МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Пермский государственный национальный исследовательский университет»

Механико-математический факультет
Кафедра фундаментальной математики

Курсовая работа
на тему

Алгебраические кривые

Направление 01.03.01 Математика

Научный руководитель:
Доцент кафедры
фундаментальной математики
_____ Волочков А.А.

Пермь 2023

Оглавление

Глава 1

Название 1-й главы

1.1 Название подраздела

Определение 1.1.1. Обозначим $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_{>0}$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, если не оговаривается противное, то наделяем все пространства $\mathbb{R}^n$ стандартной топологией, а их подмножества индуцированной топологией. Определим сферу S^n

$$S^n = \left\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\right\} \tag{1.1.1}$$

и открытый шар $B_r^n(a)$ радиуса r с центром в точке a пространства $\mathbb{R}^n$

$$B_r^n(a) = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2 < r^2\right\}.$$

Для любого вещественного числа x обозначим

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x > 0, \\ 0, \text{ если } x = 0, \\ -1, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Для $\epsilon = \{\pm 1\}$ обозначим

$$\mathbb{R}_\epsilon = \{x \in \mathbb{R} : \sigma(x) = \epsilon\},$$

нетрудно заметить, что полученные множества будут являться открытыми подмножествами $\mathbb{R}$.

Определение 1.1.2. Для $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n + 1$, $\epsilon = \{\pm 1\}$ определим

$$U_{\epsilon k} = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n : \sigma(x_k) = \epsilon\}.$$

Лемма 1.1.3. *Множества $U_{\epsilon k}$ из 1.1.2 образуют открытое покрытие S^n.*

Доказательство. Покажем, что каждая точка $x \in S_n$ попадает хотя бы в одно из множеств $U_{\epsilon k}$. Сумма квадратов компонент точки x единичная, поэтому хотя бы одна из её компонент ненулевая, т.е. для некоторого $k \in \overline{1, n+1}$ получим $x_k \neq 0$. Тогда очевидно, если $x_k < 0$, то x попадает в U_{-k}, если $x_k > 0$, то x попадает в U_k, иными словами

$$x \in U_{\sigma(\epsilon)k}, \ \forall x \in S^n.$$

Таким образом, мы доказали, что множества $U_{\epsilon k}$ образуют покрытие S^n. Теперь покажем, что все $U_{\epsilon k}$ открыты (в S^n). Рассмотрим все точки пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ у которых k-ая компонента имеет знак ϵ:

$$X_{\epsilon k} = \left\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sigma(x_k) = \epsilon\right\},$$

по сути это полупространство. Обозначим π_k — стандартное отображение проектирования $\pi_k : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, которое каждой строке будет сопоставлять её k-ую компоненту

$$\pi_k(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_k.$$

Очевидно, что π_k — непрерывное отображение, так как все функции, входящие в него — непрерывные.

Заметим, что

$$X_{\epsilon k} = \pi_k^{-1}(\mathbb{R}_\epsilon).$$

Как известно, прообраз открытого подмножества относительно непрерывного отображения — открыт, следовательно $X_{\epsilon k}$ — открытое подмножество $\mathbb{R}^n$. Топология на S^n индуцирована из $\mathbb{R}^{n+1}$, поэтому

$$U_{\epsilon k} = S^n \cap X_{\epsilon k},$$

— открытое подмножество S^n. □

Лемма 1.1.4. *Пусть*

$$\epsilon = \{\pm 1\}, \quad i \in \mathbb{N}, \quad i \leq n+1, \quad x \in U_{\epsilon i},$$

тогда

$$\sum_{j \neq i} x_j^2 < 1.$$

Определение 1.1.5. Введем координатное отображение:

$$\phi_{\epsilon k} : U_{\epsilon k} \to B_1^n(0),$$

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{n+1}),$$

В силу леммы 1.1.4 данное определение корректно.

Определение 1.1.6. Введем отображение:

$$\psi_{\epsilon k} : B_1^n(0) \to U_{\epsilon k}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{k-1}, \epsilon\sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2}, x_k, \dots, x_n).$$

Теорема 1.1.7. *Пары $(U_{\epsilon k}, \phi_{\epsilon k})$, где $U_{\epsilon k}$ и $\phi_{\epsilon k}$ соответственно из 1.1.2 и 1.1.5 образуют гладкий атлас сферы S^n.*

Доказательство. Покажем, что отображения $\phi_{\epsilon k}$, $\psi_{\epsilon k}$ из 1.1.6 взаимно обратны. Пусть $x \in B_1^n(0)$, тогда

$$\phi_{\epsilon k}\psi_{\epsilon k}(x) = \phi_{\epsilon k}\psi_{\epsilon k}(x_1, \dots, x_n) =$$

$$\phi_{\epsilon k}(x_1, \dots, x_{k-1}, \epsilon\sqrt{1 - \sum_{i=1}^n x_i^2}, x_k, \dots, x_n) =$$

$$(x_1, \dots, x_n) = x.$$

Пусть $x \in U_{\epsilon k}$, тогда сумма квадратов компонент x равна единице, следовательно

$$1 - \sum_{i \neq k} x_i^2 = x_k^2,$$

значит

$$\sqrt{1 - \sum_{i \neq k} x_i^2} = |x_k|,$$

а $\epsilon|x_k| = x_k$. Далее,

$$\psi_{\epsilon k}\phi_{\epsilon k}(x) = \psi_{\epsilon k}\phi_{\epsilon k}(x_1,\dots,x_{n+1}) =$$
$$\psi_{\epsilon k}(x_1,\dots,x_{k-1},x_{k+1},\dots,x_{n+1}) =$$
$$(x_1,\dots,x_{k-1},\epsilon\sqrt{1-\sum_{i\neq k}x_i^2},x_{k+1},\dots,x_{n+1}) =$$
$$(x_1,\dots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},\dots,x_{n+1}) = (x_1,\dots,x_{n+1}) = x.$$

Также заметим, что отображения $\phi_{\epsilon k}$ и $\psi_{\epsilon k}$ непрерывны, поскольку все функции входящие в эти отображения непрерывны. Таким образом, мы показали, что $\phi_{\epsilon k}$ — гомеоморфизм.

Пусть $k_1,k_2 \in \{1,\dots,n+1\}$, причём $k_1 \neq k_2$, $\epsilon_1,\epsilon_2 \in \{\pm 1\}$. Далее, зафиксируем $k_1 < k_2$ и обозначим

$$U_{\epsilon_1 k_1,\epsilon_2 k_2} \coloneqq U_{\epsilon_1 k_1} \cap U_{\epsilon_2 k_2}, \quad B \coloneqq B_1^n(0), \quad B_{\epsilon k} \coloneqq \{(x_1,\dots,x_n) \in B \mid \sigma(x_k) = \epsilon\}$$

Тогда

$$U_{\epsilon_1 k_1,\epsilon_2 k_2} = U_{\epsilon_1 k_1} \cap U_{\epsilon_2 k_2} =$$
$$\{x \in S^n : \sigma(x_{k_1}) = \epsilon_1\} \cap \{x \in S^n : \sigma(x_{k_2}) = \epsilon_2\} =$$
$$\{x \in S^n : \sigma(x_{k_1}) = \epsilon_1, \sigma(x_{k_2}) = \epsilon_2\} =$$
$$\{x \in U_{\epsilon_1 k_1} : \sigma(x_{k_2}) = \epsilon_2\} = \{x \in U_{\epsilon_2 k_2} : \sigma(x_{k_1}) = \epsilon_1\}.$$

Далее,

$$\phi_{\epsilon_1 k_1}(U_{\epsilon_1 k_1} \cap U_{\epsilon_2 k_2}) = \phi_{\epsilon_1 k_1}(\{x \in U_{\epsilon_1 k_1} : \sigma(x_{k_2}) = \epsilon_2\}) =$$
$$\{(x_1,\dots,x_{k_1-1},x_{k_1+1},\dots,x_{n+1}) \in \phi_{\epsilon_1 k_1}(U_{\epsilon_1 k_1}) = B_1^n(0) : \sigma(x_{k_2}) = \epsilon_2\} =$$
$$\{(y_1,\dots,y_{k_1-1},y_{k_1},y_{k_1+1},\dots,y_n) \in B \mid \sigma(y_{k_2-1}) = \epsilon_2\} = B_{\epsilon_2(k_2-1)}.$$

$$\phi_{\epsilon_2 k_2}(U_{\epsilon_1 k_1} \cap U_{\epsilon_2 k_2}) = \phi_{\epsilon_2 k_2}(\{(x_1,\dots,x_{n+1}) \in U_{\epsilon_2 k_2} : \sigma(x_{k_1}) = \epsilon_1\}) =$$
$$\{(x_1,\dots,x_{k_2-1},x_{k_2+1},\dots,x_{n+1}) \in \phi_{\epsilon_2 k_2}(U_{\epsilon_2 k_2}) = B_1^n(0) : \sigma(x_{k_1}) = \epsilon_1\} =$$
$$\{(x_1,\dots,x_{k_2-1},x_{k_2+1},\dots,x_{n+1}) \in B \mid \sigma(x_{k_1}) = \epsilon_1\} =$$
$$\{y \in B \mid \sigma(y_{k_1}) = \epsilon_1\} = B_{\epsilon_1 k_1}.$$

Таким образом, мы получаем

$$\phi_{\epsilon_1 k_1}(U_{\epsilon_1 k_1} \cap U_{\epsilon_2 k_2}) = B_{\epsilon_2(k_2-1)}, \qquad \phi_{\epsilon_2 k_2}(U_{\epsilon_1 k_1} \cap U_{\epsilon_2 k_2}) = B_{\epsilon_1 k_1}.$$

Определим отображение:

$$\tau_{\epsilon_2 k_2,\epsilon_1 k_1} \coloneqq \left(\phi_{\epsilon_2 k_2}\Big|_{B_{\epsilon_1 k_1},U_{\epsilon_1 k_1,\epsilon_2 k_2}}\right)\left(\phi_{\epsilon_1 k_1}\Big|_{B_{\epsilon_2(k_2-1)},U_{\epsilon_1 k_1,\epsilon_2 k_2}}\right)^{-1} :$$
$$\phi_{\epsilon_1 k_1}(U_{\epsilon_1 k_1} \cap U_{\epsilon_2 k_2}) \to \phi_{\epsilon_2 k_2}(U_{\epsilon_1 k_1} \cap U_{\epsilon_2 k_2}).$$

Очевидно,

$$\tau_{\epsilon_2 k_2,\epsilon_1 k_1} : B_{\epsilon_2(k_2-1)} \to B_{\epsilon_1 k_1}.$$

Для всех $x \in B_{\epsilon_2(k_2-1)}$ имеем, что

$$\tau_{\epsilon_2 k_2,\epsilon_1 k_1}(x) = \phi_{\epsilon_2 k_2}(\phi_{\epsilon_1 k_1})^{-1}(x) = \phi_{\epsilon_2 k_2}\psi_{\epsilon_1 k_1}(x) = \phi_{\epsilon_2 k_2}\psi_{\epsilon_1 k_1}(x_1,\dots,x_n) =$$

$$\phi_{\epsilon_2 k_2}(x_1,\dots,x_{k_1-1},\epsilon_1\sqrt{1-\sum_{i=1}^{n}x_i^2},x_{k_1},\dots,x_n) =$$

$$(x_1, \dots, x_{k_1-1}, \epsilon_1\sqrt{1-\sum_{i=1}^n x_i^2}, x_{k_1}, \dots, x_{k_2}, x_{k_2+2}, \dots, x_n).$$

И теперь пусть $x \in B_{\epsilon_1 k_1}$, тогда

$$\tau_{\epsilon_1 k_1, \epsilon_2 k_2}(x) = \phi_{\epsilon_1 k_1}(\phi_{\epsilon_2 k_2})^{-1}(x) = \phi_{\epsilon_1 k_1}\psi_{\epsilon_2 k_2}(x) = \phi_{\epsilon_1 k_1}\psi_{\epsilon_2 k_2}(x_1, \dots, x_n) =$$

$$\phi_{\epsilon_1 k_1}(x_1, \dots, x_{k_2-1}, \epsilon_2\sqrt{1-\sum_{i=1}^n x_i^2}, x_{k_2}, \dots, x_n) =$$

$$(x_1, \dots, x_{k_1-1}, x_{k_1+1}, \dots, x_{k_2-1}, \epsilon_2\sqrt{1-\sum_{i=1}^n x_i^2}, x_{k_2}, \dots, x_n).$$

Проверим является ли отображение $\tau_{\epsilon_2 k_2, \epsilon_1 k_1}$ биективным:

$$\tau_{\epsilon_1 k_1, \epsilon_2 k_2}\tau_{\epsilon_2 k_2, \epsilon_1 k_1}(x) \coloneqq \tau^{-1}_{\epsilon_2 k_2, \epsilon_1 k_1}\tau_{\epsilon_2 k_2, \epsilon_1 k_1}(x_1, \dots, x_n) =$$

$$\tau_{\epsilon_1 k_1, \epsilon_2 k_2}(x_1, \dots, x_{k_1-1}, \epsilon_1\sqrt{1-\sum_{i=1}^n x_i^2}, x_{k_1}, \dots, x_{k_2}, x_{k_2+2}, \dots, x_n) =$$

$$(x_1, \dots, x_{k_1-1}, x_{k_1}, \dots, x_{k_2}, \epsilon_2\sqrt{1-\sum_{i \neq k_2+1} x_i^2}, x_{k_2+2}, \dots, x_n) =$$

$$(x_1, \dots, x_{k_1-1}, x_{k_1}, \dots, x_{k_2}, x_{k_2+1}, x_{k_2+2}, \dots, x_n) =$$

$$(x_1, \dots, x_n) = x.$$

И в обратную сторону:

$$\tau_{\epsilon_2 k_2, \epsilon_1 k_1}\tau_{\epsilon_1 k_1, \epsilon_2 k_2}(x) \coloneqq \tau_{\epsilon_2 k_2, \epsilon_1 k_1}\tau^{-1}_{\epsilon_2 k_2, \epsilon_1 k_1}(x_1, \dots, x_n) =$$

$$\tau_{\epsilon_2 k_2, \epsilon_1 k_1}(x_1, \dots, x_{k_1-1}, x_{k_1+1}, \dots, x_{k_2-1}, \epsilon_2\sqrt{1-\sum_{i=1}^n x_i^2}, x_{k_2}, \dots, x_n) =$$

$$(x_1, \dots, x_{k_1-1}, \epsilon_1\sqrt{1-\sum_{i \neq k_1} x_i^2}, x_{k_1+1}, \dots, x_{k_2-1}, x_{k_2}, \dots, x_n) =$$

$$(x_1, \dots, x_{k_1-1}, x_{k_1}, x_{k_1+1}, \dots, x_{k_2-1}, x_{k_2}, \dots, x_n) =$$

$$(x_1, \dots x_n) = x.$$

Заметим, что $\tau_{\epsilon_2 k_2, \epsilon_1 k_1}$ является гладким отображением, так как все функции входящие в неё гладкие. Таким образом, пары $(U_{\epsilon k}, \phi_{\epsilon k})$ образуют гладкий атлас S^n. □

Литература

[1] Волочков А.А. Введение в теорию конечных групп./ / А.А.Волочков. — Пермь, 2020.— 233 стр. 58.

[2] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функции и функционального анализа.

[3] Милнор Д., Уоллес А. Дифференциальная топология начальный курс.

[4] Хирш М. Дифференциальная топология.

[5] Jurgen J. Riemannian Geometry and Geometric.

[6] Madsen. From Calculus to Cohomology De Rnam no cohomology and characteristic classes

[7] John M. Lee Introduction to Smooth Manifolds.