GARCH

- 我们已知ARIMA的模型是$r_t = \mu_t + a_t$，μ_t 是均值，我们用ARIMA来拟合，我们之前假设$a_t = \sigma_t \epsilon_t, \sigma_t$ 是一个常数，但实际上不是这样的，而且我们的volatility是不能直接被观察到的，那么a_t 到底包不包含之前的信息呢（我们之前的a_t 是不包含的，因为σ 是常数）
- ARCH test: 为什么at^2的ACF等于0?
- GARCH
  - 抛开对于μ_t 的ARIMA模型，我们观察针对a_t/σ_t 的ARCH、ARCH模型
  - ARCH:$a_t = \sigma_t \epsilon_t, \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + ... + \alpha_m a_{t-m}^2$
  - GARCH:$a_t = \sigma_t \epsilon_t, \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum \beta_i \sigma_{t-i}^2$
    - ϵ_t 的分布：norm, t,GED,skewed t
    - reparameterization:
    - example: GARCH(1,1)
      - propoerties
      - forcast
  - 满足$\alpha_i + \beta_i = 1$ IGARCH
  - pros:
    - 简单，已经规定了函数形式，只需要进行参数拟合即可
    - 性质3，如果满足一定的条件，具有heavy tails-->volatility clustering
  - cons:
    - 不管是上升还是下降，都是一个固定的数值，但这明显是不太符合市场逻辑的，如果波动性上升，那么接下来的波动性会有更大的概率下降，所以针对上升下降时存在不对称性的
    - 另外，如果价格下降，会有更大的可能直接崩溃，也即是说波动性上升，这也是不对称的
    - 有限制条件：$\beta_1 < 1, \alpha_1 + \beta_1 < 1, \alpha_0 > 0, \beta_0 > 0$，这个条件比AR$|\beta| < 1$ 的条件要小得多
    - 没有金融理论支撑
  - 为了解决这些不足，延伸了一些其他的GARCH
    - GARCH-M
      - formula
      - cons:没有一个具体的展开式，不能理论推导forecast error