

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования
«Пермский государственный национальный исследовательский университет»

Механико-математический факультет
Кафедра фундаментальной математики

Курсовая работа
на тему:

Алгебраические кривые

по дисциплине "Обыкновенные дифференциальные уравнения"

Направление 01.03.01 Математика

Выполнил студент группы ММ/О ММТ-2021 НБ	Ляховой Д.С.
Научный руководитель кандидат	Волочков А.А.
физико-математических наук, доцент кафедры	
фундаментальной математики	

Пермь 2023

Содержание

1	Схемы Грассмана	2
1.1	Функторы Грассмана	2
2	Дополнение	3
	Список источников	5

Глава 1

Схемы Грассмана

1.1 Функторы Грассмана

Определение 1.1.1. Пусть $r, n \in \mathbb{N}$. Для любой k -алгебры A определим $\mathcal{G}r_{n,r}(A)$ как множество таких подмодулей S A -модуля A^{r+n} , что

1. S выделяется прямым слагаемым в A^{r+n} , то есть $A^{r+n} = S \oplus T$ для некоторого подмодуля T в A^{r+n} (в частности, в силу 2.0.2, S — проективный A -модуль);
2. A -модуль S имеет ранг r .

Для любого морфизма $\phi : A \rightarrow B$ пусть $S \in \mathcal{G}r_{n,r}(A)$ и $S^B \in \mathcal{G}r_{n,r}(B)$ (в силу 2.0.6). Тогда построим естественное отображение $\mathcal{G}r_{n,r}(\phi) : \mathcal{G}r_{n,r}(A) \rightarrow \mathcal{G}r_{n,r}(B)$ определим как $S \mapsto S^B$.

Докажем, что $\mathcal{G}r_{n,r}$ — k -функтор.

Доказательство. Пусть $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ — морфизмы k -алгебр. Покажем, что $\mathcal{G}r_{n,r}(\beta\alpha) = \mathcal{G}r_{n,r}(\beta)\mathcal{G}r_{n,r}(\alpha)$. Пусть $S \in \mathcal{G}r_{n,r}(A)$.

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}r_{n,r}(\beta)\mathcal{G}r_{n,r}(\alpha))(S) &= \mathcal{G}r_{n,r}(\beta)(\mathcal{G}r_{n,r}(\alpha)(S)) = \\ \mathcal{G}r_{n,r}(\beta)(\langle \alpha(S) \rangle_B) &= \langle \beta(\langle \alpha(S) \rangle_B) \rangle_C = \langle \langle (\beta\alpha)(S) \rangle_B \rangle_C = \\ \langle (\beta\alpha)(S) \rangle_C &= \mathcal{G}r_{n,r}(\beta\alpha)(S) \end{aligned}$$

Мы доказали, что $\mathcal{G}r_{n,r}$ — k -функтор. □

Глава 2

Дополнение

Определение 2.0.1. Модуль P над кольцом R называется проективным, если для любого эпиморфизма $f : N \twoheadrightarrow M$ R -модулей и любого морфизма $g : P \rightarrow M$ существует такой морфизм $h : P \rightarrow N$, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & N & \\ & \downarrow f & \\ P & \xrightarrow{g} & M \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow h \\ \downarrow \\ \end{array}$$

Теорема 2.0.2. Модуль проективен тогда и только тогда, когда он является прямым слагаемым некоторого свободного модуля.

Теорема 2.0.3. Проективный модуль над локальным кольцом свободен.

Теорема 2.0.4. Пусть R – коммутативное кольцо, \mathfrak{p} – простой идеал в R . Если M – проективный R -модуль, то $M_{\mathfrak{p}}$ – свободный $R_{\mathfrak{p}}$ -модуль.

Определение 2.0.5. Проективный модуль M над коммутативным кольцом R имеет ранг $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, если для любого простого идеала \mathfrak{p} кольца R свободный $R_{\mathfrak{p}}$ -модуль $M_{\mathfrak{p}}$ имеет (свободный) ранг r .

Лемма 2.0.6. Пусть $\phi : A \rightarrow B$ – морфизм k -алгебр, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, S, T – подмодули A -модуля A^n , $A^n = S \oplus T$. Тогда выполняются следующие утверждения:

1. Существует такой изоморфизм B -модулей

$$\psi : (B \otimes_A S) \oplus (B \otimes_A T) \rightarrow B^n,$$

что для всех $b \in B$, $s \in S$, $t \in T$

$$(b \otimes_A s, b \otimes_A t) \xrightarrow{\psi} b(s + t).$$

2.

$$\psi((B \otimes_A S) \times \{0\}) = S^B$$

$$\psi(\{0\} \times (B \otimes_A B)) = T^B$$

$$B^n = (A^n)^B = S^B \oplus T^B$$

3. Ранг проективного B -модуля S^B равен рангу проективного A -модуля S . (2.0.5)

Список Источников

1. Волочков А.А. Схемы. // А.А.Волочков — Пермь, 2023. — 233 стр. 126-127.
2. Волочков А.А. Схемы. // А.А.Волочков — Пермь, 2023. — 233 стр. 230.