Задача 3-1

Игорь Максимов

8 декабря 2019 г.

1 Решение

В силу унимодальности функции расстояния от отрезка до точки, найдем минимум функции с помощью тернарного поиска до заданной точности

2 Унимодальность ρ от отрезка до точки

Проведем касательную окружность (сферу) из точки x_0 к отрезку. Тогда для любой другой точки на отрезке функция будет убывать, по направлению к точке касания, или, наоборот, возрастать, если двигать x в противоположном направлении (можно построить окружность радиуса $\|x - x_0\|$. Тогда двигаясь в одну сторону мы попадаем внутрь оркужности, а в противоположную — во вне. Тогда в этой точке функция будет либо возрастать, либо убывать).

3 Унимодальность ρ от отрезка до отрезка

Случай 1: Отрезки коллинеарны, ρ — постоянная
Случай 2: Отрезки неколлинеарны. Зафиксируем отрезок $[\vec{a}, \vec{b}]$. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — точки минимума ρ. Обозначим $\rho([\vec{a}, \vec{b}], x_i)$ за r_i и $MinkowskySum(U_{r_i}(0), [\vec{a}, \vec{b}])$ за S_i — множество точек, удаленных от отрезка на r_i.

Проведем все S_i. Пусть z_i — точка пересечения S_i и второго отрезка. Без ограничений общности $S_1 \subset S_2 \subset \ldots \subset S_n$. $S_1 \cap [\vec{c}, \vec{d}] = \{z_1\}$ — касаются, т.к. иначе можно найти такую точку x' что расстояние от нее меньше чем r_1.

Рассмотрим теперь S_i для $i = 2, \ldots, n$. т.к. $r_i > r_1$ то часть отрезка лежит в S_i, рассмотрим точки из пересечения границы S_i с отрезком $[\vec{c}, \vec{d}]$. Тогда можно найти достаточно близкую точку $x' \in [\vec{c}, \vec{d}]$ к x_i, такую что расстояние от нее до отрезка $[\vec{a}, \vec{b}]$ меньше, чем r_i. Тогда x_i — не точка минимума ρ.