МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Пермский государственный национальный исследовательский университет»

Механико-математический факультет
Кафедра фундаментальной математики

Курсовая работа
на тему:

Алгебраические кривые

по дисциплине "Обыкновенные дифференциальные уравнения"

Направление 01.03.01 Математика

Выполнил студент группы ММ/О ММТ-2021 НБ Ляховой Д.С.
Научный руководитель кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики Волочков А.А.

____
подпись

Пермь 2023

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Причиной выбора темы курсовой работы послужила универсальность алгебраического аппарата в целом и потенциал коммутативной алгебры. Данный раздел довольно развивается до сих пор, является одним из самых продвинутых инструментов на вооружении математиков.

Цель работы — создать фундамент для инструментария, способного помогать и облегчать поиск решений различных систем уравнений, т. е. с элементами над разными множествами.

Для достижения были поставлены задачи:

- ввести необходимую базовую теорию;
- на основе предшествующей теории развить уровень абстракции;
- привести примеры там, где это уместно;
- показать возможности инструмента на примере спусков использования.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В этой главе введем необходимые для дальнейшей работы определения, леммы и теоремы. Также в данной работе будем полагать, что «кольцо» означает «коммутативное кольцо», если явным образом не оговаривается иное.

1.1. АЛГЕБРА

Определение 1.1.1. Пусть X – множество, $\sim$ – отношение эквиваленции на X. *Классом эквивалентности по отношению $\sim$ элемента $x \in X$* назовем множество

$$X_x = \{x' \in X | x \sim x'\}$$

Определение 1.1.2. Множество, элементами которого являются классы эквивалентности (из 1.1.1) обозначим $X/\sim$ и назовем *фактормножеством.*

Определение 1.1.3. Отображение $f : X \longrightarrow X/\sim$ называется *естественным.*

Определение 1.1.4. Множество всех отображений Y в X называется X^Y

Определение 1.1.5. Пусть L – кольцо. Множество L^* называется *множеством обратимых элементов кольца L* и определяется следующим образом

$$L^* = \{l \in L | \exists l' \in L : ll' = l'l = 1_L\}$$

Определение 1.1.6. Пусть A, B – кольца. Отображение $f : A \longrightarrow B$ называется *морфизмом колец*, если:

1. $f(1) = 1$;
2. $f(x + y) = f(x) + f(y)$;
3. $f(xy) = f(x)f(y)$.

Определение 1.1.7. Инъективный морфизм $f : X \longrightarrow Y$ называется *мономорфизмом.* Обозначается $f : X \rightarrowtail Y$.

Определение 1.1.8. Сюръективный морфизм $f : X \longrightarrow Y$ называется *эпиморфизмом.* Обозначается $f : X \twoheadrightarrow Y$.

1.2. ИДЕАЛЫ

Определение 1.2.1. *Идеалом кольца* R называется произвольное подмножество $I \subseteq R$ такое, что

1. $I \neq \varnothing$;
2. Если $a, b \in I$, то $a + b \in I$ (замкнутость по сложению);
3. Если $a \in I, b \in R$, то $ab \in I$ (замкнутость по умножению на элементы кольца R).

Пример. Пусть R – кольцо. Подмножества $R, \{0\}$ – идеалы кольца R. Такие идеалы называются *тривиальными.* Идеал $\{0\}$ называют нулевым, R – единичным.

Определение 1.2.2. Если $a \in R$, то множество

$$\langle a \rangle := \{ab \mid b \in R\} =: aR = Ra$$

— *главный идеал* R, порожденный элементом a.

Пример. Пусть $R = \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$.

$$\langle m \rangle = m\mathbb{Z} = \{mt \mid t \in \mathbb{Z}\}$$

Определение 1.2.3. Подмножество S кольца R называется *мультипликативным*, если

1. $1 \in S$ (где 1 – нейтральный по умножению элемент кольца R);
2. Для любых $a, b \in S:\ ab \in S$.

Определение 1.2.4. Кольцо R называется *целостным*, если оно ненулевое и для любых ненулевых $a, b \in R:\ ab \neq 0$.

Определение 1.2.5. *Полем* называется кольцо, все ненулевые элементы которого обратимы.

Определение 1.2.6. [2, стр. 92] Идеал I кольца R — *простой*, если $I \neq R$ и всякий раз, когда $a, b \in R$ и $ab \in I$, тогда $a \in I$ или $b \in I$.

Определение 1.2.7. [2, стр. 92] Идеал I кольца R— *максимальный*, если $I \neq R$ и нет такого идеала I' отличного от I и содержащего его.

Пример. Пусть I – простой идеал кольца R, тогда $R \setminus I$ — мультипликативное подмножество.

Пример. Пусть $f \in R$, $S = \{f^n | n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$, тогда S — мультипликативное подмножество R.

Теорема 1.2.8. *[1, стр. 92] Идеал I кольца R — максимальный тогда и только тогда, когда R/I – поле.*

Теорема 1.2.9. *[2, стр. 92] Любой максимальный идеал — простой.*

Определение 1.2.10. Кольцо называется *локальным*, если оно имеет ровно один максимальный идеал.

Теорема 1.2.11. *[1, стр. 91] Если I – идеал кольца R, то равносильны следующие утверждения:*

1. *$R \setminus I$ – мультипликативное подмножество;*

2. *R/I – целостное кольцо.*

Определение 1.2.12. Идеал I кольца R — *простой*, если выполняется хотя бы одно из утверждений теоремы 1.2.11.

1.3. ЛОКАЛИЗАЦИЯ КОЛЕЦ

Определение 1.3.1. Пусть S – мультипликативное подмножество кольца R. Морфизм колец $\lambda : R \longrightarrow L$ и кольцо L называются *локализацией R по S*, если $\lambda(S) \subseteq L^*$ и для любого морфизма $\lambda' : R \longrightarrow L'$, такого что $\lambda'(S) \subseteq (L')^*$ существует единственный морфизм $\phi : L \longrightarrow L'$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dr, "\phi"] & \\ R \arrow[ur, "\lambda"] \arrow[rr, "\lambda'"'] & & L' \end{tikzcd}$$

Теорема 1.3.2. *[1, стр. 94] Пусть S – мультипликативное подмножество кольца R. $\lambda : R \longrightarrow L$ и $\lambda' : R \longrightarrow L'$ – локализации R по S. Тогда существует единственный изоморфизм $\phi : L \longrightarrow L'$, для которого коммутативна* *диаграмма*

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dr, "\phi"] & \\ R \arrow[ur, "\lambda"] \arrow[rr, "\lambda'"'] & & L' \end{tikzcd}$$

Теорема 1.3.3. *[1, стр. 94] Пусть S – мультипликативное подмножество кольца R. Тогда существует локализация R по S.*

Теорема 1.3.4. *[5] Пусть R_S – локализация R по $S \subset R$. Тогда идеал $\mathfrak{p}$ расширяется до соответствующего идеала $\mathfrak{p}R \subsetneq$ тогда, и только тогда, когда $S \cap \mathfrak{p} = \varnothing$.*

Определение 1.3.5. *Локализацией R по f* назовем локализацию R по мультипликативному множеству $\{f^n | n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$

Определение 1.3.6. *Локализацией R по простому идеалу $\mathfrak{p}$* будем называть локализацию по множеству $R \setminus \mathfrak{p}$.

Определение 1.3.7. Пусть S – мультипликативное подмножество кольца R. *Аннулятором S* назовем следующее множество

$$\operatorname{Ann}(S) = \{a \in R | aS = \{0\}\}$$

Теорема 1.3.8. *[1, стр. 96] Пусть S – мультипликативное подмножество кольца R, $\lambda : R \longrightarrow L$ – локализация R по S. Если $a \in R$, то $\lambda(a) = 0 \Leftrightarrow as = 0$ для некоторого $s \in S$.*

Теорема 1.3.9. *[1, стр. 97] Пусть S – мультипликативное подмножество кольца R, $\lambda : R \longrightarrow L$ – локализация R по S. Тогда равносильны следующие условия:*

1. $L = \{0\}$;

2. $0 \in S$.

Определение 1.3.10. *Радикалом $\sqrt{I}$ идеала I* кольца R назовем множество

$$\{a \in R | (\exists n \in \mathbb{N})(a^n \in I)\}$$

Определение 1.3.11. Радикал нулевого идеала кольца R назовем *нильрадикалом* R и обозначим $\mathrm{rad}(R)$. Таким образом,

$$\mathrm{rad}(R) = \{a \in R | (\exists n \in \mathbb{N})(a^n = 0)\}$$

Теорема 1.3.12. *[1, стр. 97] Пусть I – идеал кольца R. Тогда $\sqrt{I}$ совпадает с пересечением всех простых идеалов содержащих I.*

Следствие 1.3.13. *Пусть R – кольцо. Тогда $\mathrm{rad}(R)$ совпадает с пересечением всех простых идеалов кольцо R.*

Теорема 1.3.14. *[1, стр. 98] Пусть R – кольцо, $f \in R$, $\lambda : R \longrightarrow L$ – локализация R по f, $a \in R$. Тогда равносильны следующие условия:*

1. $\lambda(a) = 0$;
2. $af^n = 0$, *для некоторого* $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$;
3. $f \in \sqrt{\mathrm{Ann}(a)}$.

Теорема 1.3.15. *[1, стр. 98] Пусть S – мультипликативное подмножество кольца R, $\lambda : R \longrightarrow L$ – морфизм колец. Тогда равносильны следующие условия:*

1. λ – *локализация* R *по* S;
2. (a) $\lambda(S) \subseteq L^*$
   (b) $L = \{\lambda(a)/\lambda(s) | a \in R, s \in S\}$
   (c) $\forall a \in R \; \lambda(a) = 0 \Leftrightarrow as = 0$ *для некоторого* S.

Пример. Пусть B – кольцо, A – его подкольцо, S – мультипликативное подмножество кольца A, $S \subseteq B^*$, $L = \{a/s | a \in A, s \in S\}$, $\lambda : A \longrightarrow L$, $\lambda(a) = a$. Тогда λ – локализация A по S.

Теорема 1.3.16. *[1, стр. 99] Пусть $f : A \longrightarrow B$ – гомоморфизм колец, S – мультипликативное подмножество A, T – мультипликативное подмножество B, $f(S) \subseteq T$, $\alpha : A \longrightarrow A'$ – локализация A по S, $\beta : B \longrightarrow B'$ – локализация B по T. Тогда существует единственный такой гомоморфизм*

$f' : A' \longrightarrow B'$, что коммутативна диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "f'"] & B' \\
A \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "f"'] & B \arrow[u, "\beta"']
\end{tikzcd}
$$

Теорема 1.3.17. *[1, стр. 100] Пусть $\mathfrak{p}$ – простой идеал кольца R и $\lambda : R \longrightarrow L$ – локализация R в $\mathfrak{p}$. Тогда L – локальное кольцо с максимальным идеалом*

$$\mathfrak{m} = \{\lambda(a)/\lambda(b) | a \in R, b \in R \setminus \mathfrak{p}\}$$

1.4. МОДУЛИ

Определение 1.4.1. Пусть R – кольцо. R-модуль состоит из множества M вместе с законом сложения $M \times M \longrightarrow M$, $(a, b) \mapsto a + b$ и законом умножения на скаляр $\alpha \in R$ $R \times M \longrightarrow M$, $(\alpha, a) \mapsto \alpha \cdot a$ такими, что для любых $\alpha, \beta \in R$, $a, b \in M$:

1. M – абелева группа по сложению;
2. $(\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$ и $\alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot a + \alpha b$;
3. $(\alpha \cdot \beta) \cdot a = \alpha \cdot (\beta \cdot a)$
4. $1 \cdot a = a$ для единичного элемента $1 \in R$.

Определение 1.4.2. Пусть R – кольцо. Левый модуль M кольца R или левый R-модуль M, если для любых $a, b \in R$ и $x, y \in M$ выполняется следующее:

1. $(a + b)x = ax + bx$;
2. $a(x + y) = ax + ay$.

Аналогичным образом определяется правый R-модуль. Если модуль M является одновременно левым и правым, то будем называть его просто R-модуль.

Определение 1.4.3. [2, стр. 119] Пусть M, M' – модули кольца R. Морфизмом модулей будем называть отображение такое $f : M \longrightarrow M'$, что для любых $a, b \in R$ и $x, y \in M$ выполняется:

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y)$$

Определение 1.4.4. Модуль M является *прямой суммой* своих подмодулей M_1, M_2, если для любого $m \in M$ найдутся единственный $m_1 \in M_1$ и единственный $m_2 \in M_2$, такие, что $m = m_1 + m_2$. Выражение «*M является прямой суммой M_1 и M_2*» будем записывать $M = M_1 \oplus M_2$.

Теорема 1.4.5. *Пусть M модуль над кольцом R, тогда равносильны следующие условия:*

1. $M = M_1 \oplus M_2$;

2. $M = M_1 + M_2$ *и* $M_1 \cap M_2 = \{0\}$.

Определение 1.4.6. Подмодуль S модуля M *выделяется прямым слагаемым*, если найдется такой подмодуль T модуля M, что $M = S \oplus T$.

Определение 1.4.7. [3, стр. 140] Пусть M – R-модуль кольца R. Некоторое семейство $x_1, ..., x_n \in M$ *линейно независимо*, если для любых $a_i \in R, i \in I$ справедливо $\sum\limits_{i \in I} a_i x_i = 0$ только тогда, когда $a_1 = ... = a_n = 0$.

Определение 1.4.8. Семейство $x_1, ..., x_n$ из определения 1.4.7 будем называть *базисом* R-модуля M.

Определение 1.4.9. Модуль *свободный*, если имеет базис.

Определение 1.4.10. Модуль P над кольцом R называется *проективным*, если для любого эпиморфизма $f : N \twoheadrightarrow M$ R-модулей и любого морфизма $g : P \longrightarrow M$ существует такой морфизм $h : P \longrightarrow N$, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, two heads, "f"] \\ P \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "g"'] & M \end{tikzcd}$$

Теорема 1.4.11. *Модуль проективен тогда и только тогда, когда он является прямым слагаемым некоторого свободного модуля.*

Теорема 1.4.12. *Проективный модуль над локальным кольцом свободен.*

Теорема 1.4.13. *Пусть R – коммутативное кольцо, $\mathfrak{p}$ – простой идеал в R. Если M – проективный R-модуль, то $M_{\mathfrak{p}}$ – свободный $R_{\mathfrak{p}}$-модуль.*

Определение 1.4.14. Проективный модуль M над коммутативным кольцом R имеет ранг $r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, если для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца R свободный $R_{\mathfrak{p}}$-модуль $M_{\mathfrak{p}}$ имеет (свободный) ранг r.

Определение 1.4.15. Тензорное произведение M и N над R состоит из R-модуля T вместе с R-билинейным отображением $\tau : M \times N \longrightarrow T$ такое, что выполняется следующее универсальное свойство:

Для любого R-билинейного отображения $\Phi : M \times N \longrightarrow E$ на некоторый R-модуль E существует единственный R-линейный морфизм $\phi : T \longrightarrow E$ такой, что $\phi \circ \tau = \Phi$ и коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\Phi"'] & T \arrow[dl, "\phi"] \\ E & \end{tikzcd}$$

Обозначается $M \otimes_R N$.

Определение 1.4.16. R-модуль N называют плоским, если для любого мономорфизма R-модулей $M' \longrightarrow M$ отображение $M' \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N$ полученое с помощью тензорного произведения с N над R инъективно. Гомоморфизм колец $\phi : R \longrightarrow R'$ называют плоским, если рассматриваемый как R-модуль модуль R' по средством ϕ – плоский.

Определение 1.4.17. R-модуль N называют вполне плоским, если выполняются следующие условия:

1. N – плоский;
2. Если M – R-модуль такой, что $M \otimes_R N = 0$, то $M = 0$;

Гомоморфизм колец $\phi : R \longrightarrow R'$ называют вполне плоским, если рассматриваемый как R-модуль модуль R' по средством ϕ – вполне плоский.

Теорема 1.4.18. *[5] Пусть $(M_i)_{i \in I}$ семейство R-модулей, N – R-модуль. Тогда существует стандартный изоморфизм*

$$\left(\bigoplus_{i \in I} M_i \right) \otimes_R N \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_R N)$$
$$(x_i)_{i \in I} \otimes_R y \longmapsto (x_i \otimes_R y)_{i \in I}$$

Теорема 1.4.19. *[5] Пусть $(N_i)_{i \in I}$ семейство R-модулей. Прямая сумма $\bigoplus\limits_{i \in I} N_i$ плоская тогда и только тогда, когда модуль N_i плоский для всех $i \in I$.*

Теорема 1.4.20. *[5] Для любого R-модуля N равносильны следующие условия:*

1. *N – вполне плоский;*

2. *N – плоский и для любого максимального идеала $\mathfrak{m} \subset R$ справедливо $\mathfrak{m}N = N$.*

Определение 1.4.21. $\phi : A \longrightarrow B$ – морфизм k-алгебр, $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, S – подмодуль A-модуля A^n. Обозначим $S^B \coloneqq \langle \phi(S) \rangle_B$ B-линейную оболочку подмножества $\phi(S) \subseteq B^n$.

Лемма 1.4.22. *Пусть $\phi :\ A \longrightarrow B$ – морфизм k-алгебр, $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, S, T – подмодули A-модуля A^n, $A^n = S \oplus T$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

1. *Существует такой изоморфизм B-модулей*

$$\psi : (B \otimes_A S) \oplus (B \otimes_A T) \longrightarrow B^n,$$

что для всех $b \in B$, $s \in S$, $t \in T$

$$(b \otimes_A s, b \otimes_A t) \overset{\psi}{\mapsto} b(s+t);$$

2.

$$\psi\left((B \otimes_A S) \times \{0\}\right) = S^B,$$

$$\psi\left(\{0\} \times (B \otimes_A B)\right) = T^B,$$

$$B^n = (A^n)^B = S^B \oplus T^B;$$

3. *Ранг проективного B-модуля S^B равен рангу проективного A-модуля S. (1.4.14)*

Определение 1.4.23. Пусть M – R-модуль кольца R. Множество всех $\mathrm{End}_R(M)$ будем называть *главной линейной группой.* Обозначается главная линейная группа $\mathrm{GL}_R(M)$.

Определение 1.4.24. Любой морфизм колец $\phi : k \longrightarrow A$ будем называть k-алгеброй.

A автоматически является k-модулем по операции умножения

$$c \cdot a = \phi(c)a, \; c \in k$$

1.5. ЛОКАЛИЗАЦИЯ МОДУЛЕЙ

Определение 1.5.1. Пусть S – мультипликативное подмножество кольца R, M — R-модуль. Морфизм R-модулей $\lambda : M \longrightarrow L$ и R-модуль L называются *локализацией M по S*, если выполняются следующие условия:

1. $S_L \subseteq GL_R(L)$;

2. для любого морфизма R-модулей $\lambda' : M \longrightarrow L'$, для которого $S'_L \subseteq GL_R(L')$, существует и единственен такой морфизм $\phi : L \longrightarrow L'$, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dr, "\phi"] & \\ M \arrow[ur, "\lambda"] \arrow[rr, "\lambda'"'] & & L' \end{tikzcd}$$

Теорема 1.5.2. *[5] Пусть $S \subset R$ – мультипликативное множество. Тогда:*

1. *$\phi : R \longrightarrow R_S$ – плоский морфизм, т. е. R-модуль R_S плоский по средством ϕ;*

2. *для любого R-модуля M существует стандартный изоморфизм*

$$M \otimes_R R \xrightarrow{\sim} M_S$$
$$\left(x \otimes \frac{a}{s}\right) \longmapsto \frac{ax}{s}$$

1.6. КАТЕГОРИИ И ФУНКТОРЫ

Определение 1.6.1. Граф G – это любая упорядоченная четверка $(V, A, \mathrm{dom}, \mathrm{cod}$ где V, A – любые множества, $\mathrm{dom}, \mathrm{cod} : A \longrightarrow V$ – произвольные отображения. Элементы V – вершины графа G, элементы A – стрелки, или ребра графа G. Если $a \in A$, то $\mathrm{dom}(a) \in V$ называется началом, или областью определения a, $\mathrm{cod}(a) \in V$ – концом, или областью значений a, или кообластью a.

Пример 1.6.1. Граф G состоит из множества вершин $V = \{A, B, C, D\}$, множества стрелок $A = \{e, f, g, h\}$, отображений $\mathrm{dom}, \mathrm{cod} : A \longrightarrow V$, $\mathrm{cod}(e) = \mathrm{cod}(e) = A$, $\mathrm{dom}(f) = A$, $\mathrm{cod}(f) = B$, $\mathrm{dom}(g) = A$, $\mathrm{cod}(d) = B$, $\mathrm{dom}(h) = B$, $\mathrm{cod}(h) = C$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "e"] \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & B \arrow[r, "h"] & C & D \end{tikzcd}$$

Определение 1.6.2. Если a, b – вершины графа G, то множество стрелок графа G из a в b обозначим $G(a, b)$, или $\mathrm{Mor}_G(a, b)$, или $\mathrm{Mor}(a, b)$, если ясно, о каком графе идет речь.

Пример. В графе G из 1.6.1 $G(A, A) = \{e\}$, $G(A, B) = \{f, g\}$, $G(A, C) = \varnothing$, $G(C, D) = \varnothing$ и так далее.

Если стрелка f имеет начало a и конец b, то мы пишем $f : a \longrightarrow b$, или $a \xrightarrow{f} b$. Если мы желаем подчеркнуть, что стрелка $f : a \longrightarrow b$ относится к графу G, то пишем $a \xrightarrow[G]{f} b$ Это бывает нужным, если на одном и том же множестве V определено более одного графа с множеством вершин V.

Определение 1.6.3. Множество вершин графа G обозначим $\mathrm{Ob}(G)$.

Определение 1.6.4. Пусть G, H – графы. Морфизмом $G \longrightarrow H$ назовем любое отображение $\phi : V(G) \cup A(G) \longrightarrow V(H) \cup A(H)$ такое, что $\phi(V(G)) \subseteq V(H)$ (т. е. вершины G переходят в вершины H), $\phi(A(G)) \subseteq A(H)$ (т. е. ребра G переходят в ребра H), и если $a, b \in V(G)$, $f \in \mathrm{Mor}_G(a, b)$, то $\phi(f) \in \mathrm{Mor}_H(\phi(a), \phi(b))$ (т. е. из $f : a \longrightarrow b$ следует $\phi(f) : \phi(a) \longrightarrow \phi(b)$).

Определение 1.6.5. *Категория* $\mathcal{C}$ – это граф G, в котором для произвольных $A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ задано произведение $\mathrm{Mor}(B, C) \times \mathrm{Mor}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Mor}(A, C)$, причем выполняются следующие условия.

1. Для $A, B, C, D \in \mathrm{Ob}((C))$ и $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$, $g \in \mathrm{Mor}(B, C)$, $h \in \mathrm{Mor}(C, D)$ выполняется закон ассоциативности $(hg)f = h(gf)$;

2. Для каждого $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ найдется $e \in \mathrm{Mor}(A, A)$ такой, что для любого $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ и $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$, $g \in \mathrm{Mor}(B, A)$ выполняются равенства $fe = f$ и $eg = g$.

Определение 1.6.6. Элементы $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ называются *объектами категории* $\mathcal{C}$.

Определение 1.6.7. Элементы $\mathrm{Mor}(X,Y)$ называются *морфизмами* X *в* Y, или морфизмами $X \longrightarrow Y$.

Если $\alpha \in \mathrm{Mor}(X,Y)$ и ясно, о какой категории идет речь, то мы пишем $\alpha : X \longrightarrow Y$, или $X \xrightarrow{\alpha} Y$. Морфизм $e : A \longrightarrow A$ из аксиомы 2 определения 1.6.5 называется *тождественным*, или *единичным* морфизмом объекта A.

Определение 1.6.8. Множество всех морфизмов категории $\mathcal{C}$ обозначим $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$.

Определение 1.6.9. Пусть $\mathcal{A},\mathcal{B}$ – категории. Говорят, что F – функтор $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, если каждому $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ сопоставлен некоторый объект $F(X) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ и для каждого морфизма $\phi : X \longrightarrow Y$ в $\mathcal{A}$ определен морфизм $F(\phi) : F(X) \longrightarrow F(Y)$ в $\mathcal{B}$ таким образом, что выполняются следующие свойства

1. Если $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, то $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$;

2. Если $\alpha : A \longrightarrow B$, $\beta : B \longrightarrow C$ – морфизмы в $\mathcal{A}$, то $F(\beta\alpha) = F(\beta)F(\alpha)$.

Условие $F(\beta\alpha) = F(\beta)F(\alpha)$ означает, что функтор переводит любой коммутативный треугольник в категории $\mathcal{A}$ в коммутативный треугольник в категории $\mathcal{B}$

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "\beta"] & \\ A \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr, "\gamma"'] & & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & F(B) \arrow[dr, "F(\beta)"] & \\ F(A) \arrow[ur, "F(\alpha)"] \arrow[rr, "F(\gamma)"'] & & F(C) \end{tikzcd}$$

Вообще, очевидно, функтор переводит любую коммутативную диаграмму в коммутативную диаграмму. Интуитивно, *функтор – это морфизм категорий.*

Теорема 1.6.10. *[1, стр. 49] Пусть I – множество, $(F_i)_{i\in I}$ – семейство функторов из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{U}$-множеств $\mathcal{S}$. Существует и единственен такой функтор $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}$, что*

1. *для каждого $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ $F(X) = \prod\limits_{i\in I} F_i(X)$;*

2. *для любого морфизма $\phi : X \longrightarrow Y$ в $\mathcal{C}$ $F(\phi) = \prod\limits_{i\in I} F_i(\phi)$.*

1.7. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И ФУНКТОРЫ

Определение 1.7.1. Любой функтор $\mathbf{Alg_k} \longrightarrow \mathbf{Set}$ – k-функтор.

Определение 1.7.2. Пусть $F : \mathbf{Alg_k} \longrightarrow \mathbf{Set}$ – функтор забвения, Γ – множество. Аффинным пространством A_k^Γ над k размерности $|\Gamma|$ назовем k-функтор F^Γ (1.6.10).

Очевидно, A_k^Γ – k-функтор, любой k-алгебре A сопоставляющий A^Γ, и произвольному морфизму k-алгебр $\phi : A \longrightarrow B$ соотносящий отображение $\phi^\Gamma : A^\Gamma \longrightarrow B^\Gamma$.

Если $n \in \mathbb{N}$ и $\Gamma = \{1, ..., n\}$ ($\Gamma = \varnothing$ при $n = 0$), то для любых $a_1, ..., a_n$ мы считаем, что $(\alpha_\gamma)_\gamma \in \Gamma = (a_1, ..., a_n)$. Таким образом, для произвольного множества S мы очевидным образом отождествляем S^Γ и S^n. Для краткости мы пишем $A_k^n := A_k^\Gamma$, и называем k-функтор A_k^n аффинным k-пространством над k. Если ясно, о каком k идет речь, можно писать A^n.

Определение 1.7.3. Системой уравнений над k называется тройка

$$S = (P, (T_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}, (f_\delta)_{\delta\in\Delta}) \tag{1.7.1}$$

где P — k-алгебра многочленов, $(T_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} =: T$ – ее базис, и $(f_\delta)_{\delta\in\Delta})$ – любое семейство многочленов из P.

Определение 1.7.4. Решением системы уравнений 1.7.1 в k-алгебре A называется произвольное семейство $a \in A^\Gamma$ такое, что $f_\delta(a) = 0$ для всех $\delta \in \Delta$.

2. РАСШИРЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ И СПУСК

Пусть есть мультипликативное подмножество $f_1, \dots, f_n$ кольца R, порождающих единичный идеал. Введем $R' \coloneqq \prod_{i=1}^{n} R_{f_i}$. Покажем, что морфизм $R \longrightarrow R'$ – вполне плоский.

Распишем $R' = \prod_{i=1}^{n} R_{f_i} = R_{f_1} \times \dots \times R_{f_n}$. Множество $f_1, \dots, f_n$ – мультипликативное, тогда по (1.5.2) $R \longrightarrow R_{f_i}$ – плоский гомоморфизм модулей ($i = \overline{1,n}$). Если рассмотреть R' как прямую сумму R-модулей, тогда по (1.4.19) R' – плоское кольцо. Кроме того, если есть максимальный идеал $\mathfrak{m} \subset R$, то найдется такой $f_j \notin \mathfrak{m}$ ($j = \overline{1,n}$), что $\mathfrak{m}R_{f_i} \subsetneq R_{f_i}$. Таким образом, $R \longrightarrow R'$ – вполне плоский гомоморфизм по (1.4.20).

Для тех же R и R' покажем, что R-**Mod** категория эквивалентна (декартовому) произведению категорий $\prod_{i=1}^{n} R_{f_i}$-**Mod**.

Категория K-**Mod** K-модулей для произвольного кольца K составляется следующим образом:

- объектами категорий будут K-модули;
- стрелками – гомоморфизмы модулей.

Определение 2.0.1. Для категорий $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ будем называть категорию $\mathfrak{E} = \mathfrak{C} \times \mathfrak{D}$ произведением категорий. Определим $\mathfrak{E}$ следующим образом:

- $\mathrm{Ob}(\mathfrak{E}) = \mathrm{Ob}(\mathfrak{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathfrak{D})$.
  $\mathrm{Ob}(\mathfrak{E}) \ni E = C \times D$, C, D объекты категорий $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{D}$ соответственно;
- $\mathrm{Mor}(\mathfrak{E}) = \mathrm{Mor}(\mathfrak{C}) \times \mathrm{Mor}(\mathfrak{D})$.

А именно, существует функтор $S : \mathfrak{C} \times \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{E}$ такой, что для $C \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$, $D \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{D})$ и стрелок $f : C \longrightarrow C'$, $g : D \longrightarrow D'$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
S(C,D) \arrow[r, "S(f,D)"] \arrow[d, "S(C,g)"'] & S(C',D) \arrow[d, "S(C',g)"] \\
S(C,D') \arrow[r, "S(f,D')"'] & S(C',D')
\end{tikzcd}$$

Таким образом, для R_{f_i} R-модулей получим

$$\begin{tikzcd} & R_{f_1 f_2} & \\ R_{f_1} \arrow[ur, "f_2 R_{f_1}"] \arrow[r, "(\cdot, R_{f_2})"'] & R_{f_1} \times R_{f_2} \arrow[u, dotted] & R_{f_2} \arrow[ul, "f_1 R_{f_2}"'] \arrow[l, "(R_{f_1}, \cdot)"] \end{tikzcd}$$

Для $R_{f_3}, \cdot, R_{f_n}$ определяется индуктивно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении стоит сказать, что в коммутативной алгебре и алгебраической геометрии еще довольно много задач, требующих решения, однако данная работа не находится на пике развития раздела. Алгебраическая геометрия и коммутативная алгебра полагаются на проективные модули, которые грубо можно представить как привычные инъективные, сюръективные отображения или проекции векторов на оси координат.

Применить построенный аппарат можно для решения задач дифференциальных уравнений, теории чисел и др. В ходе работы поставленные задачи были выполнены, цель достигнута.

Дальнейшее развитие темы это построение, так называемых вытягиваний (англ. pull-back) и афинных схем. Последние предлагают инструментарий для представления функций как модули.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Волочков, А.А. Схемы. / А.А.Волочков – Пермь: [б./и.], 2023. – 233.

2. Lang, S. Algebra / S.Lang – New York: Sprinter, 2002 – 918.

3. Cohn, P.M. Algebra Volume 2 / P.M. Cohn – 2nd ed. – Avon: John Willey & Sons Ltd., 1989 – 428.

4. Atiyah, M. F., MACDONALD I. G. Introduction to Commutative Algebra / M. F. Atiyah, I. G. Macdonald – London: Addison-Wesley, 1969 – 128.

5. Siegfried, B. Algebraic Geometry and Commutative Algebra / S. Bosch – London: Springer-Verlag, 2013 – 504.