# 暑假作业 2 参考答案

（考试时间:120 分钟试卷总分:150 分）

**注意事项:**

**1. 答题前，考生务必将自己的校名、姓名、准考证号填写在答题卷的相应位置上.**

**2. 全部答案在答题卡上完成，答在本卷上无效.**

**一、选择题:本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请在答题卡的相应位置填涂.**

1. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$, $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3,4\}$, 则 $\left(\complement_U A\right)\cap B=$（　　）

A. $\{2,3\}$　　B. $\{3,4\}$　　C. $\{3\}$　　D. $\{4\}$

【答案】B

【解析】

【分析】

求出 $\complement_U A$，再求交集即可.

【详解】因为 $\complement_U A=\{3,4,5\}$，　$B=\{2,3,4\}$

所以 $\left(\complement_U A\right)\cap B=\{3,4\}$

故选：B

【点睛】本题主要考查了集合的交集和补集的运算，属于基础题.

2. 已知扇形的圆心角为 120°，半径为 3，则这个扇形的面积为（　　）

A. $3\pi$　　B. $2\pi$　　C. $\pi$　　D. $\frac{\pi}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】

根据扇形面积公式即可求解.

【详解】由扇形面积公式可得

这个扇形的面积为 $\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}\times 3^2=3\pi$

故选：A

【点睛】本题主要考查了扇形的面积公式，属于基础题.

3. 函数 $f\left(x\right)=x^3-x+1$ 的零点所在的区间是（　　）

A. $(-2,-1)$　　B. $(-1,0)$　　C. $(0,1)$　　D. $(1,2)$

【答案】A

【解析】

【分析】

由零点存在性定理求解即可.

【详解】$f\left(-2\right)=-5$，$f\left(-1\right)=1$，$f\left(0\right)=1$，$f\left(1\right)=1$，$f\left(2\right)=7$

因为 $f\left(-2\right)\cdot f\left(-1\right)<0$，$f\left(-1\right)\cdot f\left(0\right)>0$，$f\left(0\right)\cdot f\left(1\right)>0$，$f\left(1\right)\cdot f\left(2\right)>0$

所以函数 $f\left(x\right)=x^3-x+1$ 的零点所在的区间是 $(-2,-1)$

故选：A

【点睛】本题主要考查了零点存在性定理，属于基础题.

4. 设函数 $f\left(x\right)$ 是定义在 $R$ 上的奇函数，当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=\log_2\left(x+4\right)-2$，则 $f\left(-4\right)=$（　　）

A. $1$　　B. $-1$　　C. $2$　　D. $-2$

【答案】B

【解析】

【分析】

根据奇函数得到，$f\left(-4\right)=-f(4)$，计算出 $f(4)$，即可得到 $f\left(-4\right)$.

【详解】函数 $f\left(x\right)$ 是定义在 $R$ 上的奇函数，则 $f\left(-4\right)=-f(4)$

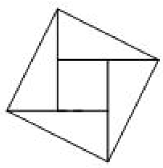
$f(4)=\log_2\left(4+4\right)-2=3-2=1$

所以 $f\left(-4\right)=-1$

故选：B

【点睛】本题主要考查了函数奇偶性的性质，属于基础题.

5. 如图，是我国古代数学家赵爽的弦图，它是由四个全等的直角三角形与一个小正方形拼成的大正方形，如果小正方形的面积为 1，大正方形的面积为 5，直角三角形中较小的锐角为 $\alpha$，则 $\tan\alpha=$（　　）



A. $\dfrac{2}{3}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{3}{2}$　　D. $2$

【答案】B

【解析】

【分析】

根据题意求出直角三角形的面积以及斜边的长，由勾股定理以及三角形面积公式列出等式，求解即可.

【详解】因为大正方形的面积为5，所以直角三角形的斜边为$\sqrt{5}$

小正方形的面积为1，大正方形的面积为5，则每一个直角三角形的面积为1

设直角三角形的两直角边分别为：$x,y$，$(x<y)$

则有$\begin{cases}\dfrac{1}{2}xy=1\\ x^2+y^2=5\end{cases}$　解得：$x=1,y=2$

则$\tan\alpha=\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{2}$

故选：B

【点睛】本题主要考查了勾股定理、三角形面积公式以及求正切，属于基础题.

6. 已知$\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}$，$\alpha\in(0,\pi)$，则$\sin\alpha=$（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】

利用两角和的余弦公式将$\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}$展开，平方后化简得到$\tan\alpha=\sqrt{3}$，求出$\alpha=60^\circ$，即可得出$\sin\alpha$.

【详解】因为$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=-\frac{1}{2}$

所以$\left(\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)^2=\frac{1}{4}$，化简得到$\sin^2\alpha=\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha$

又$\alpha\in(0,\pi)$，所以$\sin\alpha\neq 0$，即$\sqrt{3}\cos\alpha=\sin\alpha$，即$\tan\alpha=\sqrt{3}$

所以$\alpha=60°$

所以$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$

故选：C

【点睛】本题主要考查了两角和的余弦公式以及同角三角函数的基本关系，属于基础题.

7. 已知$|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=2,\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=1$，$\lambda\in\mathbf{R}$，则$\left|\vec{a}+\lambda\vec{b}\right|$的最小值是（　　）

A. 0　　B. 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】

将$\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{a})$展开化简得到$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，再由$\left|\vec{a}+\lambda\vec{b}\right|=\sqrt{\left(\vec{a}+\lambda\vec{b}\right)^2}$化简得到$\left|\vec{a}+\lambda\vec{b}\right|=\sqrt{5+4\lambda}$，根据$\lambda$的范围，即可得到$\left|\vec{a}+\lambda\vec{b}\right|$的最小值.

【详解】因为$\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{b}-1=1$，所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$

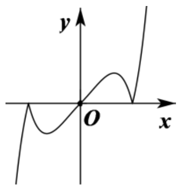
$\left|\vec{a}+\lambda\vec{b}\right|=\sqrt{\left(\vec{a}+\lambda\vec{b}\right)^2}=\sqrt{\vec{a}^2+2\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}=\sqrt{5+4\lambda}$

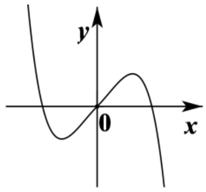
当$\lambda=-\frac{5}{4}$时，$\left|\vec{a}+\lambda\vec{b}\right|$取最小值：$\sqrt{5+4\times\left(-\frac{5}{4}\right)}=0$

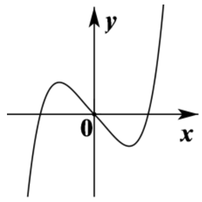
故选：A

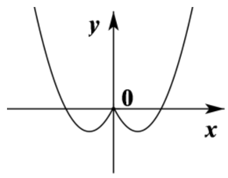
【点睛】本题主要考查了向量的基本运算以及模长的求法，属于中档题.

8. 函数$y=\left(x-x^3\right)2^{|x|}$的图象大致是（　　）

A. 


B. 


C. 


D. 


【答案】B

【解析】

【分析】

根据奇偶性排除D，取特殊值排除A，C，即可得出答案.

【详解】令 $f(x)=\left(x-x^3\right)2^{|x|}$

$f(-x)=\left(-x+x^3\right)2^{|x|}=-\left(x-x^3\right)2^{|x|}=-f(x)$，则函数 $y=\left(x-x^3\right)2^{|x|}$ 为奇函数

所以排除D

$\left(x-x^3\right)2^{|x|}=0$，解得：$x=0$，$\pm 1$

因为 $f(\frac{1}{2})=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)\times\sqrt{2}>0$ ，$f(2)=(2-8)\times 8<0$，所以排除A，C

故选：B

【点睛】本题主要考查了函数图象的识别，属于基础题.

9. 若 $a=\ln 2$，$b=5^{-\frac{1}{2}}$，$c=\log_2\sqrt{2}$ 则 $a$，$b$，$c$ 的大小关系是（　　）

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$　　C. $b<c<a$　　D. $c<b<a$

【答案】C

【解析】

【分析】

利用对数函数的单调性得出 $a=\ln 2>\ln\sqrt{e}=\frac{1}{2}$，利用对数的运算得出 $c=\log_2\sqrt{2}=\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$，利用指数的运算化简 $b=5^{-\frac{1}{2}}$ 并与 $\frac{1}{2}$ 比较，即可得出答案.

【详解】因为 $a=\ln 2>\ln\sqrt{e}=\frac{1}{2}$，$c=\log_2\sqrt{2}=\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$，$b=5^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}<\frac{1}{2}$

所以 $b<c<a$

故选：C

【点睛】本题主要考查了比较大小，属于中档题.

10. 已知函数 $f\left(x\right)=-\cos^2 x-\sin x+2$，$x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}]$，则 $f\left(x\right)$ 的最大值为（　　）

A. 1　　B. 3　　C. $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】

化简 $f\left(x\right)$，利用正弦函数的性质求出 $\sin x\in[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}]$，利用换元法以及二次函数的单调性即可求解.

【详解】$f\left(x\right)=-(1-\sin^2 x)-\sin x+2=\sin^2 x-\sin x+1$

因为 $x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}]$，所以 $\sin x\in[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}]$

令 $t=\sin x$，$t\in[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}]$

则 $f(x)=\mathrm{g}(t)=t^2-t+1$，二次函数 $\mathrm{g}(t)$ 在区间 $[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}]$ 上单调递减，在区间 $[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}]$ 上单调递增

$\mathrm{g}(-\frac{\sqrt{2}}{2})=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+1=\frac{3+\sqrt{2}}{2}$，$\mathrm{g}(\frac{\sqrt{3}}{2})=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{\sqrt{3}}{2}+1=\frac{7-\sqrt{3}}{4}$

所以 $f\left(x\right)$ 的最大值为 $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$

故选：D

【点睛】本题主要考查了求函数正弦的二次式的最值，属于中档题.

11. 将函数 $f\left(x\right)=\sin\left(2x+\theta\right)(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2})$ 的图象向左平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位长度后得到函数 $g\left(x\right)$ 的图象，若 $f\left(x\right)$，$g\left(x\right)$ 的图象都经过点 $P(0,\frac{1}{2})$，则 $\varphi$ 的值可以是（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. $\frac{4\pi}{3}$　　D. $\frac{7\pi}{6}$

【答案】C

【解析】

【分析】

由 $f(0)=\sin\theta=\dfrac{1}{2}$，得出 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$，根据平移变换得到 $g(x)=\sin\left[2(x+\varphi)+\dfrac{\pi}{6}\right]$，由 $g(0)=\dfrac{1}{2}$ 结合正弦函数的性质得到 $\varphi=k\pi$，$k\in Z$ 或 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}+k\pi$，$k\in Z$，由 $k=1$ 即可得到答案.

【详解】因为 $f(0)=\sin\theta=\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$

由题意可得 $g(x)=\sin\left[2(x+\varphi)+\dfrac{\pi}{6}\right]$

$g(0)=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\sin\left(2\varphi+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$，解得：$2\varphi+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$，$k\in Z$ 或 $2\varphi+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$，$k\in Z$

即 $\varphi=k\pi$，$k\in Z$ 或 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}+k\pi$，$k\in Z$

当 $k=1$ 时，$\varphi=\dfrac{\pi}{3}+\pi=\dfrac{4\pi}{3}$

故选：C

【点睛】本题主要考查了正弦函数的平移变换等，属于中等题.

12. 高斯函数是数学中的一个重要函数，在自然科学社会科学以及工程学等领域都能看到它的身影.设 $x\in\mathbf{R}$，用符号 $[x]$ 表示不大于 $x$ 的最大整数，如 $[1.6]=1,[-1.6]=-2$，则 $y=[x]$ 叫做高斯函数.给定函数 $f(x)=x-[x]$，若关于 $x$ 的方程 $f(x)=\log_a\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(a>0,\ a\neq1)$ 有 5 个解，则实数 $a$ 的取值范围为（　　）

A. $[5.5,6.5)$　　B. $(5.5,6.5]$　　C. $[6.5,7.5)$　　D. $(6.5,7.5]$

【答案】D

【解析】

【分析】

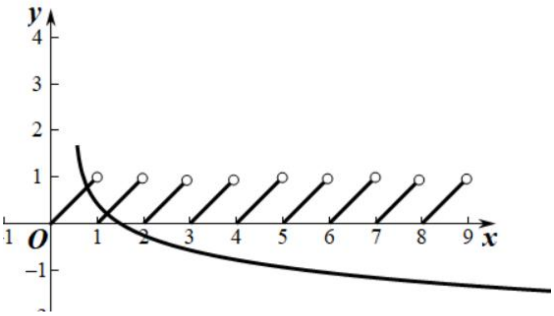
证明函数 $f(x)$ 是以1为周期的周期函数，并根据 $x\in[0,1)$ 时，$f(x)$ 的图象画出 $f(x)$，$x\in[0,+\infty)$，将方程的解的个数转化为函数的交点个数，讨论 $a$ 的取值，根据图像，列出相应不等式即可得到实数 $a$ 的取值范围.

【详解】$f(x+1)=x+1-[x+1]=x+1-[x]-1=x-[x]=f(x)$

所以函数 $f\left(x\right)$ 是以 $1$ 为周期的周期函数，当 $x\in\left[0,1\right)$ 时，$\left[x\right]=0$，则 $f\left(x\right)=x$

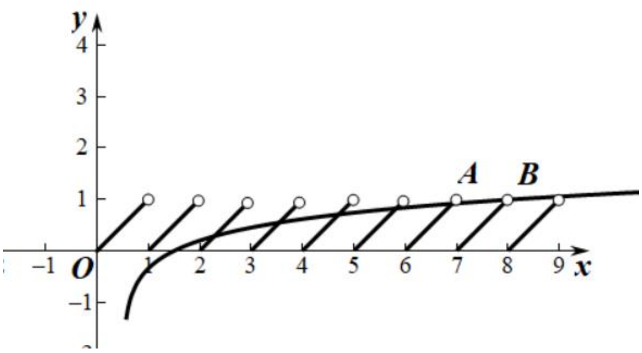
要使得 $f\left(x\right)=\log_a\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(a>0，a\neq1)$ 有 5 个解，即函数 $y=\log_a\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ 与函数 $f(x)$ 的图象有 5 个交点.

当 $0<a<1$ 时，函数 $y=\log_a\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ 与函数 $f(x)$，$x\in\left[0,+\infty\right)$ 的图象如下图所示




不满足题意

当 $a>1$ 时，函数 $y=\log_a\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ 与函数 $f(x)$，$x\in\left[0,+\infty\right)$ 的图象如下图所示




要使得函数 $y=\log_a\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ 与函数 $f(x)$ 的图象有 5 个交点，则函数 $y=\log_a\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ 的图象低于点 $A$，不低于点 $B$

故有 $\begin{cases}\log_a\left(7-\dfrac{1}{2}\right)<1\\ \log_a\left(8-\dfrac{1}{2}\right)\geq1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log_a\left(\dfrac{13}{2}\right)<\log_a a\\ \log_a\left(\dfrac{15}{2}\right)\geq\log_a a\end{cases}$，解得：$6.5<a\leq7.5$

故选：$D$

【点睛】本题主要考查了根据函数的零点个数求参数范围，属于难题.

## 二、填空题:本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分把答案填在答题卡相应位置

13. 若向量 $\vec{a}=(1,2)$ 与 $\vec{b}=(m,4)$ 共线，则实数 $m=$ __________;

【答案】2

【解析】

【分析】

由向量共线得到 $1\times4-2m=0$，即可得到 $m$ .

【详解】向量 $\vec{a}=(1,2)$ 与 $\vec{b}=(m,4)$ 共线，则 $1\times4-2m=0$，解得 $m=2$

故答案为：2

【点睛】本题主要考查了由向量共线求参数，属于基础题.

14. 求值 $\sin61^\circ\ \cos1^\circ-\sin29^\circ\sin1^\circ=$__________.

【答案】$\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】

利用诱导公式得到 $\sin61^\circ=\sin(90^\circ-29^\circ)=\cos29^\circ$，逆用两角和的余弦公式，即可求解.

【详解】$\sin61^\circ=\sin(90^\circ-29^\circ)=\cos29^\circ$

则 $\sin61^\circ\ \cos1^\circ-\sin29^\circ\sin1^\circ=\cos29^\circ\cos1^\circ-\sin29^\circ\sin1^\circ=\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

故答案为：$\frac{\sqrt{3}}{2}$

【点睛】本题主要考查了两角和的余弦公式的逆用，属于基础题.

15. 若函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}3^x-1, & x\le1\\ \log_3(x-1), & x>1\end{cases}$ 在 $(-\infty，a]$ 上的最大值为 2，则实数 $a$ 的取值范围为_______.

【答案】$[1,10]$

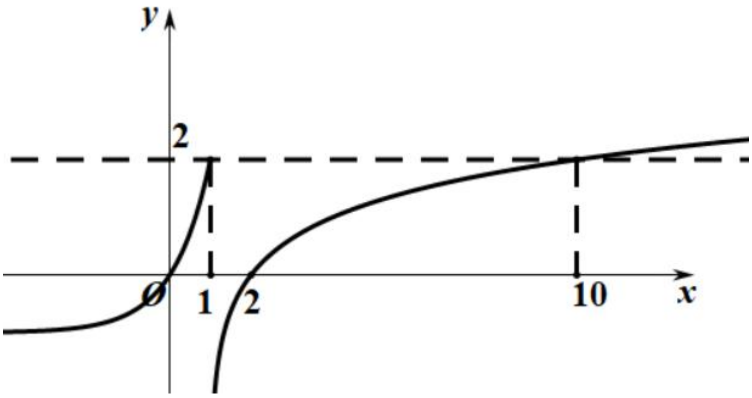
【解析】

【分析】

先确定 $f\left(x\right)=2$ 的解，画出函数 $f\left(x\right)$ 的图像，根据图像分析即可得出实数 $a$ 的取值范围.

【详解】 $3^x-1=2$，解得 $x=1$； $\log_3(x-1)=2=\log_3 9$，解得 $x=10$

函数 $f\left(x\right)$ 的图像如下图所示




由图可知，要使得函数 $f\left(x\right)$ 在 $(-\infty，a]$ 上的最大值为 2，则 $1\le a\le 10$

【点睛】本题主要考查了根据函数的最值求参数，属于中档题.

16. 若函数 $f\left(x\right)$ 同时满足下列两个条件，则称该函数为“和谐函数”:

（1）任意 $x\in R$，$f\left(-x\right)+f\left(x\right)=0$ 恒成立;

（2）任意 $x_1$，$x_2\in R$，且 $x_1\ne x_2$，都有 $\left(x_1-x_2\right)[f\left(x_1\right)-f(x_2)]>0$

以下四个函数:① $y=x-\dfrac{1}{x}$；② $y=\lg\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$；③ $y=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3^x+1}$；④ $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 中是“和谐函数”

的为________________（写出所有正确的题号）.

【答案】③④

【解析】

【分析】

先由单调性以及奇偶性定义得到 “和谐函数”满足的条件，再以此为依据，分别判断奇偶性以及单调性，即可判断.

【详解】任意 $x\in R, f\left(-x\right)+f\left(x\right)=0$ 恒成立，则任意 $x\in R, f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$

即函数 $f\left(x\right)$ 在 $R$ 上为奇函数

取 $x_1<x_2$，因为任意 $x_1$，$x_2\in R$，且 $x_1\ne x_2$，都有 $\left(x_1-x_2\right)[f\left(x_1\right)-f(x_2)]>0$，所以 $f\left(x_1\right)<f(x_2)$ $f\left(x\right)$

在 $R$ 上增函数

①函数 $y=x-\frac{1}{x}$ 的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$，故①不是和谐函数；

② $\sqrt{x^2+1}-x\geq 0\Rightarrow x\in R$，令 $f(x)=\lg\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

$f(x)=\lg\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lg\left[\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}\right]=-\lg\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$，则函数

$y=\lg\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ 在 $R$ 上为奇函数，但 $f(0)=0, f(1)=\lg(\sqrt{2}-1)<0$，即不是增函数，故②不是和谐函数；

③令 $g(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3^x+1}=\frac{3^x-1}{2\left(3^x+1\right)}$，定义域为 $R$ $g(-x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3^{-x}+1}=\frac{1}{2}-\frac{3^x}{3^x+1}=\frac{1-3^x}{2\left(3^x+1\right)}=-g(x)$，则函数 $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{3^x+1}$ 在 $R$ 上为奇函数；

设 $x_1<x_2$， $g(x_1)-g(x_2)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3^{x_1}+1}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3^{x_2}+1}\right)=\frac{1}{3^{x_2}+1}-\frac{1}{3^{x_1}+1}$

因为 $3^{x_2}+1>3^{x_1}+1$，所以 $\frac{1}{3^{x_2}+1}-\frac{1}{3^{x_1}+1}<0$，即 $g(x_1)<g(x_2)$

所以函数 $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{3^x+1}$ 在 $R$ 上为增函数，故③为和谐函数；

④令 $h(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$，定义域为 $R$

$h(-x)=\frac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x}=-\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=-h(x)$，则函数 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 在 $R$ 上为奇函数；

设 $x_1<x_2$， $h(x_1)-h(x_2)=\frac{e^{x_1}-e^{-x_1}}{e^{x_1}+e^{-x_1}}-\frac{e^{x_2}-e^{-x_2}}{e^{x_2}+e^{-x_2}}=\frac{2\left(e^{x_1-x_2}-e^{-(x_1-x_2)}\right)}{\left(e^{x_1}+e^{-x_1}\right)\left(e^{x_2}+e^{-x_2}\right)}$

因为 $x_1-x_2<0$， $-\left(x_1-x_2\right)>0$，所以 $e^{x_1-x_2}<e^{-(x_1-x_2)}$

即 $h(x_1)<h(x_2)$

即函数 $h(x)$ 在 $R$ 上为增函数，故④是和谐函数；

故答案为：③④

【点睛】本题主要考查了函数单调性的证明以及奇偶性的证明，属于中等题.

**三、解答题:本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出必要的文字说明或演算步骤.**

17. 已知全集 $U=R$，集合 $A=\{x\mid -1\le x<3\}, B=\left\{x\mid 1\le 2^{x}\le 4\right\}, C=\left\{x\mid a\le x\le a+1\right\}$

（1）求 $A\cup B, (\complement_U A)\cap B$;

（2）如果 $A\cap C=\varnothing$，求实数 $a$ 的取值范围.

【答案】（1） $A\cup B=\{x\mid -1\le x<3\}$，$\left(\complement_U A\right)\cap B=\varnothing$ （2）$\{a\mid a<-2$ 或 $a\geqslant 3\}$

【解析】

【分析】

(1) 化简集合 B，求出集合 A 的补集，即可求解 $A\cup B, (\complement_U A)\cap B$;

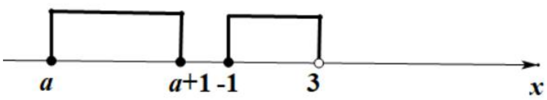
(2) 根据集合 A 与集合 C 没有公共部分，画出韦恩图，列出相应不等式，即可求解.

【详解】解：（1）因为 $A=\{x\mid -1\le x<3\}$， $B=\{x\mid 1\le 2^{x}\le 4\}=\{x\mid 0\le x\le 2\}$

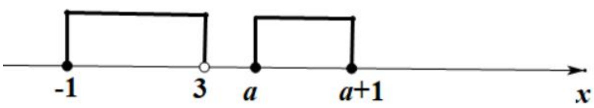
$\complement_U A=\{x\mid x<-1$ 或 $x\ge 3\}$

$A\cup B=\{x\mid -1\le x<3\}$，$(\complement_U A)\cap B=\varnothing$

（2）因为 $A\cap C=\varnothing$，所以集合 A 与集合 C 没有公共部分




或

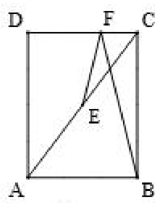



故有 $a+1<-1$ 或 $a\ge 3$，解得：$a<-2$ 或 $a\ge 3$

即实数 $a$ 的取值范围是 $\{a\mid a<-2$ 或 $a\geqslant 3\}$

【点睛】本题主要考查了集合的交并补运算以及已知集合间的关系求参数，属于中等题.

18. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 $E$ 是 $AC$ 的中点，点 $F$ 在边 $CD$ 上.




（1）若点 $F$ 是 $CD$ 上靠近 $C$ 的三等分点，试用 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AD}$ 表示 $\overrightarrow{EF}$；

（2）若 $AB=2$，$BC=3$，当 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=3$ 时，求 $DF$ 的长.

【答案】（1） $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ （2） $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】

(1) 根据平行四边形法则得到 $\overrightarrow{EC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$， $\overrightarrow{CF}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，结合三角形法则并化简得 $\overrightarrow{EF}$；

(2) 建立直角坐标系，用坐标表示 $\overrightarrow{AE}$、 $\overrightarrow{BF}$，即可得到 $DF$ 的长.

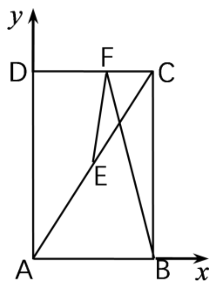
【详解】解：（1）因为 $E$ 是 $AC$ 中点，所以 $\overrightarrow{EC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

因为 $F$ 是 $CD$ 上靠近 $C$ 的三等分点，所以， $\overrightarrow{CF}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

所以 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ .

（2）如图，以 $A$ 为原点，分别以 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AD}$ 的方向为 $x$、$y$ 轴的正方向，建立平面直角坐标系

设 $DF$ 的长为 $a$ $(a\in[0,2])$ ,则 $A(0,0)$、$B(2,0)$、$E(1,\frac{3}{2})$、$F(a,3)$ .




所以 $\overrightarrow{AE}=(1,\frac{3}{2})$ , $\overrightarrow{BF}=(a-2,3)$ .

因为 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=3$，所以 $a-2+\frac{9}{2}=3$ ,

所以 $a=\frac{1}{2}$ ,即 $DF$ 的长为 $\frac{1}{2}$ .

【点睛】本题主要考查了用基底表示向量以及已知数量积求模长，属于中档题.

19. 已知函数 $f\left(x\right)=\sin 2x\cdot\left(1-2\sin^2 x\right)+\frac{1}{2}\cos\left(\pi-4x\right)$

（1）求 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间;

（2）若 $a\in(0,\pi)$，且 $f\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 求 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

【答案】（1）单调递增区间为 $[-\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2},\frac{3\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}],k\in Z$ （2） $2+\sqrt{3}$

【解析】

【分析】

(1) 利用二倍角的余弦公式、诱导公式、辅助角公式化简 $f\left(x\right)$，根据正弦函数的单调增区间化简得到 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间；

(2) 根据函数 $f\left(x\right)$ 的解析式以及 $f\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 化简得到 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=1$，再由 $\alpha\in(0,\pi)$ 确定 $\alpha=\frac{\pi}{4}$，再由两角和的正切公式求出 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$.

【详解】解：（1）由已知得：$f(x)=\sin 2x\cos 2x-\frac{1}{2}\cos 4x=\frac{1}{2}\sin 4x-\frac{1}{2}\cos 4x$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(4x-\frac{\pi}{4})$

由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 4x-\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z$

得 $-\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}, k\in Z$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2},\frac{3\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}], k\in Z$.

（2）因为 $f(\frac{\alpha}{4}+\frac{\pi}{8})=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以 $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin[4(\frac{\alpha}{4}+\frac{\pi}{8})-\frac{\pi}{4}]=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

即 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=1$.

因为 $\alpha\in(0,\pi)$, 所以 $\alpha+\frac{\pi}{4}\in(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$,

因此 $\alpha+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$, 即 $\alpha=\frac{\pi}{4}$

所以 $\tan(\alpha+\frac{\pi}{6})=\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}=\dfrac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$.

【点睛】本题主要考查了求正弦型函数的单调性以及两角和的正切公式，属于中档题.

20. 在国庆期间，某商场进行优惠大酬宾活动，在活动期间，商场内所有商品按标价的 80% 出售;同时，当顾客在该商场内消费满一定金额（$x$ 元）后，还可按如下方案获得相应金额（$y$ 元）的奖券: $y=\begin{cases}20,100\le x<300,\\30,300\le x<400,\\50,400\le x<600,\\80,600\le x<800,\\ \quad\cdots\end{cases}$ 根据上述优惠方案，顾客在该商场购物可以获得双重优惠例如，购买标价为 300 元的商品，则消费金额为 240 元，获得的优惠额为: $300\times0.2+20=80$（元）.设购买商品得到的

$\text{优惠率}=\dfrac{\text{购买商品获得的优惠额}}{\text{商品的标价}}$，试问:

（1）购买一件标价为 800 元的商品，顾客得到的优惠率是多少?

（2）对于标价在 $[400,700]$（元）内的商品，要使顾客购买某商品获得 30% 的优惠率，则该商品的标价是多少?

【答案】（1）购买一件标价为 $800$ 元的商品，顾客得到的优惠率是 $30\%$（2）购买标价为 $500$ 元的商品可以得到 $30\%$ 的优惠率

【解析】

【分析】

(1) 根据题意求出优惠额，利用题设所给公式即可得到优惠率;

(2) 设购买标价为 $m$ 元的商品可以得到 $30\%$ 的优惠率，分别讨论 $m\in[400,500)$ 和 $m\in[500,700]$，根据优惠率 $30\%$ 列出等式，求出相应的标价，即可得出满足题意的标价.

【详解】解:（1）标价为 $800$ 元的商品优惠额为: $800\times0.2+80=240$ 元,

所以优惠率为: $\dfrac{240}{800}=0.3$.

答：购买一件标价为 $800$ 元的商品，顾客得到的优惠率是 $30\%$.

（2）设购买标价为 $m$ 元的商品可以得到 $30\%$ 的优惠率.

当 $m\in[400,500)$ 时， $0.8m\in[320,400)$，

优惠率为： $\dfrac{0.2m+30}{m}=30\%$，解得 $m=300$.

因为 $300\notin[400,500)$，所以不合题意，舍去.

当 $m\in[500,700]$ 时， $0.8m\in[400,560]$，

优惠率为： $\dfrac{0.2m+50}{m}=30\%$，解得 $m=500$.

因为$500\in[500,700]$，符合题意.

答：购买标价为500元的商品可以得到30%的优惠率.

【点睛】本题主要考查了分段函数模型的应用，属于中档题.

21. 已知函数$f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)(A>0,0<\omega<6,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$，$x=\frac{\pi}{3}$是函数$f\left(x\right)$的零点，$x=\frac{\pi}{12}$是函数$f\left(x\right)$图象的对称轴，且$f(\frac{\pi}{12})=2$.

（1）求函数$y=f\left(x\right)$的解析式;

（2）若函数$g\left(x\right)=f\left(x\right)-m$在$[-\frac{\pi}{2},0]$上有两个零点，求$m$的取值范围.

【答案】（1）$f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$（2）$(-2,-\sqrt{3}]$

【解析】

【分析】

(1) 根据函数$f\left(x\right)$图象的对称轴以及$f(\frac{\pi}{12})=2$，得出$A=2$，由$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$，$f(\frac{\pi}{12})=2$列出方程组，解出$\omega=4(k_1-2k_2)-2$，$k_1,k_2\in Z$，根据$0<\omega<6,|\varphi|<\frac{\pi}{2}$得出$\omega$，$\varphi$；

(2) 将零点问题转化为函数$y=f(x)$与函数$y=m$的交点问题，根据图像，求出$m$的取值范围.

【详解】解：（1）$x=\frac{\pi}{12}$是函数$f\left(x\right)$图象的对称轴，且$f(\frac{\pi}{12})=2$，$A>0$

则$A=2$

由已知得$\begin{cases}\sin(\frac{\pi\omega}{3}+\phi)=0,\\ \sin(\frac{\pi\omega}{12}+\phi)=1\end{cases}$

所以$\begin{cases}\frac{\pi\omega}{3}+\phi=k_1\pi, & k_1\in Z\\ \frac{\pi\omega}{12}+\phi=2k_2\pi+\frac{\pi}{2}, & k_2\in Z,\end{cases}$

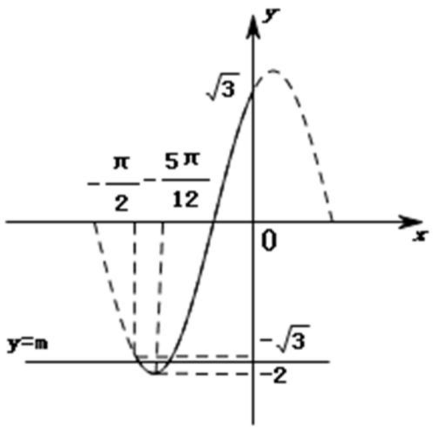
所以$\omega=4(k_1-2k_2)-2$，$k_1,k_2\in Z$，

又因为$0<\omega<6$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以$\omega=2$，$\varphi=\frac{\pi}{3}$，

故$f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$

（2）依题意知函数

$y=f(x)$ 与 $y=m$ 在 $[-\dfrac{\pi}{2},0]$ 上有 2 个交点




结合图象可知：

函数 $y=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$ 在 $[-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{5\pi}{12}]$ 上单调递减，

在 $[-\dfrac{5\pi}{12},0]$ 上单调递增，

当 $x=-\dfrac{\pi}{2}$ 时，$y=-\sqrt{3}$；

当 $x=-\dfrac{5\pi}{12}$ 时，$y=-2$；当 $x=0$ 时，$y=\sqrt{3}$；

所以 $m$ 的取值范围为 $(-2,-\sqrt{3}]$.

**【点睛】**本题主要考查了由正弦函数的性质确定解析式以根据函数零点的个数求参数范围，属于中档题.

22. 已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{3^x+a}{3^x+b}(a，b\in R)$

（1）当 $a=3，b=-1$ 时，求满足方程 $f\left(x\right)=3^x$ 的 $x$ 的值;

（2）若函数 $f\left(x\right)$ 是定义在 $R$ 上的奇函数.

①若存在 $t\in[-1,2]$，使得不等式 $f\left(2t-1\right)>f\left(t-k\right)$ 成立，求实数 $k$ 的取值范围;

②已知函数 $g\left(x\right)$ 满足 $f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)=3^x-3^{-x}$，若对任意 $x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq0$，不等式 $g\left(2x\right)\geq m\cdot[g\left(x\right)-2]-8$ 恒成立，求实数 $m$ 的最大值

【答案】（1） $x=1$ （2）①$k>-1$②$4\sqrt{2}$

【解析】

【分析】

(1) 解方程$\frac{3^x+3}{3^x-1}=3^x$求出$x$的值即可；

(2) 根据函数$f(x)$是定义在$R$上的奇函数，由定义列出方程，求出$a=-1$，$b=1$

对于①，利用函数单调性的定义证明$f(x)$的单调性，利用单调性化简不等式得到$k>-t+1$，由$t\in[-1,2]$，即可得到实数$k$的取值范围；

对于②，由$f(x)$的解析式得到$g(x)$的解析式，化简$g(2x)\geq m\cdot[g(x)-2]-8$，结合换元法以及基本不等式得到实数$m$的最大值. 11

【详解】解：（1）因为$a=3$，$b=-1$，所以$\frac{3^x+3}{3^x-1}=3^x$，

化简得$(3^x)^2-2\cdot3^x-3=0$，解得$3^x=-1$（舍）或$3^x=3$，

所以$x=1$.

（2）因为$f(x)$是奇函数，

所以$f(-x)+f(x)=0$，所以$\frac{3^x+a}{3^x+b}+\frac{3^{-x}+a}{3^{-x}+b}=0$

化简变形得：$(a+b)(3^x+3^{-x})+2ab+2=0$

要使上式对任意$x$恒成立，则$a+b=0$且$ab+1=0$

解得：$\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$或$\begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}$，因为$f(x)$的定义域是$R$，所以$\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}$舍去

所以$a=-1$，$b=1$，所以$f(x)=\frac{3^x-1}{3^x+1}$.

① $f(x)=\frac{3^x-1}{3^x+1}=1-\frac{2}{3^x+1}$，

对任意$x_1$，$x_2\in R$，且$x_1<x_2$有：$f(x_1)-f(x_2)=\frac{2}{3^{x_2}+1}-\frac{2}{3^{x_1}+1}=\frac{2(3^{x_1}-3^{x_2})}{(3^{x_1}+1)(3^{x_2}+1)}$，

因为$x_1<x_2$，所以$3^{x_1}-3^{x_2}<0$，所以$f(x_1)<f(x_2)$，

因此 $f\left(x\right)$ 在 $R$ 上单调递增，

因为 $f\left(2t-1\right)>f\left(t-k\right)$，当 $t\in\left[-1,2\right]$ 时成立，所以 $2t-1>t-k$，当 $t\in\left[-1,2\right]$ 时成立，

即 $k>-t+1$，当 $t\in\left[-1,2\right]$ 时成立，

当 $t\in\left[-1,2\right]$ 时，$(-t+1)_{\min}=-1$，所以 $k>-1$.

②因为 $f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)=3^{x}-3^{-x}$，所以 $g\left(x\right)=3^{x}+3^{-x}+2\left(x\neq 0\right)$，

所以 $g\left(2x\right)=3^{2x}+3^{-2x}+2=\left(3^{x}+3^{-x}\right)^{2}$，

不等式 $g\left(2x\right)\geq m\cdot[g\left(x\right)-2]-8$ 恒成立，即 $\left(3^{x}+3^{-x}\right)^{2}\geq m\cdot\left(3^{x}+3^{-x}\right)-8$，

令 $s=3^{x}+3^{-x}$，因为 $x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 0$，

所以 $3^{x}+3^{-x}=(\sqrt{3^{x}}-\sqrt{3^{-x}})^{2}+2>2$，即 $s>2$，

所以 $s^{2}\geq m\cdot s-8$，当 $s>2$ 时恒成立，即 $m\leq s+\dfrac{8}{s}$，当 $s>2$ 时恒成立，

因为 $s>2$，$s+\dfrac{8}{s}=(\sqrt{s}-\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{s}})^{2}+4\sqrt{2}\geq 4\sqrt{2}$，当且仅当 $s=2\sqrt{2}$ 时，等号成立，

所以 $m\leq 4\sqrt{2}$，即实数 $m$ 的最大值为 $4\sqrt{2}$.

【点睛】本题主要考查了函数的奇偶性的性质、利用函数单调性解不等式以及基本不等式，属于难题.