuẩn

$$f(x) = 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 + Mx_6 + Mx_7 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_6 = 4$$

$$-x_1 + x_4 + x_5 = 10$$

$$2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_7 = 12$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$$

Giải bài toán mở rộng bằng phương pháp đơn hình

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			6	3	2	-3	0
M	x_6	4	1	(1)	1	-2	0
0	x_5	10	-1	0	0	1	1
M	x_7	12	0	2	1	-2	0
			-6	-3	-2	3	0
			1	3*	2	-4	0
3	x_2	4	1	1	1	-2	0
0	x_5	10	-1	0	0	1	1
M	x_7	4	-2	0	-1	(2)	0
			-3	0	1	-3	0
			-2	0	-1	2*	0
3	x_2	8	-1	1	0	0	0
0	x_5	8	0	0	1/2	0	1
-3	x_4	2	-1	0	-1/2	1	0
		18	-6	0	-1/2	0	0

PATU: $x = (0, 8, 0, 2)$, $f(x) = 18$.

b. Bài toán đối ngẫu

$$g(y) = 4y_1 + 10y_2 + 12y_3 \rightarrow \max$$

$$y_1 - y_2 \leq 6$$

$$y_1 + 2y_3 \leq 3$$

$$y_1 + y_3 \leq 2$$

$$-2y_1 + y_2 - 2y_3 \leq -3$$

$$y_2 \leq 0.$$

Theo định lý độ lệch bù yếu, ta có hệ phương trình tối ưu sau:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_3 = 3 \\ y_2 = 0 \\ -2y_1 + y_2 - 2y_3 = -3 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được PATU: $y = (0, 0, 3/2)$ và $g(y) = 18$.

Ví dụ 3 (CHLH 2009). Cho bài toán quy hoạch tuyến tính sau

$$x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 + 5x_5 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 30$$

$$x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 23$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 \geq -10$$

$$x_j \geq 0; j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

a. Hãy giải bài toán trên bằng phương pháp đơn hình.

b. Hãy lập bài toán đối ngẫu của bài toán trên và tìm một phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu đó.

Giải

a. Thêm vào bài toán ẩn phụ x_6 rồi đổi dấu ràng buộc chính thứ ba, ta được bài toán phụ sau:

$$x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 + 5x_5 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 30$$

$$x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 23$$

$$-3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - 4x_5 + x_6 = 10$$

$$x_j \geq 0; j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Ma trận điều kiện

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Thêm vào bài toán hai ẩn giả x_7, x_8 ta được bài toán mở rộng sau

$$x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 + 5x_5 - Mx_7 - Mx_8 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_7 = 30$$

$$x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_8 = 23$$

$$-3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - 4x_5 + x_6 = 10$$

$$x_j \geq 0; j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.$$

Giải bài toán mở rộng bằng phương pháp đơn hình

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	λ_i
			1	-3	-4	1	5	0	
-M	x_7	30	2	1	-3	(2)	0	0	15*
-M	x_8	23	0	1	-1	1	-1	0	23
0	x_6	10	-3	2	-1	-1	-4	1	
		0	-1	3	4	-1	-5	0	
		-53	-2	-2	4	-3*	1	0	
1	x_4	15	1	1/2	-3/2	1	0	0	
-M	x_8	8	-1	1/2	(1/2)	0	-1	0	
0	x_6	25	-2	5/2	-5/2	0	-4	1	
		15	0	7/2	5/2*	0	-5	0	
		-8	1	-1/2	-1/2	0	1	0	
1	x_4	39	-2	2	0	1	-3	0	
-4	x_3	16	-2	1	1	0	-2	0	
0	x_6	65	-7	5	0	0	-9	1	
		-25	5	1	0	0	0	0	

Trong bảng đơn hình thứ ba ta thấy hệ số ước lượng của các ẩn đều không âm nên bài toán mở rộng có nghiệm là:

$$x^0 = (0, 0, 16, 39, 0, 65, 0, 0); f_0 = -25.$$

Ta thấy trong PATU của bài toán mở rộng các ẩn giả đều nhận giá trị 0 nên bài toán đã cho giải được và có nghiệm như sau:

$$x^0 = (0, 0, 16, 39, 0, 65, 0, 0); f_0 = -25$$

b) Bài toán đối ngẫu với bài toán đã cho là:

$$30y_1 + 23y_2 - 10y_3 \rightarrow \min$$

$$2y_1 + 3y_3 \geq 1$$

$$y_1 + y_2 - 2y_3 \geq -3$$

$$-3y_1 - y_2 + y_3 \geq -4$$

$$2y_1 + y_2 + y_3 \geq 1$$

$$-y_2 + 4y_3 \geq 5$$

$$y_3 \leq 0$$

Do bài toán đã cho có PATU là $x^0 = (0, 0, 16, 39, 0, 65, 0, 0)$ nên ta có hệ phương trình tối ưu sau:

$$\begin{cases} y_3 = 0 \\ -3y_1 - y_2 + y_3 = -4 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = -5 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

Vậy bài toán đối ngẫu có một PATU là $y^0 = (3, -5, 0)$ và GTTU là: $g(y^0) = -25$.

BÀI TẬP

Phần I

1.1 Để nuôi một loại gia súc người ta sử dụng 3 loại thức ăn A_1, A_2, A_3 . Tỷ lệ (%) các chất dinh dưỡng D_1, D_2 có trong các loại thức ăn A_1, A_2, A_3 và giá 1kg mỗi loại như sau:

Chất dinh dưỡng	Loại thức ăn		
	A_1	A_2	A_3
D_1	30	20	20
D_2	20	20	30
Giá mua	8000 đ	6000 đ	4000 đ

Yêu cầu trong khẩu phần thức ăn của loại gia súc này là: chất dinh dưỡng D_1 phải có ít nhất là 70g và nhiều nhất là 100g, chất dinh dưỡng D_2 phải có ít nhất là 50g và nhiều nhất là 80g. Hãy lập mô hình toán học của bài toán xác định khối lượng thức ăn mỗi loại cần mua sao cho tổng chi phí thấp nhất và bảo đảm chất lượng theo yêu cầu.

1.2 Có hai loại thức ăn I và II chứa 3 loại vitamin A, B, C. Hàm lượng vitamin trong mỗi đơn vị thức ăn như sau:

Loại thức ăn	Vitamin		
	A	B	C
I	2	3	4
II	4	1	5

Giá một đơn vị thức ăn thứ I là 3đ, và II là 7đ. Một khẩu phần ăn phải có tối thiểu 5 đơn vị A, 4 đơn vị B và 8 đơn vị C. Tìm một cách ăn tốt nhất (ít tiền nhất và đủ dinh dưỡng). Hãy lập mô hình toán học của bài toán.

1.3 Một xí nghiệp có kế hoạch sản xuất ba loại sản phẩm A_1, A_2, A_3 từ 3 loại nguyên liệu N_1, N_2, N_3 có trữ lượng tương ứng là 50kg, 70kg và 100kg. Định mức tiêu hao nguyên liệu (kg/SP) và lợi nhuận (ngàn đồng/SP) khi sản xuất một sản phẩm được cho trong bảng sau

Nguyên liệu	Sản phẩm		
	A_1	A_2	A_3
N_1	0.2	0.1	0.1
N_2	0.1	0.2	0.1
N_3	0.1	0.3	0.0
Lợi nhuận	8000	6000	4000

Hãy lập mô hình toán học của bài toán lập kế hoạch sản xuất tối ưu biết rằng lượng sản phẩm A_3 chỉ có thể tiêu thụ được tối đa 400 sản phẩm.

1.4 Để nuôi một loại gia súc trong 24h cần có khối lượng tối thiểu các chất: Protit, Gluxit, khoáng tương ứng là: 90, 130, 20 gram. Tỷ lệ phần trăm theo khối lượng các chất trên có trong các loại thức ăn A, B, C và giá mua 1kg thức ăn mỗi loại như sau:

Chất	Loại thức ăn
------	--------------

dinh dưỡng	A	B	C
Protit	10	20	30
Gluxit	30	40	20
Khoáng	2	1	3
Giá mua	3000 đ	4000 đ	5000 đ

Hãy lập mô hình toán học của bài toán xác định khối lượng thức ăn mỗi loại cần mua sao cho tổng chi phí thấp nhất và bảo đảm chất lượng theo yêu cầu.

2.5 Có hai loại sản phẩm A, B được gia công trên 3 máy I, II, III. Thời gian gia công mỗi loại sản phẩm trên mỗi máy cho bởi bảng:

Loại SP	Máy		
	I	II	III
A	4	3	2
B	2	1	4

Thời gian cho phép của mỗi máy I, II, III lần lượt là 100, 300, 50 giờ. Một đơn vị sản phẩm A lãi 6000 đ, B lãi 4000 đ.

Vậy cần phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm mỗi loại để lãi tối đa. Hãy lập mô hình toán học của bài toán.

1.6 Trong một chu kỳ sản xuất, nhà máy sử dụng hai loại vật liệu V_1, V_2 để sản xuất 3 loại sản phẩm S_1, S_2, S_3 . Lượng vật liệu V_i dùng để sản xuất một đơn vị sản phẩm S_j và giá bán một đơn vị sản phẩm S_j cho bởi bảng sau:

VL	SP		
	S_1	S_2	S_3
V_1	4	2	5
V_2	2	6	3
Giá bán	12000 đ	8000 đ	14000 đ

Biết rằng số đơn vị vật liệu V_1, V_2 nhà máy có lần lượt là 10000 và 14000. Yêu cầu lập kế hoạch sản xuất của nhà máy, xác định số lượng sản phẩm mỗi loại cần sản xuất sao cho tổng thu nhập lớn nhất.

1.7 Giả sử yêu cầu tối thiểu mỗi ngày về các chất dinh dưỡng đạm, đường, béo cho một loại gia súc tương ứng là 50g, 80g và 20g. Cho biết hàm lượng các chất dinh dưỡng trên có trong 1g thức ăn A, B, C và giá mua 1 kg thức ăn mỗi loại trong bảng sau:

Chất Dinh dưỡng	Loại thức ăn		
	A	B	C
Đạm	0.1g	0.2g	0.2g
Đường	0.3g	0.1g	0.1g
Béo	0.05g	0.02g	0.01g
Giá mua	8000 đ	6000 đ	4000 đ

Hãy lập mô hình toán học của bài toán xác định khối lượng thức ăn mỗi loại phải mua để tổng số tiền chi cho mua thức ăn ít nhất nhưng đáp ứng được nhu cầu dinh dưỡng mỗi ngày.

1.8 Một xí nghiệp có kế hoạch sản xuất ba loại sản phẩm A, B, C từ 2 loại nguyên liệu N_1, N_2 có trữ lượng tương ứng là 50kg, 70kg. Định mức tiêu hao nguyên liệu (kg/SP) và lợi nhuận (ngàn đồng/SP) khi sản xuất một sản phẩm được cho trong bảng sau

Nguyên	Sản phẩm
--------	----------

liệu	A	B	C
N ₁	0.2	0.1	0.1
N ₂	0.1	0.1	0.2
Lợi nhuận	5000	2000	6000

Hãy lập mô hình toán học của bài toán lập kế hoạch sản xuất tối ưu biết rằng lượng sản phẩm B chỉ có thể tiêu thụ được tối đa 300 sản phẩm.

Phần II

2.1 Cho bài toán quy hoạch tuyến tính sau

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 \rightarrow \min \\
 x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 4 \\
 -x_1 + x_4 &\leq 10 \\
 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 12 \\
 x_j &\geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4)
 \end{aligned}$$

a. Giải bài toán trên

b. Lập bài toán đối ngẫu của bài toán trên và giải bài toán đối ngẫu đó.

2.2 Cho bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + x_4 \rightarrow \min \\
 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 6x_4 &\leq 20 \\
 x_1 + x_3 - 2x_4 &\leq 6 \\
 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 5x_4 &= 24 \\
 x_j &\geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4)
 \end{aligned}$$

a. Giải bài toán trên

b. Lập bài toán đối ngẫu của bài toán trên và giải bài toán đối ngẫu đó.

2.3 Cho bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 \rightarrow \min \\
 x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &\geq 6 \\
 -x_1 + x_3 &\leq 10 \\
 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 20 \\
 x_j &\geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4)
 \end{aligned}$$

a. Giải bài toán trên

b. Lập bài toán đối ngẫu của bài toán trên và giải bài toán đối ngẫu đó.

2.4 Cho bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 4x_5 \rightarrow \max \\
 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 + 2x_5 &= 9 \\
 7x_1 - 3x_2 - 7x_4 + 5x_5 &= 14 \\
 4x_1 - 2x_2 - 4x_4 + 3x_5 &= 8 \\
 x_j &\geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5.
 \end{aligned}$$

a. Giải bài toán trên

b. Lập bài toán đối ngẫu của bài toán trên và hệ phương trình tối ưu của bài toán đối ngẫu đó.

2.5 Cho bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -3x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 5x_4 \rightarrow \min \\
 x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &\leq 18 \\
 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 12 \\
 x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &\geq 11
 \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4.$$

a. Giải bài toán trên

b. Lập bài toán đối ngẫu của bài toán trên và giải bài toán đối ngẫu đó.

2.6 Cho bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$f(x) = -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2$$

$$-x_2 - 7x_3 + 3x_4 \leq 3$$

$$-3x_3 + 2x_4 \leq 7$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4.$$

a. Giải bài toán trên

b. Lập bài toán đối ngẫu của bài toán trên và giải bài toán đối ngẫu đó.

2.7 Cho bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$f(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 20$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 18$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 16$$

$$x_j \geq 0 (j = 1, 2, 3, 4)$$

a. Giải bài toán trên

b. Hãy lập bài toán đối ngẫu của bài toán trên và giải bài toán đối ngẫu đó.

2.8 Cho bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$f(x) = 15x_1 + 8x_2 + 10x_3 \rightarrow \max$$

$$-3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 3$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 4$$

$$-4x_1 - 5x_2 + 2x_3 \geq 1$$

$$x_j \geq 0 (j = 1, 2, 3)$$

a. Giải bài toán trên

b. Hãy lập bài toán đối ngẫu của bài toán trên và giải bài toán đối ngẫu đó.

Hướng dẫn và Đáp số

Phần I

1.1 Gọi x_j , $j = 1, 2, 3$ lần lượt là số gam thức ăn A_1, A_2, A_3 cần phải mua. Khi đó mô hình toán học của bài toán là:

$$f(x) = 8x_1 + 6x_2 + 4x_3 \rightarrow \min$$

$$0.3x_1 + 0.2x_2 + 0.2x_3 \geq 70$$

$$0.3x_1 + 0.2x_2 + 0.2x_3 \leq 100$$

$$0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 \geq 50$$

$$0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 \leq 80$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

1.2 Gọi x_1, x_2 là lượng thức ăn I và II trong một khẩu phần. Khi đó mô hình toán học của bài toán là:

$$f(x) = 3x_1 + 7x_2 \rightarrow \min$$

$$2x_1 + 4x_2 \geq 5$$

$$3x_1 + x_2 \geq 4$$

$$4x_1 + 5x_2 \geq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

1.3 Gọi x_1, x_2, x_3 lần lượt là số sản phẩm A_1, A_2, A_3 cần sản xuất. Khi đó mô hình toán học của bài toán là:

$$f(x) = 8x_1 + 6x_2 + 4x_3 \rightarrow \max$$

$$0.2x_1 + 0.1x_2 + 0.1x_3 \leq 50$$

$$0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.1x_3 \leq 70$$

$$0.1x_1 + 0.3x_2 \leq 100$$

$$x_3 \leq 400$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

1.4 Gọi x_j , $j = 1, 2, 3$ lần lượt là số gam thức ăn A, B, C cần mua. Khi đó mô hình toán học của bài toán là:

$$f(x) = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \rightarrow \min$$

$$0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 \geq 90$$

$$0.3x_1 + 0.4x_2 + 0.2x_3 \geq 130$$

$$0.02x_1 + 0.01x_2 + 0.03x_3 \geq 20$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

1.5 Gọi x_1, x_2 là số đơn vị sản phẩm loại A và B cần sản xuất. Khi đó mô hình toán học của bài toán là:

$$f(x) = 6000x_1 + 4000x_2 \rightarrow \max$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 100$$

$$3x_1 + x_2 \leq 300$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 50$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

1.6 Gọi x_j ($j = 1, 2, 3$) là số đơn vị sản phẩm S_j cần sản xuất. Khi đó mô hình toán học của bài toán là:

$$f(x) = 12000x_1 + 8000x_2 + 14000x_3 \rightarrow \max$$

$$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 10000$$

$$2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 14000$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$$

1.7 Gọi x_j , $j = 1, 2, 3$ lần lượt là số gam thức ăn A, B, C cần mua. Khi đó mô hình toán học của bài toán là:

$$f(x) = 8x_1 + 6x_2 + 4x_3 \rightarrow \min$$

$$0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.2x_3 \geq 50$$

$$0.3x_1 + 0.1x_2 + 0.1x_3 \geq 80$$

$$0.05x_1 + 0.02x_2 + 0.01x_3 \geq 20$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

1.8 Gọi x_j , $j = 1, 2, 3$ lần lượt là số sản phẩm A, B, C cần sản xuất. Khi đó mô hình toán học của bài toán là:

$$f(x) = 5x_1 + 2x_2 + 6x_3 \rightarrow \max$$

$$0.2x_1 + 0.1x_2 + 0.1x_3 \leq 50$$

$$0.1x_1 + 0.1x_2 + 0.2x_3 \leq 70$$

$$x_2 \leq 300$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Phần II

- 2.1 a. PATU: $x = (0, 8, 0, 2)$, $f(x) = 18$.
b. PATU: $y = (0, 0, 3/2)$ và $g(y) = 18$.
- 2.2 a. PATU: $x = (18, 0, 0, 6)$, $f(x) = 42$.
b. PATU: $y = (0, -13, 5)$ và $g(y) = 42$.
- 2.3 a. PATU: $x = (0, 10, 0, 0)$, $f(x) = 30$.
b. PATU: $y = (0, 0, 3/2)$ và $g(y) = 30$.
- 2.4 a. PATU: $x = (2, 0, 3, 0, 0)$, $f(x) = -1$.
- 2.5 a. PATU: $x = (0, 4, 0, 1)$, $f(x) = -13$.
b. PATU: $y = (0, -2, 1)$ và $g(y) = -13$.

- 2.6 a. PATU: $x = (0, 0, 11, 20)$, $f(x) = 31$.
b. PATU: $y = (5, 0, 3)$ và $g(y) = 31$.
- 2.7 a. PATU: $x = (3, 0, 5, 0)$, $f(x) = 18$.
b. PATU: $y = (0, 1, 0)$ và $g(y) = 18$.
- 2.8 a. PATU: $x = (1/5, 0, 9/10)$, $f(x) = 12$.
b. PATU: $y = (7, 0, -9)$ và $g(y) = 12$.

Chương 1

BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

1.1 MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

Ví dụ 1. Một xí nghiệp cần sản xuất 3 loại bánh: bánh đậu xanh, bánh thập cẩm và bánh dẻo. Lượng nguyên liệu đường, đậu cho một bánh mỗi loại, lượng dự trữ nguyên liệu, tiền lãi cho một bánh mỗi loại được cho trong bảng sau:

Nguyên liệu	Bánh đậu xanh	Bánh thập cẩm	Bánh dẻo	Lượng dự trữ
Đường	0,04kg	0,06kg	0,05kg	500kg
Đậu	0,07kg	0kg	0,02kg	300kg
Lãi	3000	2000	2500	

Hãy lập mô hình bài toán tìm số lượng mỗi loại bánh cần sản xuất sao cho không bị động về nguyên liệu mà lãi đạt được cao nhất.

Giải

Gọi x_1, x_2, x_3 lần lượt là số bánh đậu xanh, bánh thập cẩm, bánh dẻo cần phải sản xuất.

Điều kiện: $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3$. Khi đó

1) Tiền lãi thu được là: $f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 2x_2 + 2,5x_3$ (ngàn).

2) Lượng đường được sử dụng là: $0,04x_1 + 0,06x_2 + 0,05x_3$ (kg)

Để không bị động về nguyên liệu thì: $0,04x_1 + 0,06x_2 + 0,05x_3 \leq 500$.

3) Lượng đậu được sử dụng là: $0,07x_1 + 0,02x_3$ (kg)

Để không bị động về nguyên liệu thì: $0,07x_1 + 0,02x_3 \leq 300$.

Vậy ta có mô hình bài toán

(1) $f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 2x_2 + 2,5x_3 \rightarrow \max$

(2) $0,04x_1 + 0,06x_2 + 0,05x_3 \leq 500$

$0,07x_1 + 0,02x_3 \leq 300$

(3) $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3$.

Ta nói đây là bài toán quy hoạch tuyến tính 3 ẩn tìm max của hàm mục tiêu.

Ví dụ 2. Giả sử yêu cầu tối thiểu mỗi ngày về các chất dinh dưỡng đạm, đường, khoáng cho một loại gia súc tương ứng là 90g, 130g, 10g. Cho biết hàm lượng các chất dinh dưỡng trên có trong 1g thức ăn A, B, C và giá mua 1kg thức ăn mỗi loại được cho trong bảng sau:

Chất dinh dưỡng	A	B	C
Đạm	0,1g	0,2g	0,3g
Đường	0,3g	0,4g	0,2g
Khoáng	0,02g	0,01g	0,03g
Giá mua	3000	4000	5000

Hãy lập mô hình toán học của bài toán xác định khối lượng thức ăn mỗi loại phải mua để tổng số tiền chi cho mua thức ăn ít nhất nhưng đáp ứng được nhu cầu dinh dưỡng mỗi ngày.

Giải

Gọi x_1, x_2, x_3 lần lượt là khối lượng (g) thức ăn A, B, C cần mua.

Điều kiện: $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3$. Khi đó

Tổng khối lượng các chất dinh dưỡng có trong thức ăn cần mua là

Đạm: $0,1x_1 + 0,2x_2 + 0,3x_3$ (g)

Đường: $0,3x_1 + 0,4x_2 + 0,2x_3$ (g)

Khoáng: $0,02x_1 + 0,01x_2 + 0,03x_3$ (g)

Để đáp ứng được nhu cầu dinh dưỡng tối thiểu mỗi ngày thì tổng khối lượng các chất dinh dưỡng có trong thức ăn cần mua không thể nhỏ hơn các nhu cầu tối thiểu mỗi ngày về các chất dinh dưỡng đó nên ta có các điều kiện:

$$0,1x_1 + 0,2x_2 + 0,3x_3 \geq 90$$

$$0,3x_1 + 0,4x_2 + 0,2x_3 \geq 130$$

$$0,02x_1 + 0,01x_2 + 0,03x_3 \geq 10$$

Tổng số tiền phải chi để mua số thức ăn trên là

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \text{ (đồng)}$$

Yêu cầu bài toán là số tiền chi cho mua thức ăn ít nhất nên ta có điều kiện

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \rightarrow \min$$

Vậy ta có mô hình bài toán

$$(1) f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \rightarrow \min$$

$$(2) 0,1x_1 + 0,2x_2 + 0,3x_3 \geq 90$$

$$0,3x_1 + 0,4x_2 + 0,2x_3 \geq 130$$

$$0,02x_1 + 0,01x_2 + 0,03x_3 \geq 10$$

$$(3) x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$$

Ví dụ 3. (CHLH 2009) Một cơ sở sản xuất đồ gỗ dự định sản xuất ba loại sản phẩm là bàn, ghế và tủ. Định mức sử dụng lao động, chi phí sản xuất và giá bán mỗi sản phẩm mỗi loại ước tính trong bảng sau:

Các yếu tố	Bàn	Ghế	Tủ
Lao động (ngày công)	2	1	3
Chi phí sản xuất (ngàn đồng)	100	40	250
Giá bán (ngàn đồng)	260	120	600

Hãy lập mô hình toán học của bài toán xác định số sản phẩm mỗi loại cần phải sản xuất sao cho không bị động trong sản xuất và tổng doanh thu đạt được cao nhất, biết rằng cơ sở có số lao động tương đương với 500 ngày công, số tiền dành cho chi phí sản xuất là 40 triệu đồng và số bàn, ghế phải theo tỉ lệ 1/6.

Giải

Gọi x_1, x_2, x_3 lần lượt là số bàn, ghế, tủ cần phải sản xuất. Ta có các điều kiện: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Tổng ngày công và chi phí dự định để sản xuất là:

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \text{ (ngày công)}$$

$$100x_1 + 40x_2 + 250x_3 \text{ (ngàn đồng)}$$

Để không bị động trong sản xuất ta có các điều kiện sau

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 500$$

$$100x_1 + 40x_2 + 250x_3 \leq 40000$$

Theo tỉ lệ giữa số bàn và số ghế ta có điều kiện sau

$$6x_1 = x_2$$

Tổng doanh thu theo dự kiến là

$$260x_1 + 120x_2 + 600x_3 \text{ (ngàn đồng)}$$

Để tổng doanh thu đạt được cao nhất ta có điều kiện

$$260x_1 + 120x_2 + 600x_3 \rightarrow \max$$

Như vậy, mô hình toán học của bài toán là

$$(1) \quad 260x_1 + 120x_2 + 600x_3 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 500$$

$$(2) \quad 100x_1 + 40x_2 + 250x_3 \leq 40000$$

$$6x_1 = x_2$$

$$(3) \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

1.2 PHÂN LOẠI DẠNG BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

1.2.1 Dạng tổng quát của bài toán quy hoạch tuyến tính

Bài toán QHTT dạng **tổng quát** với n ẩn là bài toán có dạng

$$(1) \quad f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max(\min)$$

$$(2) \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \begin{cases} \geq \\ \leq \\ = \end{cases} b_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$(3) \quad x_j \begin{cases} \geq 0 \\ \leq 0 \\ \text{tùy ý} \end{cases}, j = 1, 2, \dots, n$$

Trong đó

- (1) là hàm mục tiêu.
- (2) là hệ ràng buộc chính.
- (3) là ràng buộc dấu.
- (2) và (3) được gọi chung là hệ ràng buộc của bài toán.

Khi đó

- Mỗi vector $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ thỏa (2) và (3) được gọi là một **phương án** (PA) của bài toán.
- Mỗi phương án x thỏa (1), nghĩa là tại đó hàm mục tiêu đạt giá trị nhỏ nhất (lớn nhất) trên tập các phương án được gọi là một **phương án tối ưu** (PATU) của bài toán.
- Giải một bài toán QHTT là đi tìm **một phương án tối ưu** của nó hoặc chỉ ra rằng bài toán **vô nghiệm**, nghĩa là bài toán không có PATU.

1.2.2 Dạng chính tắc của bài toán QHTT

$$(1) f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max(\min)$$

$$(2) a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$(3) x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

Nhận xét. Bài toán QHTT **dạng chính tắc** là bài toán QHTT dạng tổng quát trong đó

- Các ràng buộc chính đều là phương trình.
- Các ẩn đều không âm.

Ví dụ. Bài toán sau có dạng chính tắc

$$(1) f(x) = 2x_1 - 4x_2 - x_3 + 6x_4 \rightarrow \min$$

$$(2) \begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_4 = 12 \\ 12x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -6 \end{cases}$$

$$(3) x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4$$

1.2.3 Dạng chuẩn của bài toán QHTT

Bài toán QHTT **dạng chuẩn** là bài toán QHTT dạng chính tắc

$$(1) f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max(\min)$$

$$(2) a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i, i = 1, 2, \dots, m$$

$$(3) x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

Trong đó

- Các hệ số tự do đều không âm.
- Trong ma trận hệ số tự do có đủ m vector cột đơn vị: e_1, e_2, \dots, e_m .

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Khi đó:

- Các ẩn ứng với các vector cột đơn vị được gọi là các **ẩn cơ bản**. Cụ thể ẩn ứng với vector cột đơn vị e_k là ẩn cơ bản thứ k .

- Một phương án mà các ẩn cơ bản đều bằng 0 được gọi là **phương án cơ bản**.
- Một phương án cơ bản có đủ m thành phần dương được gọi là **không suy biến**. Ngược lại một phương án cơ bản có ít hơn m thành phần dương được gọi là **suy biến**.

Ví dụ. Xét bài toán QHTT sau

$$(1) f(x) = 2x_1 - 4x_2 - x_3 + 6x_4 \rightarrow \min$$

$$(2) \begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 = 12 \\ 12x_1 + x_3 + x_6 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$$

$$(3) x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Ta thấy bài toán trên có dạng chính tắc, hơn nữa

Các hệ số tự do đều không âm

Ma trận hệ số ràng buộc A là

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 12 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Có chứa đầy đủ 3 vector cột đơn vị e_1 (cột 5), e_2 (cột 6), e_3 (cột 2).

Do đó bài toán có dạng chuẩn, trong đó

- Ẩn cơ bản thứ nhất là x_5
- Ẩn cơ bản thứ hai là x_6
- Ẩn cơ bản thứ ba là x_2

Nhận xét. Trong bài toán trên, khi cho ẩn cơ bản thứ k bằng hệ số tự do thứ k , còn các ẩn không cơ bản bằng 0, nghĩa là cho $x_2 = 15, x_6 = 3, x_2 = 6, x_1 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$ ta được một phương án cơ bản của bài toán $x = (0, 6, 0, 0, 12, 3)$.

Phương án này không suy biến vì có đủ 3 thành phần dương. Ta gọi đây là phương án cơ bản ban đầu của bài toán.

Chú ý. Tổng quát, trong bài toán QHTT dạng chuẩn bất kì, khi cho ẩn cơ bản thứ k bằng hệ số tự do thứ k ($k = 1, 2, \dots, m$), còn các ẩn không cơ bản bằng 0, ta được một phương án cơ bản của bài toán. Ta gọi đây là phương án cơ bản ban đầu của bài toán.

1.3 BIẾN ĐỔI DẠNG BÀI TOÁN QHTT

1.3.1 Dạng tổng quát về dạng chính tắc

Ta có thể biến đổi bài toán **dạng tổng quát** về **dạng chính tắc** bằng các bước sau

Bước 1. Kiểm tra hệ ràng buộc chính

- 1) Nếu có ràng buộc chính dạng $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$ thì ta cộng vào vế trái ràng buộc đó ẩn phụ x_{n+k} , nghĩa là ta thay ràng buộc $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$ trong bài toán bằng ràng buộc $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_{n+k} = b_i$.

- 2) Nếu có ràng buộc chính dạng $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$ thì ta trừ vào về trái ràng buộc đó ẩn phụ x_{n+k} , nghĩa là ta thay ràng buộc $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$ trong bài toán bằng ràng buộc $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - x_{n+k} = b_i$.

Chú ý. Các ẩn phụ là các ẩn không âm và hệ số của các ẩn phụ đó trong hàm mục tiêu là 0.

Bước 2. Kiểm tra điều kiện dấu của ẩn số

- 1) Nếu có ẩn $x_j \leq 0$ thì ta thực hiện phép đổi ẩn số $x_j = -x'_j$ với $x'_j \geq 0$.
- 2) Nếu có ẩn x_j có dấu tùy ý thì ta thực hiện phép đổi ẩn số $x_j = x'_j - x''_j$ với $x'_j, x''_j \geq 0$.

Chú ý. Khi tìm được PATU của bài toán dạng chính tắc ta chỉ cần tính giá trị của các ẩn ban đầu và bỏ đi các ẩn phụ thì sẽ được PATU của bài toán dạng tổng quát đã cho.

Ví dụ. Biến đổi bài toán sau về dạng chính tắc

$$(1) f(x) = 2x_1 - 4x_2 - x_3 + 6x_4 \rightarrow \min$$

$$(2) \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 \leq 50 \\ 7x_1 + x_3 \geq 30 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -25 \end{cases}$$

$$(3) x_1 \geq 0, x_2 \leq 0$$

Giải

Thêm vào bài toán ẩn phụ $x_4 \geq 0$ để biến bất phương trình $4x_1 - 6x_2 + 5x_3 \leq 50$ về phương trình $4x_1 - 6x_2 + 5x_3 + x_4 = 50$.

Thêm vào bài toán ẩn phụ $x_5 \geq 0$ để biến bất phương trình $7x_1 + x_3 \geq 30$ về phương trình $7x_1 + x_3 - x_5 = 30$.

Đổi biến $x_2 = -x'_2$ với $x'_2 \geq 0$.

Đổi biến $x_3 = x'_3 - x''_3$ với $x'_3, x''_3 \geq 0$.

Ta đưa bài toán về dạng chính tắc

$$(1) f(x) = 3x_1 - 2x'_2 + 2,5(x'_3 - x''_3) \rightarrow \max$$

$$(2) \begin{cases} 4x_1 + 6x'_2 + 5(x'_3 - x''_3) + x_4 = 50 \\ 7x_1 + (x'_3 - x''_3) - x_5 = 30 \\ 2x_1 - 3x'_2 - 5(x'_3 - x''_3) = -25 \end{cases}$$

$$(3) x_1 \geq 0, x'_2 \geq 0, x'_3 \geq 0, x''_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

1.3.2 Dạng chính tắc về dạng chuẩn

Từ bài toán **dạng chính tắc** ta có thể xây dựng bài toán **dạng chuẩn** như sau

- 1) Khi gặp hệ số tự do $b_i < 0$ ta đổi dấu hai vế của ràng buộc thứ i.

- 2) Khi ma trận hệ số ràng buộc A không chứa cột đơn vị thứ k là e_k , ta đưa vào ẩn giả $x_{n+k} \geq 0$ và cộng thêm ẩn giả x_{n+k} vào vế trái phương trình ràng buộc thứ k để được phương trình ràng buộc mới: $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n + x_{n+k} = b_k$.
- 3) Hàm mục tiêu mở rộng $f(x)$ được xây dựng từ hàm mục tiêu ban đầu như sau
- Đối với bài toán min: $f(x) = f(x) + M(\sum an \text{ gia})$.
 - Đối với bài toán max: $f(x) = f(x) - M(\sum an \text{ gia})$.

Trong đó M là đại lượng rất lớn, lớn hơn bất kỳ số nào cho trước.

Ví dụ 1. Biến đổi bài toán QHTT sau về dạng chuẩn

$$(1) f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \rightarrow \min$$

$$(2) \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 50 \\ 7x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -25 \end{cases}$$

$$(3) x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4$$

Giải

Bài toán trên đã có dạng chính tắc, trong đó vế phải của phương trình ràng buộc thứ ba là $-25 < 0$. Đổi dấu hai vế của phương trình này ta được $-2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 25$

Và (2) trở thành

$$\begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 50 \\ 7x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 25 \end{cases}$$

Ma trận hệ số của ràng buộc là

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vì A còn thiếu 2 vector cột đơn vị là e_1 và e_3 nên bài toán chưa có dạng chuẩn.

Thêm vào bài toán hai ẩn giả $x_5, x_6 \geq 0$ và xây dựng bài toán mở rộng có dạng chuẩn như sau

$$(1) f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + Mx_5 + Mx_6 \rightarrow \min$$

$$(2) \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 + x_5 = 50 \\ 7x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_6 = 25 \end{cases}$$

$$(3) x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6$$

Ví dụ 2. Biến đổi bài toán QHTT sau về dạng chuẩn

$$(1) f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$(2) \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 50 \\ 7x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -25 \end{cases}$$

$$(3) x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4$$

Ta xây dựng bài toán mở rộng dạng chuẩn như sau

$$(1) f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 - Mx_5 - Mx_6 \rightarrow \max$$

$$(2) \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 + x_5 = 50 \\ 7x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_6 = 25 \end{cases}$$

$$(3) x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6$$

Chú ý.

- Ấn phụ: Tổng quát chuyển thành chính tắc
- Ấn giả: Chính tắc chuyển thành chuẩn

Ví dụ 3. Biến đổi bài toán QHTT sau về dạng chuẩn

$$(1) f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \rightarrow \min$$

$$(2) \begin{cases} -9x_1 + 15x_3 \leq 50 \\ -6x_3 + 2x_4 = -120 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 \geq -45 \end{cases}$$

$$(3) x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4$$

Giải

Thêm vào bài toán 2 ấn phụ $x_5, x_6 \geq 0$ ta được bài toán có dạng chính tắc như sau

$$(1) f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \rightarrow \min$$

$$(2) \begin{cases} -9x_1 + 15x_3 + x_5 = 50 \\ -6x_3 + 2x_4 = -120 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 - x_6 = -45 \end{cases}$$

$$(3) x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6.$$

Bài toán trên chưa có dạng chuẩn.

Ta thấy các vế phải của hai phương trình ràng buộc thứ 2 và 3 đều âm nên bằng cách đổi dấu hai vế của các phương trình này ta được

$$(2) \begin{cases} -9x_1 + 15x_3 + x_5 = 50 \\ 6x_3 - 2x_4 = 120 \\ -x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_6 = 45 \end{cases}$$

Ma trận hệ số ràng buộc là

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -9 & 15 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$$

Vì A còn thiếu một vector cột là e_2 nên bài toán chưa có dạng chuẩn.

Thêm vào ràng buộc chính thứ hai ẩn giả $x_7 \geq 0$ ta được bài toán dạng chuẩn như sau

$$(1) f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + Mx_7 \rightarrow \min$$

$$(2) \begin{cases} -9x_1 + 15x_3 + x_5 = 50 \\ 6x_3 - 2x_4 + x_7 = 120 \\ -x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_6 = 45 \end{cases}$$

$$(3) x_j \geq 0, j = 1, \dots, 7.$$

Chú ý. Quan hệ giữa bài toán xuất phát và bài toán mở rộng

Mối quan hệ giữa bài toán xuất phát (A) và bài toán mở rộng (B) như sau

- B vô nghiệm suy ra A vô nghiệm
- B có nghiệm có hai trường hợp:
 - 1) Nếu mọi ẩn giả của PATU bằng 0 thì bỏ ẩn giả ta được PATU của A
 - 2) Nếu có ít nhất một ẩn giả > 0 suy ra A không có PATU

Chương 2

PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH

2.1 PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH GIẢI BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH DẠNG CHUẨN

2.1.1 Thuật toán giải bài toán max

Bước lập thứ nhất (bảng đơn hình thứ nhất)

1) *Lập bảng đơn hình xuất phát*

Vẽ bảng đơn hình và ghi vào đó các thành phần sau của bài toán dạng chuẩn

- Dòng 1. Ghi các ẩn của bài toán (kể cả ẩn phụ)
- Dòng 2. Ghi các hệ số của các ẩn trong hàm mục tiêu
- Cột 2. Ghi các ẩn cơ bản của bài toán theo thứ tự từ ẩn cơ bản thứ nhất đến ẩn cơ bản cuối cùng, ta gọi cột này là **cột ẩn cơ bản**.
- Cột 1: Ghi tương ứng các hệ số của các ẩn cơ bản trong hàm mục tiêu, ta gọi cột này là **cột hệ số cơ bản**.
- Cột 3. Ghi các số hạng tự do của hệ ràng buộc chính theo thứ tự từ trên xuống dưới, ta gọi cột này là **cột phương án**.
- Cột 4. Ghi ma trận điều kiện A của bài toán.

Tính **hệ số ước lượng** Δ_j của các ẩn $x_j (j = 1, 2, \dots, n)$ và ghi tương ứng vào dòng dưới cột 4, với Δ_j được tính theo công thức sau:

$$\Delta_j = (\text{cot } 1) \times (A_j) - (hsx_j) \quad (hsx_j: \text{hệ số của ẩn } x_j \text{ trong hàm mục tiêu}).$$

Chú ý. Nếu x_j là ẩn cơ bản thì $\Delta_j = 0$.

Tính trị số $f_0 = (\text{cot } 1) \times (\text{cot } 3)$ và ghi dưới cột 3.

2) *Xác định phương án cơ bản xuất phát*

Với bảng đơn hình vừa lập được thì phương án cơ bản xuất phát x^0 của bài toán được xác định như sau: Cho các ẩn ở cột 2 nhận giá trị tương ứng ở cột 3, các ẩn còn lại nhận giá trị 0. Trị số của hàm mục tiêu tại phương án cơ bản xuất phát x^0 là $f(x^0) = f_0$.

3) **Đánh giá tính tối ưu của phương án cơ bản xuất phát**

- **Dấu hiệu tối ưu.** Nếu hệ số ước lượng của các ẩn đều không âm, $\Delta_j \geq 0, \forall j$ thì phương án cơ bản xuất phát x^0 là phương án tối ưu của bài toán. Thuật toán kết thúc với kết luận: Bài toán có PATU là x^0 và GTTU là $f(x^0)$.
- **Dấu hiệu của bài toán không có PATU.** Nếu có ẩn không cơ bản x_k có hệ số ước lượng âm và cột điều kiện A_k của ẩn đó có các thành phần đều không dương, $\Delta_k < 0$ và $a_{ik} \leq 0; \forall i$ thì bài toán không có phương án tối ưu. Thuật toán kết thúc với kết luận: Bài toán không có PATU.

Nếu không xảy ra cả hai trường hợp trên thì thuật toán tiếp tục trong bước lập thứ hai

Bước lập thứ hai (Bảng đơn hình thứ hai)

1) **Tìm ẩn đưa vào**

Trong tất cả các $\Delta_j < 0$ ta chọn $\Delta_v < 0$ nhỏ nhất (ta đánh dấu * cho $\Delta_v < 0$ nhỏ nhất trong bảng). Khi đó, x_v là ẩn mà ta sẽ đưa vào hệ ẩn cơ bản. Cột A_v được gọi là **cột chủ yếu**.

2) **Tìm ẩn đưa ra**

Thực hiện phép chia lần lượt các số của cột phương án cho các số dương của cột chủ yếu và ghi các thương số λ_i đó vào cột cuối cùng.

Xác định $\lambda_r = \min\{\lambda_i\}$ (Ta đánh dấu * cho λ_r nhỏ nhất trong bảng). Khi đó x_r là ẩn mà ta đưa ra khỏi hệ ẩn cơ bản. Dòng có chứa x_r được gọi là **dòng chủ yếu**. Số dương nằm trên dòng chủ yếu và cột chủ yếu được gọi là **hệ số chủ yếu**.

Chú ý. Nếu cột chủ yếu chỉ có một số dương thì số dương đó là hệ số chủ yếu, dòng có số dương đó là dòng chủ yếu, ẩn nằm trên dòng chủ yếu là ẩn được đưa ra.

3) **Lập bảng đơn hình thứ hai**

- Cột 2: Thay ẩn đưa ra bằng ẩn đưa vào, các ẩn cơ bản còn lại giữ nguyên. Dòng có ẩn đưa vào gọi là **dòng chuẩn**.
- Cột 1: Thay hệ số của ẩn đưa ra bằng hệ số của ẩn đưa vào, các hệ số của các ẩn cơ bản còn lại giữ nguyên.

Các thành phần còn lại được xác định theo dòng như sau

- Dòng chuẩn = Dòng chủ yếu chia cho hệ số chủ yếu.
- Dòng thứ i = Dòng thứ i (cũ) – a_{iv} .dòng chuẩn. (a_{iv} : số nằm trên giao của dòng i và cột chủ yếu).

Các hệ số ước lượng và trị số của hàm mục tiêu trong bảng thứ hai được tính và ghi như bảng thứ nhất.

4) **Xác định và đánh giá phương án cơ bản thứ hai** (như bước lập thứ nhất)

2.1.2 Thuật toán giải bài toán min

Giải tương tự bài toán max với chú ý sau

- Điều kiện tối ưu: $\Delta_j \leq 0, \forall j$
- Điều kiện không có PATU: $\exists \Delta_k > 0$ và $a_{ik} \leq 0, \forall i$
- Ấn được chọn đưa vào: Ấn ứng với $\Delta_k > 0$ lớn nhất.

Ví dụ 1. Giải bài toán QHTT sau

$$(1) f(x) = 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 - x_4 - 6x_5 \rightarrow \max$$

$$(2) \begin{cases} x_1 + 6x_2 - 2x_4 - 9x_5 = 32 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 30 \\ 3x_2 + x_5 + x_6 = 36 \end{cases}$$

$$(3) x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6.$$

Giải

Bài toán trên có dạng chính tắc với các vế phải của các phương trình ràng buộc trong (2) đều không âm.

Ma trận hệ số của ràng buộc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & -2 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vì A chứa đủ 3 cột đơn vị e_1 (cột 1), e_2 (cột 3), e_3 (cột 6) nên bài toán có dạng chuẩn trong đó:

- Ấn cơ bản thứ nhất: x_1
- Ấn cơ bản thứ hai: x_3
- Ấn cơ bản thứ ba: x_6

Ta giải bài toán bằng phương pháp đơn hình

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	λ_i
			2	-5	4	-1	-6	0	
2	x_1	32	1	6	0	-2	-9	0	
4	x_3	30	0	2	1	1	(3)	0	
0	x_6	36	0	3	0	0	1	1	
		184	0	-25	0	1	0	0	

$$f_0 = 2.32 + 4.30 = 184.$$

$$\Delta_1 = \Delta_3 = \Delta_6 = 0$$

$$\Delta_2 = 2.6 + 4.2 + 0.3 + 5 = 25$$

$$\Delta_4 = 2.(-2) + 4.1 + 0.0 + 1 = 1$$

$$\Delta_5 = 2.(-9) + 4.3 + 0.1 + 6 = 0$$

Trong bảng trên ta thấy $\Delta_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, 6$ nên bài toán có PATU là

$$x^0 = (32, 0, 30, 0, 0, 36) \text{ và } f_0 = 184.$$

Ví dụ 2. Giải bài toán QHTT sau

$$(1) f(x) = 6x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 - x_6 \rightarrow \min$$

$$(2) \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 15 \\ 2x_1 - x_3 + 2x_6 = -9 \\ 4x_1 + 2x_4 + x_5 - 3x_6 = 2 \end{cases}$$

$$(3) x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6.$$

Giải

Bài toán trên có dạng chính tắc với vế phải của phương trình ràng buộc chính thứ hai là -9 .

Đổi dấu hai vế của phương trình này, ta đưa về bài toán sau

$$(1) f(x) = 6x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 - 7x_6 \rightarrow \min$$

$$(2) \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 15 \\ -2x_1 + x_3 - 2x_6 = 9 \\ 4x_1 + 2x_4 + x_5 - 3x_6 = 2 \end{cases}$$

$$(3) x_j \geq 0, j = 1, \dots, 6.$$

Ma trận hệ số của ràng buộc

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Vì A chứa đủ 3 cột đơn vị e_1 (cột 2), e_2 (cột 3), e_3 (cột 5) nên bài toán có dạng chuẩn trong đó:

- Ẩn cơ bản thứ nhất: x_2
- Ẩn cơ bản thứ hai: x_3
- Ẩn cơ bản thứ ba: x_5

Ta giải bài toán bằng phương pháp đơn hình

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	λ_i
			6	1	1	3	1	-7	
1	x_2	15	-1	1	0	-1	0	(1)	15
1	x_3	9	-2	0	1	0	0	-2	
1	x_5	2	4	0	0	2	1	-3	
		26	-5	0	0	-2	0	3*	
-7	x_6	15	-1	1	0	-1	0	1	
1	x_3	39	-4	2	1	-2	0	0	
1	x_5	47	1	3	0	-1	1	0	
		-19	-5	0	0	-2	0	0	

Trong bảng 1 ta thấy tồn tại $\Delta_6 = 3 > 0$ và trên cột tương ứng có $a_{13} = 1 > 0$ ($a_{23} = -2$ và $a_{33} = -3$) nên ta chọn ẩn đưa ra là x_6 , ẩn đưa vào là x_2 , hệ số chủ yếu là $a_{13} = 1$. Sau đó tính các dòng ở bảng 2 bằng công thức sau

$$d_c = d_{cy}, d_2 = d_2 + 2d_c, d_3 = d_3 + 3d_c.$$

Trong bảng 2 ta thấy tồn tại $\Delta_4 = 1 > 0$ mà $a_{i4} \leq 0, \forall i = 1, 2, 3$ nên bài toán min đang xét vô nghiệm.

Ví dụ 3. Giải bài toán QHTT sau

$$(1) f(x) = -2x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 3x_5 \rightarrow \max$$

$$(2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 52 \\ 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 60 \\ 3x_2 + x_5 = 36 \end{cases}$$

$$(3) x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5.$$

Giải

Bài toán trên có dạng chính tắc với vế phải của phương trình ràng buộc trong (2) đều không âm.

Ma trận hệ số ràng buộc là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vì A chứa đủ 3 cột đơn vị e_1 (cột 1), e_2 (cột 4), e_3 (cột 5) nên bài toán có dạng chuẩn trong đó:

- Ẩn cơ bản thứ nhất: x_1
- Ẩn cơ bản thứ hai: x_4
- Ẩn cơ bản thứ ba: x_5

Ta giải bài toán bằng phương pháp đơn hình

			x_1 -2	x_2 6	x_3 4	x_4 -2	x_5 3	λ_i
-2	x_1	52	1	2	(4)	0	0	52/4*
-2	x_4	60	0	4	2	1	0	60/2
3	x_5	36	0	3	0	0	1	
		-116	0	-9	-16*	0	0	
4	x_3	13	1/4	1/2	1	0	0	13.2
-2	x_4	34	-1/2	(3)	0	1	0	34/3*
3	x_5	36	0	3	0	0	1	36/3
		92	4	-1*	0	0	0	
4	x_3	22/3	1/3	0	1	-1/6	0	
6	x_2	34/3	-1/6	1	0	1/3	0	
3	x_5	2	1/2	0	0	-1	1	
		310/3	23/6	0	0	1/3	0	

Trong bảng I ta thấy tồn tại các $\Delta_j < 0$: $\Delta_2 = -9, \Delta_3 = -16$ và trên mỗi cột tương ứng có hệ số dương. Ta chọn $\Delta_3 = -16$ âm nhỏ nhất và ẩn đưa vào là x_3 , khi đó trên cột tương ứng có các hệ số dương là $a_{13} = 4, a_{23} = 2$ nên ta lập các tỉ số $\lambda_1 = 52/4, \lambda_2 = 60/2$. Ta chọn $\lambda_1 = 52/4$ nhỏ nhất và ẩn đưa ra là x_1 , hệ số chủ yếu là $a_{13} = 4$. Sau đó biến đổi bảng I bằng các phép biến đổi sau:

$$d_c = d_{cy}/4, d_2 = d_2 - 2d_c, d_3 = d_3.$$

Biến đổi tương tự cho bảng II.

Trong bảng III ta thấy $\Delta_j \geq 0, \forall j = 1, 2, \dots, 5$ nên bài toán đang xét có PATU là

$$x^0 = (0, 34/3, 22/3, 0, 2) \text{ với } f(x^0) = 310/3.$$

2.2 PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH MỞ RỘNG GIẢI BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH DẠNG CHÍNH TẮC

Thuật toán đơn hình mở rộng giải bài toán QHTT dạng chính tắc tương tự như thuật toán đơn hình giải bài toán QHTT dạng chuẩn nhưng có một số lưu ý như sau

- 1) Do hàm mục tiêu mở rộng là $f(x) = f(x) + \sum (angia)$ đối với bài toán min và $f(x) = f(x) - \sum (angia)$ đối với bài toán max, nên trong bảng đơn hình ở cột hệ số có thể có các hệ số phụ thuộc M. Khi đó ở dòng cuối các hệ số sẽ có dạng $aM + b$, do đó người ta thường chia dòng cuối thành hai dòng nhỏ: Dòng trên ghi a và dòng dưới ghi b.
- 2) Vì M là một đại lượng dương rất lớn, nên khi so sánh các số hạng $aM + b$ và $cM + d$ ta có quy tắc sau

$$aM + b = cM + d \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

$$aM + b > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \forall b \end{cases}$$

$$aM + b > cM + d \Leftrightarrow \begin{cases} a > c \\ \forall b, d \\ a = c \\ b > d \end{cases}$$

- 3) Trong bảng đơn hình đầu tiên các ẩn giả đều có trong ẩn cơ bản. Mỗi khi một ẩn giả bị đưa ra khỏi hệ ẩn cơ bản thì không bao giờ ta đưa ẩn giả đó trở lại nữa, vì vậy trong bảng đơn hình ta có thể bỏ đi các cột ứng với các ẩn giả.

Ví dụ 1. Giải bài toán QHTT sau

$$f(x) = 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 4$$

$$-x_1 + x_4 \leq 10$$

$$2x_2 + x_3 - 2x_4 = 12$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

Giải

Đưa bài toán về dạng chuẩn:

$$f(x) = 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 + Mx_6 + Mx_7 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_6 = 4$$

$$-x_1 + x_4 + x_5 = 10$$

$$2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_7 = 12$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$$

Giải bài toán mở rộng bằng phương pháp đơn hình

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			6	3	2	-3	0
M	x_6	4	1	(1)	1	-2	0
0	x_5	10	-1	0	0	1	1
M	x_7	12	0	2	1	-2	0
			-6	-3	-2	3	0
			1	3*	2	-4	0
3	x_2	4	1	1	1	-2	0
0	x_5	10	-1	0	0	1	1
M	x_7	4	-2	0	-1	(2)	0
			-3	0	1	-3	0
			-2	0	-1	2*	0
3	x_2	8	-1	1	0	0	0
0	x_5	8	0	0	1/2	0	1
-3	x_4	2	-1	0	-1/2	1	0
		18	-6	0	-1/2	0	0

$$\text{PATU: } x = (0, 8, 0, 2), f(x) = 18.$$

Ví dụ 2. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$f(x) = -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2$$

$$-x_2 - 7x_3 + 3x_4 \leq 3$$

$$-3x_3 + 2x_4 \leq 7$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4.$$

Giải

Đưa bài toán về dạng chuẩn:

$$f(x) = -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2$$

$$-x_2 - 7x_3 + 3x_4 + x_5 = 3$$

$$-3x_3 + 2x_4 + x_6 = 7$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Giải bài toán mở rộng bằng phương pháp đơn hình

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			-2	-1	1	1	0	0
-2	x_1	2	1	1	(2)	-1	0	0
0	x_5	3	0	-1	-7	3	1	0
0	x_6	7	0	0	-3	2	0	1
			0	-1	-5*	1	0	0
1	x_3	1	1/2	1/2	1	-1/2	0	0
0	x_5	9	7/2	5/2	0	-1/2	1	0
0	x_6	8	3/2	3/2	0	(1/2)	0	1
			5/2	3/2	0	-3/2*	0	0
1	x_3	11	2	2	1	0	0	1
0	x_4	20	5	4	0	0	1	1
1	x_5	20	3	3	0	1	0	2
		31	7	6	0	0	0	3

PATU: $x = (0, 0, 11, 20)$, $f(x) = 31$.

Chương 3

BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU

3.1 Định nghĩa

Cho (P) là bài toán QHTT có dạng chính tắc như sau

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max(\min)$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n.$$

Từ bài toán (P) ta lập được bài toán QHTT (D) như sau và ta gọi bài toán (D) là bài toán đối ngẫu của bài toán (P)

$$f(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \rightarrow \min(\max)$$

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq (\leq) c_1$$

$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \geq (\leq) c_2$$

.....

$$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \geq (\leq) c_n$$

Chú ý. Bài toán (D) được lập từ bài toán (P) theo nguyên tắc sau

1. Số ẩn của bài toán (D) bằng số ràng buộc chính của bài toán (P) và số ràng buộc chính của bài toán (D) bằng số ẩn của bài toán (P).
2. Hệ số của ẩn y_i trong hàm mục tiêu của bài toán (D) là số hạng tự do b_i trong hệ ràng buộc chính của bài toán (P).
3. Các hệ số của các ẩn và hệ số tự do trong ràng buộc chính thứ j của bài toán (D) là các hệ số tương ứng của ẩn x_j trong hệ ràng buộc chính và hàm mục tiêu của bài toán (P).
4. Nếu (P) là bài toán max thì (D) là bài toán min và hệ ràng buộc chính của bài toán (D) là hệ bất phương trình với dấu \geq . Nếu (P) là bài toán min thì (D) là bài toán max và hệ ràng buộc chính của bài toán (D) là hệ bất phương trình với dấu \leq .
5. Các ẩn của bài toán (D) đều có dấu tùy ý.

3.2 Cách lập bài toán đối ngẫu

Bài toán đối ngẫu được lập trực tiếp theo quy tắc sau, gọi là quy tắc đối ngẫu

(P)	(D)
$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$	$f(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \rightarrow \min$
$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \begin{cases} \geq \\ \leq \\ = \end{cases} b_i$	$y_i \begin{cases} \leq 0 \\ \geq 0 \\ \text{tùy} \end{cases}$
$x_j \begin{cases} \geq 0 \\ \leq 0 \\ \text{tùy} \end{cases}$	$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_m \begin{cases} \geq \\ \leq \\ = \end{cases} c_j$

Ví dụ. Tìm bài toán đối ngẫu của bài toán sau

a)

$$(1) f(x) = 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 \rightarrow \min$$

$$(2) \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 5x_4 \leq 50 \\ 7x_1 + x_3 + x_4 = 30 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \geq -25 \end{cases}$$

$$(3) x_1 \geq 0, x_2 \leq 0.$$

b)

$$(1) f(x) = 2x_1 + x_2 - 8x_3 \rightarrow \max$$

$$(2) \begin{cases} 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 28 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 15 \end{cases}$$

$$(3) x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Giải

a) Bài toán đối ngẫu là

$$(1) g(y) = 50y_1 + 30y_2 - 25y_3 \rightarrow \max$$

$$(2) \begin{cases} 4y_1 + 7y_2 + 2y_3 \leq 3 \\ -6y_1 + 3y_3 \geq 2 \\ 5y_1 + y_2 - 5y_3 = -5 \\ -5y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

$$(3) y_1 \leq 0, y_2 \text{ tùy ý}, y_3 \geq 0.$$

b) Bài toán đối ngẫu là

$$(1) g(y) = 28y_1 + 10y_2 + 15y_3 \rightarrow \min$$

$$(2) \begin{cases} 7y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 2 \\ 4y_1 - y_2 + 3y_3 \geq 1 \\ 2y_1 + 3y_2 - y_3 \geq -8 \end{cases}$$

$$(3) y_1 \geq 0, y_3 \leq 0.$$

3.3 Cặp ràng buộc đối ngẫu

Trong một cặp ràng buộc đối ngẫu (P) và (D) như trong định nghĩa thì ta có n cặp ràng buộc đối ngẫu như sau:

Trường hợp 1. $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$

$$x_j \geq 0 \Leftrightarrow a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_m \geq c_j, j = 1, 2, \dots, n$$

Trường hợp 2. $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min$

$$x_j \geq 0 \Leftrightarrow a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \dots + a_{mj}y_m \leq c_j, j = 1, 2, \dots, n$$

Ví dụ. Tìm bài toán đối ngẫu và chỉ ra các cặp ràng buộc đối ngẫu của các bài toán QHTT sau:

a)

$$(1) f(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$$

$$(2) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 \leq -3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 6 \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 \leq 8 \end{cases}$$

$$(3) x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

b)

$$(1) f(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \rightarrow \max$$

$$(2) \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 \leq 9 \\ 10x_1 - 11x_2 + 12x_3 - 13x_4 = 14 \\ -15x_1 + 16x_2 - 17x_3 + 18x_4 \geq -19 \end{cases}$$

$$(3) x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Giải

a) Bài toán đối ngẫu

$$(1) g(y) = 2y_1 - 3y_2 + 6y_3 + 8y_4 \rightarrow \max$$

$$(2) \begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 + 3y_4 \leq 1 \\ 3y_1 - y_2 + y_3 + 7y_4 \leq 2 \\ y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 7y_4 \geq -3 \end{cases}$$

$$(3) y_2, y_4 \leq 0, y_3 \geq 0.$$

Hệ ràng buộc chính của bài toán (P) có 3 bất phương trình và bài toán (P) có 3 điều kiện về dấu của ẩn số nên cặp bài toán đối ngẫu (P) và (D) có 6 cặp ràng buộc đối ngẫu

$$x_1 - x_2 - 4x_3 \leq -3 \leftrightarrow y_2 \leq 0$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 6 \leftrightarrow y_3 \geq 0$$

$$3x_1 + 5x_2 - 7x_3 \leq 8 \leftrightarrow y_4 \leq 0$$

$$x_1 \geq 0 \leftrightarrow 2y_1 + y_2 + y_3 + 3y_4 \leq 1$$

$$x_2 \geq 0 \leftrightarrow 3y_1 - y_2 + y_3 + 7y_4 \leq 2$$

$$x_3 \geq 0 \leftrightarrow y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 7y_4 \geq -3$$

b) Bài toán đối ngẫu

$$(1) g(y) = 9y_1 + 14y_2 - 19y_3 \rightarrow \min$$

$$(2) \begin{cases} 5y_1 + 10y_2 - 15y_3 \geq 1 \\ 6y_1 - 11y_2 + 16y_3 \geq -2 \\ 7y_1 + 12y_2 - 17y_3 \geq 3 \\ 8y_1 - 13y_2 + 18y_3 = -4 \end{cases}$$

$$(3) y_1 \geq 0, y_2 \text{ tùy ý}, y_3 \leq 0.$$

Hệ ràng buộc chính của bài toán (P) có hai bất phương trình và bài toán (P) có ba điều kiện về dấu của ẩn số nên cặp bài toán đối ngẫu (P) và (D) có 5 cặp ràng buộc đối ngẫu sau:

$$5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 \leftrightarrow y_1 \geq 0$$

$$-15x_1 + 16x_2 - 17x_3 + 18x_4 \geq -19 \leftrightarrow y_3 \leq 0$$

$$x_1 \geq 0 \leftrightarrow 5y_1 + 10y_2 - 15y_3 \geq 1$$

$$x_2 \geq 0 \leftrightarrow 6y_1 - 11y_2 + 16y_3 \geq -2$$

$$x_3 \geq 0 \leftrightarrow 7y_1 + 12y_2 - 17y_3 \geq 3$$

3.4 Định lý đối ngẫu

Định lý độ lệch bù yếu. Điều kiện cần và đủ để phương án x^0 của bài toán (P) và phương án y^0 của bài toán (D) đều là phương án tối ưu là trong các cặp ràng buộc đối ngẫu của bài toán đó: Nếu một ràng buộc thỏa mãn phương án với dấu bất đẳng thức thực sự thì ràng buộc còn lại phải thỏa mãn phương án với dấu bằng.

Ứng dụng. Nhờ định lý độ lệch bù yếu, khi ta biết được một phương án tối ưu của một trong hai bài toán của cặp bài toán đối ngẫu thì ta có thể tìm được tập phương án tối ưu của bài toán còn lại. Ứng dụng này thường được sử dụng trong việc giải quyết các vấn đề của bài toán QHTT.

Ví dụ 1. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính sau

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \rightarrow \max \\
 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &\leq 20 \\
 x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 18 \\
 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &\geq 16 \\
 x_j &\geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4)
 \end{aligned}$$

a. Giải bài toán trên

b. Hãy lập bài toán đối ngẫu của bài toán trên và giải bài toán đối ngẫu đó.

Giải

a. Đưa bài toán về dạng chuẩn:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 - Mx_7 - Mx_8 \rightarrow \max \\
 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 20 \\
 x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_7 &= 18 \\
 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_6 + x_8 &= 16 \\
 x_j &\geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)
 \end{aligned}$$

Giải bài toán mở rộng bằng phương pháp đơn hình

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
			1	2	3	3	0	0
0	x_5	20	2	1	1	2	1	0
-M	x_7	18	1	2	(3)	4	0	0
-M	x_8	16	2	1	2	1	0	-1
			-1	-2	-3	-3	0	0
			-3	-3	-5*	-5	0	1
0	x_5	14	5/3	1/3	0	2/3	1	0
3	x_3	6	1/3	2/3	1	4/3	0	0
-M	x_8	4	(4/3)	-1/3	0	-5/3	0	-1
			0	0	0	1	0	0
			-4/3*	1/3	0	5/3	0	1
0	x_5	9	0	3/4	0	11/4	1	5/4
3	x_3	5	0	3/4	1	7/4	0	1/4
1	x_1	3	1	-1/4	0	-5/4	0	-3/4
		18	0	0	0	1	0	0

PATU: $x = (3, 0, 5, 0)$, $f(x) = 18$.

b. Bài toán đối ngẫu

$$\begin{aligned}
 g(y) &= 20y_1 + 18y_2 + 16y_3 \rightarrow \min \\
 2y_1 + y_2 + 2y_3 &\geq 1 \\
 y_1 + 2y_2 + y_3 &\geq 2 \\
 y_1 + 3y_2 + 2y_3 &\geq 3 \\
 2y_1 + 4y_2 + y_3 &\geq 3 \\
 y_1 &\geq 0, y_3 \leq 0.
 \end{aligned}$$

Theo định lý độ lệch bù yếu, ta có hệ phương trình tối ưu sau

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 = 1 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 = 3 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được PATU: $y = (0, 1, 0)$ và $g(y) = 18$.

Ví dụ 2. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính sau

$$f(x) = 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 4$$

$$-x_1 + x_4 \leq 10$$

$$2x_2 + x_3 - 2x_4 = 12$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

a. Giải bài toán trên

b. Lập bài toán đối ngẫu của bài toán trên và giải bài toán đối ngẫu đó.

Giải

a. Đưa bài toán về dạng chuẩn

$$f(x) = 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 + Mx_6 + Mx_7 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_6 = 4$$

$$-x_1 + x_4 + x_5 = 10$$

$$2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_7 = 12$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$$

Giải bài toán mở rộng bằng phương pháp đơn hình

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
			6	3	2	-3	0
M	x_6	4	1	(1)	1	-2	0
0	x_5	10	-1	0	0	1	1
M	x_7	12	0	2	1	-2	0
			-6	-3	-2	3	0
			1	3*	2	-4	0
3	x_2	4	1	1	1	-2	0
0	x_5	10	-1	0	0	1	1
M	x_7	4	-2	0	-1	(2)	0
			-3	0	1	-3	0
			-2	0	-1	2*	0
3	x_2	8	-1	1	0	0	0
0	x_5	8	0	0	1/2	0	1
-3	x_4	2	-1	0	-1/2	1	0
		18	-6	0	-1/2	0	0

PATU: $x = (0, 8, 0, 2)$, $f(x) = 18$.

b. Bài toán đối ngẫu

$$g(y) = 4y_1 + 10y_2 + 12y_3 \rightarrow \max$$

$$y_1 - y_2 \leq 6$$

$$y_1 + 2y_3 \leq 3$$

$$y_1 + y_3 \leq 2$$

$$-2y_1 + y_2 - 2y_3 \leq -3$$

$$y_2 \leq 0.$$

Theo định lý độ lệch bù yếu, ta có hệ phương trình tối ưu sau:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_3 = 3 \\ y_2 = 0 \\ -2y_1 + y_2 - 2y_3 = -3 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được PATU: $y = (0, 0, 3/2)$ và $g(y) = 18$.

Ví dụ 3 (CHLH 2009). Cho bài toán quy hoạch tuyến tính sau

$$x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 + 5x_5 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 30$$

$$x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 23$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 \geq -10$$

$$x_j \geq 0; j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

a. Hãy giải bài toán trên bằng phương pháp đơn hình.

b. Hãy lập bài toán đối ngẫu của bài toán trên và tìm một phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu đó.

Giải

a. Thêm vào bài toán ẩn phụ x_6 rồi đổi dấu ràng buộc chính thứ ba, ta được bài toán phụ sau:

$$x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 + 5x_5 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 30$$

$$x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 23$$

$$-3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - 4x_5 + x_6 = 10$$

$$x_j \geq 0; j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Ma trận điều kiện

$$A = \left(\begin{array}{cccccc|cc} 2 & 1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & -1 & -4 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Thêm vào bài toán hai ẩn giả x_7, x_8 ta được bài toán mở rộng sau

$$x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 + 5x_5 - Mx_7 - Mx_8 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_7 = 30$$

$$x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_8 = 23$$

$$-3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - 4x_5 + x_6 = 10$$

$$x_j \geq 0; j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.$$

Giải bài toán mở rộng bằng phương pháp đơn hình

			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	λ_i
			1	-3	-4	1	5	0	
-M	x_7	30	2	1	-3	(2)	0	0	15*
-M	x_8	23	0	1	-1	1	-1	0	23
0	x_6	10	-3	2	-1	-1	-4	1	
		0	-1	3	4	-1	-5	0	
		-53	-2	-2	4	-3*	1	0	
1	x_4	15	1	1/2	-3/2	1	0	0	
-M	x_8	8	-1	1/2	(1/2)	0	-1	0	
0	x_6	25	-2	5/2	-5/2	0	-4	1	
		15	0	7/2	5/2*	0	-5	0	
		-8	1	-1/2	-1/2	0	1	0	
1	x_4	39	-2	2	0	1	-3	0	
-4	x_3	16	-2	1	1	0	-2	0	
0	x_6	65	-7	5	0	0	-9	1	
		-25	5	1	0	0	0	0	

Trong bảng đơn hình thứ ba ta thấy hệ số ước lượng của các ẩn đều không âm nên bài toán mở rộng có nghiệm là:

$$x^0 = (0, 0, 16, 39, 0, 65, 0, 0); f_0 = -25.$$

Ta thấy trong PATU của bài toán mở rộng các ẩn giả đều nhận giá trị 0 nên bài toán đã cho giải được và có nghiệm như sau:

$$x^0 = (0, 0, 16, 39, 0, 65, 0, 0); f_0 = -25$$

b) Bài toán đối ngẫu với bài toán đã cho là:

$$30y_1 + 23y_2 - 10y_3 \rightarrow \min$$

$$2y_1 + 3y_3 \geq 1$$

$$y_1 + y_2 - 2y_3 \geq -3$$

$$-3y_1 - y_2 + y_3 \geq -4$$

$$2y_1 + y_2 + y_3 \geq 1$$

$$-y_2 + 4y_3 \geq 5$$

$$y_3 \leq 0$$

Do bài toán đã cho có PATU là $x^0 = (0, 0, 16, 39, 0, 65, 0, 0)$ nên ta có hệ phương trình tối ưu sau:

$$\begin{cases} y_3 = 0 \\ -3y_1 - y_2 + y_3 = -4 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = -5 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

Vậy bài toán đối ngẫu có một PATU là $y^0 = (3, -5, 0)$ và GTTU là: $g(y^0) = -25$.

BÀI TẬP

Phần I

1.1 Để nuôi một loại gia súc người ta sử dụng 3 loại thức ăn A_1, A_2, A_3 . Tỷ lệ (%) các chất dinh dưỡng D_1, D_2 có trong các loại thức ăn A_1, A_2, A_3 và giá 1kg mỗi loại như sau:

Chất dinh dưỡng	Loại thức ăn		
	A_1	A_2	A_3
D_1	30	20	20
D_2	20	20	30
Giá mua	8000 đ	6000 đ	4000 đ

Yêu cầu trong khẩu phần thức ăn của loại gia súc này là: chất dinh dưỡng D_1 phải có ít nhất là 70g và nhiều nhất là 100g, chất dinh dưỡng D_2 phải có ít nhất là 50g và nhiều nhất là 80g. Hãy lập mô hình toán học của bài toán xác định khối lượng thức ăn mỗi loại cần mua sao cho tổng chi phí thấp nhất và bảo đảm chất lượng theo yêu cầu.

1.2 Có hai loại thức ăn I và II chứa 3 loại vitamin A, B, C. Hàm lượng vitamin trong mỗi đơn vị thức ăn như sau:

Loại thức ăn	Vitamin		
	A	B	C
I	2	3	4
II	4	1	5

Giá một đơn vị thức ăn thứ I là 3đ, và II là 7đ. Một khẩu phần ăn phải có tối thiểu 5 đơn vị A, 4 đơn vị B và 8 đơn vị C. Tìm một cách ăn tốt nhất (ít tiền nhất và đủ dinh dưỡng). Hãy lập mô hình toán học của bài toán.

1.3 Một xí nghiệp có kế hoạch sản xuất ba loại sản phẩm A_1, A_2, A_3 từ 3 loại nguyên liệu N_1, N_2, N_3 có trữ lượng tương ứng là 50kg, 70kg và 100kg. Định mức tiêu hao nguyên liệu (kg/SP) và lợi nhuận (ngàn đồng/SP) khi sản xuất một sản phẩm được cho trong bảng sau

Nguyên liệu	Sản phẩm		
	A_1	A_2	A_3
N_1	0.2	0.1	0.1
N_2	0.1	0.2	0.1
N_3	0.1	0.3	0.0
Lợi nhuận	8000	6000	4000

Hãy lập mô hình toán học của bài toán lập kế hoạch sản xuất tối ưu biết rằng lượng sản phẩm A_3 chỉ có thể tiêu thụ được tối đa 400 sản phẩm.

1.4 Để nuôi một loại gia súc trong 24h cần có khối lượng tối thiểu các chất: Protit, Gluxit, khoáng tương ứng là: 90, 130, 20 gram. Tỷ lệ phần trăm theo khối lượng các chất trên có trong các loại thức ăn A, B, C và giá mua 1kg thức ăn mỗi loại như sau:

Chất	Loại thức ăn
------	--------------

dinh dưỡng	A	B	C
Protit	10	20	30
Gluxit	30	40	20
Khoáng	2	1	3
Giá mua	3000 đ	4000 đ	5000 đ

Hãy lập mô hình toán học của bài toán xác định khối lượng thức ăn mỗi loại cần mua sao cho tổng chi phí thấp nhất và bảo đảm chất lượng theo yêu cầu.

2.5 Có hai loại sản phẩm A, B được gia công trên 3 máy I, II, III. Thời gian gia công mỗi loại sản phẩm trên mỗi máy cho bởi bảng:

Loại SP	Máy		
	I	II	III
A	4	3	2
B	2	1	4

Thời gian cho phép của mỗi máy I, II, III lần lượt là 100, 300, 50 giờ. Một đơn vị sản phẩm A lãi 6000 đ, B lãi 4000 đ.

Vậy cần phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm mỗi loại để lãi tối đa. Hãy lập mô hình toán học của bài toán.

1.6 Trong một chu kỳ sản xuất, nhà máy sử dụng hai loại vật liệu V_1, V_2 để sản xuất 3 loại sản phẩm S_1, S_2, S_3 . Lượng vật liệu V_i dùng để sản xuất một đơn vị sản phẩm S_j và giá bán một đơn vị sản phẩm S_j cho bởi bảng sau:

VL	SP		
	S_1	S_2	S_3
V_1	4	2	5
V_2	2	6	3
Giá bán	12000 đ	8000 đ	14000 đ

Biết rằng số đơn vị vật liệu V_1, V_2 nhà máy có lần lượt là 10000 và 14000. Yêu cầu lập kế hoạch sản xuất của nhà máy, xác định số lượng sản phẩm mỗi loại cần sản xuất sao cho tổng thu nhập lớn nhất.

1.7 Giả sử yêu cầu tối thiểu mỗi ngày về các chất dinh dưỡng đạm, đường, béo cho một loại gia súc tương ứng là 50g, 80g và 20g. Cho biết hàm lượng các chất dinh dưỡng trên có trong 1g thức ăn A, B, C và giá mua 1 kg thức ăn mỗi loại trong bảng sau:

Chất Dinh dưỡng	Loại thức ăn		
	A	B	C
Đạm	0.1g	0.2g	0.2g
Đường	0.3g	0.1g	0.1g
Béo	0.05g	0.02g	0.01g
Giá mua	8000 đ	6000 đ	4000 đ

Hãy lập mô hình toán học của bài toán xác định khối lượng thức ăn mỗi loại phải mua để tổng số tiền chi cho mua thức ăn ít nhất nhưng đáp ứng được nhu cầu dinh dưỡng mỗi ngày.

1.8 Một xí nghiệp có kế hoạch sản xuất ba loại sản phẩm A, B, C từ 2 loại nguyên liệu N_1, N_2 có trữ lượng tương ứng là 50kg, 70kg. Định mức tiêu hao nguyên liệu (kg/SP) và lợi nhuận (ngàn đồng/SP) khi sản xuất một sản phẩm được cho trong bảng sau

Nguyên	Sản phẩm
--------	----------

liệu	A	B	C
N ₁	0.2	0.1	0.1
N ₂	0.1	0.1	0.2
Lợi nhuận	5000	2000	6000

Hãy lập mô hình toán học của bài toán lập kế hoạch sản xuất tối ưu biết rằng lượng sản phẩm B chỉ có thể tiêu thụ được tối đa 300 sản phẩm.

Phần II

2.1 Cho bài toán quy hoạch tuyến tính sau

$$f(x) = 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 4$$

$$-x_1 + x_4 \leq 10$$

$$2x_2 + x_3 - 2x_4 = 12$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

a. Giải bài toán trên

b. Lập bài toán đối ngẫu của bài toán trên và giải bài toán đối ngẫu đó.

2.2 Cho bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$f(x) = 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + x_4 \rightarrow \min$$

$$3x_1 + x_2 + 4x_3 - 6x_4 \leq 20$$

$$x_1 + x_3 - 2x_4 \leq 6$$

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 24$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

a. Giải bài toán trên

b. Lập bài toán đối ngẫu của bài toán trên và giải bài toán đối ngẫu đó.

2.3 Cho bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$f(x) = x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \geq 6$$

$$-x_1 + x_3 \leq 10$$

$$2x_2 - 3x_3 + x_4 = 20$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

a. Giải bài toán trên

b. Lập bài toán đối ngẫu của bài toán trên và giải bài toán đối ngẫu đó.

2.4 Cho bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$f(x) = -2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 4x_5 \rightarrow \max$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 9$$

$$7x_1 - 3x_2 - 7x_4 + 5x_5 = 14$$

$$4x_1 - 2x_2 - 4x_4 + 3x_5 = 8$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

a. Giải bài toán trên

b. Lập bài toán đối ngẫu của bài toán trên và hệ phương trình tối ưu của bài toán đối ngẫu đó.

2.5 Cho bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$f(x) = -3x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 5x_4 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 18$$

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 12$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \geq 11$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4.$$

a. Giải bài toán trên

b. Lập bài toán đối ngẫu của bài toán trên và giải bài toán đối ngẫu đó.

2.6 Cho bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$f(x) = -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2$$

$$-x_2 - 7x_3 + 3x_4 \leq 3$$

$$-3x_3 + 2x_4 \leq 7$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4.$$

a. Giải bài toán trên

b. Lập bài toán đối ngẫu của bài toán trên và giải bài toán đối ngẫu đó.

2.7 Cho bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$f(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 20$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 18$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 16$$

$$x_j \geq 0 (j = 1, 2, 3, 4)$$

a. Giải bài toán trên

b. Hãy lập bài toán đối ngẫu của bài toán trên và giải bài toán đối ngẫu đó.

2.8 Cho bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$f(x) = 15x_1 + 8x_2 + 10x_3 \rightarrow \max$$

$$-3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 3$$

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 4$$

$$-4x_1 - 5x_2 + 2x_3 \geq 1$$

$$x_j \geq 0 (j = 1, 2, 3)$$

a. Giải bài toán trên

b. Hãy lập bài toán đối ngẫu của bài toán trên và giải bài toán đối ngẫu đó.

Hướng dẫn và Đáp số

Phần I

1.1 Gọi x_j , $j = 1, 2, 3$ lần lượt là số gam thức ăn A_1, A_2, A_3 cần phải mua. Khi đó mô hình toán học của bài toán là:

$$f(x) = 8x_1 + 6x_2 + 4x_3 \rightarrow \min$$

$$0.3x_1 + 0.2x_2 + 0.2x_3 \geq 70$$

$$0.3x_1 + 0.2x_2 + 0.2x_3 \leq 100$$

$$0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 \geq 50$$

$$0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 \leq 80$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

1.2 Gọi x_1, x_2 là lượng thức ăn I và II trong một khẩu phần. Khi đó mô hình toán học của bài toán là:

$$f(x) = 3x_1 + 7x_2 \rightarrow \min$$

$$2x_1 + 4x_2 \geq 5$$

$$3x_1 + x_2 \geq 4$$

$$4x_1 + 5x_2 \geq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

1.3 Gọi x_1, x_2, x_3 lần lượt là số sản phẩm A_1, A_2, A_3 cần sản xuất. Khi đó mô hình toán học của bài toán là:

$$f(x) = 8x_1 + 6x_2 + 4x_3 \rightarrow \max$$

$$0.2x_1 + 0.1x_2 + 0.1x_3 \leq 50$$

$$0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.1x_3 \leq 70$$

$$0.1x_1 + 0.3x_2 \leq 100$$

$$x_3 \leq 400$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

1.4 Gọi x_j , $j = 1, 2, 3$ lần lượt là số gam thức ăn A, B, C cần mua. Khi đó mô hình toán học của bài toán là:

$$f(x) = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \rightarrow \min$$

$$0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 \geq 90$$

$$0.3x_1 + 0.4x_2 + 0.2x_3 \geq 130$$

$$0.02x_1 + 0.01x_2 + 0.03x_3 \geq 20$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

1.5 Gọi x_1, x_2 là số đơn vị sản phẩm loại A và B cần sản xuất. Khi đó mô hình toán học của bài toán là:

$$f(x) = 6000x_1 + 4000x_2 \rightarrow \max$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 100$$

$$3x_1 + x_2 \leq 300$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 50$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

1.6 Gọi x_j ($j = 1, 2, 3$) là số đơn vị sản phẩm S_j cần sản xuất. Khi đó mô hình toán học của bài toán là:

$$f(x) = 12000x_1 + 8000x_2 + 14000x_3 \rightarrow \max$$

$$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 10000$$

$$2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 14000$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$$

1.7 Gọi x_j , $j = 1, 2, 3$ lần lượt là số gam thức ăn A, B, C cần mua. Khi đó mô hình toán học của bài toán là:

$$f(x) = 8x_1 + 6x_2 + 4x_3 \rightarrow \min$$

$$0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.2x_3 \geq 50$$

$$0.3x_1 + 0.1x_2 + 0.1x_3 \geq 80$$

$$0.05x_1 + 0.02x_2 + 0.01x_3 \geq 20$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

1.8 Gọi x_j , $j = 1, 2, 3$ lần lượt là số sản phẩm A, B, C cần sản xuất. Khi đó mô hình toán học của bài toán là:

$$f(x) = 5x_1 + 2x_2 + 6x_3 \rightarrow \max$$

$$0.2x_1 + 0.1x_2 + 0.1x_3 \leq 50$$

$$0.1x_1 + 0.1x_2 + 0.2x_3 \leq 70$$

$$x_2 \leq 300$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Phần II

- 2.1 a. PATU: $x = (0, 8, 0, 2)$, $f(x) = 18$.
b. PATU: $y = (0, 0, 3/2)$ và $g(y) = 18$.
- 2.2 a. PATU: $x = (18, 0, 0, 6)$, $f(x) = 42$.
b. PATU: $y = (0, -13, 5)$ và $g(y) = 42$.
- 2.3 a. PATU: $x = (0, 10, 0, 0)$, $f(x) = 30$.
b. PATU: $y = (0, 0, 3/2)$ và $g(y) = 30$.
- 2.4 a. PATU: $x = (2, 0, 3, 0, 0)$, $f(x) = -1$.
- 2.5 a. PATU: $x = (0, 4, 0, 1)$, $f(x) = -13$.
b. PATU: $y = (0, -2, 1)$ và $g(y) = -13$.

- 2.6 a. PATU: $x = (0, 0, 11, 20)$, $f(x) = 31$.
b. PATU: $y = (5, 0, 3)$ và $g(y) = 31$.
- 2.7 a. PATU: $x = (3, 0, 5, 0)$, $f(x) = 18$.
b. PATU: $y = (0, 1, 0)$ và $g(y) = 18$.
- 2.8 a. PATU: $x = (1/5, 0, 9/10)$, $f(x) = 12$.
b. PATU: $y = (7, 0, -9)$ và $g(y) = 12$.