МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Пермский государственный национальный исследовательский университет»

Механико-математический факультет
Кафедра фундаментальной математики

Курсовая работа
на тему:

Алгебраические кривые

по дисциплине "Обыкновенные дифференциальные уравнения"

Направление 01.03.01 Математика

Выполнил студент группы ММ/О ММТ-2021 НБ Ляховой Д.С.
Научный руководитель кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики Волочков А.А.

Пермь 2023

Содержание

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В этой главе введем необходимые для дальнейшей работы определения, леммы и теоремы. Также в данной работе будем полагать, что «кольцо» означает «коммутативное кольцо», если явным образом не оговаривается иное.

1.1. АЛГЕБРА

Определение 1.1.1. Пусть X – множество, $\sim$ – отношение эквиваленции на X. *Классом эквивалентности по отношению* $\sim$ *элемента* $x \in X$ назовем множество

$$X_x = \{x' \in X | x \sim x'\}$$

Определение 1.1.2. Множество, элементами которого являются классы эквивалентности (из 1.1.1) обозначим $X/\sim$ и назовем *фактормножеством.*

Определение 1.1.3. Отображение $f : X \longrightarrow X/\sim$ называется *естественным.*

Определение 1.1.4. Множество всех отображений Y в X называется X^Y

Определение 1.1.5. Пусть L – кольцо. Множество L^* называется *множеством обратимых элементов кольца* L и определяется следующим образом

$$L^* = \{l \in L | \exists l' \in L : ll' = l'l = 1_L\}$$

Определение 1.1.6. Пусть A, B – кольца. Отображение $f : A \longrightarrow B$ называется *морфизмом колец*, если:

1. $f(1) = 1$;
2. $f(x + y) = f(x) + f(y)$;
3. $f(xy) = f(x)f(y)$.

Определение 1.1.7. Инъективный морфизм $f : X \longrightarrow Y$ называется *мономорфизмом.* Обозначается $f : X \rightarrowtail Y$.

Определение 1.1.8. Сюръективный морфизм $f : X \longrightarrow Y$ называется *эпиморфизмом.* Обозначается $f : X \twoheadrightarrow Y$.

1.2. ИДЕАЛЫ

Определение 1.2.1. *Идеалом кольца* R называется произвольное подмножество $I \subseteq R$ такое, что

1. $I \neq \varnothing$;
2. Если $a, b \in I$, то $a + b \in I$ (замкнутость по сложению);
3. Если $a \in I, b \in R$, то $ab \in I$ (замкнутость по умножению на элементы кольца R).

Пример. Пусть R – кольцо. Подмножества $R, \{0\}$ – идеалы кольца R. Такие идеалы называются *тривиальными*.

Определение 1.2.2. Если $a \in R$, то множество

$$\langle a \rangle := \{ab \mid b \in R\} =: aR = Ra$$

— *главный идеал* R, порожденный элементом a.

Пример. Пусть $R = \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$.

$$\langle m \rangle = m\mathbb{Z} = \{mt \mid t \in \mathbb{Z}\}$$

Определение 1.2.3. Подмножество S кольца R называется *мультипликативным*, если

1. $1 \in S$ (где 1 – нейтральный по умножению элемент кольца R);

2. Для любых $a, b \in S:\ ab \in S$.

Определение 1.2.4. Кольцо R называется *целостным*, если оно ненулевое и для любых ненулевых $a, b \in R:\ ab \neq 0$.

Определение 1.2.5. *Полем* называется кольцо, все ненулевые элементы которого обратимы.

Определение 1.2.6. [2, стр. 92] Идеал I кольца R — *простой*, если $I \neq R$ и всякий раз, когда $a, b \in R$ и $ab \in I$, тогда $a \in I$ или $b \in I$.

Определение 1.2.7. [2, стр. 92] Идеал I кольца R— *максимальный*, если $I \neq R$ и нет такого идеала I' отличного от I и содержащего его.

Пример. Пусть I – простой идеал кольца R, тогда $R \setminus I$ — мультипликативное подмножество.

Пример. Пусть $f \in R$, $S = \{f^n | n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$, тогда S — мультипликативное подмножество R.

Теорема 1.2.8. *[1, стр. 92] Идеал I кольца R — максимальный тогда и только тогда, когда R/I – поле.*

Теорема 1.2.9. *[2, стр. 92] Любой максимальный идеал — простой.*

Определение 1.2.10. Кольцо называется *локальным*, если оно имеет ровно один максимальный идеал.

Теорема 1.2.11. *[1, стр. 91] Если I – идеал кольца R, то равносильны следующие утверждения:*

1. $R \setminus I$ – мультипликативное подмножество;

2. R/I – целостное кольцо.

Определение 1.2.12. Идеал I кольца R — *простой*, если выполняется хотя бы одно из утверждений теоремы 1.2.11.

1.3. ЛОКАЛИЗАЦИЯ КОЛЕЦ

Определение 1.3.1. Пусть S – мультипликативное подмножество кольца R. Морфизм колец $\lambda : R \longrightarrow L$ и кольцо L называются *локализацией R по S*, если $\lambda(S) \subseteq L^*$ и для любого морфизма $\lambda' : R \longrightarrow L'$, такого что $\lambda'(S) \subseteq (L')^*$ существует единственный морфизм $\phi : L \longrightarrow L'$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dr, "\phi"] & \\ R \arrow[ur, "\lambda"] \arrow[rr, "\lambda'"'] & & L' \end{tikzcd}$$

Теорема 1.3.2. *[1, стр. 94] Пусть S – мультипликативное подмножество кольца R. $\lambda : R \longrightarrow L$ и $\lambda' : R \longrightarrow L'$ – локализации R по S. Тогда существует единственный изоморфизм $\phi : L \longrightarrow L'$, для которого коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dr, "\phi"] & \\ R \arrow[ur, "\lambda"] \arrow[rr, "\lambda'"'] & & L' \end{tikzcd}$$

Теорема 1.3.3. *[1, стр. 94] Пусть S – мультипликативное подмножество кольца R. Тогда существует локализация R по S.*

Теорема 1.3.4. *[5] Пусть R_S – локализация R по $S \subset R$. Тогда идеал $\mathfrak{p}$ расширяется до соответствующего идеала $\mathfrak{p}R \subsetneq$ тогда, и только тогда, когда $S \cap \mathfrak{p} = \varnothing$.*

Определение 1.3.5. *Локализацией R по f* назовем локализацию R по мультипликативному множеству $\{f^n | n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$

Определение 1.3.6. *Локализацией R по простому идеалу $\mathfrak{p}$* будем называть локализацию по множеству $R \setminus \mathfrak{p}$.

Определение 1.3.7. Пусть S – мультипликативное подмножество кольца R. *Аннулятором S* назовем следующее множество

$$\operatorname{Ann}(S) = \{a \in R | aS = \{0\}\}$$

Теорема 1.3.8. *[1, стр. 96] Пусть S – мультипликативное подмножество кольца R, $\lambda : R \longrightarrow L$ – локализация R по S. Если $a \in R$, то $\lambda(a) = 0 \Leftrightarrow as = 0$ для некоторого $s \in S$.*

Теорема 1.3.9. *[1, стр. 97] Пусть S – мультипликативное подмножество кольца R, $\lambda : R \longrightarrow L$ – локализация R по S. Тогда равносильны следующие условия:*

1. $L = \{0\}$;

2. $0 \in S$.

Определение 1.3.10. *Радикалом* $\sqrt{I}$ *идеала* I кольца R назовем множество

$$\{a \in R | (\exists n \in \mathbb{N})(a^n \in I)\}$$

Определение 1.3.11. Радикал нулевого идеала кольца R назовем *нильрадикалом* R и обозначим $\mathrm{rad}(R)$. Таким образом,

$$\mathrm{rad}(R) = \{a \in R | (\exists n \in \mathbb{N})(a^n = 0)\}$$

Теорема 1.3.12. *[1, стр. 97] Пусть* I *– идеал кольца* R*. Тогда* $\sqrt{I}$ *совпадает с пересечением всех простых идеалов содержащих* I*.*

Следствие 1.3.13. *Пусть* R *– кольцо. Тогда* $\mathrm{rad}(R)$ *совпадает с пересечением всех простых идеалов кольцо* R*.*

Теорема 1.3.14. *[1, стр. 98] Пусть* R *– кольцо,* $f \in R$*,* $\lambda : R \longrightarrow L$ *– локализация* R *по* f*,* $a \in R$*. Тогда равносильны следующие условия:*

1. $\lambda(a) = 0$;
2. $af^n = 0$*, для некоторого* $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$;
3. $f \in \sqrt{\mathrm{Ann}(a)}$.

Теорема 1.3.15. *[1, стр. 98] Пусть* S *– мультипликативное подмножество кольца* R*,* $\lambda : R \longrightarrow L$ *– морфизм колец. Тогда равносильны следующие условия:*

1. λ *– локализация* R *по* S*;*
2. (a) $\lambda(S) \subseteq L^*$
   (b) $L = \{\lambda(a)/\lambda(s) | a \in R, s \in S\}$
   (c) $\forall a \in R \; \lambda(a) = 0 \Leftrightarrow as = 0$ *для некоторого* S*.*

Пример. Пусть B – кольцо, A – его подкольцо, S – мультипликативное подмножество кольца A, $S \subseteq B^*$, $L = \{a/s | a \in A, s \in S\}$, $\lambda : A \longrightarrow L$, $\lambda(a) = a$. Тогда λ – локализация A по S.

Теорема 1.3.16. *[1, стр. 99] Пусть* $f : A \longrightarrow B$ *– гомоморфизм колец,* S *– мультипликативное подмножество* A*,* T *– мультипликативное подмножество* B*,* $f(S) \subseteq T$*,* $\alpha : A \longrightarrow A'$ *– локализация* A *по* S*,* $\beta : B \longrightarrow B'$ *– локализация* B *по* T*. Тогда существует единственный такой гомоморфизм* $f' : A' \longrightarrow B'$*, что коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "f'"] & B' \\ A \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "f"'] & B \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

Теорема 1.3.17. *[1, стр. 100] Пусть* $\mathfrak{p}$ *– простой идеал кольца* R *и* $\lambda : R \longrightarrow L$ *– локализация* R *в* $\mathfrak{p}$*. Тогда* L *– локальное кольцо с максимальным идеалом*

$$\mathfrak{m} = \{\lambda(a)/\lambda(b) | a \in R, b \in R \setminus \mathfrak{p}\}$$

1.4. МОДУЛИ

Определение 1.4.1. Пусть R – кольцо. R-модуль состоит из множества M вместе с законом сложения $M \times M \longrightarrow M$, $(a, b) \mapsto a + b$ и законом умножения на скаляр $\alpha \in R$ $R \times M \longrightarrow M$, $(\alpha, a) \mapsto \alpha \cdot a$ такими, что для любых $\alpha, \beta \in R$, $a, b \in M$:

1. M – абелева группа по сложению;
2. $(\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$ и $\alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot a + \alpha b$;
3. $(\alpha \cdot \beta) \cdot a = \alpha \cdot (\beta \cdot a)$
4. $1 \cdot a = a$ для единичного элемента $1 \in R$.

Определение 1.4.2. Пусть R – кольцо. Левый модуль M кольца R или левый R-модуль M, если для любых $a, b \in R$ и $x, y \in M$ выполняется следующее:

1. $(a + b)x = ax + bx$;
2. $a(x + y) = ax + ay$.

Аналогичным образом определяется правый R-модуль. Если модуль M является одновременно левым и правым, то будем называть его просто R-модуль.

Определение 1.4.3. [2, стр. 119] Пусть M, M' – модули кольца R. Морфизмом модулей будем называть отображение такое $f : M \longrightarrow M'$, что для любых $a, b \in R$ и $x, y \in M$ выполняется:

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y)$$

Определение 1.4.4. Модуль M является *прямой суммой* своих подмодулей M_1, M_2, если для любого $m \in M$ найдутся единственный $m_1 \in M_1$ и единственный $m_2 \in M_2$, такие, что $m = m_1 + m_2$. Выражение «*M является прямой суммой M_1 и M_2*» будем записывать $M = M_1 \oplus M_2$.

Теорема 1.4.5. *Пусть M модуль над кольцом R, тогда равносильны следующие условия:*

1. $M = M_1 \oplus M_2$*;*

2. $M = M_1 + M_2$ *и* $M_1 \cap M_2 = \{0\}$.

Определение 1.4.6. Подмодуль S модуля M *выделяется прямым слагаемым*, если найдется такой подмодуль T модуля M, что $M = S \oplus T$.

Определение 1.4.7. [3, стр. 140] Пусть M – R-модуль кольца R. Некоторое семейство $x_1, ..., x_n \in M$ *линейно независимо*, если для любых $a_i \in R, i \in I$ справедливо $\sum\limits_{i \in I} a_i x_i = 0$ только тогда, когда $a_1 = ... = a_n = 0$.

Определение 1.4.8. Семейство $x_1, ..., x_n$ из определения 1.4.7 будем называть *базисом* R-модуля M.

Определение 1.4.9. Модуль *свободный*, если имеет базис.

Определение 1.4.10. Модуль P над кольцом R называется *проективным*, если для любого эпиморфизма $f : N \twoheadrightarrow M$ R-модулей и любого морфизма $g : P \longrightarrow M$ существует такой морфизм $h : P \longrightarrow N$, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, "f"] \\ P \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "g"'] & M \end{tikzcd}$$

Теорема 1.4.11. *Модуль проективен тогда и только тогда, когда он является прямым слагаемым некоторого свободного модуля.*

Теорема 1.4.12. *Проективный модуль над локальным кольцом свободен.*

Теорема 1.4.13. *Пусть R – коммутативное кольцо, $\mathfrak{p}$ – простой идеал в R. Если M – проективный R-модуль, то $M_\mathfrak{p}$ – свободный $R_\mathfrak{p}$-модуль.*

Определение 1.4.14. Проективный модуль M над коммутативным кольцом R имеет ранг $r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, если для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца R свободный $R_\mathfrak{p}$-модуль $M_\mathfrak{p}$ имеет (свободный) ранг r.

Определение 1.4.15. Пусть K – кольцо, U, V, W – R-модули, $f : U \times V \longrightarrow W$ – билинейное отображение. Составим R-модуль T и билинейное отображение $g : U \times V \longrightarrow T$ такие, что для любого f существует отображение $h : T \longrightarrow W$, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dd, "h"] \\ U \times V \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "f"'] & \\ & W \end{tikzcd}$$

Модуль T с соответствующими свойствами назовем *тензорным произведением* U *на* V *над кольцом* R и обозначим $U \otimes_R V$.

Определение 1.4.16. R-модуль N называют плоским, если для любого мономорфизма R-модулей $M' \longrightarrow M$ отображение $M' \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N$ полученое с помощью тензорного произведения с N над R инъективно. Гомоморфизм колец $\phi : R \longrightarrow R'$ называют плоским, если рассматриваемый как R-модуль модуль R' по средством ϕ – плоский.

Определение 1.4.17. R-модуль N называют вполне плоским, если выполняются следующие условия:

1. N – плоский;

2. Если M – R-модуль такой, что $M \otimes_R N = 0$, то $M = 0$;

Гомоморфизм колец $\phi : R \longrightarrow R'$ называют вполне плоским, если рассматриваемый как R-модуль модуль R' по средством ϕ – вполне плоский.

Теорема 1.4.18. *[5] Пусть $(N_i)_{i \in I}$ семейство R-модулей. Прямая сумма $\bigoplus_{i \in I} N_i$ плоская тогда и только тогда, когда модуль N_i плоский для всех $i \in I$.*

Теорема 1.4.19. *[5] Для любого R-модуля N равносильны следующие условия:*

1. N – достаточно плоский;

2. N – плоский и для любого максимального идеала $\mathfrak{m} \subset R$ справедливо $\mathfrak{m}N = N$.

Определение 1.4.20. $\phi : A \longrightarrow B$ – морфизм k-алгебр, $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, S – подмодуль A-модуля A^n. Обозначим $S^B \coloneqq \langle \phi(S) \rangle_B$ B-линейную оболочку подмножества $\phi(S) \subseteq B^n$.

Лемма 1.4.21. *Пусть $\phi : \ A \longrightarrow B$ – морфизм k-алгебр, $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, S, T – подмодули A-модуля A^n, $A^n = S \oplus T$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

1. Существует такой изоморфизм B-модулей

$$\psi : (B \otimes_A S) \oplus (B \otimes_A T) \longrightarrow B^n,$$

что для всех $b \in B$, $s \in S$, $t \in T$

$$(b \otimes_A s, b \otimes_A t) \overset{\psi}{\mapsto} b(s + t);$$

2.

$$\psi\left((B \otimes_A S) \times \{0\}\right) = S^B,$$

$$\psi\left(\{0\} \times (B \otimes_A B)\right) = T^B,$$

$$B^n = (A^n)^B = S^B \oplus T^B;$$

3. Ранг проективного B-модуля S^B равен рангу проективного A-модуля S. (1.4.14)

Определение 1.4.22. Пусть M – R-модуль кольца R. Множество всех $\mathrm{End}_R(M)$ будем называть *главной линейной группой*. Обозначается главная линейная группа $\mathrm{GL}_R(M)$.

Определение 1.4.23. Любой морфизм колец $\phi : k \longrightarrow A$ будем называть k-алгеброй.

A автоматически является k-модулем по операции умножения

$$c \cdot a = \phi(c)a, \ c \in k$$

1.5. ЛОКАЛИЗАЦИЯ МОДУЛЕЙ

Определение 1.5.1. Пусть S – мультипликативное подмножество кольца R, M — R-модуль. Морфизм R-модулей $\lambda : M \longrightarrow L$ и R-модуль L называются *локализацией M по S*, если выполняются следующие условия:

1. $S_L \subseteq GL_R(L)$;

2. для любого морфизма R-модулей $\lambda' : M \longrightarrow L'$, для которого $S'_L \subseteq GL_R(L')$, существует и единственен такой морфизм $\phi : L \longrightarrow L'$, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dr, "\phi"] & \\ M \arrow[ur, "\lambda"] \arrow[rr, "\lambda'"'] & & L' \end{tikzcd}$$

1.6. КАТЕГОРИИ И ФУНКТОРЫ

Определение 1.6.1. Граф G – это любая упорядоченная четверка $(V, A, \mathrm{dom}, \mathrm{cod})$, где V, A – любые множества, dom, cod : $A \longrightarrow V$ – произвольные отображения. Элементы V – вершины графа G, элементы A – стрелки, или ребра графа G. Если $a \in A$, то $\mathrm{dom}(a) \in V$ называется началом, или областью определения a, $\mathrm{cod}(a) \in V$ – концом, или областью значений a, или кообластью a.

Пример 1.6.1. Граф G состоит из множества вершин $V = \{A, B, C, D\}$, множества стрелок $A = \{e, f, g, h\}$, отображений $\mathrm{dom}, \mathrm{cod} : A \longrightarrow V$, $\mathrm{cod}(e) = \mathrm{cod}(e) = A$, $\mathrm{dom}(f) = A$, $\mathrm{cod}(f) = B$, $\mathrm{dom}(g) = A$, $\mathrm{cod}(d) = B$, $\mathrm{dom}(h) = B$, $\mathrm{cod}(h) = C$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "e"] \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & B \arrow[r, "h"] & C & D \end{tikzcd}$$

Определение 1.6.2. Если a, b – вершины графа G, то множество стрелок графа G из a в b обозначим $G(a, b)$, или $\mathrm{Mor}_G(a, b)$, или $\mathrm{Mor}(a, b)$, если ясно, о каком графе идет речь.

Пример. В графе G из 1.6.1 $G(A, A) = \{e\}$, $G(A, B) = \{f, g\}$, $G(A, C) = \varnothing$, $G(C, D) = \varnothing$ и так далее.

Если стрелка f имеет начало a и конец b, то мы пишем $f : a \longrightarrow b$, или $a \xrightarrow{f} b$. Если мы желаем подчеркнуть, что стрелка $f : a \longrightarrow b$ относится к графу G, то пишем $a \xrightarrow[G]{f} b$ Это бывает нужным, если на одном и том же множестве V определено более одного графа с множеством вершин V.

Определение 1.6.3. Множество вершин графа G обозначим $\mathrm{Ob}(G)$.

Определение 1.6.4. Пусть G, H – графы. Морфизмом $G \longrightarrow H$ назовем любое отображение $\phi : V(G) \cup A(G) \longrightarrow V(H) \cup A(H)$ такое, что $\phi(V(G)) \subseteq V(H)$ (т. е. вершины G переходят в вершины H), $\phi(A(G)) \subseteq A(H)$ (т. е. ребра G переходят в ребра H), и если $a, b \in V(G)$, $f \in \mathrm{Mor}_G(a, b)$, то $\phi(f) \in \mathrm{Mor}_H(\phi(a), \phi(b))$ (т. е. из $f : a \longrightarrow b$ следует $\phi(f) : \phi(a) \longrightarrow \phi(b)$).

Определение 1.6.5. *Категория* $\mathcal{C}$ – это граф G, в котором для произвольных $A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ задано произведение $\mathrm{Mor}(B, C) \times \mathrm{Mor}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Mor}(A, C)$, причем выполняются следующие условия.

1. Для $A, B, C, D \in \mathrm{Ob}((C))$ и $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$, $g \in \mathrm{Mor}(B, C)$, $h \in \mathrm{Mor}(C, D)$ выполняется закон ассоциативности $(hg)f = h(gf)$;

2. Для каждого $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ найдется $e \in \mathrm{Mor}(A, A)$ такой, что для любого $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ и $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$, $g \in \mathrm{Mor}(B, A)$ выполняются равенства $fe = f$ и $eg = g$.

Определение 1.6.6. Элементы $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ называются *объектами категории* $\mathcal{C}$.

Определение 1.6.7. Элементы $\mathrm{Mor}(X, Y)$ называются *морфизмами* X *в* Y, или морфизмами $X \longrightarrow Y$.

Если $\alpha \in \mathrm{Mor}(X, Y)$ и ясно, о какой категории идет речь, то мы пишем $\alpha : X \longrightarrow Y$, или $X \xrightarrow{\alpha} Y$. Морфизм $e : A \longrightarrow A$ из аксиомы 2 определения 1.6.5 называется *тождественным*, или *единичным* морфизмом объекта A.

Определение 1.6.8. Множество всех морфизмов категории $\mathcal{C}$ обозначим $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$.

Определение 1.6.9. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ – категории. Говорят, что F – функтор $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, если каждому $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ сопоставлен некоторый объект $F(X) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ и для каждого морфизма $\phi : X \longrightarrow Y$ в $\mathcal{A}$ определен морфизм $F(\phi) : F(X) \longrightarrow F(Y)$ в $\mathcal{B}$ таким образом, что выполняются следующие свойства

1. Если $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, то $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$;

2. Если $\alpha : A \longrightarrow B$, $\beta : B \longrightarrow C$ – морфизмы в $\mathcal{A}$, то $F(\beta\alpha) = F(\beta)F(\alpha)$.

Условие $F(\beta\alpha) = F(\beta)F(\alpha)$ означает, что функтор переводит любой коммутативный треугольник в категории $\mathcal{A}$ в коммутативный треугольник в категории $\mathcal{B}$

$$
\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dr, "\beta"] & \\
A \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr, "\gamma"'] & & C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & F(B) \arrow[dr, "F(\beta)"] & \\
F(A) \arrow[ur, "F(\alpha)"] \arrow[rr, "F(\gamma)"'] & & F(C)
\end{tikzcd}
$$

Вообще, очевидно, функтор переводит любую коммутативную диаграмму в коммутативную диаграмму. Интуитивно, *функтор – это морфизм категорий.*

Теорема 1.6.10. *[1, стр. 49] Пусть I – множество, $(F_i)_{i \in I}$ – семейство функторов из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{U}$-множеств $\mathcal{S}$. Существует и единственен такой функтор $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}$, что*

1. *для каждого $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ $F(X) = \prod_{i \in I} F_i(X)$;*

2. *для любого морфизма $\phi : X \longrightarrow Y$ в $\mathcal{C}$ $F(\phi) = \prod_{i \in I} F_i(\phi)$.*

1.7. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И ФУНКТОРЫ

Определение 1.7.1. Любой функтор $\mathbf{Alg_k} \longrightarrow \mathbf{Set}$ – k-функтор.

Определение 1.7.2. Пусть $F : \mathbf{Alg_k} \longrightarrow \mathbf{Set}$ – функтор забвения, Γ – множество. Аффинным пространством A_k^Γ над k размерности $|\Gamma|$ назовем k-функтор F^Γ (1.6.10).

Очевидно, A_k^Γ – k-функтор, любой k-алгебре A сопоставляющий A^Γ, и произвольному морфизму k-алгебр $\phi : A \longrightarrow B$ соотносящий отображение $\phi^\Gamma : A^\Gamma \longrightarrow B^\Gamma$.

Если $n \in \mathbb{N}$ и $\Gamma = \{1, ..., n\}$ ($\Gamma = \varnothing$ при $n = 0$), то для любых $a_1, ..., a_n$ мы считаем, что $(\alpha_\gamma)_\gamma \in \Gamma = (a_1, ..., a_n)$. Таким образом, для произвольного множества S мы очевидным образом отождествляем S^Γ и S^n. Для краткости мы пишем $A_k^n := A_k^\Gamma$, и называем k-функтор A_k^n аффинным k-пространством над k. Если ясно, о каком k идет речь, можно писать A^n.

Определение 1.7.3. Системой уравнений над k называется тройка

$$S = (P, (T_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}, (f_\delta)_{\delta\in\Delta}) \tag{1.7.1}$$

где P — k-алгебра многочленов, $(T_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} =: T$ – ее базис, и $(f_\delta)_{\delta\in\Delta})$ – любое семейство многочленов из P.

Определение 1.7.4. Решением системы уравнений 1.7.1 в k-алгебре A называется произвольное семейство $a \in A^\Gamma$ такое, что $f_\delta(a) = 0$ для всех $\delta \in \Delta$.

2. СХЕМЫ ГРАССМАНА

2.1. ФУНКТОРЫ ГРАССМАНА

Определение 2.1.1. Пусть $r, n \in \mathbb{N}$. Для любой k-алгебры A определим $\mathcal{G}_{n,r}(A)$ как множество таких подмодулей S A-модуля A^{r+n}, что

1. S выделяется прямым слагаемым в A^{r+n} (в частности, в силу 1.4.11, S – проективный A-модуль);
2. A-модуль S имеет ранг r.

Для любого морфизма $\phi : A \longrightarrow B$ пусть $S \in \mathcal{G}_{n,r}(A)$ и $S^B \in \mathcal{G}_{n,r}(B)$ (в силу 1.4.21). Тогда построим естественное отображение $\mathcal{G}_{n,r}(\phi) : \mathcal{G}_{n,r}(A) \longrightarrow \mathcal{G}_{n,r}(B)$, определим как $S \mapsto S^B$.

Докажем, что $\mathcal{G}_{n,r}$ — k-функтор.

Доказательство. Пусть $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ – морфизмы k-алгебр.
Покажем, что $\mathcal{G}_{n,r}(\beta\alpha) = \mathcal{G}_{n,r}(\beta)\mathcal{G}_{n,r}(\alpha)$. Пусть $S \in \mathcal{G}_{n,r}(A)$.

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{G}_{n,r}(\beta)\mathcal{G}_{n,r}(\alpha))(S) = \mathcal{G}_{n,r}(\beta)(\mathcal{G}_{n,r}(\alpha)(S)) = \\
&\quad \mathcal{G}_{n,r}(\beta)(\langle\alpha(S)\rangle_B) = \langle\beta(\langle\alpha(S)\rangle_B)\rangle_C = \langle\langle(\beta\alpha)(S)\rangle_B\rangle_C = \\
&\quad\quad \langle(\beta\alpha)(S)\rangle_C = \mathcal{G}_{n,r}(\beta\alpha)(S).
\end{aligned}
$$

Мы доказали, что $\mathcal{G}_{n,r}$ — k-функтор. $\square$

Литература

1. Волочков, А.А. Схемы. / А.А.Волочков – Пермь: [б./и.], 2023. – 233.
2. Lang, S. Algebra / S.Lang – New York: Sprinter, 2002 – 918.
3. Cohn, P.M. Algebra Volume 2 / P.M. Cohn – 2nd ed. – Avon: John Willey & Sons Ltd., 1989 – 428.
4. Atiyah, M. F., MACDONALD I. G. Introduction to Commutative Algebra / M. F. Atiyah, I. G. Macdonald – London: Addison-Wesley, 1969 – 128.
5. Siegfried, B. Algebraic Geometry and Commutative Algebra / S. Bosch – London: Springer-Verlag, 2013 – 504.