МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Пермский государственный национальный исследовательский университет»

Механико-математический факультет
Кафедра фундаментальной математики

Курсовая работа
на тему:

Алгебраические кривые

по дисциплине "Обыкновенные дифференциальные уравнения"

Направление 01.03.01 Математика

Выполнил студент группы ММ/О ММТ-2021 НБ Ляховой Д.С.
Научный руководитель кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики Волочков А.А.

Пермь 2023

Оглавление

Глава 1

Название 1-й главы

1.1 Название подраздела

Определение 1.1.1. Обозначим $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_{>0}$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, если не оговаривается противное, то наделяем все пространства $\mathbb{R}^n$ стандартной топологией, а их подмножества индуцированной топологией. Определим сферу S^n

$$S^n = \left\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\right\} \tag{1.1.1}$$

и открытый шар $B_r^n(a)$ радиуса r с центром в точке a пространства $\mathbb{R}^n$

$$B_r^n(a) = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 < r^2\right\}.$$

Для любого вещественного числа x обозначим

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x > 0, \\ 0, \text{ если } x = 0, \\ -1, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Для $\epsilon = \{\pm 1\}$ обозначим

$$\mathbb{R}_\epsilon = \{x \in \mathbb{R} : \sigma(x) = \epsilon\},$$

нетрудно заметить, что полученные множества будут являться открытыми подмножествами $\mathbb{R}$.

Определение 1.1.2. Для $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n + 1$, $\epsilon = \{\pm 1\}$ определим

$$U_{\epsilon k} = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n : \sigma(x_k) = \epsilon\}.$$

Лемма 1.1.3. *Множества $U_{\epsilon k}$ из 1.1.2 образуют открытое покрытие S^n.*

Доказательство. Покажем, что каждая точка $x \in S_n$ попадает хотя бы в одно из множеств $U_{\epsilon k}$. Сумма квадратов компонент точки x единичная, поэтому хотя бы одна из её компонент ненулевая, т.е. для некоторого $k \in \overline{1, n+1}$ получим $x_k \neq 0$. Тогда очевидно, если $x_k < 0$, то x попадает в U_{-k}, если $x_k > 0$, то x попадает в U_k, иными словами

$$x \in U_{\sigma(\epsilon)k}, \ \forall x \in S^n.$$

Таким образом, мы доказали, что множества $U_{\epsilon k}$ образуют покрытие S^n. Теперь покажем, что все $U_{\epsilon k}$ открыты (в S^n). Рассмотрим все точки пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ у которых k-ая компонента имеет знак ϵ:

$$X_{\epsilon k} = \left\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sigma(x_k) = \epsilon\right\},$$

по сути это полупространство. Обозначим π_k — стандартное отображение проектирования $\pi_k : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, которое каждой строке будет сопоставлять её k-ую компоненту

$$\pi_k(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_k.$$

Очевидно, что π_k — непрерывное отображение, так как все функции, входящие в него — непрерывные.

Заметим, что

$$X_{\epsilon k} = \pi_k^{-1}(\mathbb{R}_\epsilon).$$

Как известно, прообраз открытого подмножества относительно непрерывного отображения — открыт, следовательно $X_{\epsilon k}$ — открытое подмножество $\mathbb{R}^n$. Топология на S^n индуцирована из $\mathbb{R}^{n+1}$, поэтому

$$U_{\epsilon k} = S^n \cap X_{\epsilon k},$$

— открытое подмножество S^n. □

Лемма 1.1.4. *Пусть*

$$\epsilon = \{\pm 1\}, \ \ i \in \mathbb{N}, \ \ i \leq n+1, \ \ x \in U_{\epsilon i},$$

тогда

$$\sum_{j \neq i} x_j^2 < 1.$$

Определение 1.1.5. Введем координатное отображение:

$$\phi_{\epsilon k} : U_{\epsilon k} \to B_1^n(0),$$

$$(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{n+1}),$$

В силу леммы 1.1.4 данное определение корректно.

Определение 1.1.6. Введем отображение:

$$\psi_{\epsilon k} : B_1^n(0) \to U_{\epsilon k}$$

$$(x_1,\dots,x_n)\mapsto(x_1,\dots,x_{k-1},\epsilon\sqrt{1-\sum_{i=1}^{n}x_i^2},x_k,\dots,x_n).$$

Теорема 1.1.7. *Пары $(U_{\epsilon k},\phi_{\epsilon k})$, где $U_{\epsilon k}$ и $\phi_{\epsilon k}$ соответственно из 1.1.2 и 1.1.5 образуют гладкий атлас сферы S^n.*

Доказательство. Покажем, что отображения $\phi_{\epsilon k}$, $\psi_{\epsilon k}$ из 1.1.6 взаимно обратны. Пусть $x\in B_1^n(0)$, тогда

$$\phi_{\epsilon k}\psi_{\epsilon k}(x)=\phi_{\epsilon k}\psi_{\epsilon k}(x_1,\dots,x_n)=$$

$$\phi_{\epsilon k}(x_1,\dots,x_{k-1},\epsilon\sqrt{1-\sum_{i=1}^{n}x_i^2},x_k,\dots,x_n)=$$

$$(x_1,\dots,x_n)=x.$$

Пусть $x\in U_{\epsilon k}$, тогда сумма квадратов компонент x равна единице, следовательно

$$1-\sum_{i\neq k}x_i^2=x_k^2,$$

значит

$$\sqrt{1-\sum_{i\neq k}x_i^2}=|x_k|,$$

а $\epsilon|x_k|=x_k$. Далее,

$$\psi_{\epsilon k}\phi_{\epsilon k}(x)=\psi_{\epsilon k}\phi_{\epsilon k}(x_1,\dots,x_{n+1})=$$

$$\psi_{\epsilon k}(x_1,\dots,x_{k-1},x_{k+1},\dots,x_{n+1})=$$

$$(x_1,\dots,x_{k-1},\epsilon\sqrt{1-\sum_{i\neq k}x_i^2},x_{k+1},\dots,x_{n+1})=$$

$$(x_1,\dots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},\dots,x_{n+1})=(x_1,\dots,x_{n+1})=x.$$

Также заметим, что отображения $\phi_{\epsilon k}$ и $\psi_{\epsilon k}$ непрерывны, поскольку все функции входящие в эти отображения непрерывны. Таким образом, мы показали, что $\phi_{\epsilon k}$ — гомеоморфизм.

Пусть $k_1,k_2\in\{1,\dots,n+1\}$, причём $k_1\neq k_2$, $\epsilon_1,\epsilon_2\in\{\pm1\}$. Далее, зафиксируем $k_1<k_2$ и обозначим

$$U_{\epsilon_1k_1,\epsilon_2k_2}\coloneqq U_{\epsilon_1k_1}\cap U_{\epsilon_2k_2},\quad B\coloneqq B_1^n(0),\quad B_{\epsilon k}\coloneqq\{(x_1,\dots,x_n)\in B\mid\sigma(x_k)=\epsilon\}$$

Тогда

$$U_{\epsilon_1k_1,\epsilon_2k_2}=U_{\epsilon_1k_1}\cap U_{\epsilon_2k_2}=$$

$$\{x\in S^n:\sigma(x_{k_1})=\epsilon_1\}\cap\{x\in S^n:\sigma(x_{k_2})=\epsilon_2\}=$$

$$\{x\in S^n:\sigma(x_{k_1})=\epsilon_1,\sigma(x_{k_2})=\epsilon_2\}=$$

$$\{x\in U_{\epsilon_1k_1}:\sigma(x_{k_2})=\epsilon_2\}=\{x\in U_{\epsilon_2k_2}:\sigma(x_{k_1})=\epsilon_1\}.$$

Далее,

$$\phi_{\epsilon_1k_1}(U_{\epsilon_1k_1}\cap U_{\epsilon_2k_2})=\phi_{\epsilon_1k_1}(\{x\in U_{\epsilon_1k_1}:\sigma(x_{k_2})=\epsilon_2\})=$$

$$\{(x_1,\dots,x_{k_1-1},x_{k_1+1},\dots,x_{n+1})\in\phi_{\epsilon_1k_1}(U_{\epsilon_1k_1})=B_1^n(0):\sigma(x_{k_2})=\epsilon_2\}=$$

$$\{(y_1,\dots,y_{k_1-1},y_{k_1},y_{k_1+1},\dots,y_n)\in B\mid\sigma(y_{k_2-1})=\epsilon_2\}=B_{\epsilon_2(k_2-1)}.$$

$$\phi_{\epsilon_2k_2}(U_{\epsilon_1k_1}\cap U_{\epsilon_2k_2})=\phi_{\epsilon_2k_2}(\{(x_1,\dots,x_{n+1})\in U_{\epsilon_2k_2}:\sigma(x_{k_1})=\epsilon_1\})=$$

$$\{(x_1,\dots,x_{k_2-1},x_{k_2+1},\dots,x_{n+1})\in\phi_{\epsilon_2k_2}(U_{\epsilon_2k_2})=B_1^n(0):\sigma(x_{k_1})=\epsilon_1\}=$$

$$\{(x_1,\dots,x_{k_2-1},x_{k_2+1},\dots,x_{n+1})\in B\mid\sigma(x_{k_1})=\epsilon_1\}=$$

$$\{y\in B\mid\sigma(y_{k_1})=\epsilon_1\}=B_{\epsilon_1k_1}.$$

Таким образом, мы получаем

$$\phi_{\epsilon_1k_1}(U_{\epsilon_1k_1}\cap U_{\epsilon_2k_2})=B_{\epsilon_2(k_2-1)},\qquad\phi_{\epsilon_2k_2}(U_{\epsilon_1k_1}\cap U_{\epsilon_2k_2})=B_{\epsilon_1k_1}.$$

Определим отображение:

$$\tau_{\epsilon_2k_2,\epsilon_1k_1}:=\left(\phi_{\epsilon_2k_2}\Big|_{B_{\epsilon_1k_1},U_{\epsilon_1k_1,\epsilon_2k_2}}\right)\left(\phi_{\epsilon_1k_1}\Big|_{B_{\epsilon_2(k_2-1)},U_{\epsilon_1k_1,\epsilon_2k_2}}\right)^{-1}:$$

$$\phi_{\epsilon_1k_1}(U_{\epsilon_1k_1}\cap U_{\epsilon_2k_2})\to\phi_{\epsilon_2k_2}(U_{\epsilon_1k_1}\cap U_{\epsilon_2k_2}).$$

Очевидно,

$$\tau_{\epsilon_2k_2,\epsilon_1k_1}:B_{\epsilon_2(k_2-1)}\to B_{\epsilon_1k_1}.$$

Для всех $x\in B_{\epsilon_2(k_2-1)}$ имеем, что

$$\tau_{\epsilon_2k_2,\epsilon_1k_1}(x)=\phi_{\epsilon_2k_2}(\phi_{\epsilon_1k_1})^{-1}(x)=\phi_{\epsilon_2k_2}\psi_{\epsilon_1k_1}(x)=\phi_{\epsilon_2k_2}\psi_{\epsilon_1k_1}(x_1,\dots,x_n)=$$

$$\phi_{\epsilon_2k_2}(x_1,\dots,x_{k_1-1},\epsilon_1\sqrt{1-\sum_{i=1}^n x_i^2},x_{k_1},\dots,x_n)=$$

$$(x_1,\dots,x_{k_1-1},\epsilon_1\sqrt{1-\sum_{i=1}^n x_i^2},x_{k_1},\dots,x_{k_2},x_{k_2+2},\dots,x_n).$$

И теперь пусть $x\in B_{\epsilon_1k_1}$, тогда

$$\tau_{\epsilon_1k_1,\epsilon_2k_2}(x)=\phi_{\epsilon_1k_1}(\phi_{\epsilon_2k_2})^{-1}(x)=\phi_{\epsilon_1k_1}\psi_{\epsilon_2k_2}(x)=\phi_{\epsilon_1k_1}\psi_{\epsilon_2k_2}(x_1,\dots,x_n)=$$

$$\phi_{\epsilon_1k_1}(x_1,\dots,x_{k_2-1},\epsilon_2\sqrt{1-\sum_{i=1}^n x_i^2},x_{k_2},\dots,x_n)=$$

$$(x_1,\dots,x_{k_1-1},x_{k_1+1},\dots,x_{k_2-1},\epsilon_2\sqrt{1-\sum_{i=1}^n x_i^2},x_{k_2},\dots,x_n).$$

Проверим является ли отображение $\tau_{\epsilon_2 k_2, \epsilon_1 k_1}$ биективным:

$$\tau_{\epsilon_1 k_1, \epsilon_2 k_2} \tau_{\epsilon_2 k_2, \epsilon_1 k_1}(x) \coloneqq \tau^{-1}_{\epsilon_2 k_2, \epsilon_1 k_1} \tau_{\epsilon_2 k_2, \epsilon_1 k_1}(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$\tau_{\epsilon_1 k_1, \epsilon_2 k_2}(x_1, \ldots, x_{k_1-1}, \epsilon_1 \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2}, x_{k_1}, \ldots, x_{k_2}, x_{k_2+2}, \ldots, x_n) =$$

$$(x_1, \ldots, x_{k_1-1}, x_{k_1}, \ldots, x_{k_2}, \epsilon_2 \sqrt{1 - \sum_{i \neq k_2+1} x_i^2}, x_{k_2+2}, \ldots, x_n) =$$

$$(x_1, \ldots, x_{k_1-1}, x_{k_1}, \ldots, x_{k_2}, x_{k_2+1}, x_{k_2+2}, \ldots, x_n) =$$

$$(x_1, \ldots, x_n) = x.$$

И в обратную сторону:

$$\tau_{\epsilon_2 k_2, \epsilon_1 k_1} \tau_{\epsilon_1 k_1, \epsilon_2 k_2}(x) \coloneqq \tau_{\epsilon_2 k_2, \epsilon_1 k_1} \tau^{-1}_{\epsilon_2 k_2, \epsilon_1 k_1}(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$\tau_{\epsilon_2 k_2, \epsilon_1 k_1}(x_1, \ldots, x_{k_1-1}, x_{k_1+1}, \ldots, x_{k_2-1}, \epsilon_2 \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2}, x_{k_2}, \ldots, x_n) =$$

$$(x_1, \ldots, x_{k_1-1}, \epsilon_1 \sqrt{1 - \sum_{i \neq k_1} x_i^2}, x_{k_1+1}, \ldots, x_{k_2-1}, x_{k_2}, \ldots, x_n) =$$

$$(x_1, \ldots, x_{k_1-1}, x_{k_1}, x_{k_1+1}, \ldots, x_{k_2-1}, x_{k_2}, \ldots, x_n) =$$

$$(x_1, \ldots x_n) = x.$$

Заметим, что $\tau_{\epsilon_2 k_2, \epsilon_1 k_1}$ является гладким отображением, так как все функции входящие в неё гладкие. Таким образом, пары $(U_{\epsilon k}, \phi_{\epsilon k})$ образуют гладкий атлас S^n. $\square$

Литература

[1] Волочков А.А. Введение в теорию конечных групп./ / А.А.Волочков. — Пермь, 2020.— 233 стр. 58.

[2] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функции и функционального анализа.

[3] Милнор Д., Уоллес А. Дифференциальная топология начальный курс.

[4] Хирш М. Дифференциальная топология.

[5] Jurgen J. Riemannian Geometry and Geometric.

[6] Madsen. From Calculus to Cohomology De Rnam no cohomology and characteristic classes

[7] John M. Lee Introduction to Smooth Manifolds.