

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования
«Пермский государственный национальный исследовательский университет»

Механико-математический факультет
Кафедра фундаментальной математики

Курсовая работа
на тему:

Алгебраические кривые

по дисциплине "Обыкновенные дифференциальные уравнения"

Направление 01.03.01 Математика

Выполнил студент группы ММ/О ММТ-2021 НБ	Ляховой Д.С.
Научный руководитель кандидат	Волочков А.А.
физико-математических наук, доцент кафедры	
фундаментальной математики	

Пермь 2023

Содержание

1	ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ	3
1.1	АЛГЕБРА	3
1.2	ИДЕАЛЫ	4
1.3	ЛОКАЛИЗАЦИЯ КОЛЕЦ	5
1.4	МОДУЛИ	7
1.5	ЛОКАЛИЗАЦИЯ МОДУЛЕЙ	9
1.6	КАТЕГОРИИ И ФУНКТОРЫ	9
1.7	СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И ФУНКТОРЫ	11
2	СХЕМЫ ГРАССМАНА	12
2.1	ФУНКТОРЫ ГРАССМАНА	12
	Литература	13

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В этой главе введем необходимые для дальнейшей работы определения, леммы и теоремы. Также в данной работе будем полагать, что «кольцо» означает «коммутативное кольцо», если явным образом не оговаривается иное.

1.1. АЛГЕБРА

Определение 1.1.1. Пусть X – множество, \sim – отношение эквиваленции на X . *Классом эквивалентности по отношению \sim элемента $x \in X$* назовем множество

$$X_x = \{x' \in X \mid x \sim x'\}$$

Определение 1.1.2. Множество, элементами которого являются классы эквивалентности (из 1.1.1) обозначим X/\sim и назовем *фактормножеством*.

Определение 1.1.3. Отображение $f : X \longrightarrow X/\sim$ называется *естественным*.

Определение 1.1.4. Множество всех отображений Y в X называется X^Y

Определение 1.1.5. Пусть L – кольцо. Множество L^* называется *множеством обратимых элементов кольца L* и определяется следующим образом

$$L^* = \{l \in L \mid \exists l' \in L : ll' = l'l = 1_L\}$$

Определение 1.1.6. Пусть R – кольцо. Левый модуль M кольца R или левый R -модуль M , если для любых $a, b \in R$ и $x, y \in M$ выполняется следующее:

1. $(a + b)x = ax + bx$;
2. $a(x + y) = ax + ay$.

Аналогичным образом определяется правый R -модуль. Если модуль M является одновременно левым и правым, то будем называть его просто R -модуль.

Определение 1.1.7. Пусть A, B – кольца. Отображение $f : A \longrightarrow B$ называется *морфизмом колец*, если:

1. $f(1) = 1$;
2. $f(x + y) = f(x) + f(y)$;
3. $f(xy) = f(x)f(y)$.

Определение 1.1.8. [2, стр. 119] Пусть M, M' – модули кольца R . Морфизмом модулей будем называть отображение такое $f : M \longrightarrow M'$, что для любых $a, b \in R$ и $x, y \in M$ выполняется:

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y)$$

Определение 1.1.9. Инъективный морфизм $f : X \longrightarrow Y$ называется *мономорфизмом*. Обозначается $f : X \rightarrowtail Y$.

Определение 1.1.10. Сюръективный морфизм $f : X \longrightarrow Y$ называется *эпиморфизмом*. Обозначается $f : X \twoheadrightarrow Y$.

1.2. ИДЕАЛЫ

Определение 1.2.1. Идеалом кольца R называется произвольное подмножество $I \subseteq R$ такое, что

1. $I \neq \emptyset$;
2. Если $a, b \in I$, то $a + b \in I$ (замкнутость по сложению);
3. Если $a \in I, b \in R$, то $ab \in I$ (замкнутость по умножению на элементы кольца R).

Пример. Пусть R – кольцо. Подмножества $R, \{0\}$ – идеалы кольца R . Такие идеалы называются *тривиальными*.

Определение 1.2.2. Если $a \in R$, то множество

$$\langle a \rangle := \{ab \mid b \in R\} =: aR = Ra$$

— *главный идеал* R , порожденный элементом a .

Пример. Пусть $R = \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$.

$$\langle m \rangle = m\mathbb{Z} = \{mt \mid t \in \mathbb{Z}\}$$

Определение 1.2.3. Подмножество S кольца R называется *мультипликативным*, если

1. $1 \in S$ (где 1 – нейтральный по умножению элемент кольца R);
2. Для любых $a, b \in S$: $ab \in S$.

Определение 1.2.4. Кольцо R называется *целостным*, если оно ненулевое и для любых ненулевых $a, b \in R$: $ab \neq 0$.

Определение 1.2.5. *Полем* называется кольцо, все ненулевые элементы которого обратимы.

Определение 1.2.6. [2, стр. 92] Идеал I кольца R — *простой*, если $I \neq R$ и всякий раз, когда $a, b \in R$ и $ab \in I$, тогда $a \in I$ или $b \in I$.

Определение 1.2.7. [2, стр. 92] Идеал I кольца R — *максимальный*, если $I \neq R$ и нет такого идеала I' отличного от I и содержащего его.

Пример. Пусть I – простой идеал кольца R , тогда $R \setminus I$ — мультипликативное подмножество.

Пример. Пусть $f \in R$, $S = \{f^n | n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$, тогда S — мультипликативное подмножество R .

Теорема 1.2.8. [1, стр. 92] Идеал I кольца R — максимальный тогда и только тогда, когда R/I — поле.

Теорема 1.2.9. [2, стр. 92] Любой максимальный идеал — простой.

Определение 1.2.10. Кольцо называется *локальным*, если оно имеет ровно один максимальный идеал.

Теорема 1.2.11. [1, стр. 91] Если I — идеал кольца R , то равносильны следующие утверждения:

1. $R \setminus I$ — мультипликативное подмножество;
2. R/I — целостное кольцо.

Определение 1.2.12. Идеал I кольца R — *простой*, если выполняется хотя бы одно из утверждений теоремы 1.2.11.

1.3. ЛОКАЛИЗАЦИЯ КОЛЕЦ

Определение 1.3.1. Пусть S — мультипликативное подмножество кольца A . Морфизм колец $\lambda : A \rightarrow L$ и кольцо L называются *локализацией A по S* , если $\lambda(S) \subseteq L^*$ и для любого морфизма $\lambda' : A \rightarrow L'$, такого что $\lambda'(S) \subseteq (L')^*$ существует единственный морфизм $\phi : L \rightarrow L'$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ \lambda \nearrow & & \searrow \phi \\ A & \xrightarrow{\lambda'} & L' \end{array}$$

Теорема 1.3.2. [1, стр. 94] Пусть S — мультипликативное подмножество кольца A . $\lambda : A \rightarrow L$ и $\lambda' : A \rightarrow L'$ — локализации A по S . Тогда существует единственный изоморфизм $\phi : L \rightarrow L'$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ \lambda \nearrow & & \searrow \phi \\ A & \xrightarrow{\lambda'} & L' \end{array}$$

Теорема 1.3.3. [1, стр. 94] Пусть S — мультипликативное подмножество кольца A . Тогда существует локализация A по S .

Определение 1.3.4. Локализацией A по f назовем локализацию A по мультипликативному множеству $\{f^n | n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$

Определение 1.3.5. Локализацией A по простому идеалу \mathfrak{p} будем называть локализацию по множеству $A \setminus \mathfrak{p}$.

Определение 1.3.6. Пусть S – мультипликативное подмножество кольца A . Аннулятором S назовем следующее множество

$$\text{Ann}(S) = \{a \in A \mid aS = \{0\}\}$$

Теорема 1.3.7. [1, стр. 96] Пусть S – мультипликативное подмножество кольца A , $\lambda: A \rightarrow L$ – локализация A по S . Если $a \in A$, то $\lambda(a) = 0 \Leftrightarrow as = 0$ для некоторого $s \in S$.

Теорема 1.3.8. [1, стр. 97] Пусть S – мультипликативное подмножество кольца A , $\lambda: A \rightarrow L$ – локализация A по S . Тогда равносильны следующие условия:

1. $L = \{0\}$;
2. $0 \in S$.

Определение 1.3.9. Радикалом \sqrt{I} идеала I кольца R назовем множество

$$\{a \in R \mid (\exists n \in \mathbb{N})(a^n \in I)\}$$

Определение 1.3.10. Радикал нулевого идеала кольца R назовем *нильрадикалом* R и обозначим $\text{rad}(R)$. Таким образом,

$$\text{rad}(R) = \{a \in R \mid (\exists n \in \mathbb{N})(a^n = 0)\}$$

Теорема 1.3.11. [1, стр. 97] Пусть I – идеал кольца R . Тогда \sqrt{I} совпадает с пересечением всех простых идеалов содержащих I .

Следствие 1.3.12. Пусть R – кольцо. Тогда $\text{rad}(R)$ совпадает с пересечением всех простых идеалов кольца R .

Теорема 1.3.13. [1, стр. 98] Пусть A – кольцо, $f \in A$, $\lambda: A \rightarrow L$ – локализация A по f , $a \in A$. Тогда равносильны следующие условия:

1. $\lambda(a) = 0$;
2. $af^n = 0$, для некоторого $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$;
3. $f \in \sqrt{\text{Ann}(a)}$.

Теорема 1.3.14. [1, стр. 98] Пусть S – мультипликативное подмножество кольца A , $\lambda: A \rightarrow L$ – морфизм колец. Тогда равносильны следующие условия:

1. λ – локализация A по S ;
2. (a) $\lambda(S) \subseteq L^*$
(b) $L = \{\lambda(a)/\lambda(s) \mid a \in A, s \in S\}$
(c) $\forall a \in A \lambda(a) = 0 \Leftrightarrow as = 0$ для некоторого $s \in S$.

Пример. Пусть B – кольцо, A – его подкольцо, S – мультипликативное подмножество кольца A , $S \subseteq B^*$, $L = \{a/s | a \in A, s \in S\}$, $\lambda : A \rightarrow L$, $\lambda(a) = a$. Тогда λ – локализация A по S .

Теорема 1.3.15. [1, стр. 99] Пусть $f : A \rightarrow B$ – гомоморфизм колец, S – мультипликативное подмножество A , T – мультипликативное подмножество B , $f(S) \subseteq T$, $\alpha : A \rightarrow A'$ – локализация A по S , $\beta : B \rightarrow B'$ – локализация B по T . Тогда существует единственный такой гомоморфизм $f' : A' \rightarrow B'$, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{f'} & B' \\ \alpha \uparrow & & \uparrow \beta \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Теорема 1.3.16. [1, стр. 100] Пусть \mathfrak{p} – простой идеал кольца R и $\lambda : R \rightarrow L$ – локализация R в \mathfrak{p} . Тогда L – локальное кольцо с максимальным идеалом

$$\mathfrak{m} = \{\lambda(a)/\lambda(b) | a \in R, b \in R \setminus \mathfrak{p}\}$$

1.4. МОДУЛИ

Определение 1.4.1. Модуль M является *прямой суммой* своих подмодулей M_1, M_2 , если для любого $m \in M$ найдутся единственный $m_1 \in M_1$ и единственный $m_2 \in M_2$, такие, что $m = m_1 + m_2$. Выражение « M является прямой суммой M_1 и M_2 » будем записывать $M = M_1 \oplus M_2$.

Теорема 1.4.2. Пусть M модуль над кольцом R , тогда равносильны следующие условия:

1. $M = M_1 \oplus M_2$;
2. $M = M_1 + M_2$ и $M_1 \cap M_2 = \{0\}$.

Определение 1.4.3. Подмодуль S модуля M выделяется *прямым слагаемым*, если найдется такой подмодуль T модуля M , что $M = S \oplus T$.

Определение 1.4.4. [3, стр. 140] Пусть M – R -модуль кольца R . Некоторое семейство $x_1, \dots, x_n \in M$ *линейно независимо*, если для любых $a_i \in R, i \in I$ справедливо $\sum_{i \in I} a_i x_i = 0$ только тогда, когда $a_1 = \dots = a_n = 0$.

Определение 1.4.5. Семейство x_1, \dots, x_n из определения 1.4.4 будем называть *базисом* R -модуля M .

Определение 1.4.6. Модуль *свободный*, если имеет базис.

Определение 1.4.7. Модуль P над кольцом R называется *проективным*, если для любого эпиморфизма $f : N \rightarrow M$ R -модулей и любого морфизма $g : P \rightarrow M$ существует такой

морфизм $h : P \longrightarrow N$, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & N \\ & \nearrow h & \downarrow f \\ P & \xrightarrow{g} & M \end{array}$$

Теорема 1.4.8. *Модуль проективен тогда и только тогда, когда он является прямым слагаемым некоторого свободного модуля.*

Теорема 1.4.9. *Проективный модуль над локальным кольцом свободен.*

Теорема 1.4.10. *Пусть R – коммутативное кольцо, \mathfrak{p} – простой идеал в R . Если M – проективный R -модуль, то $M_{\mathfrak{p}}$ – свободный $R_{\mathfrak{p}}$ -модуль.*

Определение 1.4.11. Проективный модуль M над коммутативным кольцом R имеет ранг $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, если для любого простого идеала \mathfrak{p} кольца R свободный $R_{\mathfrak{p}}$ -модуль $M_{\mathfrak{p}}$ имеет (свободный) ранг r .

Определение 1.4.12. Пусть K – кольцо, U, V, W – K -модули, $f : U \times V \longrightarrow W$ – билинейное отображение. Составим K -модуль T и билинейное отображение $g : U \times V \longrightarrow T$ такие, что для любого f существует отображение $h : T \longrightarrow W$, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & T \\ & \nearrow f & \downarrow h \\ U \times V & & W \\ & \searrow g & \end{array}$$

Модуль T с соответствующими свойствами назовем результатом *тензорного произведения* U на V над кольцом K и обозначим $U \otimes_K V$.

Определение 1.4.13. $\phi : A \longrightarrow B$ – морфизм k -алгебр, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, S – подмодуль A -модуля A^n . Обозначим $S^B := \langle \phi(S) \rangle_B$ B -линейную оболочку подмножества $\phi(S) \subseteq B^n$.

Лемма 1.4.14. *Пусть $\phi : A \longrightarrow B$ – морфизм k -алгебр, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, S, T – подмодули A -модуля A^n , $A^n = S \oplus T$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

1. *Существует такой изоморфизм B -модулей*

$$\psi : (B \otimes_A S) \oplus (B \otimes_A T) \longrightarrow B^n,$$

что для всех $b \in B, s \in S, t \in T$

$$(b \otimes_A s, b \otimes_A t) \xrightarrow{\psi} b(s + t);$$

2.

$$\psi((B \otimes_A S) \times \{0\}) = S^B,$$

$$\psi(\{0\} \times (B \otimes_A B)) = T^B,$$

$$B^n = (A^n)^B = S^B \oplus T^B;$$

3. Ранг проективного B -модуля S^B равен рангу проективного A -модуля S . (1.4.11)

Определение 1.4.15. Пусть M – R -модуль кольца R . Множество всех $\text{End}_R(M)$ будем называть *главной линейной группой*. Обозначается главная линейная группа $\text{GL}_R(M)$.

Определение 1.4.16. Любой морфизм колец $\phi : k \longrightarrow A$ будем называть k -алгеброй.

A автоматически является k -модулем по операции умножения

$$c \cdot a = \phi(c)a, \quad c \in k$$

1.5. ЛОКАЛИЗАЦИЯ МОДУЛЕЙ

Определение 1.5.1. Пусть S – мультипликативное подмножество кольца R , M – R -модуль. Морфизм R -модулей $\lambda : M \longrightarrow L$ и R -модуль L называются *локализацией M по S* , если выполняются следующие условия:

1. $S_L \subseteq \text{GL}_R(L)$;
2. для любого морфизма R -модулей $\lambda' : M \longrightarrow L'$, для которого $S'_L \subseteq \text{GL}_R(L')$, существует и единственен такой морфизм $\phi : L \longrightarrow L'$, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ \lambda \nearrow & & \searrow \phi \\ M & \xrightarrow{\lambda'} & L' \end{array}$$

1.6. КАТЕГОРИИ И ФУНКТОРЫ

Определение 1.6.1. Граф G – это любая упорядоченная четверка $(V, A, \text{dom}, \text{cod})$, где V , A – любые множества, $\text{dom}, \text{cod} : A \longrightarrow V$ – произвольные отображения. Элементы V – вершины графа G , элементы A – стрелки, или ребра графа G . Если $a \in A$, то $\text{dom}(a) \in V$ называется началом, или областью определения a , $\text{cod}(a) \in V$ – концом, или областью значений a , или кообластью a .

Пример 1.6.1. Граф G состоит из множества вершин $V = \{A, B, C, D\}$, множества стрелок $A = \{e, f, g, h\}$, отображений $\text{dom}, \text{cod} : A \longrightarrow V$, $\text{cod}(e) = \text{cod}(f) = A$, $\text{dom}(f) = A$, $\text{cod}(f) = B$, $\text{dom}(g) = A$, $\text{cod}(g) = B$, $\text{dom}(h) = B$, $\text{cod}(h) = C$.

$$e \circlearrowleft A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B \xrightarrow{h} C \quad D$$

Определение 1.6.2. Если a, b – вершины графа G , то множество стрелок графа G из a в b обозначим $G(a, b)$, или $\text{Mor}_G(a, b)$, или $\text{Mor}(a, b)$, если ясно, о каком графе идет речь.

Пример. В графе G из 1.6.1 $G(A, A) = \{e\}$, $G(A, B) = \{f, g\}$, $G(A, C) = \emptyset$, $G(C, D) = \emptyset$ и так далее.

Если стрелка f имеет начало a и конец b , то мы пишем $f : a \longrightarrow b$, или $a \xrightarrow{f} b$. Если мы желаем подчеркнуть, что стрелка $f : a \longrightarrow b$ относится к графу G , то пишем $a \xrightarrow[G]{f} b$. Это бывает нужным, если на одном и том же множестве V определено более одного графа с множеством вершин V .

Определение 1.6.3. Множество вершин графа G обозначим $\text{Ob}(G)$.

Определение 1.6.4. Пусть G, H – графы. Морфизмом $G \longrightarrow H$ назовем любое отображение $\phi : V(G) \cup A(G) \longrightarrow V(H) \cup A(H)$ такое, что $\phi(V(G)) \subseteq V(H)$ (т. е. вершины G переходят в вершины H), $\phi(A(G)) \subseteq A(H)$ (т. е. ребра G переходят в ребра H), и если $a, b \in V(G)$, $f \in \text{Mor}_G(a, b)$, то $\phi(f) \in \text{Mor}_H(\phi(a), \phi(b))$ (т. е. из $f : a \longrightarrow b$ следует $\phi(f) : \phi(a) \longrightarrow \phi(b)$).

Определение 1.6.5. Категория \mathcal{C} – это граф G , в котором для произвольных $A, B, C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ задано произведение $\text{Mor}(B, C) \times \text{Mor}(A, B) \longrightarrow \text{Mor}(A, C)$, причем выполняются следующие условия.

1. Для $A, B, C, D \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ и $f \in \text{Mor}(A, B)$, $g \in \text{Mor}(B, C)$, $h \in \text{Mor}(C, D)$ выполняется закон ассоциативности $(hg)f = h(gf)$;
2. Для каждого $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ найдется $e \in \text{Mor}(A, A)$ такой, что для любого $B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ и $f \in \text{Mor}(A, B)$, $g \in \text{Mor}(B, A)$ выполняются равенства $fe = f$ и $eg = g$.

Определение 1.6.6. Элементы $\text{Ob}(\mathcal{C})$ называются *объектами категории \mathcal{C}* .

Определение 1.6.7. Элементы $\text{Mor}(X, Y)$ называются *морфизмами X в Y* , или морфизмами $X \longrightarrow Y$.

Если $\alpha \in \text{Mor}(X, Y)$ и ясно, о какой категории идет речь, то мы пишем $\alpha : X \longrightarrow Y$, или $X \xrightarrow{\alpha} Y$. Морфизм $e : A \longrightarrow A$ из аксиомы 2 определения 1.6.5 называется *тождественным*, или *единичным* морфизмом объекта A .

Определение 1.6.8. Множество всех морфизмов категории \mathcal{C} обозначим $\text{Mor}(\mathcal{C})$.

Определение 1.6.9. Пусть \mathcal{A}, \mathcal{B} – категории. Говорят, что F – функтор $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, если каждому $X \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ сопоставлен некоторый объект $F(X) \in \text{Ob}(\mathcal{B})$ и для каждого морфизма $\phi : X \longrightarrow Y$ в \mathcal{A} определен морфизм $F(\phi) : F(X) \longrightarrow F(Y)$ в \mathcal{B} таким образом, что выполняются следующие свойства

1. Если $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$, то $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$;
2. Если $\alpha : A \longrightarrow B$, $\beta : B \longrightarrow C$ – морфизмы в \mathcal{A} , то $F(\beta\alpha) = F(\beta)F(\alpha)$.

Условие $F(\beta\alpha) = F(\beta)F(\alpha)$ означает, что функтор переводит любой коммутативный треугольник в категории \mathcal{A} в коммутативный треугольник в категории \mathcal{B}

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ \alpha \nearrow & & \searrow \beta \\ A & \xrightarrow{\gamma} & C \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & F(B) & \\ F(\alpha) \nearrow & & \searrow F(\beta) \\ F(A) & \xrightarrow{F(\gamma)} & F(C) \end{array}$$

Вообще, очевидно, функтор переводит любую коммутативную диаграмму в коммутативную диаграмму. Интуитивно, *функтор – это морфизм категорий*.

Теорема 1.6.10. [1, стр. 49] Пусть I – множество, $(F_i)_{i \in I}$ – семейство функторов из категории \mathcal{C} в категорию \mathcal{U} -множеств \mathcal{S} . Существует и единственен такой функтор $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}$, что

1. для каждого $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ $F(X) = \prod_{i \in I} F_i(X)$;
2. для любого морфизма $\phi : X \longrightarrow Y$ в \mathcal{C} $F(\phi) = \prod_{i \in I} F_i(\phi)$.

1.7. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И ФУНКТОРЫ

Определение 1.7.1. Любой функтор $\mathbf{Alg}_k \longrightarrow \mathbf{Set}$ – k -функтор.

Определение 1.7.2. Пусть $F : \mathbf{Alg}_k \longrightarrow \mathbf{Set}$ – функтор забвения, Γ – множество. Аффинным пространством A_k^Γ над k размерности $|\Gamma|$ назовем k -функтор F^Γ (1.6.10).

Очевидно, A_k^Γ – k -функтор, любой k -алгебре A сопоставляющий A^Γ , и произвольному морфизму k -алгебр $\phi : A \longrightarrow B$ соотносящий отображение $\phi^\Gamma : A^\Gamma \longrightarrow B^\Gamma$.

Если $n \in \mathbb{N}$ и $\Gamma = \{1, \dots, n\}$ ($\Gamma = \emptyset$ при $n = 0$), то для любых a_1, \dots, a_n мы считаем, что $(\alpha_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} = (a_1, \dots, a_n)$. Таким образом, для произвольного множества S мы очевидным образом отождествляем S^Γ и S^n . Для краткости мы пишем $A_k^n := A_k^\Gamma$, и называем k -функтор A_k^n аффинным k -пространством над k . Если ясно, о каком k идет речь, можно писать A^n .

Определение 1.7.3. Системой уравнений над k называется тройка

$$S = (P, (T_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}, (f_\delta)_{\delta \in \Delta}) \quad (1.7.1)$$

где P – k -алгебра многочленов, $(T_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} =: T$ – ее базис, и $(f_\delta)_{\delta \in \Delta}$ – любое семейство многочленов из P .

Определение 1.7.4. Решением системы уравнений 1.7.1 в k -алгебре A называется произвольное семейство $a \in A^\Gamma$ такое, что $f_\delta(a) = 0$ для всех $\delta \in \Delta$.

2. СХЕМЫ ГРАССМАНА

2.1. ФУНКТОРЫ ГРАССМАНА

Определение 2.1.1. Пусть $r, n \in \mathbb{N}$. Для любой k -алгебры A определим $\mathcal{G}_{n,r}(A)$ как множество таких подмодулей S A -модуля A^{r+n} , что

1. S выделяется прямым слагаемым в A^{r+n} (в частности, в силу 1.4.8, S – проективный A -модуль);
2. A -модуль S имеет ранг r .

Для любого морфизма $\phi : A \rightarrow B$ пусть $S \in \mathcal{G}_{n,r}(A)$ и $S^B \in \mathcal{G}_{n,r}(B)$ (в силу 1.4.14). Тогда построим естественное отображение $\mathcal{G}_{n,r}(\phi) : \mathcal{G}_{n,r}(A) \rightarrow \mathcal{G}_{n,r}(B)$, определим как $S \mapsto S^B$.

Докажем, что $\mathcal{G}_{n,r}$ — k -функтор.

Доказательство. Пусть $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ — морфизмы k -алгебр.

Покажем, что $\mathcal{G}_{n,r}(\beta\alpha) = \mathcal{G}_{n,r}(\beta)\mathcal{G}_{n,r}(\alpha)$. Пусть $S \in \mathcal{G}_{n,r}(A)$.

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}_{n,r}(\beta)\mathcal{G}_{n,r}(\alpha))(S) &= \mathcal{G}_{n,r}(\beta)(\mathcal{G}_{n,r}(\alpha)(S)) = \\ \mathcal{G}_{n,r}(\beta)(\langle \alpha(S) \rangle_B) &= \langle \beta(\langle \alpha(S) \rangle_B) \rangle_C = \langle \langle (\beta\alpha)(S) \rangle_B \rangle_C = \\ \langle (\beta\alpha)(S) \rangle_C &= \mathcal{G}_{n,r}(\beta\alpha)(S). \end{aligned}$$

Мы доказали, что $\mathcal{G}_{n,r}$ — k -функтор. □

Литература

1. Волочков, А.А. Схемы. / А.А.Волочков – Пермь: [б./и.], 2023. – 233.
2. Lang, S. Algebra / S.Lang – New York: Sprinter, 2002 – 918.
3. Cohn, P.M. Algebra Volume 2 / P.M. Cohn – 2nd ed. – Avon: John Willey & Sons Ltd., 1989 – 428.
4. Atiyah, M. F., MACDONALD I. G. Introduction to Commutative Algebra / M. F. Atiyah, I. G. Macdonald – London: Addison-Wesley, 1969 – 128.