# Topic 4 Other derivatives

- Continuous dividend yield models
  - 如果我们不再是无分红的asset了，而是continuously receiving dividend 的asset， 那么我们可以当作分红再投资，也就是把之前的T时刻的单独的$S_T$写作$e^{qT}S_T$,这样带入之前的式子
    - BS model

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu\, dt + \sigma\, dB_t$$

$$\Pi_t = -C + \Delta S_t + \text{dividend}$$

$$d\Pi_t = -dc + \Delta \cdot dS_t + q\cdot\Delta\cdot S\cdot dt$$

Ito's formula

$$dc = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}\sigma^2 + \frac{\partial c}{\partial S}\mu\right)dt + \frac{\partial c}{\partial S}\cdot\sigma\cdot dB_t$$

$$d\Pi_t = dt\left(-\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}\sigma^2 - \frac{\partial c}{\partial S}\mu + \Delta\cdot\mu + q\cdot\Delta\cdot S\right)dt + dB_t\left(\Delta\cdot\sigma - \frac{\partial c}{\partial S}\cdot\sigma\right)$$

So. $\Delta = \frac{\partial c}{\partial S}$

$$d\Pi_t = dt\left(-\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}\sigma^2 \cancel{- \frac{\partial c}{\partial S}\mu + \mu\cdot\frac{\partial c}{\partial S}} + q\cdot\frac{\partial c}{\partial S}\cdot S\right)dt$$

$$= (dt)\left(-\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}\sigma^2 + qS\frac{\partial c}{\partial S}\right)dt$$

$$= (dt)r(-c + \Delta S_t)$$

$$= (dt)\left(-rc + \frac{\partial c}{\partial S}\cdot S\cdot r\right)$$

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = -\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}\sigma^2 - qS\frac{\partial c}{\partial S} + Sr\frac{\partial c}{\partial S} + rc$$

$$= \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + (r-q)S\cdot\frac{\partial c}{\partial S} + rc$$

这是我们dividend receving 的 BS formula

之前. 把 r-q 替换成 r.

    - martingale pricing
      - 第一步得到governing equation

$$\hat{S_t} = e^{qt}S. \quad \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t.$$

$$d\hat{S_t} = d(e^{qt}S)$$

$$= S \cdot e^{qt} \cdot q \cdot dt + e^{qt} \cdot dS$$

$$= Se^{qt} \cdot q dt + Se^{qt}\mu dt + S\sigma \cdot e^{qt} dB_t.$$

$$= Se^{qt}\left( (\mu+q)dt + \sigma \cdot dB_t \right)$$

$$= \hat{S_t}\left( (\mu+q)dt + \sigma dB_t \right).$$

$$\therefore \frac{d\hat{S_t}}{\hat{S_t}} = (\mu+q)dt + \sigma dB_t.$$

之前仅有一个$\mu$时，我们的 $\gamma = \frac{\mu - r}{\sigma}$.

现在成为 $\frac{\mu+q-r}{\sigma}$.

$$\therefore dz^Q = dz^P + \frac{\mu+q-r}{\sigma} dt.$$

则 $\hat{S_t}$在Q下成为了零 drift 的 martingale $\to \hat{S_t}^*$

$$\frac{d\hat{S_t}^*}{\hat{S_t}^*} = \sigma \cdot dz_t^Q. \quad \frac{d\hat{S_t}}{\hat{S_t}} = \underbrace{(r-q)}_{\text{之前是} r} dt + \sigma dz_t^Q.$$

- 第二步：注意这个asset是paying dividend的，也就是说他的价格是应该下降的，所以他的S变成了$Se^{-q\tau}$，注意只改变S！于是后来的ln也变了，于是构成了我们现在的公式
- 我们能把两个式子对比得到

$$E_Q^t\left[S_T \mathbf{1}_{\{S_T > X\}}\right] = Se^{\delta_S \tau} N(\hat{d_1})$$

$$E_Q^t\left[\mathbf{1}_{\{S_T > X\}}\right] = N(\hat{d_2}). = \theta($$

- 同样的，如果是put option，我们按照E来写出公式，然后用上面这个式子求，注意$S_T$和X的符号改变了，所以之前的$d_1$变成了$-d_1$
- 从这我们也可以得到含有dividend的option的平价公式
- 这里和之前有一个不同在于这里的pricing的公式是可以互相转化的，X和S交换，r和q交换，asset事paying dividend的

- Time dependent parameters
  - 参数都是和时间有关的，不再是之前的常数，其实只需要把之前位置的常数换成积分就好了$r\tau = \int_0^\tau r(u)du$

- Exchange options
  - 这里和之前不同的点在于，这里涉及到了两个asset，且两个asset中是存在correlation的
  - 我们这里采用的方法是numeraire invariance theorem,还记得之前我们采用的都是asset 和money来replicate，从而得到我们的定价公式，但现在如果继续用的话就会非常麻烦，于是我们更改了坐标系，我们将money换成了market 中的任何一个asset，发现这样的关系仍然存在，之后我们就可以用martingale了

- logic: 介绍M，找到Q，在根据Q找到$Q_X$,然后证明$Q_X$ is a martingale

- prewashing: 为什么会有这个？如果asset是foreign，那我们知道foreign的drift term，知道F的d的drift term，但如果我们想知道d的S的drift term呢？这是由于F和S存在$\rho$，也就是correlation，所以应该存在一定的额外的term，到底是什么呢？就是我们这个时候说的prewashing term
- implied volatility and volatility smiles
  - imlied volatility 是从BS equation中反解出来的，是一个average 的值
  - skew: 关于S/K的：
    - 1. 因为 out of money 会bid up更多的money，所以是skew的
    - 2.crash 会比increasing快得多，所以人们更愿意买put（相较于call来说）
    - 3.人们喜欢用out of money puts to hedge
    - S很小时，S实际的变化会比理论的变化的概率大，也就是说会继续下降的概率比理论lognormal大，而S很大时，继续上升的概率会比lognormal理论的概率小 --> S很小时，volatility会变大，因为变化的幅度会变大，而S很大时，一般不会再改变了，所以volatility会小，所以volatility和S的变化是成反比的
  - time:
    - volatile: 人们希望去抓住机会获利，所以会愿意增大gamma，也就是volatility，这时near dated 的option会有很大的volatility, 所以会使这种option的price增大，会使near dated 的option 的volatility增大
    - quiet：市场安静时，相反，near dated option的volatility会减小，
    - 同时，stock和commodity 也是相反的，如果是stock，falling market，人们会需要大量的put option, 所以put option 的价格会升高，所以volatility 会变大，相反如果是call option，就不需要了，所以很大的供给，价格就会下降，volatility就会下降
      - 对于commodity来讲，政府会干预，所以put option的损失是有限的，所以人们就喜欢卖put，所以大量的demand，volatility就会减小，
  - sigma: $\sigma(t)$ 是term structure of volatility,是由$\sigma_{imp}$推出来的
  - Dupire equation: 我们能得到这个式子，也就从现在市场上所有的option中获得了local volatility，

$$\sigma^2(X,T) = \frac{2\left[\frac{\partial c}{\partial T} + qc + (r-q)X\frac{\partial c}{\partial X}\right]}{X^2\frac{\partial^2 c}{\partial X^2}}.$$

  - local 和implied之间的关系，local是从现在市场中的价格得到的,意思是future的时候price是fair的，是根据C关于K和S的倒数，而implied是人们利用implied 来求得的option的price, 使得我们现在的price是符合我们的BS equation的，是未来一段时间内的average volatility

$$\sigma_{loc}^2(X,T) = \frac{\sigma_{imp}^2 + 2T\sigma_{imp}\frac{\partial\sigma_{imp}}{\partial T} + 2(r-q)XT\sigma_{imp}\frac{\partial\sigma_{imp}}{\partial X}}{\left(1 + Xd_1\sqrt{T}\frac{\partial\sigma_{imp}}{\partial X}\right)^2 + X^2T\sigma_{imp}\left[\frac{\partial^2\sigma_{imp}}{\partial X^2} - d_1\sqrt{T}\left(\frac{\partial\sigma_{imp}}{\partial X}\right)^2\right]},$$

  - 如果$\sigma_h = \sigma_i$那么$\Pi$只剩下第二项, 一般来说，定价会偏高，所以$\sigma_i > \sigma, \sigma_h = \sigma_i$, 所以$\Pi$一般大于0，所以确保了hedging会获得收益

(i) $\sigma_t$ - Mother Nature's choice

(ii) $\sigma_t^i$ - market's choice

(iii) $\sigma_t^h$ - hedger's choice

The total P&L at maturity $T$ is

两个用的不是一个sigma，所以有difference

$$\Pi_T = e^{rT}[V(S_0, 0; \sigma_0^i) - V(S_0, 0; \sigma_0^h)] + \int_0^T e^{r(T-t)} \frac{\Gamma_t^h S_t^2}{2} [(\sigma_t^h)^2 - \sigma_t^2] \, dt.$$

market　　hedger。　　nature。

- 但实际上，存在一个gamma，这个gamma可能是负的，所以并不能确保他一定是正的

$$\Gamma_t^h = \frac{\partial^2 V_t^h}{\partial S^2}$$

- VIX：用来对冲volatility risk, 之前我们的delta hedging 只对冲了stock price, 而没有对冲volatility

times the square root of the expected 30-day variance of the rate of return of the forward price of the S&P 500 index.

$100\sqrt{E_Q[\int_t^{t+30} \sigma_u^2 du]}$

过去的30天的variance，

$$\text{VIX} = 100\sqrt{\text{forward price of realized cumulative variance}}$$

- 实际上有很多缺陷：
  - 1.我们并不存在所有的K的option，所以进行了某些truncate,-->error
  - 2. 实际上K并不连续，我们采用了求和的形式，
  - 3.Taylor 公式的运用，我们用线性代替了ln

    The logarithm term $\ln \frac{F_0}{K_0}$ is approximated by the Taylor expansion in powers of $\frac{F_0}{K_0} - 1$ up to the quadratic term.

  - 4.Linear maturity interpolation：不存在正正好好的30天，所以我们进行了线性建模

- GMWB：Guaranteed minimum withdrawal benefit
  - 年金流加一个随机过程：随机过程是有stopping time的
  - 先remove the stopping time,构造一个不含stopping time的equation: 然后将这个SC和之前的SC结合起来，