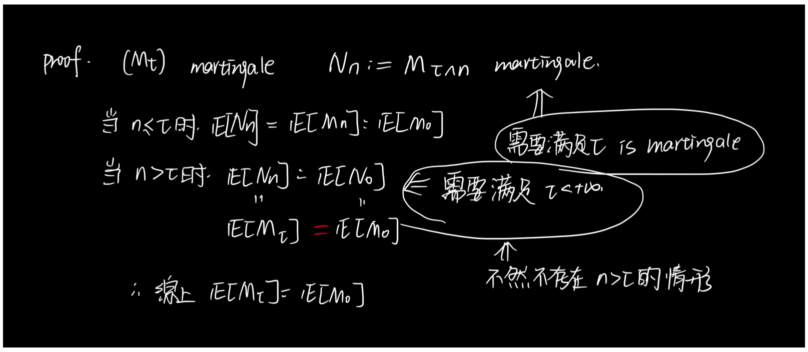
Underlying logic

- Chapter 1
  - MCT
    - increasing+ positive/decreasing+negative$\longrightarrow$ E和lim可以交换
  - DCT
    - a.s. convergence+ domination$\longrightarrow$ lim和$\int$可以交换
  - Fatou's Lemma
    - positive$\longrightarrow E[\liminf x_k] \leq \liminf E[x_k]$
  - LLN
    - iid + $E[x] < +\infty \rightarrow E[x] \rightarrow \frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}$
  - Levy's convergence theorem
    - convergence in distribution iff $\lim E[e^{iux_n}] = E[e^{iux}]$ (特征函数)
  - CLT（中心极限定理）
    - x_n independent + the same distribution with X, $E[x^2] < +\infty. \longrightarrow \frac{X_1+X_2+...+X_n}{n} \rightarrow N(E[X], \frac{Var(X)}{n})$(依分布收敛)
  - Relationships between different convergence
    - a.s. -> p
    - L^2 -> L -> p
- Chapter 2
  - Conditional expectation
- Chapter 3
  - martingale(E必须bounded): property: $E[M_{n+1}] = E[M_n]$
  - Random walk (S_n) is martingale
  - -> $V_n := S_n^2 - nE[X_1^2]$ is martingale
  - -> $\phi(\lambda) = \log E[e^{\lambda x_1}], Z_n^\lambda := e^{\lambda S_n - n\phi(\lambda)}$ is martingale
  - -> $G_n = G_0 + \sum_{k=0}^{n-1} H_k(M_{k+1} - M_k), M_n is F_n martingale, H_n is F_n measurable$ is martingale
  - stopping time
    - （可以等于$+\infty$）:如果是inf则保证了停时之后所有的状态都满足已经停止，但是sup则没有保证这一点，他只保证了目前不属于停时的范围，但没有保证未来属于停时
  - stopped process
    - $N_n := M_{\tau\wedge n}$, 其实可以理解为如果只是一个stopping time, 在停时之后就不再有结果了，但现在我重新定义一个stopped process, 使得他即使停止之后还是有状态，这就是一个无穷的discrete process

- 注意：martingale和stopping time无关，于是我们在这里将两者建立一种联系：如果M_n是martingale，那么N_n 也是martingale（利用上述，H_k是indicator function ）

- theorem : τ is a bounded stopping time, $M_n is martingale \rightarrow E[M_\tau] = E[M_0]$
  - 意义：一个公平的赌博过程中，“在公平的赌博中，你不可能赢.”
  - 为什么这里需要必须有一个stopping time呢， 如果只有martingale不可以吗，martingale的性质针对任意的一个n，我们确实都能得到$E[M_n] = E[M_0]$,但注意这里将某个特殊的n替换成了一个τ,注意τ是一个随机变量，而不再是一个固定的n，所以不能再用martingale的性质



  - 必须是bounded stopping time
    - 如果不是bounded， $S_n, \tau = \inf(S_n = a), E[S_\tau] = a, E[S_0] = 0$
    - 如果不是stopping time, $\tau = sup(M_n \geq M_0), E[M_\tau] \geq E[M_0]$
    - 如果没有这个条件，我们随便制定一个时间作为停时，都可以获得这个等式，但显而易见的是这是不正确的，但如果我们加上这个条件，那么如果我们选择赢1块作为停时，这个时间unbounded，所以不成立上述条件
  - 事实上，这个定理的条件（有界）特别强，但我们知道$P(\tau < +\infty) = 1$
    - 考虑两个条件，有界的意思是我们知道在某一个时刻K之前他一定停止，但as 意味着我们知道他一定停止，但不知道具体是什么时候，以赌博来讲，就是我们知道这个赌博不会无限期的停止下去，但不知道具体什么时候才能停止
    - 如何利用这个条件而不限制一定有界来进行定义一个停时定理呢？下图是思考过程

考虑停时$T_n = \min\{T, n\}$，注意到

$$M_T = M_{T_n} + M_T I_{\{T>n\}} - M_n I_{\{T>n\}}, \tag{6.10}$$

从而

$$E[M_T] = E[M_{T_n}] + E[M_T I_{\{T>n\}}] - E[M_n I_{\{T>n\}}],$$

可以看出，T_n是一个有界停时($T_n \leq n$)，由上面命题可知$E[M_{T_n}] = E[M_0]$. 我们希望当$n \to \infty$时，(6.10)后面两项趋于0。

对于$E[M_T I_{\{T>n\}}] \to 0$来说，这是不困难的，因为$P\{T < \infty\} = 1$，所以当$n \to \infty$时，$P\{T > n\} \to 0$，$E[M_T I_{\{T>n\}}]$相当于对M_T限制在一个趋于空集的集合上取期望. 若要求$E[|M_T|] < \infty$，由控制收敛定理就可保证$E[M_T I_{\{T>n\}}] \to 0$.

$E[M_n I_{\{T>n\}}] \to 0$要麻烦一些，考虑前面的例6.4，在这个例子中，事件$\{T > n\}$相当于事件：前n次投掷硬币，均出现反面. 这个概率是$(\frac{1}{2})^n$，如果这个事件发生了，则至少赌博者已经输掉了$2^n - 1$元，即$M_n = 1 - 2^n$，从而

$$E[M_n I_{\{T>n\}}] = 2^{-n}(1 - 2^n) = -1 + 2^{-n} \to -1, \ n \to \infty,$$

不趋于0, 这也是为什么停时定理的结论在此处不成立的原因. 然而如果 M_n和T满足$E|M_T| < \infty$和

$$\lim_{n\to\infty} E[|M_n| I_{\{T>n\}}] = 0,$$

我们就可以得出结论$E[M_T] = E[M_0]$. 我们把这个过程写成如下的停时定理.

- 鞅停时定理

  定理6.4 (鞅停时定理) *设$\{M_n, n \geq 0\}$是一个关于$\{\mathscr{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \cdots, X_n)\}$的鞅，$T$是停时，且满足*

  $$(1) P\{T < \infty\} = 1, \quad (6.11)$$
  $$(2) E[|M_T|] < \infty, \quad (6.12)$$
  $$(3) \lim_{n\to\infty} E[|M_n| I_{\{T>n\}}] = 0, \quad (6.13)$$

  则有

  $$E[M_T] = E[M_0].$$

- martingale convergence theorem
  - L^2: martingale+ $supE[M_n^2] < +\infty$, 存在M_∞, $s.t. \lim E[(M_n - M_\infty)^2] = 0 or P[\lim M_n = M_\infty] = 1$
  - L

    定理6.7 (鞅收敛定理) *设$\{M_n, n \geq 0\}$是关于$\{X_n, n \geq 0\}$的鞅，并且存在常数$0 < C < \infty$使得$E[|M_n|] \leq C$对任意n成立，则当$n \to \infty$时，$\{M_n\}$ a.s. 收敛到一个随机变量M_∞.*
  - uniformly
- supermartingale and submartingale
  - super: E is decreasing : 这里只需要τ 是stopping time+ 下列三个conditions之一就可以推出$E[M_\tau] \leq E[M_0]$:

    1) τ is bounded (i.e. $\exists\ C>0$ s.t. $\tau \leq C$)
    2) $M_{\tau\wedge n}$ is bounded. (i.e. $\exists\ k>0$ s.t. $|M_{\tau\wedge n}| \leq k$)(stopping process bounded)
    3) $\mathbb{E}[\tau] < +\infty$ and there exist $k \geq 0$ s.t. $|M_{n+1}(w) - M_n(w)| < k$. $\forall n < \tau$. $w \in \Omega$
    (or equivalently $|M_n(w) - M_{n-1}(w)| \leq k$. $\forall n \leq \tau$. $w \in \Omega$)
  - sub: E is increasing
  - 在连续鞅的定义下我们还有Doob's decomposition theorem,

    prop 3.6.6 (Doob's decomposition theorem)
    (a) Let $(X_n)_{n\geq 1}$ be a L^1-process adapted to the filtration $(F_n)_{n\geq 0}$
    then X has the following decomposition: $X = X_0 + M + A$ which M is a martingale. $M_0 = 0$. A is a predictable process with $A_0 = 0$
    In addition, this decomposition is unique: if $X = X_0 + \tilde{M} + \tilde{A}$ where $\tilde{M}$ is a martingale $\tilde{M_0} = 0$. $\tilde{A}$ is a predictable process with $\tilde{A_0} = 0$. Then
    $P(\forall n \in \mathbb{N}.\ \tilde{M_n} = M_n.\ \tilde{A_n} = A_n) = 1$
    (b) X is a submartingale iff the process A is increasing: $\forall n \in \mathbb{N}$. $A_n \leq A_{n+1}$ a.s
    $X_n \leq X_{n+1}$ ↑ (submartingale)
- Doob' inequality
  - 比Markov更强的不等式

    Let $(M_n)_{n\geq 1}$ be a positive submartingale adapted to a filtration $(F_n)_{n\geq 0}$
    Then for all $c>0$ we have that $c \cdot P(\sup_{0\leq k\leq n} M_k \geq c) \leq \mathbb{E}[M_n]$
- Law of large numbers
  - LLN for martingale difference sequence

    prop 3.8.1 (LLN for martingale difference sequence) (MDS)
    Let $(Y_n)_{n\geq 1}$ be independent random variables s.t. $\mathbb{E}[Y_i] = 0$. for all $i \geq 1$
    $\sum_{i\geq 1} \frac{1}{i^2} Var(Y_i) < +\infty$. Then $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow[n\to+\infty]{a.s} 0$

            - 这里和classical 不同的是，这里不需要服从于相同的分布了，只需要独立，有相同的零期望和一些可积性，之前是对期望有bounded要求+相同分布+independent
        - LLN for martingales
            - definition

              Let $(S_n)_{n\geq 1}$ be a square-integrable martingale such that $E[S_n^2]=O(n)$
              Then $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{a.s.} 0$

- Chapter 4
    - Gaussian vectors: DX 服从Gaussian， 任意的D
        - 本身蕴涵着每个X_i服从高斯分布,但不一定独立，比如X服从$N(0,1)$, (X,X) Gaussian vector, but not independent
        - Gaussian vector 的大前提下，cov=0 iff independence
            - 如果没有Gaussian vector 的大前提，这是不成立的，参考例子：X 和ϵX
        - 为什么介绍Gaussian vector呢？因为接下来要引入Brownian Motion,
    - Brownian Motion: 满足increments independent and stationary($B_{t+s}-B_s--N(0,t)$),+ almost surely continuous+ $B_0=0$
        - 可以将这个standard Brownian Motion extended， 比如如果X_t满足increments stationary and independent and continuous, 那么她一定可以分解为$X_t-X_0=rt+\sigma B_t, B_t$ is a Brownian Motion,X_t 服从于这个正态分布了之后，B_t 就服从于正态分布，$(0,t)$
        - 很多B_t,作为一个随机变量，就是一个(B_t)Gaussian process <=> $(B_{t_1},B_{t_2},...,B_{t_n})$ is Gaussian vector, 其中，一个Brownian Motion 就是一个Gaussian process，但反过来讲，一个Gaussian vector 不一定是BM，需要加上一定的条件， $cov(B_t,B_s)=\min\{t,s\}$， 这样就可以得到一个BM
        - Properties
            - 仅仅凭借BM，我们知不知道$cov(B_t,B_s)$ ？ 可以，可以直接证明 $cov(B_t,B_s)=\min\{t,s\}$
            - stability: (这是高斯分布的性质，而不仅仅是BM的性质)如果X_n 依分布收敛到X，那么X也服从于高斯分布
            - $\int_0^T B_S dS$ 也是Gaussian process, 服从于$N(0,\frac{T^3}{3})$
            - trajectories of BM is non- differnentiable <- quadratic variation is T not 0, 如果是可微分的，那么应该等于0
                - 这说明b_t is not Lipschitz : $|a_n-a_m|\leq K|n-m|$
                - 在这里我们扩展一下，他的quadratic variation finite, 但是 total variation is not -> Riemann- Stieltjes is not valid
        - Existence of BM : 用 random walk 进行interpolation , 然后取极限
        - extended to continuous- time process
            - 这里的stopping time 指的必须是有界， 如果无界则称为optional time
        - Distribution of BM

- B_t is martingale --> $B_t^2 - t$ is martingale, B_t^2 is sub-martingale-------->>>>>> $B_t^2 = (B_s^2 - s) + t$ (Doob's decomposition theorem)

  Def: $(B_t)_{t\geq 0}$ is a stoc. proc. on (Ω, F, P) and F is a filtration.
  $(B_t)_{t\geq 0}$ is an F-standard BM if
  (0) $(B_t)_{t\geq 0}$ is F-adapted
  (i) $B_0 = 0$
  (ii) For all $s<t$. $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$
  (iv) $t \mapsto B_t(w)$ a.s. continuous
  (iii') $B_t - B_s$ is independent of F_s for all $s \leq t$.

- conditional distribution

  Distribution: for $0 \leq t < T$ the conditional distribution of B_T knowing $B_t = x$ is $N(x, T-t)$

Scaling, symmetry and time reversal

- transformation

  prop 4.7.1 Let B be a standard brownian motion $t_0 > 0$ and $c > 0$.
  Then the following processes are also BM
  (i) $(-B_t)_{t\geq 0}$ ⇒ symmetry
  (ii) $(c^{-\frac{1}{2}} B_{ct})_{t\geq 0}$ ⇒ scaling
  (iii) $(B_{t_0+t} - B_{t_0})$ ⇒ time translation
  (iv) $(t \cdot B_{\frac{1}{t}})_{t\geq 0}$ ⇒ time reversal

- 之前我们考虑的martingale都是在给定之前某一个fixed的时间的情况下，如果我想将fixed的时间extended to a random variable, 会发生什么？
- 仍然满足martingale

  prop 4.7.2 Let B be a BM. τ is a finite stopping time. Then $W_t := B_{t+\tau} - B_\tau$, $t \geq 0$ is a Brownian Motion independent of F_τ.

  Corollary 4.7.3 The brownian motion satisfies the strong Markov property of BM.
  $E[\phi(B_s, s\geq\tau) | F_\tau] = E[\phi(B_s, s\geq\tau) | B_\tau]$ for every stopping time τ and every bounded continuous function $\phi: C^0(\mathbb{R}^+) \to \mathbb{R}$.
  if τ is fixed. ⇒ weak Markov.
  if τ is random variable ⇒ strong Markov

- 在这之后，我们可以利用这个性质来计算两个随机变量的joint distribution, 从而得到某些特定的性质

  prop 4.7.4 Let B be a BM and $B_t^* = \sup_{0\leq s\leq t} B_s$. Then we have $\forall t>0$. $B_t^* \stackrel{L}{=} |B_t|$
  or $P(B_t^* \geq y) = P(|B_t| \geq y)$
  Futher more, the joint distribution of B_t and B_t^* is characterized by
  $P(B_t \leq x, B_t^* \geq y) = P(B_t \geq 2y - x)$ for $y > 0$, $x \leq y$

Chapter 5

- 在第四章我们其实提到了，我们之前的rieman积分是不够的，因为total variation infinite, 于是我们要选择另一种方式来计算BM的积分
- 在这里我们从simple process 扩展到 L2 再扩展到L，但是注意simple process 和L2 是有martingale和isometry的性质的，L只能是local martingale，且没有isometry的性质
- simple process:

  - $\int H_u dB_u$ 其中和Riemann积分相比，B_u没有了bounded total variation的性质，但相对来讲，H_u要比Riemann的条件更强一点
  - 四个性质
    - 这个积分continuous trajectories
    - martingale
    - isometry:$E[(\int_0^t H_u dB_u)^2] = E[\int_0^t H_u^2 du]$
    - 两个积分相乘

      4. If k is a simple process
      $E[(\int_s^{t_1} H_u dB_u)(\int_s^{t_2} k_u dB_u) | F_s] = E[\int_s^{\min(t_1, t_2)} H_u k_u du | F_s]$
      4其实用了3的变换，把upper bound转化为了t_1和t_2，转化为了2个积分相乘的形式

    - 相减也是martingale

      5. The process defined by $((\int_0^t H_u dB_u)^2 - \int_0^t H_u^2 du)_{0 \le t \le T}$ is a F_n-martingale

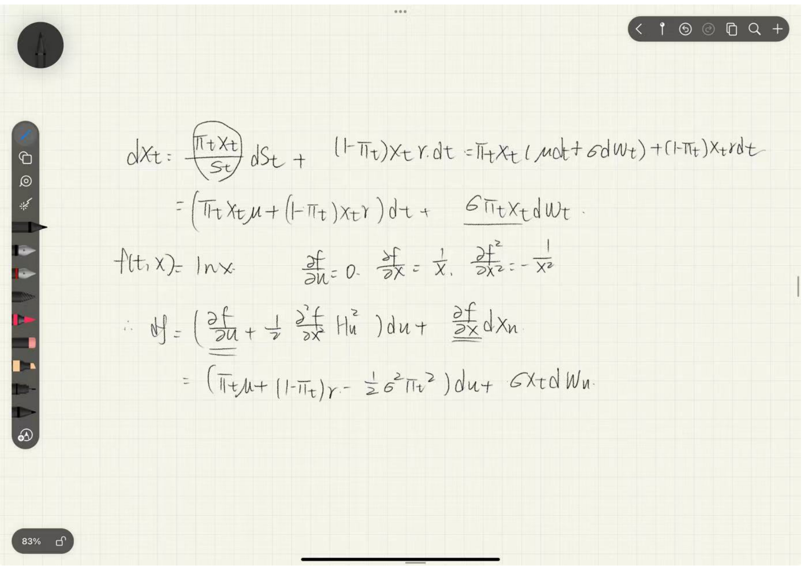
  - 积分的Quadratic variation$< \int_0^\cdot H_u dB_u >_t$: $< \int_0^\cdot H_u dB_u >_t = \int_0^t H_u^2 du = < X_t >$ X_t其实就是一个stochastic process， X_t的quadratic variation就是对整个积分的quadratic variation

    $$\mathrm{Var}\left(\int_0^T f(t)\, dB(t)\right) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i^2 (t_{i+1} - t_i) = \int_0^T f^2(t)\, dt.$$

  - 这里还给了一个定理就是任意一个L2的process都可以用simple process逼近，这样其实也可以理解为什么L2保留了simple process的性质
- L2
  - $E[\int_0^T H_u^2 du] < +\infty$
- L
  - $\int_0^T H_u^2 du < +\infty$ 注意和L2不同的是这里没有了期望，这里可以考虑E，如果期望小于正无穷，期望是什么其实是求积分，总的积分都小于正无穷，那么肯定每一个都小于正无穷，但如果知道每一个X都小于正无穷，但求和可不一定小于正无穷，所以L2-->L1, 但L1其实相当于L2的拓展，所以L2的性质可能并不适用于L1
  - 可以从找到一个序列H_t^n满足L2，他趋于H_t, H_t属于L1

- local martingale<--存在一个stopping time 的sequence s.t. $\tau \to +\infty$, And $M_{min\{t,\tau_n\}}$is a martingale
- Lemma: local martingale+ bounded below from above --> supermartingale

- Chapter 6
  - Ito process<-可以写成这种形式：$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_u du + \int_0^t H_u dB_u + \int_0^T |\alpha_u| du < +\infty + \int_0^T |H_u|^2 du| < +\infty$ <=> $dX_t = \alpha_t dt + H_u dB_u$
  - J 是整个的Ito process, J^2是subset of J满足$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_u du + \int_0^t H_u dB_u + +E[\int_0^T |\alpha_u| du] < +\infty + +E[\int_0^T |H_u|^2 du|] < +\infty$ <=> $dX_t = \alpha_t dt + H_u dB_u$
  - 你看其实整个的Ito process 是满足L形式的（不包含期望），而J^2 是满足L2形式的
  - J关于J^2的分解是唯一的
  - Ito's formula: $f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t (\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} H_u^2) du + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x} H_u dX_u$
  - 你看，X_t是有BM组成的，有两种形式，积分形式和微分形式，f是关于t和X_t的函数，满足Ito's formula, 也有两种形式
    - 我们考虑一个特殊的Ito process, $X_t = b + (X_0 - b)e^{-at} + \sigma \int_0^t e^{-a(t-u)} dW_u$,如果$X_0 is N(b, \frac{\sigma^2}{2a})$, 那么$X_t$和$X_0$ 一直同分布，但如果之时服从于高斯，但均值等不满足条件，那么只能说明当t趋于无穷时，趋于这个分布--> invariant (stationary) distribution
    - joint distribution? why?
    - Merton portfolio
      - X_t 是t时间内的value，π_t是投给risky asset的比例，$dX_t = \frac{\pi_t X_t}{S_t} dS_t + (1 - \pi_t) X_t r dt$



      - $V_0(x)$是我们的value，u是效用函数，我们是用效用函数来评估赚的钱多少而不是绝对值

$$V_0(x) = \sup_{\pi \in A} E[u(X_T^{\pi})]$$

            - Dynamic programming principle
                - 其实这里和衍生品里面把t变成$\tau = T - t$是一样的，因为我们需要初始条件即t=0，但我们只知道到期时的收益是什么，所以对变量进行一些转化，而这里的本意意思是，我要求在T时刻达到最大收益，也就是max(ST-X),一点一点往前推，怎么求在t时刻的value，在t+h时刻的value最大的情况下，t时刻的均值就是我们的value
            - 如何求解Merton， 把Merton转化成了$\sup L^\pi v = 0, v(T, x) = u(x)$
- Chapter 7
    - martingale representation
        - definition

          Theorem 7.1.1. For any $F \in L^2(\mathcal{F}_T, \mathbb{P})$. there exists a unique adapted process $H \in \mathbb{H}^2$. such that

          $F = \mathbb{E}[F] + \int_0^T H_s dW_s$. $\mathbb{P}$-a.s. ... (#).
        - square integrable martingale

          Thm 7.1.2. Let $(M_t)_{0 \le t \le T}$ be a square-integrable martingale. Then there exists a unique process $H \in \mathbb{H}^2$. s.t. $M_t = M_0 + \int_0^t H_s dW_s$ $0 \le t \le T$. $\mathbb{P}$-a.s.

          In particular. M has continuous path. (most important)
        - Change of measure
            - Cameron-Martin-->针对deterministic function