Содержание

Глава 1

Дополнение

1.1 Идеалы

Определение 1.1.1. Идеалом кольца R называется произвольное подмножество $I \subseteq R$ такое, что

1. $I \neq \varnothing$;
2. Если $a, b \in I$, то $a + b \in I$ (замкнутость по сложению);
3. Если $a \in I, b \in R$, то $ab \in I$ (замкнутость по умножению на элементы кольца R).

Пример 1.1.1. Пусть R – кольцо. Подмножества $R, \{0\}$ – идеалы кольца R. Такие идеалы называются *тривиальными*.

Пример 1.1.2. Если $a \in R$, то множество

$$\langle a \rangle := \{ab \mid b \in R\} =: aR$$

— *главный идеал* R порожденный элементом a.

Пример 1.1.3. Пусть $R = \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$.

$$\langle m \rangle = m\mathbb{Z} = \{mt \mid t \in \mathbb{Z}\}$$

Где $\langle m \rangle$ – идеал(притом главный) порожденный m.

1.2 Модули и проективные модули

Определение 1.2.1. Модуль P над кольцом R называется проективным, если для любого эпиморфизма $f : N \twoheadrightarrow M$ R-модулей и любого морфизма $g : P \longrightarrow M$ существует такой морфизм $h: P \longrightarrow N$, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, two heads, "f"] \\ P \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "g"'] & M \end{tikzcd}$$

Теорема 1.2.2. *Модуль проективен тогда и только тогда, когда он является прямым слагаемым некоторого свободного модуля.*

Теорема 1.2.3. *Проективный модуль над локальным кольцом свободен.*

Теорема 1.2.4. *Пусть R – коммутативное кольцо, $\mathfrak{p}$ – простой идеал в R. Если M – проективный R-модуль, то $M_{\mathfrak{p}}$ – свободный $R_{\mathfrak{p}}$-модуль.*

Определение 1.2.5. Проективный модуль M над коммутативным кольцом R имеет ранг $r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, если для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца R свободный $R_{\mathfrak{p}}$-модуль $M_{\mathfrak{p}}$ имеет (свободный) ранг r.

Лемма 1.2.6. *Пусть $\phi: A \longrightarrow B$ – морфизм k-алгебр, $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, S, T – подмодули A-модуля A^n, $A^n = S \oplus T$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

1. *Существует такой изоморфизм B-модулей*

$$\psi : (B \otimes_A S) \oplus (B \otimes_A T) \longrightarrow B^n,$$

что для всех $b \in B$, $s \in S$, $t \in T$

$$(b \otimes_A s, b \otimes_A t) \stackrel{\psi}{\mapsto} b(s+t);$$

2.

$$\psi\left((B \otimes_A S) \times \{0\}\right) = S^B,$$

$$\psi\left(\{0\} \times (B \otimes_A B)\right) = T^B,$$

$$B^n = (A^n)^B = S^B \oplus T^B;$$

3. *Ранг проективного B-модуля S^B равен рангу проективного A-модуля S. (1.2.5)*

Список Источников

1. Волочков А.А. Схемы. // А.А.Волочков — Пермь, 2023. — 233 стр. 230.
2. Волочков А.А. Схемы. // А.А.Волочков — Пермь, 2023. — 233 стр. 126-127.