5.4 A

4.(4) $z=e^{2x}(x+2y+y^2)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2e^{2x}(x+2y+y^2)+e^{2x}(1+0)=e^{2x}(2x+4y+2y^2+1)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{2x}(2+2y)$$

$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=-1\end{cases}$ $H(\frac{1}{2},-1)=\begin{pmatrix}2e & 0\\ 0 & 2e\end{pmatrix}$ 正定

故 z 在 $(\frac{1}{2},-1)$ 处取极小值 $-\frac{e}{2}$

5.(2) $z=x^3+y^3-3xy$ $D=\{(x,y)\mid |x|\le 2,|y|\le 2\}$

$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y$ 联立 $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=3y^2-3x$

$H(0,0)=\begin{pmatrix}0 & -3\\ -3 & 0\end{pmatrix}$ 非正定，故 $(0,0)$ 不为极值点

$H(1,1)=\begin{pmatrix}6 & -3\\ -3 & 6\end{pmatrix}$ 正定，故 $(1,1)$ 为极小值点

$x=2$ 时 $z=8+y^3-6y$ 最大值为 $8+4\sqrt{2}$，最小值为 -12

$x=-2$ 时 $z=-8+y^3+6y$ 最大值为 12 最小值为 -28

同理可得在 $y=\pm 2$ 时最值，

综上所述 最大值为 $8+4\sqrt{2}$，最小值为 -28

12. 设 x,y,z 为长宽高，每单位地面造价为1

则 $x\cdot y\cdot z=V$ 记为 $\varphi(x,y,z)=x\cdot y\cdot z-V=0$

造价 $f=xy+2(2xz+2y\cdot z)+3xy$

$f=4xy+4xz+4yz$

令 $F=f+\lambda\varphi(x,y,z)$

$\begin{cases}F_x=f_x+\lambda\varphi_x=0\\ F_y=f_y+\lambda\varphi_y=0\\ F_z=f_z+\lambda\varphi_z=0\\ F_\lambda=\varphi=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=\frac{8}{\sqrt[3]{V}}\\ x=y=z=\sqrt[3]{V}\end{cases}$

$H(\sqrt[3]{V},\sqrt[3]{V},\sqrt[3]{V})=\begin{pmatrix}\sqrt[3]{V} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt[3]{V} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt[3]{V}\end{pmatrix}$ 正定，故 $(\sqrt[3]{V},\sqrt[3]{V},\sqrt[3]{V})$ 为极小值点

∴ 长宽高均为 $\sqrt[3]{V}$ 时，造价最小