Topic 2 Risk neutral and Fundamental Theorem of Asset Pricing

- 2.1 Discrete securities models
  - definition:
    - S_i(t) 表示第i个股票在时刻t时的价值
    - \omega_i表示第i个可能的结果
    - remark: 投资者在t=0时知道t=1时所有可能的结果，但具体是哪个结果发生投资者在t=0时刻时不知道的
    - P(\omega)>0是probability measure
    - S表示price process

$$S(t)=(S_1(t), S_2(t) \dots S_m(t))$$

$$S_1(t)=\begin{pmatrix} S_1(t,\omega_1) \\ S_1(t,\omega_2) \\ S_1(t,\omega_3) \\ \vdots \\ S_1(t,\omega_k) \end{pmatrix}$$

$S(t,\omega_1)$ 指t时刻发生了ω_1 $\quad S(t,\omega_1)=\begin{pmatrix} S_1(t,\omega_1) & S_2(t,\omega_1) & S_3(t,\omega_1) & \cdots & S_m(t,\omega_1) \end{pmatrix}$

$$S(1,\Omega)=\begin{pmatrix} S_1(1,\omega_1) & S_2(1,\omega_1) & \cdots & S_m(1,\omega_1) \\ S_1(1,\omega_2) & S_2(1,\omega_2) & \cdots & S_m(1,\omega_2) \\ \vdots & & & \vdots \\ S_1(1,\omega_k) & S_2(1,\omega_k) & \cdots & S_m(1,\omega_k) \end{pmatrix} \qquad S(1,\Omega)\geq 0$$

$\Uparrow$

有限责任

    - S*(t)可以看作是这只股票对无风险股票的标准化，S*(t)=S(t)/S0(t)

这种情况下,

$$S(t,\Omega)=\begin{pmatrix} S_0(t,\omega_1) & S_1(t,\omega_1) & \cdots & S_m(t,\omega_1) \\ S_0(t,\omega_2) & S_1(t,\omega_2) & & S_m(t,\omega_2) \\ S_0(t,\omega_3) & S_1(t,\omega_3) & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ S_0(t,\omega_k) & S_1(t,\omega_k) & & S_m(t,\omega_3) \end{pmatrix}$$

$$S^*(t,\Omega)=\begin{pmatrix} \frac{S_0(t,\omega_1)}{S_0(t,\omega_1)} & \frac{S_1(t,\omega_1)}{S_0(t,\omega_1)} & \cdots & \frac{S_m(t,\omega_1)}{S_0(t,\omega_1)} \\ \frac{S_0(t,\omega_2)}{S_0(t,\omega_2)} & \frac{S_1(t,\omega_2)}{S_0(t,\omega_2)} & \cdots & \frac{S_m(t,\omega_2)}{S_0(t,\omega_2)} \\ \vdots & & & \\ \frac{S_0(t,\omega_k)}{S_0(t,\omega_k)} & \frac{S(t,\omega_k)}{S_0(t,\omega_k)} & \cdots & \frac{S_m(t,\omega_k)}{S_0(t,\omega_k)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & S_1^*(1,w_1) & \cdots & S_M^*(1,w_1) \\ 1 & S_1^*(1,w_2) & & S_M^*(1,w_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & S_1^*(1,w_K) & & S_M^*(1,w_K) \end{pmatrix}$$

- h_m代表portfolio中各股票持有的数量, h_m不限制必须是正的， 负的代表卖空
- V_t表示t时刻portfolio的价值， G表示total gain， 同样V*_t表示将价值进行标准化（！！！！！！！！！！！！！！！！！！插图）

- Asset span
  - definition:其实就是改变不同的h, 从而张成的空间， 也就是每个股票都有一个可能价值的列向量， M个列向量组成了S*(1), M个列向量张成的空间
  - column rank = row rank = rank <= min {K, M}
- Redundant security and complete securities model
  - if one payoff can be expressed as a linear combination of S*i(t), 那么称为redunant security, 也就是处于asset span 内部
  - if every payoff lies inside the asset span, the model is complete <=> 每个状态都包含在Asset span里面了，所以以后的任意一个状态都有可能达到 <=> rank =K
- Pricing problem
  - law of one price: 如果一个portfolio获得的payoff相同，那个他们的成本也就是0时刻的价值
  - 什么时候满足law of one price 呢？ full column rank， 只有一张情况能导致这种结果的发生，也就是column rank等于M

- 2.2 Law of one price and dominant strategies
  - new definition: S_alpha(1): 1时刻的portfolio/asset的价格, 我们如何给这个asset定价呢，就是根据replicate， 如果我可以用之前的stock来replicate，那么称为redundant security，如果满足law of one price, 那么$S^*(1)h = S_\alpha^*(1)$只有唯一的解,
  - Dominant trading strategies
    - definition 1: $V_0 = V_0'$, $V_1(\omega) > V'(\omega)$
    - definition 2 :$V_0 < 0, V_1(\omega) \geq 0$
    - 如果不存在dominant trading strategies， 就满足law of one price
    - 存在dominant trading strategies, 不存在law of one price(错！！！！）（有一个反例）（P48）
  - Pricing functional
    - linear functional: $F(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 F(x_1) + \alpha_2 F(x_2)$
    - F可以理解为为了获得y收益，这个y收益折现到0时刻是x, F(x)是获得这个收益在0时刻的定价=$S(0)h$

- Arrow security and state price
  - arrow security: when ω_k发生时，$e_k = 1$, 其他的e等于0，这可以理解为是某个portfolio的payoff vector，只是他在ω_k时的payoff等于1，其余可能状态的pay off 等于0，注意e_k是已经折现到0时刻的单位payoff
  - $S^*_\alpha(1) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_K)^T = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k e_k$,
    - α_k可以理解为已经贴现到0时刻的收益，乘上e_k就是具有贴现到0时刻的收益为$\sum_{k=1}^{K} \alpha_k e_k$的portfolio， 这个证券的现价为为了获得0时刻的收益$\sum_{k=1}^{K} \alpha_k e_k$，需要投资的钱是$F(S^*_\alpha(1)) = S^*(0)$
    - α_k也可以理解为份额，$\sum_{k=1}^{K} \alpha_k e_k$这个公式更好理解，多少份额的$e_k$可以得到0时刻的$S^*_\alpha(1)$的收益，一切带*的都是已经折现到了0时刻，折现其实就是和riskfree 的security做对比，也就是和time value 做对比
  - $s_k = F(e_k)$ 指的是为了获得0时刻的收益e_k,我们需要在0时刻投资的钱，s_k这个向量指的就是在不同的可能的状态下需要投资的金额
  - 我们还建立了这个公式：π表示因子均为s_k的行向量，也就是获得0时刻的1收益需要投资的金钱，$\pi S^*(1) = S(0)$， $S^*(1)$是获得的0时刻的收益，两个矩阵相乘得到为了获得这么多收益需要在0时刻投资的金钱，而这个正好是$S(0)$
- uniqueness of trading strategy
  - 已有的asset的收益的线性combination能否replicate这个新的asset的收益，不过这里的h不一定unique，如果unique，说明column rank =M<=>columns are independent<=> $S^*(1;\omega)h = 0$的解空间维度为0， 等式左边的含义：在1时刻获得的收益等于0的解集只有一种portfolio，就是所有的股票都不买，即h=0

    $$S^*(1;\Omega)h = S^*_\alpha(1;\Omega).$$
- completeness of securities model
  - 即所有的新的asset都可以通过已知的现有的asset来复制，这样就可以称为现在的asset是完备的，可以replicate任何新的asset <=> 任何一个$S^*_\alpha(1)$都在asset span之中 <=> dim(asset span)= K =number of possible states($S^*_\alpha(1) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_K)^T = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k e_k$, $S^*_\alpha(1)$是k维的，而assets span最多时k维的，所以如果满足上述条件，必须是k个状态独立
  - 而在这个时候，如果completeness，则一定有解，但解不一定唯一
- Orthogonal complement: null space and row space of matrix A
  - null space : 即 Ax=0的所有解构成的空间，这里面的每个x和A的行向量相乘相加（内积）等于0（正交），A:m*n, 零空间的维度是自由变量的维度，m行n列，m个变量但只有m个限制条件，自由变量就是n-r个，r = row rank (不一定是m，因为行变量不一定independent，这也就说明了如果解unique，那么说明没有自由变量，也就是n-r=0，row rank = rank A = n, 在我们的k乘m的矩阵中，就是rank A = M)

$$\eta(A) = \{\boldsymbol{x} : \ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}.$$

- orthogonal complement: A的正交补空间，其中的每一个元素都和空间A内积为0（正交），我们已知x和A的行向量都正交，那么和x都正交的就是A的行向量组成的空间

$$\eta(A)^{\perp} = \{\boldsymbol{y} : \ \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x} = 0 \text{ for all } \boldsymbol{x} \in \eta(A)\},$$

- 行向量组成的空间和零空间构成正交补，两者维度相加等于整个空间的维度：dim（null space）+ dim(space pf row vectors of A) = n-r+r =n =这里的M

- existence and uniqueness
  - 对于方程

$$S^*(1)\boldsymbol{h} = \boldsymbol{S}_{\alpha}(1)$$

    - existence <=> rank =K：$S_{\alpha}(1)$处于$S^*(1)$张成的空间中，因为前者是k维的，所以后者也应该是k维，所以existence <=> rank =K
    - uniqueness<=> rank = M <=> dim(null space)=0 : 0个自由变量， rank = M
    - 注意⚠️： 有解不一定唯一，唯一也不一定有解，只能说明如果有解，那么解唯一
    - if rank < K, 不保证有解
    - if rank < M, 不保证解唯一， 也就是law of one price FAIL
- Lemma on law of one price
  - 等式左边为获得0时刻的1收益需要付出的钱乘获得的0时刻收益，蕴含的意义是获得这么多收益需要投资的钱，等于S(0)

Law of one price holds if and only if solution to

$$\boldsymbol{\pi} S^*(1) = \boldsymbol{S}(0)$$

exists.

- Linear pricing measure
  - 左边是portfolio 在0时刻的价值，右边是在V_1时刻的价值折现到0时刻再加权求和，这里的q可以不是unique的,并且可以看出，q不同，但是V_1^*相同，V0 与投资组合的资产持有量无关，V_0相同，所以蕴含了law of one price

$$V_0 = \sum_{k=1}^{K} q(\omega_k) V_1^*(\omega_k).$$

  - $q(\omega_k)$可以理解为每个V_1^*发生的概率，V_0就是期望：另每个asset的权重为0，只剩下riskfree asset的权重，那么$V_0 = \sum_{k=1}^{K} q(\omega_k) h_0 = h_0, h_0$是riskfree asset的权重（因为在最前面我们不是一般性的规定$S_0(0) = 1$）
- Relationship between linear pricing measure and arrow security

- 前提： securities model is complete + w_k 时portfolio 和 kth arrow security 有同样的payoff
- 结论：$s_k = q(\omega_k)$
- $\alpha_k = V_1^*(\omega_k) = S^*(1;\omega_k)$

  $$\alpha_k = V_1^*(w_k) \qquad \therefore V_0 = \sum_{k=1}^{K} q(w_k)\alpha_k$$
  $$= \sum_{k=1}^{K} \alpha_k \cdot s_k.$$
  $$\therefore q(w_k) = s_k$$

  s_k是收益为1的投资 α_k是收益 （这里的1也是折现到0时刻）

  $\Downarrow$

  $\sum_{k=1}^{K} \alpha_k s_k$是折现到0时刻的收益需要做的投资

- 之后，

  $S_m^*(0) = \sum_{k=1}^{K} q(w_k) S_m^*(1, w_k)$ 将其写成矩阵形式

  $$S^*(0) = q \cdot S^*(1, \Omega) \qquad (q \geq 0)$$

  $$S_1^*(0) = \begin{pmatrix} q(w_1) & q(w_2) & \dots & q(w_K) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1^*(1, w_1) \\ S_1^*(1, w_2) \\ \vdots \\ S_1^*(1, w_K) \end{pmatrix}$$

  $$\begin{pmatrix} q(w_1) & q(w_2) & \dots & q(w_K) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1^*(1, w_1) & S_2^*(1, w_1) & \dots & S_M^*(1, w_1) \\ S_1^*(1, w_2) & S_2^*(1, w_2) & \dots & S_M^*(1, w_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_1^*(1, w_K) & S_2^*(1, w_K) & & S_M^*(1, w_K) \end{pmatrix}$$

  $$= \begin{pmatrix} S_1^*(0) & S_2^*(0) & \dots & S_M^*(0) \end{pmatrix} = S^*(0) = q \cdot S^*(1, \Omega)$$

  $$(1, S_1^*(0), S_2^*(0), \dots, S_M^*(0)) = q \cdot (1, S_1^*(1), S_2^*(1), \dots, S_M^*(1))$$

  $$\hat{S}^*(0) = q\, \hat{S}^*(1, \Omega) \qquad q \geq 0$$

- 这个方程组和之前不同的是(1) $q \geq 0$ (2) 这个方程组包含riskfree asset,rewrite the equations

  $$S_m^*(0) = \sum_{k=1}^{K} q(w_k) S_m^*(1, w_k)$$

  $$\sum_{k=1}^{K} q(w_k) \Delta S_m^*(1, w_k) = 0$$

  $q(w_k) = s_k$，与实际的w_k发生的概率无关

- example:
  - 判断是否complete，dim S*(1)是否等于K
  - 判断是否满足一价定律：
    - 判断S*(1)h=0是否dim(null space) =0（和 no redundant securities 等价）

            - $S^*(1)h = S^*(0)$是否有解（因为可能有redundant security，如果有解，说明满足一价定律，且这与是否满足一价定律等价）
            - 判断是否unique，dim S*(1)是否等于M(是否等价)（不等价，满足一价定律只针对我们的基来说，而如果unique是针对基张成的空间来讲）
            - 判断不存在占优交易策略
            - 是否存在线性价格测度
            - 总的来讲，如果$S^*(1)$有redundant security, 同时$S^*(1)h = S^*(0)$有解，或者没有redundant security，都说明满足一价定律；或者根据更强的条件（没有占优交易策略<=>有线性价格测度 <- 没有套利<=>有风险中性价格测度）
        - 判断是否有dominant trading strategy: 看是否存在V_0=0 , V_1>0
    - Theorem
        - 有线性价格测度<=> 没有dominant trading strategies => law of one price
            - 一价原则推不出线性价格测度（一价原则大）
            - dim (null space)=0 <=>no redundant securities => law of one price (一价原则大)
- 2.3 Fundamental Theorem of Asset Pricing
    - Absence of arbitrage opportunities
        - arbitrage opportunities: 如果存在 $V_0 = 0, V_1 >= 0$,但是至少存在一个状态使得$V_1 > 0$，那么我们就称存在套利机会：即我们可以不投资就获得一个正的收益
        - comparison: 占优投资必须都是严格大于的，但是套利机会可以存在某个状态不严格大于0，因此占优投资策略是要比套利机会更强的定义
    - Risk neutral probability measure
        - 我们称Q是一个risk neutral probability measure, 如果Q满足(i)$Q(\omega) > 0$(ii)$E_Q[\triangle S_m^*] = 0$,也就是说股票价格的增长的期望为0
        - 等价于

$$S_m(0) = \sum_{k=1}^{K} Q(\omega_k) S_m^*(1; \omega_k).$$

        - 当m=0时，$\sum_{k=1}^{K} Q(\omega_k) = 1, Q(\omega_k) > 0$这里的Q和P是不一样的，P含有主观的perference, 而Q则是风险中性
        - 如何证明：超平面分离定律：两个不相交的凸集可以用一个超平面来分离
    - Fundamental Theorem of Asset Pricing
        - 无套利机会 <=> 存在风险中性测度Q
        - $S_m^*(t)$ 是一个martingale，因为$E_Q(S_m^*(1)) = S^*(0)$
        - 所以Q也被称为"equivalent martingale measure",等价鞅测度不一定是唯一的
    - 同样的，在市场完全的情况下，如果风险中性测度存在，那么他一定唯一，这对于线性价格测度也成立

- =>

  如果存在两个 risk neutral. Q、Q'.

  我们已知 $E_Q[S^*(1)] = S^*(0)$

  $E_{Q'}[S^*(1)] = S^*(0)$

  我们考虑 $Y^* = \begin{cases} 1 & \text{if } w_k \text{ 发生} \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$

  So $E_Q(Y^*) = Q(w_k) \neq Q(w_k') = E_{Q'}(Y^*)$

  ∴ Y^*这个 asset 是不可达的, 也就是这个市场不完全, 矛盾.

  ∴ 如果存在 ⇒ 唯一

- <=

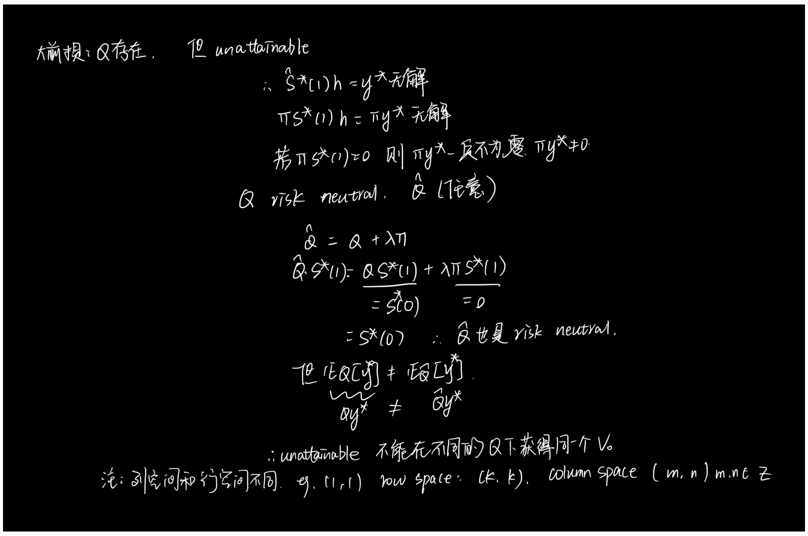
  如果唯一的Q存在, 利用唯一性来推市场 complete.

  唯一. ∴ ∀ Y^* 都有同一个 $S^*(0)$.

  ∴ ∀ 新的 asset 都可达

  ∴ 市场 complete

- Q属于G的正交空间交上P^+
  - $E_Q(G^*) = 0 = QG^*$ => Q存在于G的正交空间
  - $P^+ = (p_1, p_2, ..., p_k), p_i > 0$,即属于第一象限
  - Q满足两个条件，所以是两个空间的交集
- 2.4 Valuation of contingent claims and complete markets
  - attainable: 如果可以在我们的基中找到一个portfolio来复制这个contingent claim
  - 只要Q存在，那么任何一个Q就会得到同样的价格对于一个attainable claim： Q存在=>一价原则存在=>Y*得到V0
  - 但是当Y不可得时，这个定理失效，但是我们可以获得一个区间在Q存在，也就是没有套利机会的情况下



反证法：Q存在，但 unattainable

$\therefore \hat{S}^*(1)h = y^*$ 无解

$\pi S^*(1)h = \pi y^*$ 无解

若 $\pi S^*(1)=0$ 则 πy^* 一定不为零 $\pi y^* \neq 0$

Q risk neutral，$\hat{Q}$（任意）

$\hat{Q} = Q + \lambda\pi$

$\hat{Q} S^*(1) = \underbrace{Q S^*(1)}_{=S^*(0)} + \lambda \underbrace{\pi S^*(1)}_{=0}$

$= S^*(0)$ $\therefore \hat{Q}$ 也是 risk neutral.

但 $E_Q[y^*] \neq E_{\hat{Q}}[y^*]$

$Qy^* \neq \hat{Q}y^*$

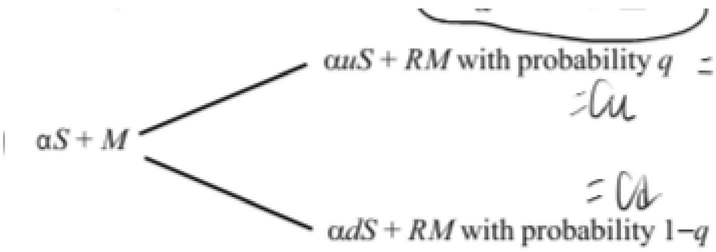
$\therefore$ unattainable 不能在不同的Q下获得同一个 V_0

注：列空间和行空间不同 eg. (1,1) row space: (k, k). column space (m, n) m.n ∈ Z

- Theorem： 如果我们一直无套利机会，那么如果Y is attainable <=> 对于任何一个Q，都可以给Y定一个相同的价格
- Bounds on arbitrage prices for non-attainable contingent claim
  - 证明用反证法，如果不在这个价格区间就可以套利

$$V_+(Y) = \inf\{E_Q[\tilde{Y}/S_0(1)] : \tilde{Y} \succeq Y \text{ and } \tilde{Y} \text{ is attainable}\}$$
$$V_-(Y) = \sup\{E_Q[\tilde{Y}/S_0(1)] : \tilde{Y} \preceq Y \text{ and } \tilde{Y} \text{ is attainable}\}.$$

- 2.5 Binomial option pricing models
  - replicate a call option: buying some asset and short some riskless money
  - 两步模型
    - definition： R是无风险增长率，uS是如果asset增长，在一段时间后的价格，概率为q，dS则是如果价格下降，asset在一段时间后的价格，概率为1-q，u>R>d, 否则有套利机会（M小于0因为是short some riskless money）



$$\alpha uS + RM = c_u \quad \text{and} \quad \alpha dS + RM = c_d.$$

Solving the equations, we obtain

$$\alpha = \frac{c_u - c_d}{(u-d)S} > 0, \qquad M = \frac{uc_d - dc_u}{(u-d)R} < 0.$$

    - 注意：$\frac{u}{d} < \frac{c_u}{c_d}$ 说明股票本身的价格浮动是要小于option的价格浮动的，也就是说option其实相当于增加了leverage
    - hedge ratio: α的数量

$$\alpha = \frac{c_u - c_d}{(u-d)S}$$

- c的合理定价，注意这里不是q（主观判断的概率）而是p（概率）

$$\begin{aligned} c &= \alpha S + M = \frac{\frac{R-d}{u-d} c_u + \frac{u-R}{u-d} c_d}{R} = \frac{\frac{R-d}{(u-d)} c}{} \\ &= \frac{p c_u + (1-p) c_d}{R} \qquad \text{where} \quad p = \frac{R-d}{u-d}. \end{aligned}$$

  - 为什么是p，其实也就是风险中性，$puS + (1-p)dS = RS, S = \frac{1}{R} E^*[S^{\triangle t}|S]$
  - 同样的如果利用风险中性来求解Q属于G的正交空间交上P^+，还要加上Q>0

$$\begin{aligned} &Q(\omega_u)\left(\frac{u}{R}-1\right)S + Q(\omega_d)\left(\frac{d}{R}-1\right)S = 0 \\ &Q(\omega_u) + Q(\omega_d) = 1. \end{aligned}$$

- Multiperiod binomial models
  - definition

$$c = \frac{\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \max(u^j d^{n-j} S - X, 0)}{R^n}.$$

  - 但是通过简化我们可以通过先定义一个最小上涨次数k，小于k时，持有者不会执行这个option，因为S<X,但是当上涨的次数多,S>=X, 持有者才会执行option，才会获得一个整的收益，即

$$u^k d^{n-k} S \geq X, \text{ that is, } k \geq \frac{\ln \frac{X}{S d^n}}{\ln \frac{u}{d}}.$$

$$\max(u^j d^{n-j} S - X, 0) = \begin{cases} 0 & \text{when} \quad j < k \quad \text{不执行} \\ u^j d^{n-j} S - X & \text{when} \quad j \geq k \end{cases}.$$

$$c = S \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \frac{u^j d^{n-j}}{R^n} - X R^{-n} \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}.$$

$$c = \frac{1}{R^n} E_Q \left[S_T \mathbf{1}_{\{S_T > X\}} \right] - \frac{X}{R^n} E_Q \left[\mathbf{1}_{\{S_T > X\}} \right].$$