

## 树状数组经典应用

### 离线应用

1. HDU 3333

在线做法简述

离线做法简述

2.cf703D

3.HDU4630

### 二维数点

1.牛客挑战赛34D

2.徐州网络赛I题

3.HDU5869

### 有意思的几道小题

1.牛客国庆day3H

2.HDU6274

3.2019牛客多校第8场D

4. 牛客练习赛47E

# 树状数组经典应用

在我学习线段树的时候，学长说树状数组能做的事情，线段树都可以做，故没有学习，而实际上树状数组也有他强大的用处与优势所在。

1. 代码简短，几行足以。
2. 常数极小。
3. 易于查错。
4. 内存占用小。

总之能用树状数组解决的问题就不要用线段树去写。

本文可能不适合刚入门的同学，因为其中没有基础题。

## 离线应用

通常这类问题在线做法不好做，而且所有的询问一定在所有的操作之后，那么可以考虑离线解决。

或者说可以将问题转化为前缀或后缀的形式也可以考虑应用。

### 1. [HDU 3333](#)

十组数据，每组长度 $3e4$ 的序列，均为非负数， $1e5$ 次询问，每次询问区间内不同数字的和。

区间不同数字的和乃是一个比较经典的问题，有在线做法与离线做法。

### 在线做法简述

主席树维护区间和，每次在该数字最后一次出现的位置上存该数字大小，区间询问 $[l,r]$ 就是在第 $r$ 棵线段树上查询下标大于等于 $l$ 的所有位置上数字的和。

具体请参看[cy41的博客](#)。

### 离线做法简述

将所有询问按照 $r$ 升序排列。

设置一个变量 $j$ ，依次处理每个询问，若 $j \leq$ 当前询问的 $r$ ，则一直执行添加删除数字的工作（开一个数组记录每个数字上一次出现的位置，同时树状数组维护单点修改区间询问，每次在树状数组中上一次的位上减掉该数字，在当前位置增加数字）。

更进一步的描述及代码请看蓝褪学长的这一篇：[lt36的博客](#)。

为什么要对询问排序？如果将询问按照 $r$ 排序后，那么可以保证处理到当前的询问的时候，他之前的所有数字一定出现在了当前最后一次出现的位置，同时他之后的数字不会对询问造成影响，也即 $r$ 之前的数字出现的位置一定是小于等于 $r$ 的最大值。

## 2.cf703D

长度为 $1e6$ 的序列， $1e6$ 次询问，询问区间内出现偶数次的数字的异或。

异或相同为0不同为1，那么直接一个前缀异或和是可以找出区间内出现奇数次的数字的，那么如果可以找出区间内的所有不同数字的异或和，再将二者异或起来，是不是可以将不同数字中奇数次的数字消去（奇数次又异或了一次，奇数+1=偶数），只剩下了区间内出现偶数次的数字了。

与上一题类似，只需将树状数组改为维护区间异或值即可。

[lt36的博客](#)。

## 3.HDU4630

长度 $5e4$ 的全排列， $5e4$ 次询问区间任意两个数字GCD的最大值。

预处理出一个数字的所有因子，类似埃氏筛法的写法，保存起来。若某一个因子在区间内出现两次及以上说明可能作为答案。

那么同样的先对询问按照 $r$ 排序，并用一个数组记录该因子上一次出现的位置。

对于询问的处理其实有两种。

请看博客，不再赘述。

[cy41的博客](#)。

# 二维数点

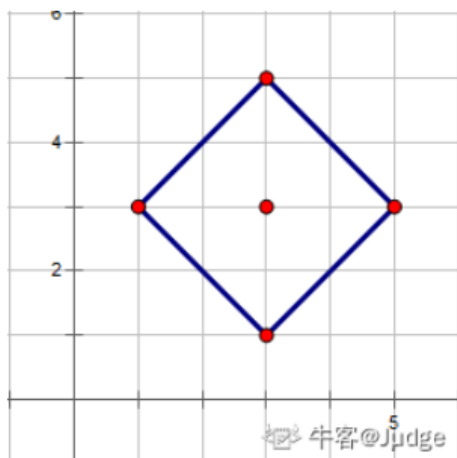
## 1.牛客挑战赛34D

二维平面上 $1e5$ 个点，给出一个 $d( \leq 1e9)$ ， $L( \leq 5e4)$ ， $L$ 表示坐标的绝对值不超过 $L$ ，询问有多少点对满足曼哈顿距离**不小于** $d$ 。设两点为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ，曼哈顿距离为： $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ 。

首先引出一个小技巧：两点的曼哈顿距离通过改变坐标，将坐标变为： $(x + y, x - y)$ ，则原原坐标系的曼哈顿距离就等于新坐标系下的切比雪夫距离( $\max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$ )。

这里引用出题人的图片：

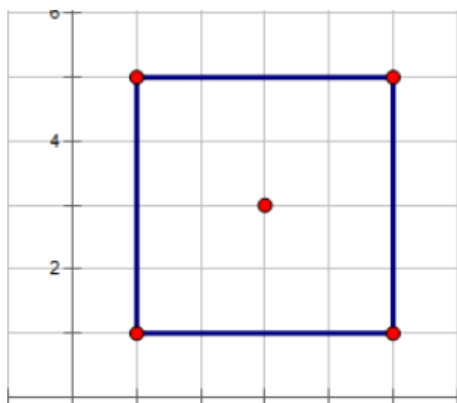
我们发现离一个点曼哈顿距离固定的点形成的图形呈一个菱形，如下图



而很难处理，如果做过类似的题目的同学就会想到，将曼哈顿距离转化为切比雪夫距离。

切比雪夫距离：平面上两个点 $(x_1, y_1)$  $(x_2, y_2)$ 的切比雪夫距离为 $\max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$ ，其中 $|x|$ 为 $x$ 的绝对值

将曼哈顿距离转换为切比雪夫距离后，我们发现切比雪夫距离固定的点呈正方形



于是将坐标转换后，引出树状数组应用之一二维数点。

所谓二维数点即是将数据间的关系通过转化后形成只注重大小关系且不超过两个维度的问题。

该题维度即为 $x$ 与 $y$ 维度。

可以将问题转化为求解 $(C_n^2)$ -所有满足距离小于 $d$ 的点。

通过上图可以形象的看到，与每个点距离不超过 $d$ 的范围是一个正方形，那么如果将坐标按照 $x$ 升序，每次对所有点遍历，每次询问一个点，先将横坐标之差超出 $d$ 的点删掉，然后树状数组中查找 $y$ 坐标与其绝对值之差不超过 $d$ 的点有多少个是不是就可以了，然后再将这个点的纵坐标在树状数组对应下标加1。

每个点只会被添加删除各一次，故复杂度与排序复杂度一致，均为 $n * \log_2 n$ 。

[It36的博客](#)。

## 2.徐州网络赛I题

给出一个长度为 $1e5$ 的全排列， $1e5$ 次询问，询问区间 $[l, r]$ 内有多少对数字满足 $p \% q == 0$ ，自身也算。

由于是全排列故所有数字的倍数的个数为： $\sum_{i=1}^n \lfloor x/i \rfloor$ 。

于是可以直接通过类似埃氏筛法的写法将每个数字对应的倍数的位置找出，并记录作 $(pos_x, pos_y)$ 的形式，然后就转换成了二维数点问题了，对询问按照 $r$ 排序，然后就是套路了。

[cy41的博客](#)。

### 3.HDU5869

长度为 $1e5$ 的序列，元素均是不超过 $1e6$ 的正整数， $1e5$ 次询问，区间内gcd不同的子区间有多少个。

试想如果有一组数字，再在末尾添加一个数字，以新增加的数字为区间的一端，往前最多会形成多少个不同的gcd值？最多会形成 $\log_2(1e6)$ 个不同的gcd值。也即该序列是一个 $(1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots, 1e6)$ 然后再从1开始的一个序列。这样是可以使得右端点不变的情况下向左延伸的最大长度的序列了。

那么是不是可以利用一下这个性质来解题。

如果预处理出所有的以 $i$ 为右端点的所有不同gcd的左端点（只记录最后面出现的），那么是不是就可以将问题转化为二维数点问题了，只不过这次添加一个位置时，会对应好多个之前的点的位置，需要多次删除旧的位置，添加新的位置，那会不会造成超时？不会的，如果第二段能看懂的话这里应该是没什么疑问了。

[cy41的博客](#)。

## 有意思的几道小题

### 1.牛客国庆day3H

一条数轴， $1e5$ 次操作，每次要么插入一条线段 $[l, r]$ ；要么给出两个参数， $l, r$ ，询问满足 $x \leq l \leq r \leq y$ 的线段 $[x, y]$ 的数量（也即询问有多少条已插入的线段可以覆盖给出的线段），同时 $(r-l) \leq 2$ 。

如果你忽视掉最后一个条件的话可能会很难下手。

既然题目只询问长度不超过3的线段可以被多少条线段覆盖的话，那么直接开三个树状数组来表示当前存在的所有线段覆盖长度为1的左端点的合法取值，覆盖长度为2的左端点的合法取值，3的即可。树状数组利用差分的形式，区间修改，单点查询。

那如果忽视掉最后一个条件可以做吗，其实是可以的，有一种CDQ分治的做法将动态问题转化为静态问题，即可转化到CDQ中经典的多维偏序问题上，同学学完CDQ后即可思考该题，一定会茅塞顿开。

[cy41的博客](#)。

### 2.HDU6274

该题题解较长，请看博客。

[cy41的博客](#)。

### 3.2019牛客多校第8场D

该题摘自蓝褪学长的博客，可以与他进行交流。

[lt36的博客](#)。

### 4.牛客练习赛47E

$1e5$ 个结点的一颗以1为根的树，每个点都有一个颜色， $1e5$ 次询问，询问以 $x$ 为根的子树有多少种不同的颜色。

熟悉dfs序的同学对于该题应该是直接秒掉的，这里先介绍一下dfs序。

对于dfs序常见的有两种，一种每个点都记录一次入栈与出栈，一种只记录入栈。两种各有用处，对于第二种一般与树链剖分相结合使用，后序会介绍到。

将树转换为dfs序后，即可将一颗树转换为一个长度为 $2*n$ 的序列，然后就是上面讲过的区间内不同数字的个数了。

[It36的博客](#)。

未完待续。。。