МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Пермский государственный национальный исследовательский университет»

Механико-математический факультет
Кафедра фундаментальной математики

Курсовая работа
на тему:

Алгебраические кривые

по дисциплине "Обыкновенные дифференциальные уравнения"

Направление 01.03.01 Математика

Выполнил студент группы ММ/О ММТ-2021 НБ Ляховой Д.С.
Научный руководитель кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики Волочков А.А.

Пермь 2023

Содержание

Глава 1

Схемы Грассмана

1.1 Функторы Грассмана

Определение 1.1.1. Пусть $r, n \in N$. Для любой k-алгебры A определим $\mathcal{G}r_{n,r}(A)$ как множество таких подмодулей S A-модуля A^{r+n}, что

1. S выделяется прямым слагаемым в A^{r+n}, то есть $A^{r+n} = S \oplus T$ для некоторого подмодуля T в A^{r+n} (в частности, в силу 2.0.2, S – проективный A-модуль);

2. A-модуль S имеет ранг r.

Для любого морфизма $\phi : A \longrightarrow B$ пусть $S \in \mathcal{G}r_{n,r}(A)$ и $S^B \in \mathcal{G}r_{n,r}(B)$ (в силу 2.0.6). Тогда построим естественное отображение $\mathcal{G}r_{n,r}(\phi) : \mathcal{G}r_{n,r}(A) \longrightarrow \mathcal{G}r_{n,r}(B)$ определим как $S \mapsto S^B$.

Докажем, что $\mathcal{G}r_{n,r}$ — k-функтор.

Доказательство. Пусть $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ – морфизмы k-алгебр.
Покажем, что $\mathcal{G}r_{n,r}(\beta\alpha) = \mathcal{G}r_{n,r}(\beta)\mathcal{G}r_{n,r}(\alpha)$. Пусть $S \in \mathcal{G}r_{n,r}(A)$.

$$\begin{aligned}(\mathcal{G}r_{n,r}(\beta)\mathcal{G}r_{n,r}(\alpha))(S) &= \mathcal{G}r_{n,r}(\beta)(\mathcal{G}r_{n,r}(\alpha)(S)) = \\ \mathcal{G}r_{n,r}(\beta)(\langle\alpha(S)\rangle_B) &= \langle\beta(\langle\alpha(S)\rangle_B)\rangle_C = \langle\langle(\beta\alpha)(S)\rangle_B\rangle_C = \\ \langle(\beta\alpha)(S)\rangle_C &= \mathcal{G}r_{n,r}(\beta\alpha)(S).\end{aligned}$$

Мы доказали, что $\mathcal{G}r_{n,r}$ — k-функтор. ∎

Глава 2

Дополнение

Определение 2.0.1. Модуль P над кольцом R называется проективным, если для любого эпиморфизма $f : N \twoheadrightarrow M$ R-модулей и любого морфизма $g : P \longrightarrow M$ существует такой морфизм $h : P \longrightarrow N$, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, two heads, "f"] \\ P \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "g"'] & M \end{tikzcd}$$

Теорема 2.0.2. *Модуль проективен тогда и только тогда, когда он является прямым слагаемым некоторого свободного модуля.*

Теорема 2.0.3. *Проективный модуль над локальным кольцом свободен.*

Теорема 2.0.4. *Пусть R – коммутативное кольцо, $\mathfrak{p}$ – простой идеал в R. Если M – проективный R-модуль, то $M_{\mathfrak{p}}$ – свободный $R_{\mathfrak{p}}$-модуль.*

Определение 2.0.5. Проективный модуль M над коммутативным кольцом R имеет ранг $r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, если для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца R свободный $R_{\mathfrak{p}}$-модуль $M_{\mathfrak{p}}$ имеет (свободный) ранг r.

Лемма 2.0.6. *Пусть $\phi\colon A \longrightarrow B$ – морфизм k-алгебр, $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, S, T – подмодули A-модуля A^n, $A^n = S \oplus T$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

1. *Существует такой изоморфизм B-модулей*

$$\psi : (B \otimes_A S) \oplus (B \otimes_A T) \longrightarrow B^n,$$

что для всех $b \in B$, $s \in S$, $t \in T$

$$(b \otimes_A s, b \otimes_A t) \overset{\psi}{\mapsto} b(s + t);$$

2.

$$\psi\left(\left(B\otimes_A S\right)\times\{0\}\right)=S^B,$$

$$\psi\left(\{0\}\times\left(B\otimes_A B\right)\right)=T^B,$$

$$B^n=\left(A^n\right)^B=S^B\oplus T^B;$$

3. Ранг проективного B-модуля S^B равен рангу проективного A-модуля S. (2.0.5)

Список Источников

1. Волочков А.А. Схемы. // А.А.Волочков — Пермь, 2023. — 233 стр. 230.

2. Волочков А.А. Схемы. // А.А.Волочков — Пермь, 2023. — 233 стр. 126-127.