

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего  
образования  
«Пермский государственный национальный исследовательский университет»

Механико-математический факультет  
Кафедра фундаментальной математики

**Курсовая работа**  
**на тему:**

**Алгебраические кривые**

**по дисциплине "Обыкновенные дифференциальные уравнения"**

Направление 01.03.01 Математика

Выполнил студент группы ММ/О ММТ-2021 НБ	Ляховой Д.С.
Научный руководитель кандидат	Волочков А.А.
физико-математических наук, доцент кафедры	
фундаментальной математики	

Пермь 2023

# Содержание

<b>1</b>	<b>ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ</b>	<b>3</b>
1.1	АЛГЕБРА	3
1.2	ИДЕАЛЫ	4
1.3	ЛОКАЛИЗАЦИЯ КОЛЕЦ	5
1.4	МОДУЛИ	7
1.5	ЛОКАЛИЗАЦИЯ МОДУЛЕЙ	9
1.6	КАТЕГОРИИ И ФУНКТОРЫ	9
1.7	СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И ФУНКТОРЫ	11
<b>2</b>	<b>СХЕМЫ ГРАССМАНА</b>	<b>12</b>
2.1	ФУНКТОРЫ ГРАССМАНА	12
	Литература	13

## 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В этой главе введем необходимые для дальнейшей работы определения, леммы и теоремы. Также в данной работе будем полагать, что «кольцо» означает «коммутативное кольцо», если явным образом не оговаривается иное.

### 1.1. АЛГЕБРА

**Определение 1.1.1.** Пусть  $X$  – множество,  $\sim$  – отношение эквиваленции на  $X$ . *Классом эквивалентности по отношению  $\sim$  элемента  $x \in X$*  назовем множество

$$X_x = \{x' \in X | x \sim x'\}$$

**Определение 1.1.2.** Множество, элементами которого являются классы эквивалентности (из 1.1.1) обозначим  $X/\sim$  и назовем *фактормножеством*.

**Определение 1.1.3.** Отображение  $f : X \longrightarrow X/\sim$  называется *естественным*.

**Определение 1.1.4.** Множество всех отображений  $Y$  в  $X$  называется  $X^Y$

**Определение 1.1.5.** Пусть  $L$  – кольцо. Множество  $L^*$  называется *множеством обратимых элементов кольца  $L$*  и определяется следующим образом

$$L^* = \{l \in L | \exists l' \in L : ll' = l'l = 1_L\}$$

**Определение 1.1.6.** Пусть  $R$  – кольцо. Левый модуль  $M$  кольца  $R$  или левый  $R$ -модуль  $M$ , если для любых  $a, b \in R$  и  $x, y \in M$  выполняется следующее:

1.  $(a + b)x = ax + bx$ ;
2.  $a(x + y) = ax + ay$ .

Аналогичным образом определяется правый  $R$ -модуль. Если модуль  $M$  является одновременно левым и правым, то будем называть его просто  $R$ -модуль.

**Определение 1.1.7.** Пусть  $A, B$  – кольца. Отображение  $f : A \longrightarrow B$  называется *морфизмом колец*, если:

1.  $f(1) = 1$ ;
2.  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ ;
3.  $f(xy) = f(x)f(y)$ .

**Определение 1.1.8.** [2, стр. 119] Пусть  $M, M'$  – модули кольца  $R$ . Морфизмом модулей будем называть отображение такое  $f : M \longrightarrow M'$ , что для любых  $a, b \in R$  и  $x, y \in M$  выполняется:

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y)$$

**Определение 1.1.9.** Инъективный морфизм  $f : X \longrightarrow Y$  называется *мономорфизмом*. Обозначается  $f : X \rightarrowtail Y$ .

**Определение 1.1.10.** Сюръективный морфизм  $f : X \longrightarrow Y$  называется *эпиморфизмом*. Обозначается  $f : X \twoheadrightarrow Y$ .

## 1.2. ИДЕАЛЫ

**Определение 1.2.1.** Идеалом кольца  $R$  называется произвольное подмножество  $I \subseteq R$  такое, что

1.  $I \neq \emptyset$ ;
2. Если  $a, b \in I$ , то  $a + b \in I$  (замкнутость по сложению);
3. Если  $a \in I, b \in R$ , то  $ab \in I$  (замкнутость по умножению на элементы кольца  $R$ ).

*Пример.* Пусть  $R$  – кольцо. Подмножества  $R, \{0\}$  – идеалы кольца  $R$ . Такие идеалы называются *тривиальными*.

**Определение 1.2.2.** Если  $a \in R$ , то множество

$$\langle a \rangle := \{ab \mid b \in R\} =: aR = Ra$$

— *главный идеал*  $R$ , порожденный элементом  $a$ .

*Пример.* Пусть  $R = \mathbb{Z}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

$$\langle m \rangle = m\mathbb{Z} = \{mt \mid t \in \mathbb{Z}\}$$

**Определение 1.2.3.** Подмножество  $S$  кольца  $R$  называется *мультипликативным*, если

1.  $1 \in S$  (где  $1$  – нейтральный по умножению элемент кольца  $R$ );
2. Для любых  $a, b \in S$ :  $ab \in S$ .

**Определение 1.2.4.** Кольцо  $R$  называется *целостным*, если оно ненулевое и для любых ненулевых  $a, b \in R$ :  $ab \neq 0$ .

**Определение 1.2.5.** *Поле* называется кольцо, все ненулевые элементы которого обратимы.

**Определение 1.2.6.** [2, стр. 92] Идеал  $I$  кольца  $R$  — *простой*, если  $I \neq R$  и всякий раз, когда  $a, b \in R$  и  $ab \in I$ , тогда  $a \in I$  или  $b \in I$ .

**Определение 1.2.7.** [2, стр. 92] Идеал  $I$  кольца  $R$  — *максимальный*, если  $I \neq R$  и нет такого идеала  $I'$  отличного от  $I$  и содержащего его.

*Пример.* Пусть  $I$  – простой идеал кольца  $R$ , тогда  $R \setminus I$  — мультипликативное подмножество.

*Пример.* Пусть  $f \in R$ ,  $S = \{f^n | n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ , тогда  $S$  — мультипликативное подмножество  $R$ .

**Теорема 1.2.8.** [1, стр. 92] Идеал  $I$  кольца  $R$  — максимальный тогда и только тогда, когда  $R/I$  — поле.

**Теорема 1.2.9.** [2, стр. 92] Любой максимальный идеал — простой.

**Определение 1.2.10.** Кольцо называется *локальным*, если оно имеет ровно один максимальный идеал.

**Теорема 1.2.11.** [1, стр. 91] Если  $I$  — идеал кольца  $R$ , то равносильны следующие утверждения:

1.  $R \setminus I$  — мультипликативное подмножество;
2.  $R/I$  — целостное кольцо.

**Определение 1.2.12.** Идеал  $I$  кольца  $R$  — *простой*, если выполняется хотя бы одно из утверждений теоремы 1.2.11.

### 1.3. ЛОКАЛИЗАЦИЯ КОЛЕЦ

**Определение 1.3.1.** Пусть  $S$  — мультипликативное подмножество кольца  $A$ . Морфизм колец  $\lambda : A \rightarrow L$  и кольцо  $L$  называются *локализацией  $A$  по  $S$* , если  $\lambda(S) \subseteq L^*$  и для любого морфизма  $\lambda' : A \rightarrow L'$ , такого что  $\lambda'(S) \subseteq (L')^*$  существует единственный морфизм  $\phi : L \rightarrow L'$ , для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ \lambda \nearrow & & \searrow \phi \\ A & \xrightarrow{\lambda'} & L' \end{array}$$

**Теорема 1.3.2.** [1, стр. 94] Пусть  $S$  — мультипликативное подмножество кольца  $A$ .  $\lambda : A \rightarrow L$  и  $\lambda' : A \rightarrow L'$  — локализации  $A$  по  $S$ . Тогда существует единственный изоморфизм  $\phi : L \rightarrow L'$ , для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ \lambda \nearrow & & \searrow \phi \\ A & \xrightarrow{\lambda'} & L' \end{array}$$

**Теорема 1.3.3.** [1, стр. 94] Пусть  $S$  — мультипликативное подмножество кольца  $A$ . Тогда существует локализация  $A$  по  $S$ .

**Определение 1.3.4.** Локализацией  $A$  по  $f$  назовем локализацию  $A$  по мультипликативному множеству  $\{f^n | n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$

**Определение 1.3.5.** Локализацией  $A$  по простому идеалу  $\mathfrak{p}$  будем называть локализацию по множеству  $A \setminus \mathfrak{p}$ .

**Определение 1.3.6.** Пусть  $S$  – мультипликативное подмножество кольца  $A$ . *Аннулятором*  $S$  назовем следующее множество

$$\text{Ann}(S) = \{a \in A \mid aS = \{0\}\}$$

**Теорема 1.3.7.** [1, стр. 96] Пусть  $S$  – мультипликативное подмножество кольца  $A$ ,  $\lambda: A \rightarrow L$  – локализация  $A$  по  $S$ . Если  $a \in A$ , то  $\lambda(a) = 0 \Leftrightarrow as = 0$  для некоторого  $s \in S$ .

**Теорема 1.3.8.** [1, стр. 97] Пусть  $S$  – мультипликативное подмножество кольца  $A$ ,  $\lambda: A \rightarrow L$  – локализация  $A$  по  $S$ . Тогда равносильны следующие условия:

1.  $L = \{0\}$ ;
2.  $0 \in S$ .

**Определение 1.3.9.** *Радикалом*  $\sqrt{I}$  идеала  $I$  кольца  $R$  назовем множество

$$\{a \in R \mid (\exists n \in \mathbb{N})(a^n \in I)\}$$

**Определение 1.3.10.** Радикал нулевого идеала кольца  $R$  назовем *нильрадикалом*  $R$  и обозначим  $\text{rad}(R)$ . Таким образом,

$$\text{rad}(R) = \{a \in R \mid (\exists n \in \mathbb{N})(a^n = 0)\}$$

**Теорема 1.3.11.** [1, стр. 97] Пусть  $I$  – идеал кольца  $R$ . Тогда  $\sqrt{I}$  совпадает с пересечением всех простых идеалов содержащих  $I$ .

**Следствие 1.3.12.** Пусть  $R$  – кольцо. Тогда  $\text{rad}(R)$  совпадает с пересечением всех простых идеалов кольца  $R$ .

**Теорема 1.3.13.** [1, стр. 98] Пусть  $A$  – кольцо,  $f \in A$ ,  $\lambda: A \rightarrow L$  – локализация  $A$  по  $f$ ,  $a \in A$ . Тогда равносильны следующие условия:

1.  $\lambda(a) = 0$ ;
2.  $af^n = 0$ , для некоторого  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ;
3.  $f \in \sqrt{\text{Ann}(a)}$ .

**Теорема 1.3.14.** [1, стр. 98] Пусть  $S$  – мультипликативное подмножество кольца  $A$ ,  $\lambda: A \rightarrow L$  – морфизм колец. Тогда равносильны следующие условия:

1.  $\lambda$  – локализация  $A$  по  $S$ ;
2. (a)  $\lambda(S) \subseteq L^*$   
(b)  $L = \{\lambda(a)/\lambda(s) \mid a \in A, s \in S\}$   
(c)  $\forall a \in A \lambda(a) = 0 \Leftrightarrow as = 0$  для некоторого  $s \in S$ .

*Пример.* Пусть  $B$  – кольцо,  $A$  – его подкольцо,  $S$  – мультипликативное подмножество кольца  $A$ ,  $S \subseteq B^*$ ,  $L = \{a/s | a \in A, s \in S\}$ ,  $\lambda : A \rightarrow L$ ,  $\lambda(a) = a$ . Тогда  $\lambda$  – локализация  $A$  по  $S$ .

**Теорема 1.3.15.** [1, стр. 99] Пусть  $f : A \rightarrow B$  – гомоморфизм колец,  $S$  – мультипликативное подмножество  $A$ ,  $T$  – мультипликативное подмножество  $B$ ,  $f(S) \subseteq T$ ,  $\alpha : A \rightarrow A'$  – локализация  $A$  по  $S$ ,  $\beta : B \rightarrow B'$  – локализация  $B$  по  $T$ . Тогда существует единственный такой гомоморфизм  $f' : A' \rightarrow B'$ , что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{f'} & B' \\ \alpha \uparrow & & \uparrow \beta \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

**Теорема 1.3.16.** [1, стр. 100] Пусть  $\mathfrak{p}$  – простой идеал кольца  $R$  и  $\lambda : R \rightarrow L$  – локализация  $R$  в  $\mathfrak{p}$ . Тогда  $L$  – локальное кольцо с максимальным идеалом

$$\mathfrak{m} = \{\lambda(a)/\lambda(b) | a \in R, b \in R \setminus \mathfrak{p}\}$$

#### 1.4. МОДУЛИ

**Определение 1.4.1.** Модуль  $M$  является прямой суммой своих подмодулей  $M_1, M_2$ , если для любого  $m \in M$  найдутся единственный  $m_1 \in M_1$  и единственный  $m_2 \in M_2$ , такие, что  $m = m_1 + m_2$ . Выражение « $M$  является прямой суммой  $M_1$  и  $M_2$ » будем записывать  $M = M_1 \oplus M_2$ .

**Теорема 1.4.2.** Пусть  $M$  модуль над кольцом  $R$ , тогда равносильны следующие условия:

1.  $M = M_1 \oplus M_2$ ;
2.  $M = M_1 + M_2$  и  $M_1 \cap M_2 = \{0\}$ .

**Определение 1.4.3.** Подмодуль  $S$  модуля  $M$  выделяется прямым слагаемым, если найдется такой подмодуль  $T$  модуля  $M$ , что  $M = S \oplus T$ .

**Определение 1.4.4.** [3, стр. 140] Пусть  $M$  –  $R$ -модуль кольца  $R$ . Некоторое семейство  $x_1, \dots, x_n \in M$  линейно независимо, если для любых  $a_i \in R, i \in I$  справедливо  $\sum_{i \in I} a_i x_i = 0$  только тогда, когда  $a_1 = \dots = a_n = 0$ .

**Определение 1.4.5.** Семейство  $x_1, \dots, x_n$  из определения 1.4.4 будем называть базисом  $R$ -модуля  $M$ .

**Определение 1.4.6.** Модуль свободный, если имеет базис.

**Определение 1.4.7.** Модуль  $P$  над кольцом  $R$  называется проективным, если для любого эпиморфизма  $f : N \rightarrow M$   $R$ -модулей и любого морфизма  $g : P \rightarrow M$  существует такой

морфизм  $h : P \longrightarrow N$ , что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & N \\ & \nearrow h & \downarrow f \\ P & \xrightarrow{g} & M \end{array}$$

**Теорема 1.4.8.** *Модуль проективен тогда и только тогда, когда он является прямым слагаемым некоторого свободного модуля.*

**Теорема 1.4.9.** *Проективный модуль над локальным кольцом свободен.*

**Теорема 1.4.10.** *Пусть  $R$  – коммутативное кольцо,  $\mathfrak{p}$  – простой идеал в  $R$ . Если  $M$  – проективный  $R$ -модуль, то  $M_{\mathfrak{p}}$  – свободный  $R_{\mathfrak{p}}$ -модуль.*

**Определение 1.4.11.** Проективный модуль  $M$  над коммутативным кольцом  $R$  имеет ранг  $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , если для любого простого идеала  $\mathfrak{p}$  кольца  $R$  свободный  $R_{\mathfrak{p}}$ -модуль  $M_{\mathfrak{p}}$  имеет (свободный) ранг  $r$ .

**Определение 1.4.12.** Пусть  $K$  – кольцо,  $U, V, W$  –  $K$ -модули,  $f : U \times V \longrightarrow W$  – билинейное отображение. Составим  $K$ -модуль  $T$  и билинейное отображение  $g : U \times V \longrightarrow T$  такие, что для любого  $f$  существует отображение  $h : T \longrightarrow W$ , что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & T \\ & \nearrow f & \downarrow h \\ U \times V & & \\ & \searrow g & \downarrow \\ & & W \end{array}$$

Модуль  $T$  с соответствующими свойствами назовем результатом *тензорного произведения*  $U$  на  $V$  над кольцом  $K$  и обозначим  $U \otimes_K V$ .

**Определение 1.4.13.**  $\phi : A \longrightarrow B$  – морфизм  $k$ -алгебр,  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $S$  – подмодуль  $A$ -модуля  $A^n$ . Обозначим  $S^B := \langle \phi(S) \rangle_B$   $B$ -линейную оболочку подмножества  $\phi(S) \subseteq B^n$ .

**Лемма 1.4.14.** *Пусть  $\phi : A \longrightarrow B$  – морфизм  $k$ -алгебр,  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $S, T$  – подмодули  $A$ -модуля  $A^n$ ,  $A^n = S \oplus T$ . Тогда выполняются следующие утверждения:*

1. *Существует такой изоморфизм  $B$ -модулей*

$$\psi : (B \otimes_A S) \oplus (B \otimes_A T) \longrightarrow B^n,$$

*что для всех  $b \in B$ ,  $s \in S$ ,  $t \in T$*

$$(b \otimes_A s, b \otimes_A t) \xrightarrow{\psi} b(s + t);$$



2.

$$\psi((B \otimes_A S) \times \{0\}) = S^B,$$

$$\psi(\{0\} \times (B \otimes_A B)) = T^B,$$

$$B^n = (A^n)^B = S^B \oplus T^B;$$

3. Ранг проективного  $B$ -модуля  $S^B$  равен рангу проективного  $A$ -модуля  $S$ . (1.4.11)

**Определение 1.4.15.** Пусть  $M$  –  $R$ -модуль кольца  $R$ . Множество всех  $\text{End}_R(M)$  будем называть *главной линейной группой*. Обозначается главная линейная часть  $\text{GL}_R(M)$ .

**Определение 1.4.16.** Любой морфизм колец  $\phi : k \longrightarrow A$  будем называть  $k$ -алгеброй.

$A$  автоматически является  $k$ -модулем по операции умножения

$$c \cdot a = \phi(c)a, \quad c \in k$$

## 1.5. ЛОКАЛИЗАЦИЯ МОДУЛЕЙ

**Определение 1.5.1.** Пусть  $S$  – мультипликативное подмножество кольца  $R$ ,  $M$  –  $R$ -модуль. Морфизм  $R$ -модулей  $\lambda : M \longrightarrow L$  и  $R$ -модуль  $L$  называются *локализацией  $M$  по  $S$* , если выполняются следующие условия:

$$1. \quad S_L \subseteq \text{GL}_R(L);$$

2. для любого морфизма  $R$ -модулей  $\lambda' : M \longrightarrow L'$ , для которого  $S'_L \subseteq \text{GL}_R(L')$ , существует и единственен такой морфизм  $\phi : L \longrightarrow L'$ , что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ \lambda \nearrow & & \searrow \phi \\ M & \xrightarrow{\lambda'} & L' \end{array}$$

## 1.6. КАТЕГОРИИ И ФУНКТОРЫ

**Определение 1.6.1.** Граф  $G$  – это любая упорядоченная четверка  $(V, A, \text{dom}, \text{cod})$ , где  $V$ ,  $A$  – любые множества,  $\text{dom}, \text{cod} : A \longrightarrow V$  – произвольные отображения. Элементы  $V$  – вершины графа  $G$ , элементы  $A$  – стрелки, или ребра графа  $G$ . Если  $a \in A$ , то  $\text{dom}(a) \in V$  называется началом, или областью определения  $a$ ,  $\text{cod}(a) \in V$  – концом, или областью значений  $a$ , или кообластью  $a$ .

*Пример 1.6.1.* Граф  $G$  состоит из множества вершин  $V = \{A, B, C, D\}$ , множества стрелок  $A = \{e, f, g, h\}$ , отображений  $\text{dom}, \text{cod} : A \longrightarrow V$ ,  $\text{cod}(e) = \text{cod}(e) = A$ ,  $\text{dom}(f) = A$ ,  $\text{cod}(f) = B$ ,  $\text{dom}(g) = A$ ,  $\text{cod}(g) = B$ ,  $\text{dom}(h) = B$ ,  $\text{cod}(h) = C$ .

$$e \circlearrowleft A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B \xrightarrow{h} C \quad D$$

**Определение 1.6.2.** Если  $a, b$  – вершины графа  $G$ , то множество стрелок графа  $G$  из  $a$  в  $b$  обозначим  $G(a, b)$ , или  $\text{Mor}_G(a, b)$ , или  $\text{Mor}(a, b)$ , если ясно, о каком графе идет речь.

*Пример.* В графе  $G$  из 1.6.1  $G(A, A) = \{e\}$ ,  $G(A, B) = \{f, g\}$ ,  $G(A, C) = \emptyset$ ,  $G(C, D) = \emptyset$  и так далее.

Если стрелка  $f$  имеет начало  $a$  и конец  $b$ , то мы пишем  $f : a \longrightarrow b$ , или  $a \xrightarrow{f} b$ . Если мы желаем подчеркнуть, что стрелка  $f : a \longrightarrow b$  относится к графу  $G$ , то пишем  $a \xrightarrow[G]{f} b$ . Это бывает нужным, если на одном и том же множестве  $V$  определено более одного графа с множеством вершин  $V$ .

**Определение 1.6.3.** Множество вершин графа  $G$  обозначим  $\text{Ob}(G)$ .

**Определение 1.6.4.** Пусть  $G, H$  – графы. Морфизмом  $G \longrightarrow H$  назовем любое отображение  $\phi : V(G) \cup A(G) \longrightarrow V(H) \cup A(H)$  такое, что  $\phi(V(G)) \subseteq V(H)$  (т. е. вершины  $G$  переходят в вершины  $H$ ),  $\phi(A(G)) \subseteq A(H)$  (т. е. ребра  $G$  переходят в ребра  $H$ ), и если  $a, b \in V(G)$ ,  $f \in \text{Mor}_G(a, b)$ , то  $\phi(f) \in \text{Mor}_H(\phi(a), \phi(b))$  (т. е. из  $f : a \longrightarrow b$  следует  $\phi(f) : \phi(a) \longrightarrow \phi(b)$ ).

**Определение 1.6.5.** Категория  $\mathcal{C}$  – это граф  $G$ , в котором для произвольных  $A, B, C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  задано произведение  $\text{Mor}(B, C) \times \text{Mor}(A, B) \longrightarrow \text{Mor}(A, C)$ , причем выполняются следующие условия.

1. Для  $A, B, C, D \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  и  $f \in \text{Mor}(A, B)$ ,  $g \in \text{Mor}(B, C)$ ,  $h \in \text{Mor}(C, D)$  выполняется закон ассоциативности  $(hg)f = h(gf)$ ;
2. Для каждого  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  найдется  $e \in \text{Mor}(A, A)$  такой, что для любого  $B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  и  $f \in \text{Mor}(A, B)$ ,  $g \in \text{Mor}(B, A)$  выполняются равенства  $fe = f$  и  $eg = g$ .

**Определение 1.6.6.** Элементы  $\text{Ob}(\mathcal{C})$  называются *объектами категории  $\mathcal{C}$* .

**Определение 1.6.7.** Элементы  $\text{Mor}(X, Y)$  называются *морфизмами  $X$  в  $Y$* , или морфизмами  $X \longrightarrow Y$ .

Если  $\alpha \in \text{Mor}(X, Y)$  и ясно, о какой категории идет речь, то мы пишем  $\alpha : X \longrightarrow Y$ , или  $X \xrightarrow{\alpha} Y$ . Морфизм  $e : A \longrightarrow A$  из аксиомы 2 определения 1.6.5 называется *тождественным*, или *единичным* морфизмом объекта  $A$ .

**Определение 1.6.8.** Множество всех морфизмов категории  $\mathcal{C}$  обозначим  $\text{Mor}(\mathcal{C})$ .

**Определение 1.6.9.** Пусть  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  – категории. Говорят, что  $F$  – функтор  $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ , если каждому  $X \in \text{Ob}(\mathcal{A})$  сопоставлен некоторый объект  $F(X) \in \text{Ob}(\mathcal{B})$  и для каждого морфизма  $\phi : X \longrightarrow Y$  в  $\mathcal{A}$  определен морфизм  $F(\phi) : F(X) \longrightarrow F(Y)$  в  $\mathcal{B}$  таким образом, что выполняются следующие свойства

1. Если  $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ , то  $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$ ;
2. Если  $\alpha : A \longrightarrow B$ ,  $\beta : B \longrightarrow C$  – морфизмы в  $\mathcal{A}$ , то  $F(\beta\alpha) = F(\beta)F(\alpha)$ .

Условие  $F(\beta\alpha) = F(\beta)F(\alpha)$  означает, что функтор переводит любой коммутативный треугольник в категории  $\mathcal{A}$  в коммутативный треугольник в категории  $\mathcal{B}$

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ \alpha \nearrow & & \searrow \beta \\ A & \xrightarrow{\gamma} & C \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & F(B) & \\ F(\alpha) \nearrow & & \searrow F(\beta) \\ F(A) & \xrightarrow{F(\gamma)} & F(C) \end{array}$$

Вообще, очевидно, функтор переводит любую коммутативную диаграмму в коммутативную диаграмму. Интуитивно, *функтор – это морфизм категорий*.

**Теорема 1.6.10.** [1, стр. 49] Пусть  $I$  – множество,  $(F_i)_{i \in I}$  – семейство функторов из категории  $\mathcal{C}$  в категорию  $\mathcal{U}$ -множеств  $\mathcal{S}$ . Существует и единственен такой функтор  $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}$ , что

1. для каждого  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$   $F(X) = \prod_{i \in I} F_i(X)$ ;
2. для любого морфизма  $\phi : X \longrightarrow Y$  в  $\mathcal{C}$   $F(\phi) = \prod_{i \in I} F_i(\phi)$ .

## 1.7. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И ФУНКТОРЫ

**Определение 1.7.1.** Любой функтор  $\mathbf{Alg}_k \longrightarrow \mathbf{Set}$  –  $k$ -функтор.

**Определение 1.7.2.** Пусть  $F : \mathbf{Alg}_k \longrightarrow \mathbf{Set}$  – функтор забвения,  $\Gamma$  – множество. Аффинным пространством  $A_k^\Gamma$  над  $k$  размерности  $|\Gamma|$  назовем  $k$ -функтор  $F^\Gamma$  (1.6.10).

Очевидно,  $A_k^\Gamma$  –  $k$ -функтор, любой  $k$ -алгебре  $A$  сопоставляющий  $A^\Gamma$ , и произвольному морфизму  $k$ -алгебр  $\phi : A \longrightarrow B$  соотносящий отображение  $\phi^\Gamma : A^\Gamma \longrightarrow B^\Gamma$ .

Если  $n \in \mathbb{N}$  и  $\Gamma = \{1, \dots, n\}$  ( $\Gamma = \emptyset$  при  $n = 0$ ), то для любых  $a_1, \dots, a_n$  мы считаем, что  $(\alpha_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \in \Gamma = (a_1, \dots, a_n)$ . Таким образом, для произвольного множества  $S$  мы очевидным образом отождествляем  $S^\Gamma$  и  $S^n$ . Для краткости мы пишем  $A_k^n := A_k^\Gamma$ , и называем  $k$ -функтор  $A_k^n$  аффинным  $k$ -пространством над  $k$ . Если ясно, о каком  $k$  идет речь, можно писать  $A^n$ .

**Определение 1.7.3.** Системой уравнений над  $k$  называется тройка

$$S = (P, (T_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}, (f_\delta)_{\delta \in \Delta}) \quad (1.7.1)$$

где  $P$  –  $k$ -алгебра многочленов,  $(T_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} =: T$  – ее базис, и  $(f_\delta)_{\delta \in \Delta}$  – любое семейство многочленов из  $P$ .

**Определение 1.7.4.** Решением системы уравнений 1.7.1 в  $k$ -алгебре  $A$  называется произвольное семейство  $a \in A^\Gamma$  такое, что  $f_\delta(a) = 0$  для всех  $\delta \in \Delta$ .

## 2. СХЕМЫ ГРАССМАНА

### 2.1. ФУНКТОРЫ ГРАССМАНА

**Определение 2.1.1.** Пусть  $r, n \in \mathbb{N}$ . Для любой  $k$ -алгебры  $A$  определим  $\mathcal{G}_{n,r}(A)$  как множество таких подмодулей  $S$   $A$ -модуля  $A^{r+n}$ , что

1.  $S$  выделяется прямым слагаемым в  $A^{r+n}$  (в частности, в силу 1.4.8,  $S$  – проективный  $A$ -модуль);
2.  $A$ -модуль  $S$  имеет ранг  $r$ .

Для любого морфизма  $\phi : A \rightarrow B$  пусть  $S \in \mathcal{G}_{n,r}(A)$  и  $S^B \in \mathcal{G}_{n,r}(B)$  (в силу 1.4.14). Тогда построим естественное отображение  $\mathcal{G}_{n,r}(\phi) : \mathcal{G}_{n,r}(A) \rightarrow \mathcal{G}_{n,r}(B)$ , определим как  $S \mapsto S^B$ .

Докажем, что  $\mathcal{G}_{n,r}$  —  $k$ -функтор.

*Доказательство.* Пусть  $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$  — морфизмы  $k$ -алгебр.

Покажем, что  $\mathcal{G}_{n,r}(\beta\alpha) = \mathcal{G}_{n,r}(\beta)\mathcal{G}_{n,r}(\alpha)$ . Пусть  $S \in \mathcal{G}_{n,r}(A)$ .

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}_{n,r}(\beta)\mathcal{G}_{n,r}(\alpha))(S) &= \mathcal{G}_{n,r}(\beta)(\mathcal{G}_{n,r}(\alpha)(S)) = \\ \mathcal{G}_{n,r}(\beta)(\langle \alpha(S) \rangle_B) &= \langle \beta(\langle \alpha(S) \rangle_B) \rangle_C = \langle \langle (\beta\alpha)(S) \rangle_B \rangle_C = \\ \langle (\beta\alpha)(S) \rangle_C &= \mathcal{G}_{n,r}(\beta\alpha)(S). \end{aligned}$$

Мы доказали, что  $\mathcal{G}_{n,r}$  —  $k$ -функтор. □

### **Литература**

1. Волочков, А.А. Схемы. / А.А.Волочков – Пермь: [б./и.], 2023. – 233.
2. Lang, S. Algebra / S.Lang – New York: Sprinter, 2002 – 918.
3. Cohn, P.M. Algebra Volume 2 / P.M. Cohn – 2nd ed. – Avon: John Willey & Sons Ltd., 1989 – 428.
4. Atiyah, M. F., MACDONALD I. G. Introduction to Commutative Algebra / M. F. Atiyah, I. G. Macdonald – London: Addison-Wesley, 1969 – 128.