

第八章 过渡过程的经典解法

8-1 概述

如图所示电路，依据KVL

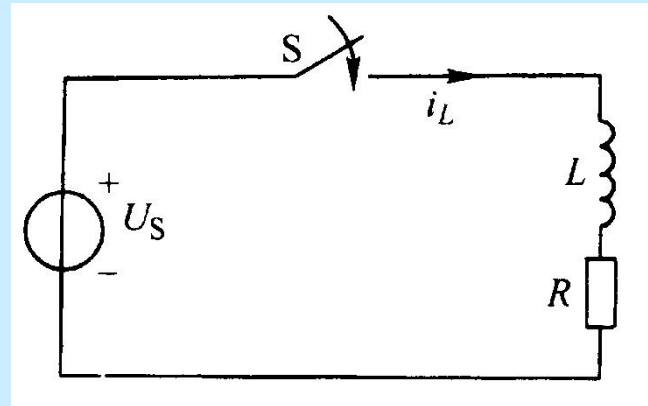
$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = u_s(t)$$

如果电压为 $u_s(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \phi)$ ，方程的解包括两部分
通解（指数形式的解 $ke^{-\alpha t}$ ，又称暂态解）

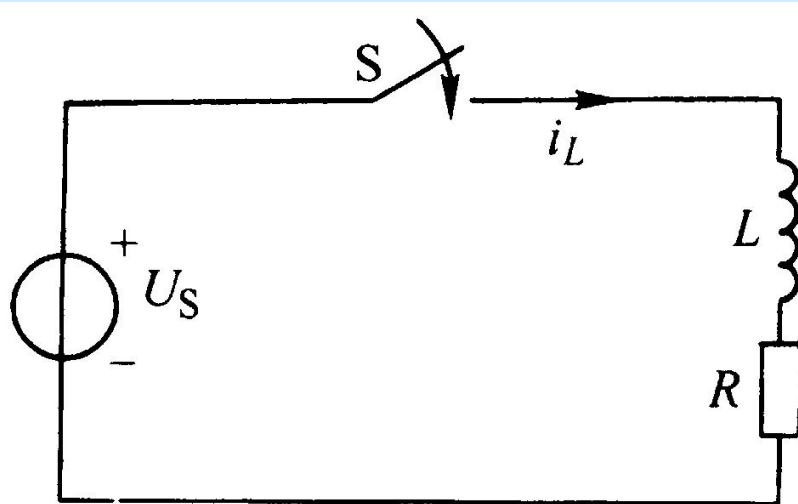
特解（与激励源同频率的正弦量 $\sqrt{2}I \sin(\omega t + \phi)$ ，又称稳态解）

当电路在电源激励下经过足够长的时间后，电路的暂态分量趋向于零，电路中只剩下稳态分量(同频率的正弦交流分量)。这种电路状态称为稳态电路。

前几章涉及的交流电路分析均为稳态交流电路，因此在电路计算时，电路的响应(电压、电流)只包括与电源同频率的正弦函数(微分方程的特解)，而电路中暂态分量均没有考虑。

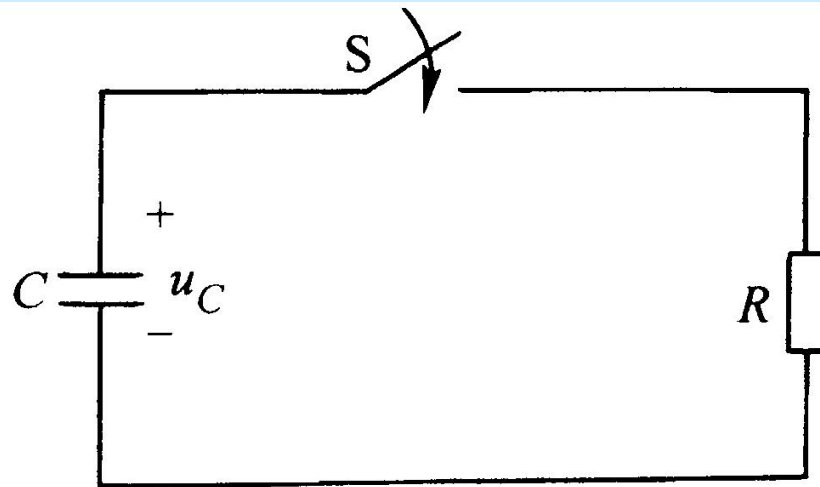


当电路出现结构改变，如接通、断开、改接等情况，或者激励、电路参数的骤然变化时，常使电路从一个稳定状态到达另一个稳定状态。状态的改变一般并非立即完成，而需经历一段时间，这段时间发生的过程称为过渡过程。



a)

电感电流稳态值 $\frac{U_S}{R}$



b)

电容电压 u_C 稳态值 $0V$

在过渡过程的分析中，常将外界对电路的输入称为**激励**，将电路在激励作用下所产生的电流、电压称为**响应**(或输出)。

一个电路若引入激励历时已久，那么这个电路在激励作用足够长时间所建立的状态称为**强制状态**或强迫状态。

当一个稳定电路的激励是恒定或随时间作周期性变化时，强制状态就是稳定状态，简称稳态。

仅由电阻和电源组成的网络称为电阻网络，响应是即时跟随的，是无记忆的，故电阻网络也称即时网络。

含有电容、电感等动态元件的电路，称为动态电路。

在求解动态电路过渡过程时，任一时刻的响应不仅与当前的激励有关，而且与过去的电路状态有关。

求解动态电路过渡过程的四种方法

(1)经典法(电路时域分析法): 根据电路来列写关于响应 $x(t)$ 的微分方程, 在时域直接求解微分方程, 求出其特解和通解, 再由初始条件决定积分常数。

(2)运算法(电路复频域分析法): 应用拉普拉斯变换(简称拉氏变换)得到关于响应的复频域代数方程, 求出响应的象函数, 再经拉氏反变换, 最后得到时域解。

(3)积分法: 利用卷积积分和裘阿梅里积分, 在时域中直接求解任意函数激励下的零状态响应。

(4)状态变量法: 适当选择一组状态变量, 将一个 n 阶微分方程变换为几个一阶微分方程组, 即状态方程, 然后求解状态方程最后得到响应。

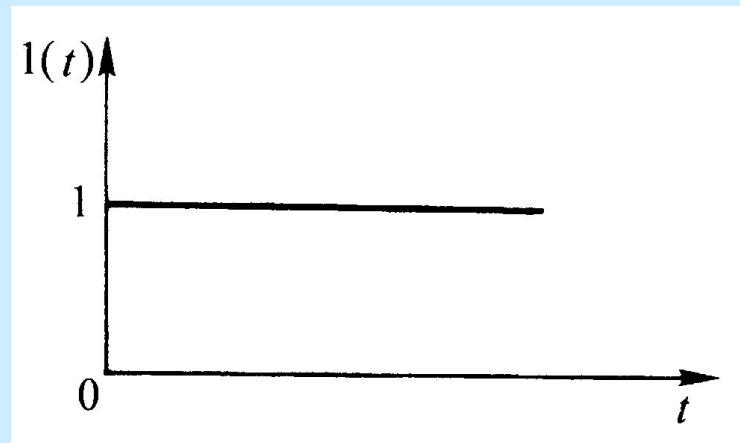
8-2 阶跃函数和冲激函数

在分析线性电路过渡过程时，常使用一些奇异函数来描述电路中的激励或响应。

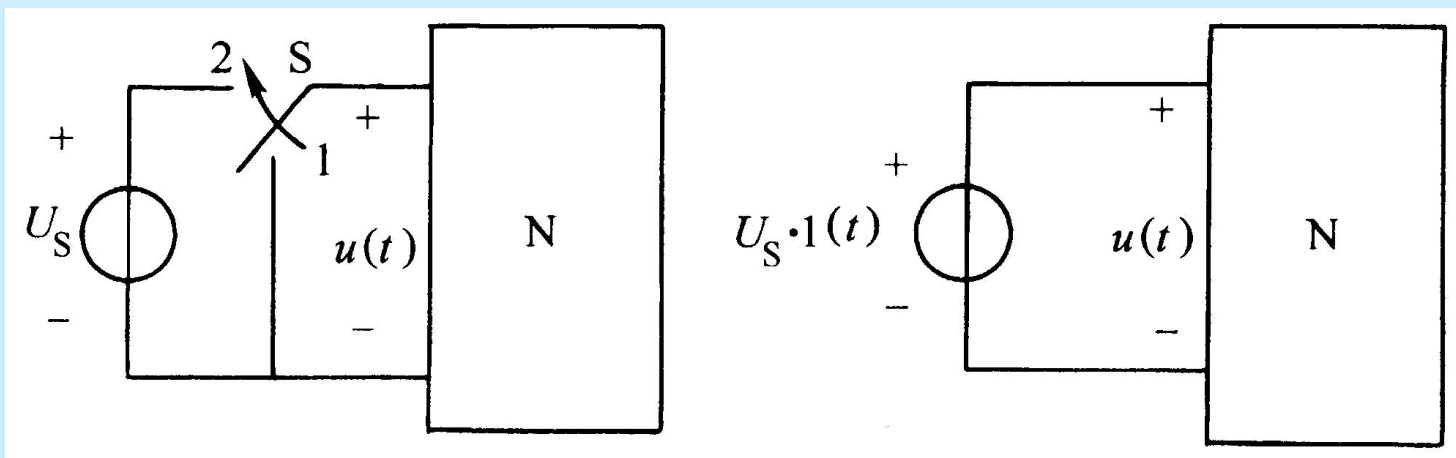
单位阶跃函数

单位阶跃函数 $1(t)$ 定义为

$$1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

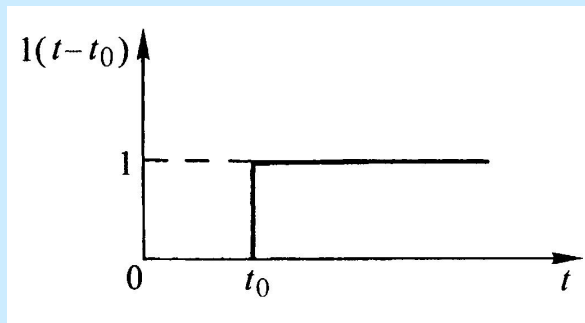


阶跃函数 $K \cdot 1(t)$ ，又称为开关函数



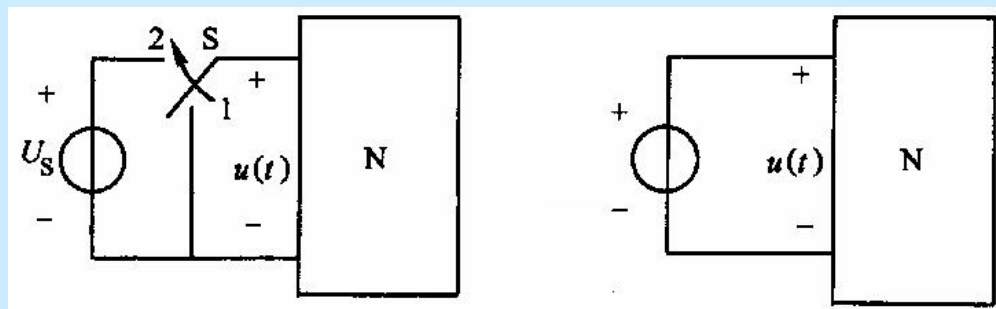
延时单位阶跃函数

$$1(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases}$$



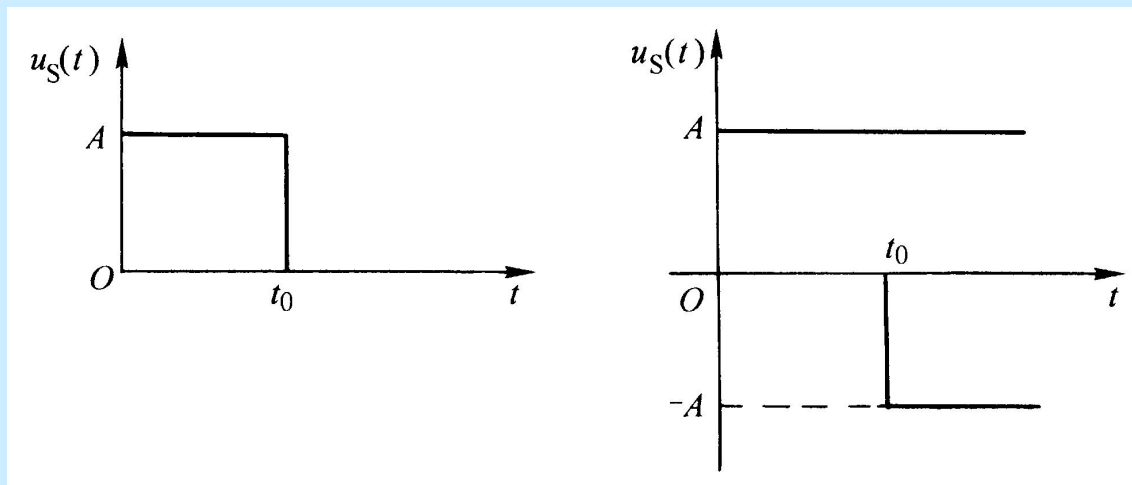
若 $t = t_0$ 时刻将开关 S 从 1 切换到 2，
那么一端口网络 N 的入端电压
 $u(t)$ 就可用延时阶跃函数表示为：

$$u(t) = U_S \cdot 1(t - t_0)$$



利用阶跃函数和延时阶跃函数表示矩形脉冲函数

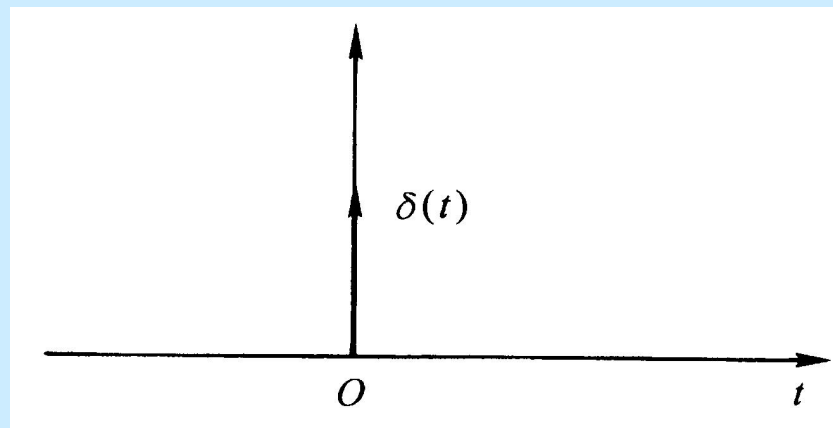
$$u_S(t) = A \cdot 1(t) - A \cdot 1(t - t_0)$$



单位冲激函数

单位冲激函数定义为

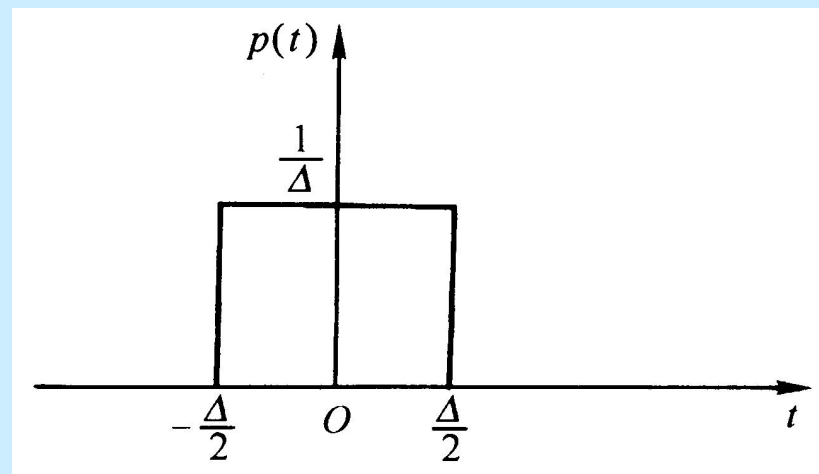
$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$



单位脉冲函数

定义

$$p(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & |t| < \frac{\Delta}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\Delta}{2} \end{cases}$$



单位脉冲函数的宽度是 Δ ，高度是 $\frac{1}{\Delta}$ ，面积为1。当脉冲宽度 Δ 减小时，其高度 $\frac{1}{\Delta}$ 将增大，而面积仍保持为1。当脉冲宽度 Δ 趋于无限小时，其高度 $\frac{1}{\Delta}$ 将趋于无限大，但面积仍然为1。当脉冲宽度趋于零时，这时脉冲函数就成为单位冲激函数。

$K \cdot \delta(t)$ 冲激强度为K的冲激函数

延时单位冲激函数 $\delta(t - t_0)$ 定义为

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t \neq t_0 \\ \infty & t = t_0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1 \end{cases}$$

冲激函数的筛分性质

设函数 $f(t)$ 在 $t=0$ 时连续, 由于 $t \neq 0$ 时 $\delta(t)=0$

$$f(t) \cdot \delta(t) = f(0) \cdot \delta(t)$$

因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(0) \cdot \delta(t) dt = f(0)$$

同理, 对于在 $t=t_0$ 处连续的函数 $f(t)$, 有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t-t_0) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0) \cdot \delta(t-t_0) dt = f(t_0)$$

单位阶跃函数是单位冲激函数的积分

$$\int_{-\infty}^t \delta(t) dt = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} = 1(t)$$

单位冲激函数是单位阶跃函数的导数

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}$$

8-3 换路定则和初始条件

电路的结构、参数突然改变或激励的突然变化，统称为换路。在换路时，通常电路服从换路定则。

换路定则1：当电容电流 i_C 为有限值时，电容上的电荷 q_C 和电压 u_C 在换路瞬间保持连续。

假设换路发生在 $t = 0$ 时刻， 0_- 、 0_+ 分别表示换路前后的瞬间。

$$\left. \begin{aligned} q_C(t) &= q_C(t_0) + \int_{t_0}^t i_C(\xi) d\xi \\ u_C(t) &= u_C(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C(\xi) d\xi \end{aligned} \right\}$$

令式中 $t_0 = 0_-$ ， $t = 0_+$ ，则有

$$\left. \begin{aligned} q_C(0_+) &= q_C(0_-) + \int_{0_-}^{0_+} i_C(\xi) d\xi \\ u_C(0_+) &= u_C(0_-) + \frac{1}{C} \int_{0_-}^{0_+} i_C(\xi) d\xi \end{aligned} \right\}$$

当电容电流 i_C 为有限值时，
从 $0_- \rightarrow 0_+$ 积分项为零，故有

$$\left. \begin{aligned} q_C(0_+) &= q_C(0_-) \\ u_C(0_+) &= u_C(0_-) \end{aligned} \right\}$$

换路定则2：当电感电压 u_L 为有限值时，电感中的磁链 Ψ_L 和电流 i_L 在换路瞬间保持连续。

$$\left. \begin{aligned} \Psi_L(t) &= \Psi_L(t_0) + \int_{t_0}^t u_L(\xi) d\xi \\ i_L(t) &= i_L(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u_L(\xi) d\xi \end{aligned} \right\}$$

令式中 $t_0 = 0_-$, $t = 0_+$, 则有

$$\left. \begin{aligned} \Psi_L(0_+) &= \Psi_L(0_-) + \int_{0_-}^{0_+} u_L(\xi) d\xi \\ i_L(0_+) &= i_L(0_-) + \frac{1}{L} \int_{0_-}^{0_+} u_L(\xi) d\xi \end{aligned} \right\}$$

当电感两端电压 u_L 为有限值时，积分项为零，故而有

$$\left. \begin{aligned} \Psi_L(0_+) &= \Psi_L(0_-) \\ i_L(0_+) &= i_L(0_-) \end{aligned} \right\}$$

$$\Psi = Li$$

$$u_L = \frac{d\psi}{dt} = L \frac{di_L}{dt}$$

初始条件的确定

利用换路定则、基尔霍夫定律、欧姆定律

电容元件用电压为 $u_C(0_+)$ 的电压源替代，电感元件用电流为 $i_L(0_+)$ 的电流源替代，各独立电源取 $t = 0_+$ 时刻的值，从而得到 $t = 0_+$ 时刻的等效电阻电路。

例8-3-1在如图所示电路中, $U_S = 6V$, $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $C = 1F$, $L = 3H$, 开关S打开已久, 且 $u_C(0_-) = 2V$, 在 $t = 0$ 时刻, 将开关S合上, 求开关S闭合后瞬间的 $i_L(0_+)$,

$u_C(0_+)$, $i_L'(0_+)$ 和 $u_C'(0_+)$ 各为多少?

解: 当 $t < 0$ 时, S 打开已久, 电感L相当于短接, 则有

$$i_L(0_-) = \frac{U_S}{R_1 + R_2} = 1A$$

在 $t=0$ 瞬间, S 闭合, 由换路定则知

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1A$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 2V$$

画出 $t = 0_+$ 时刻的等效电路, 如图b所示, 它是一个直流电阻电路

$$u_L(0_+) = u_C(0_+) - R_2 i_L(0_+) = -2V$$

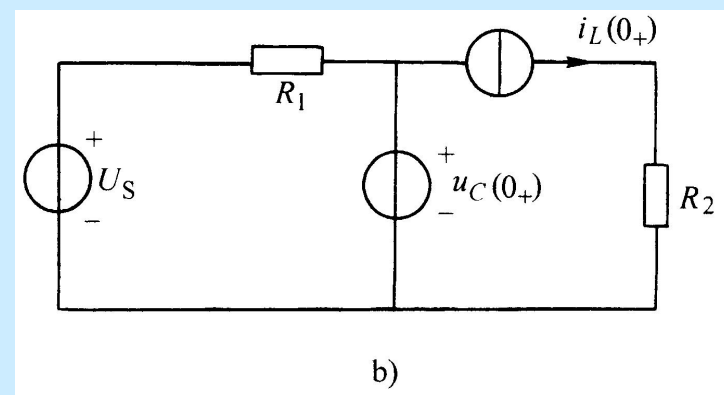
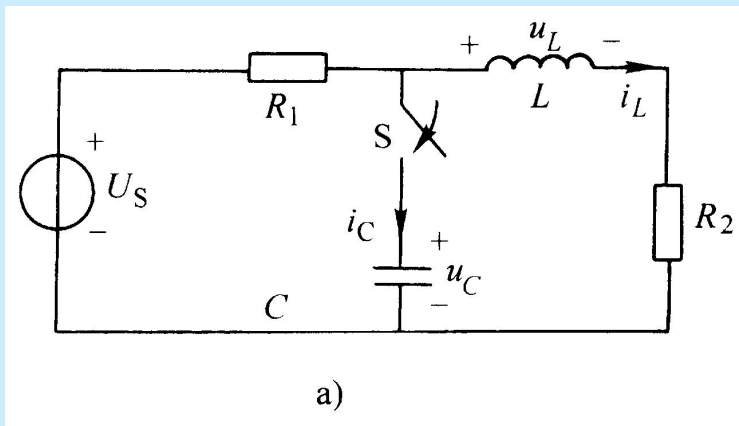
由 $u_L = L \frac{di_L}{dt}$ 知

$$\frac{di_L(0_+)}{dt} = \frac{u_L(0_+)}{L} = -\frac{2}{3} A/s$$

$$i_C(0_+) = \frac{U_S - u_C(0_+)}{R_1} - i_L(0_+) = 1A$$

由 $i_C = C \frac{du_C}{dt}$ 知

$$\frac{du_C(0_+)}{dt} = \frac{i_C(0_+)}{C} = 1V/s$$



例8-3-2在如图a所示电路中, $I_S = 4A, R_1 = R_2 = 2\Omega, S$ 闭合已久, 求 $t=0$ 时打开 S 瞬间的 $i_{R_1}(0_+)$ 、 $i_{R_2}(0_+)$ 。

解: 当 $t < 0$ 时, S 闭合已久, 电容 C_1 、 C_2 相当于开路, 电感 L 相当于短接, 则有

$$u_{C_2}(0_-) = 0V$$

由 R_1 、 R_2 分流, 得

$$i_L(0_-) = I_S \times \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 2A$$

$$u_{C_1}(0_-) = R_2 \times i_L(0_-) = 4V$$

在 $t=0$ 瞬间, S 打开, 由换路定则知

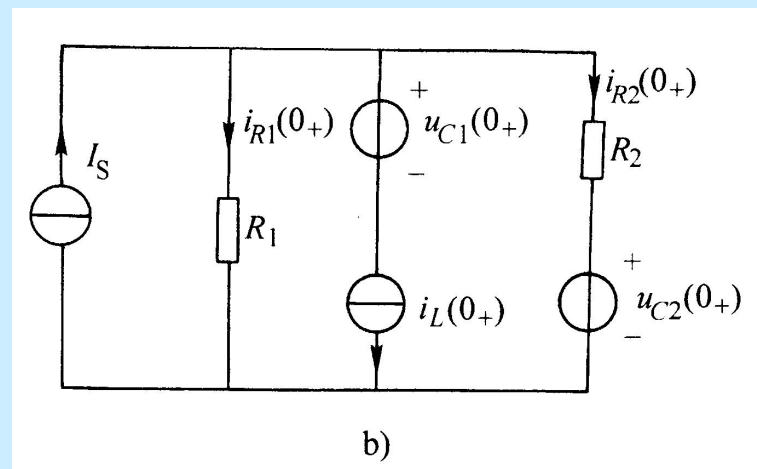
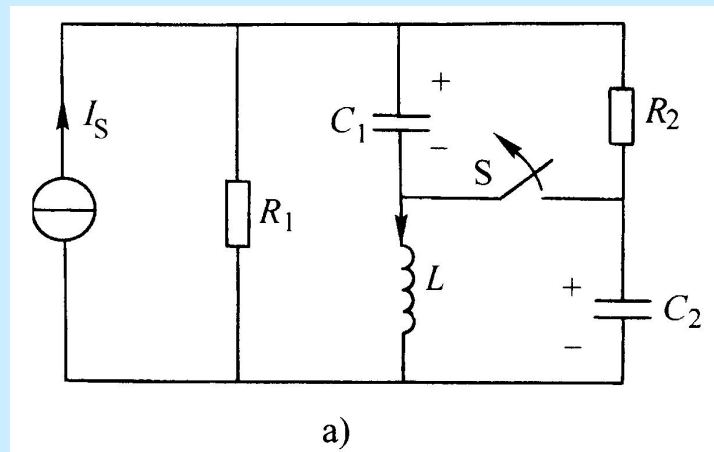
$$u_{C_1}(0_+) = u_{C_1}(0_-) = 4V$$

$$u_{C_2}(0_+) = u_{C_2}(0_-) = 0V$$

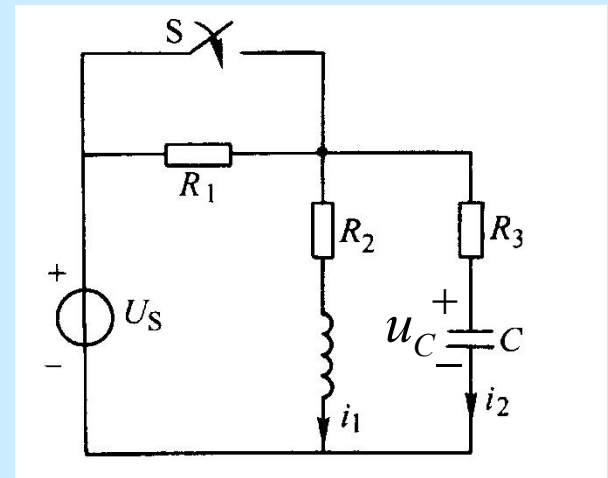
$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 2A$$

画出 $t=0_+$ 时刻的等效电路, 如图b所示, 于是

$$i_{R_1}(0_+) = i_{R_2}(0_+) = \frac{1}{2}[I_S - i_L(0_+)] = 1A$$



如图所示电路中，已知 $U_s = 100V$, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 20\Omega$, $R_3 = 20\Omega$, S 闭合前电路处于稳态， $t=0$ 时 S 闭合，试求 $i_1(0_+)$ 及 $i_2(0_+)$ 。



开关闭合前，电路处于稳态，C相当于开路，电感相当于短路

$$i_1(0_-) = \frac{U_s}{R_1 + R_2} = \frac{100}{10 + 20} = \frac{10}{3} A$$

$$u_C(0_-) = i_1(0_-) \cdot R_2 = \frac{10}{3} \times 20 = \frac{200}{3} V$$

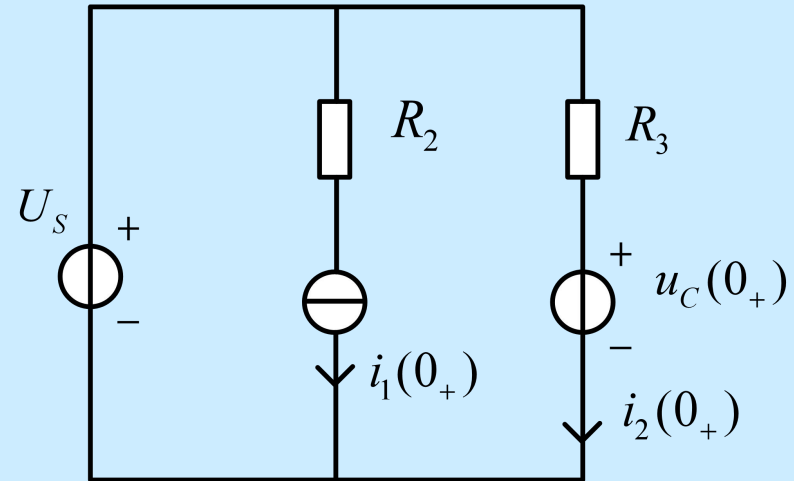
由换路定则

$$i_1(0_+) = i_1(0_-) = \frac{10}{3} A$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = \frac{200}{3} V$$

画出 0_+ 时刻等效电路图

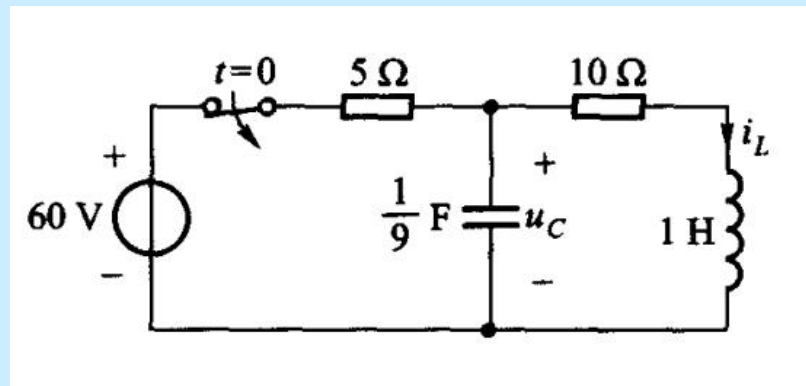
$$U_s = i_2(0_+)R_3 + u_C(0_+)$$



$$100 = 20i_2(0_+) + \frac{200}{3}$$

$$i_2(0_+) = \frac{5}{3} A$$

如图所示电路，开关闭合已久， $t=0$ 时断开开关，试求 $u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$ 。



由于开关闭合已久，电容相当于开路，电感相当于短路。

$$i_L(0_-) = \frac{60}{5+10} = 4A$$

$$u_C(0_-) = 10 \times i_L(0_-) = 10 \times 4 = 40V$$

由换路定则

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 4A$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 40V$$

当电路换路后，电路中存在由电压源、电容组成的回路或纯电容回路时，换路定则不再适用，各电容电压可能会跳变，此时电容电流不再是有限值。

例8-3-3在如图所示电路中，已知 $C_1 = 1F$, $C_2 = 2F$, $u_{C1}(0_-) = u_{C2}(0_-) = 1V$, $U_S = 5V$, 在 $t = 0$ 时，开关S闭合，求S闭合后瞬间 $u_{C1}(0_+)$ 、 $u_{C2}(0_+)$ 各为多少？

解：S闭合后瞬间，在 $t = 0_+$ 时有

$$u_{C1}(0_+) + u_{C2}(0_+) = U_S = 5V \quad (1)$$

电容电压必须跳变才能满足上式，若沿用换路定则就不可能满足上式。由KCL得

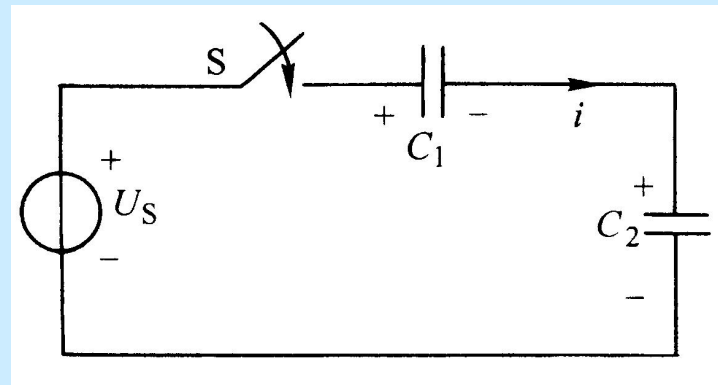
$$i = C_1 \frac{du_{C1}}{dt} = C_2 \frac{du_{C2}}{dt}$$

$$C_2 \frac{du_{C2}}{dt} - C_1 \frac{du_{C1}}{dt} = 0$$

$$\int_{0_-}^{0_+} [C_2 \frac{du_{C2}}{dt} - C_1 \frac{du_{C1}}{dt}] dt = 0$$

$$C_2 u_{C2}(0_+) - C_1 u_{C1}(0_+) = C_2 u_{C2}(0_-) - C_1 u_{C1}(0_-) \quad (2)$$

式(2)表明换路前后电荷守恒，代入数据得



$$2u_{C2}(0_+) - u_{C1}(0_+) = 1 \quad (3)$$

联立求解(1)、(3)得

$$u_{C1}(0_+) = 3V$$

$$u_{C2}(0_+) = 2V$$

从计算结果知： $u_{C1}(0_+) \neq u_{C1}(0_-)$, $u_{C2}(0_+) \neq u_{C2}(0_-)$, 电容电压强迫跳变，电容电流不为有限值。

当电路换路后，电路中存在由电流源和电感组成的割集或纯电感割集时，换路定则亦不再适用，各电感电流可能要发生跳变，此时电感电压不再是有限值。

例8-3-4 如图所示电路，已知 $R_1=1\Omega$ ， $R_2=2\Omega$ ， $L_1=2H$ ， $L_2=4H$ ， $I_S=3A$ ，开关S原在1处已久，在 $t=0$ 时，开关S由1切换至2，求换路后瞬间的电感电流 $i_{L1}(0_+)$ 、 $i_{L2}(0_+)$ 为多少？

解：当 $t < 0$ 时，开关S在1处已久， L_1 、 L_2 相当于短接，则

$$i_{L1}(0_-) = I_S \times \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 2A$$

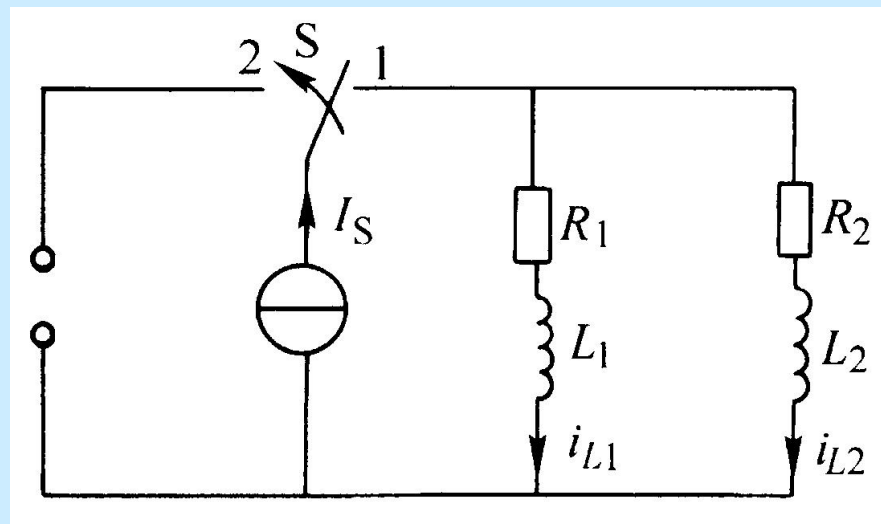
$$i_{L2}(0_-) = I_S \times \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 1A$$

在S由1切换至2后瞬间， $t=0_+$ 时有

$$i_{L1}(0_+) + i_{L2}(0_+) = 0 \quad (1)$$

$$L_2 \frac{di_{L2}}{dt} + R_2 i_{L2} - [L_1 \frac{di_{L1}}{dt} + R_1 i_{L1}] = 0 \quad (2)$$

对上式从 0_- 到 0_+ 积分得



$$\left[\int_{0_-}^{0_+} L_2 \frac{di_{L2}}{dt} dt + \int_{0_-}^{0_+} R_2 i_{L2} dt \right] - \left[\int_{0_-}^{0_+} L_1 \frac{di_{L1}}{dt} dt + \int_{0_-}^{0_+} R_1 i_{L1} dt \right] = 0$$

因为 i_{L1} 、 i_{L2} 仍是有限值，且从 0_- 到 0_+ 的时间间隔为无穷小，故

$$\int_{0_-}^{0_+} R_1 i_{L1} dt = 0, \int_{0_-}^{0_+} R_2 i_{L2} dt = 0, \text{ 于是}$$

$$L_2 i_{L2}(0_+) - L_1 i_{L1}(0_+) = L_2 i_{L2}(0_-) - L_1 i_{L1}(0_-) \quad (3)$$

在 (1)、(3) 中代入数据并联立求解得

$$i_{L1}(0_+) = i_{L2}(0_+) = 0$$

从计算结果知： $i_{L1}(0_+) \neq i_{L1}(0_-)$, $i_{L2}(0_+) \neq i_{L2}(0_-)$, 在换路前后电感电流发生强迫跳变，电感电压不为有限值。

式 (3) 表明换路前后磁链守恒。

磁链为代数量，选择回路方向，当电感电流方向与回路方向一致时，取正，反之取负。

小结:

(1)换路定则：通常情况下，在换路前后瞬间电容电压连续，即 $u_C(0_+) = u_C(0_-)$ ；电感电流连续，即 $i_L(0_+) = i_L(0_-)$ 。

(2)当电路中存在电压源与电容组成的回路或纯电容回路时，存在电流源与电感组成的割集或纯电感割集时，在换路前后瞬间电容电压、电感电流将发生强迫突变，不再满足换路定则。

(3)当电容电压、电感电流发生强迫跳变时，在节点上电荷守恒，即 $\sum_{\text{节点}} q(0_+) = \sum_{\text{节点}} q(0_-)$ 或 $\sum_{\text{节点}} C u_C(0_+) = \sum_{\text{节点}} C u_C(0_-)$ 。值得注意的是，电荷为代数量，当与节点相连为电容正极板时，电荷取正，反之，取负；在回路中磁链守恒，即 $\sum_{\text{回路}} \Psi(0_+) = \sum_{\text{回路}} \Psi(0_-)$ 或 $\sum_{\text{回路}} L i_L(0_+) = \sum_{\text{回路}} L i_L(0_-)$ 同样，磁链也为代数量，选择回路方向，当电感电流方向与回路方向一致时，取正，反之取负。

8-4 一阶电路的零输入响应

当电路中含有一个储能元件 L 或 C 时，列写的电路基尔霍夫电流或电压定律方程通常是一阶微分方程。

仅含一个独立储能元件的电路称为一阶电路。

当电路中没有激励，仅由储能元件的初始储能引起的响应，称为零输入响应。

RC电路

RL电路

RC电路的零输入响应

$$u_C(0_-) = U_0$$

当 $t > 0$ ，S切换至2后，由KVL得

$$Ri + u_C = 0$$

将 $i = C \frac{du_C}{dt}$ 代入上式

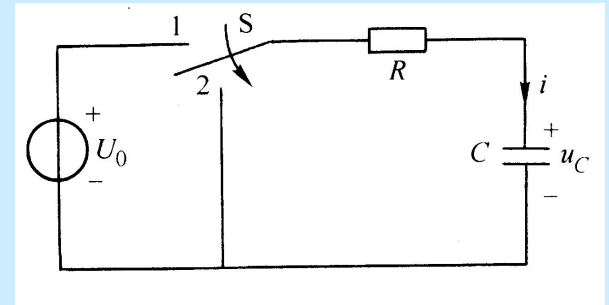
$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

上式是一个一阶线性常系数齐次微分方程，其特征方程为

$$RCs + 1 = 0$$

特征根为 $s = -\frac{1}{RC}$

齐次方程的通解为 $u_C(t) = Ae^{st} = Ae^{-\frac{t}{RC}}$



$$u_C(t) = Ae^{st} = Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$$

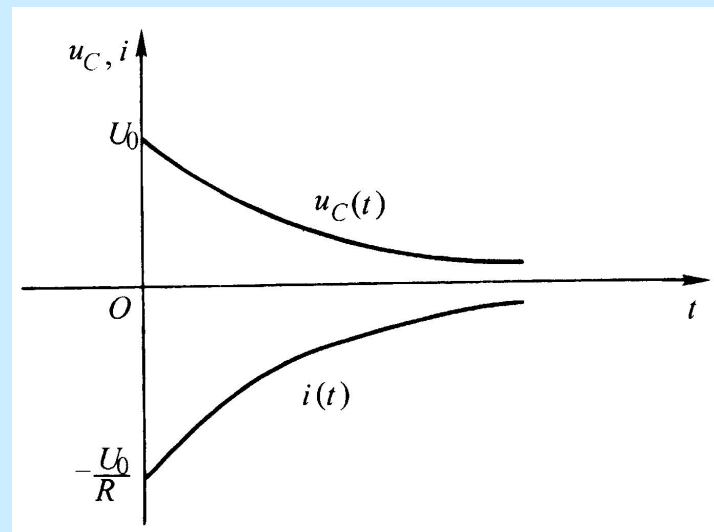
$$u_C(0_+) = A = U_0$$

$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

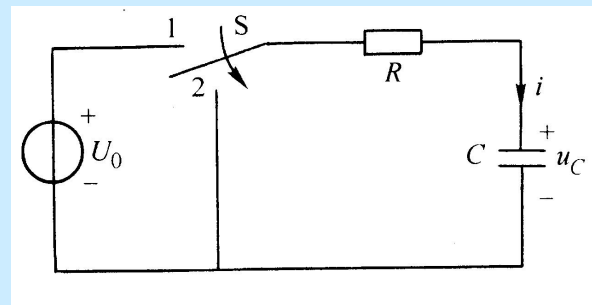
$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

负号表示实际的电容放电电流方向与假设的参考方向相反。
i还可以这样求

$$i = \frac{-u_C}{R} = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$



u_C 、 $i(t)$ 都按指数规律衰减



$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\text{令 } \tau = RC$$

τ 具有时间的量纲，因而称为电路的**时间常数**。

时间常数 τ 的大小反映了过渡过程进展的快慢。 τ 越大，过渡过程维持的时间越长、过渡过程进行得越慢； τ 越小，过渡过程维持的时间越短，过渡过程进行得越快。

从理论上说，过渡过程需要经过无穷长的时间才能结束，当 $t \rightarrow \infty$ 时，指数函数 $e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow 0$ ，但实际上去经过 $3\tau \sim 5\tau$ 时间后，通常认为过渡过程基本结束，因为响应衰减至初始值的 **5%~0.67%**

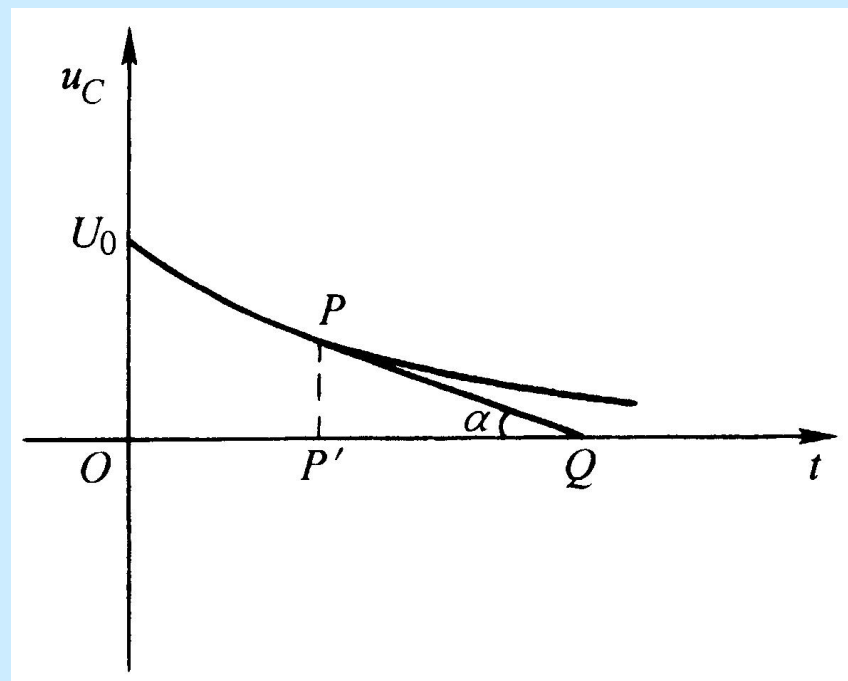
表 8-4-1 指数函数的衰减与 τ 的关系

t	0	τ	2τ	3τ	5τ ^{4τ}	5τ	...	∞
$e^{-\frac{t}{\tau}}$	1	36.8%	13.5%	5%	1.8%	0.67%	...	0

求时间常数 τ 的图解法

从衰减曲线上任一点 **P** 作切线

$$P'Q = \frac{PP'}{\tan \alpha} = \frac{u_C}{-\frac{du_C}{dt}} = \frac{U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}{\frac{1}{\tau} U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}} = \tau$$



时间常数 τ 的进一步讨论

时间常数 τ 的大小取决于电路的结构和参数，而与激励无关。 R 、 C 串联电路的时间常数 $\tau=RC$ 。 R 、 C 愈大， τ 愈大。当 R 一定时、 C 愈大，则电容 C 上储存的初始能量 $\frac{1}{2}CU_0^2$ 越大，放电时间愈长；当 C 一定时、 R 愈大，则放电电流愈小，放电时间愈长。

上述的过渡过程实质上是电容中原来储存的电场能转换为电阻消耗的热能的过程。在整个过渡过程中，电阻消耗的总能量为

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} Ri^2 dt &= \int_0^{\infty} R \left(-\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \right)^2 dt \\ &= \frac{U_0^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{RC}} dt = \frac{1}{2} CU_0^2\end{aligned}$$

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

RL电路的零输入响应

$$i(0_-) = \frac{U_S}{R}$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0$$

特征方程为 $sL + R = 0$

特征根为 $s = -\frac{R}{L}$

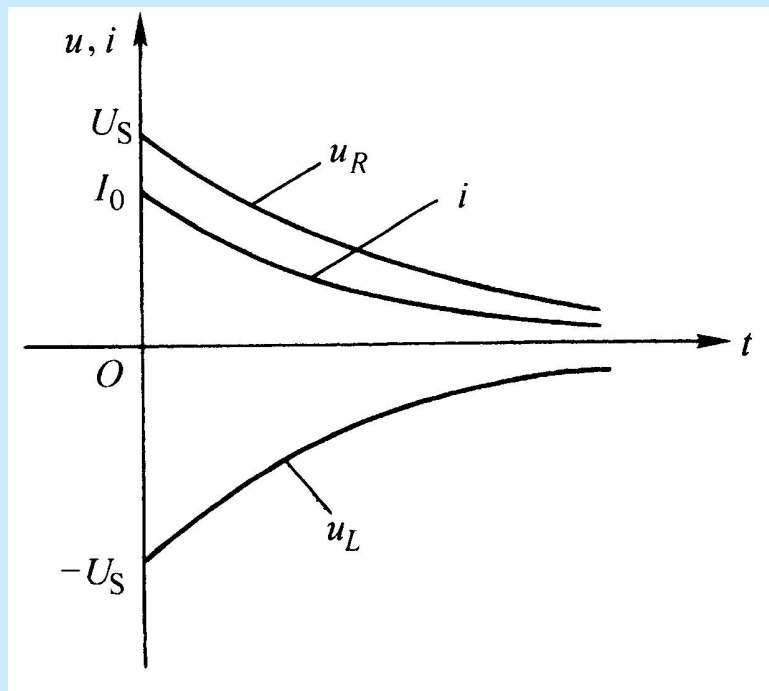
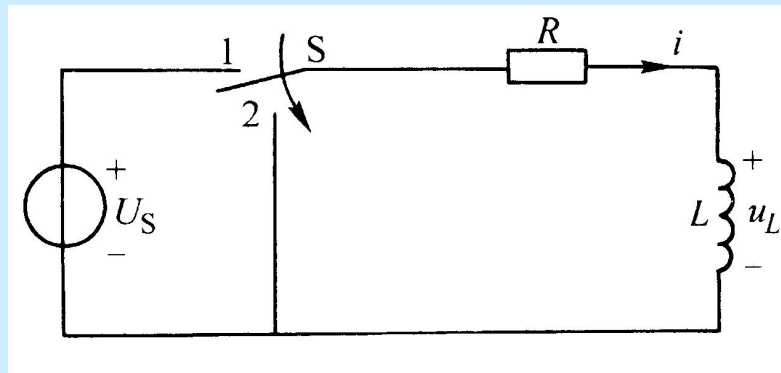
$$i = Ae^{st} = Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i(0_+) = i(0_-) = \frac{U_S}{R} = I_0$$

$$i(0_+) = A$$

$$A = \frac{U_S}{R} = I_0$$

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U_S}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$

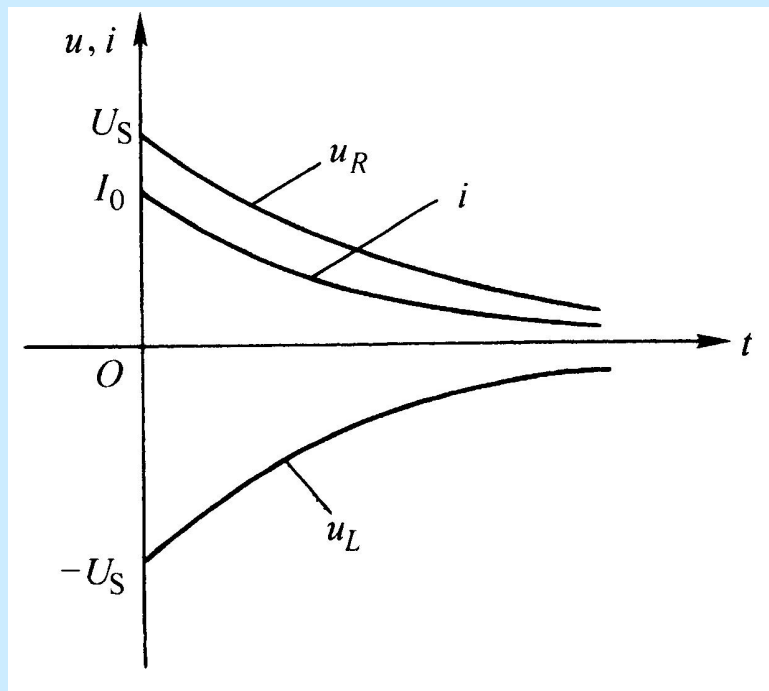
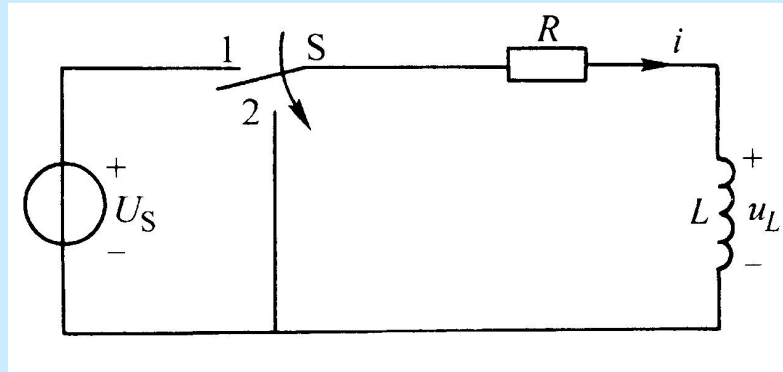


$$i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U_S}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$

可见换路后，电流*i*从初值 $\frac{U_S}{R}$ 按指数规律衰减，最终衰减至零，如图所示。

电阻电压 $u_R(t) = Ri(t) = U_S e^{-\frac{R}{L}t}$

电感电压 $u_L(t) = L \frac{di}{dt} = -U_S e^{-\frac{R}{L}t}$



时间常数 τ

$\tau = \frac{L}{R}$, 具有时间量纲, 反映了过渡过程进展的快慢。

在RL电路中, 时间常数 τ 与L成正比, 与R成反比。当R一定时, L愈大, 电感中储存的初始能量愈大, 放电时间愈长; 当L一定时, R越大, 电阻R消耗的功率 Ri^2 愈大, 磁场能转化为热能的速率愈大, 放电时间愈短, 时间常数愈小。

电阻上消耗的总能量为
$$\int_0^{\infty} Ri^2 dt = \int_0^{\infty} R(I_0 e^{-\frac{R}{L}t})^2 dt = \frac{1}{2} LI_0^2$$

电阻上消耗的能量就等于电感L上的初始储能。

零输入线性

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U_S}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$

从RC和RL电路的零输入响应可以看出, 零输入响应的大小与其对应的初始值成正比关系。例如式(8-4-11), 当电流i的初值增大K倍, 则零输入响应i也随之增大K倍。这一特性称为零输入线性。

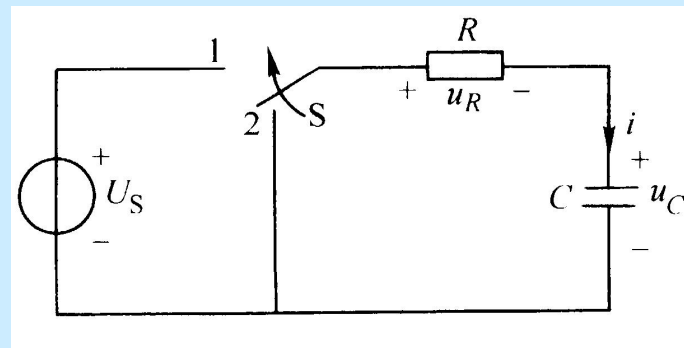
8-5 一阶电路的零状态响应

当所有的储能元件均没有初始储能，电路处于零初始状态情况下，外加激励在电路中产生的响应称为零状态响应。

直流激励下的零状态响应

RC串联电路

开关S原置于位置2，电路已达稳态， $u_C(0_-) = 0V$ ，电容上无初始储能。



$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_S$$

$$\text{特解为 } u_{Cp}(t) = U_S$$

$$\text{齐次方程的通解为 } u_{Ch}(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}} = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \quad (8-5-2)$$

$$\text{全解为 } u_C(t) = u_{Cp}(t) + u_{Ch}(t) = U_S + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

齐次方程的通解为 $u_{Ch}(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

全解为 $u_C(t) = u_{Cp}(t) + u_{Ch}(t) = U_S + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ (8-5-2)

根据换路定则 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$

由式(8-5-2)得 $u_C(0_+) = U_S + A$

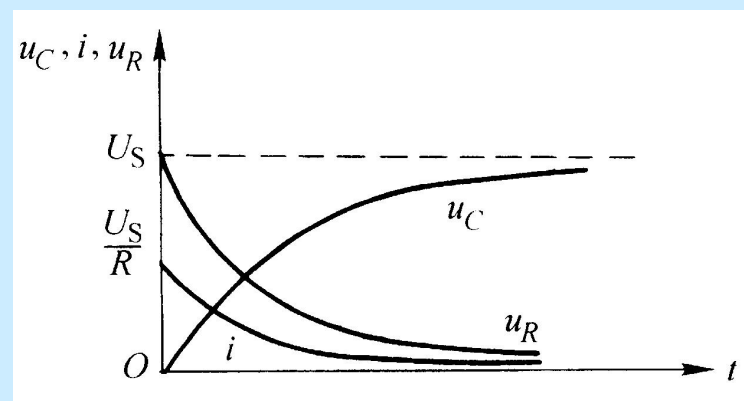
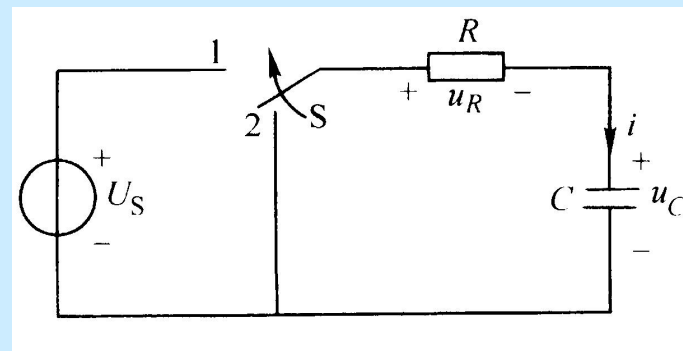
$$A = -U_S$$

最终求得

$$u_C(t) = U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_R(t) = Ri(t) = U_S e^{-\frac{t}{\tau}}$$

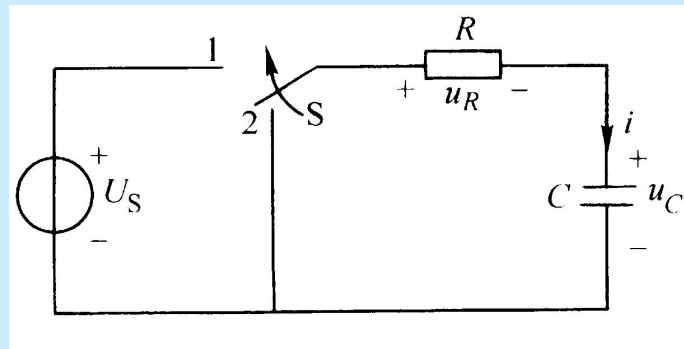


当 $t>0$ 后，电压源对电容 C 充电。电容 C 从初始电压为零逐渐增大，最终充电至稳态电压 U_S ，而电流 i 则从初始值逐渐减小，最终衰减至稳态值零。

$$u_C(t) = U_S (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = U_S - U_S e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\text{通解为 } u_{Ch}(t) = -U_S e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\text{特解为 } u_{Cp}(t) = U_S$$



微分方程的特解所对应的分量就是**强制分量**，齐次方程的通解对应的分量就称为**自由分量**。当电路中激励为恒定或随时间作周期性变化时，强制分量就是稳态分量，也称为**稳态响应**；自由分量就称为暂态分量，也称为**暂态响应**。

一般将单位阶跃函数激励下的零状态响应，称为单位阶跃响应。在如图所示电路中，若 $U_S=1V$ ，那么电容电压 $u_C(t)$ 、电流 $i(t)$ 以及电阻上的电压 $u_R(t)$ 是单位阶跃响应。若 $U_S=K$ 时，那么电路的零状态响应是对应的阶跃响应的 K 倍，这一特性称为**零状态线性**。

RL串联电路

$i(0_-) = 0A$, 电感L上无初始储能。

$$L \frac{di}{dt} + Ri = U_S$$

上式是一个一阶线性常系数非齐次微分方程。该方程的全解是特解和齐次方程的通解之和

$$i(t) = i_p(t) + i_h(t)$$

式中, $i(t)$ 表示全解, $i_p(t)$ 表示特解, $i_h(t)$ 表示通解。

特解对应的分量就是强制分量, 此处的激励是直流电源, 所以强制分量就是稳态分量。因此换路后电路达到新的稳定状态的稳态电流就是特解

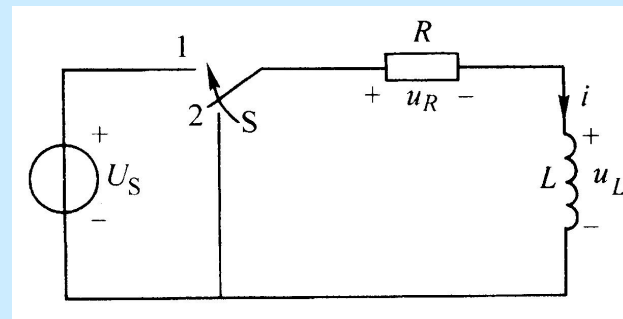
$$i(\infty) = \frac{U_S}{R} = i_p(t)$$

其通解为

$$i_h(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

于是, 全解为

$$i(t) = i_p(t) + i_h(t) = \frac{U_S}{R} + Ae^{-\frac{t}{\tau}} \quad (8-5-10)$$



$$i(t) = i_p(t) + i_h(t) = \frac{U_S}{R} + Ae^{-\frac{t}{\tau}} \quad (8-5-10)$$

积分常数A由初始条件确定。在 $t=0$ 时刻，根据换路定则

$$i(0_+) = i(0_-) = 0$$

$$\text{由式(8-5-10)得 } i(0_+) = \frac{U_S}{R} + A$$

$$\text{因此 } A = -\frac{U_S}{R}$$

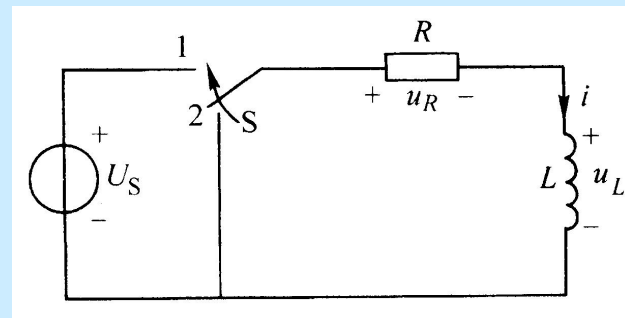
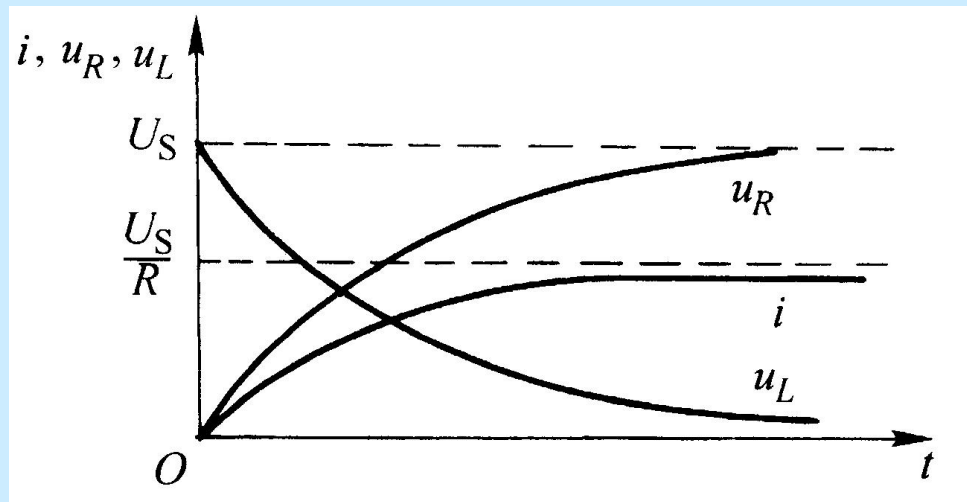
最终得到

$$i(t) = \frac{U_S}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = \frac{U_S}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

$$u_R(t) = Ri(t) = U_S (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = U_S e^{-\frac{R}{L}t}$$

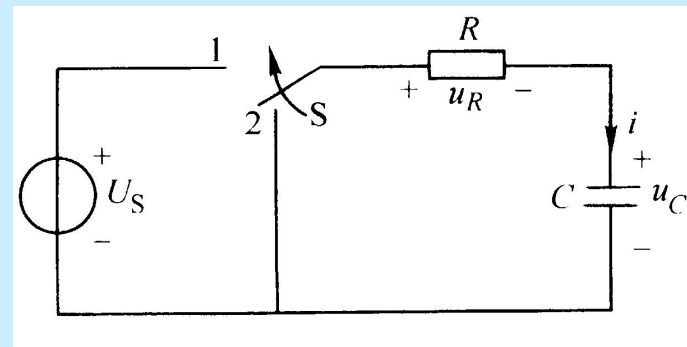
显然， $u_R(t) + u_L(t) = U_S$ ，满足KVL。



正弦交流激励下的零状态响应

RC串联电路

仍以图8-5-1所示电路为例，将直流电压源改为正弦交流电压源



$$u_s(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \psi_u)$$

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u_s(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \psi_u)$$

$u_C(t)$ 的全解等于特解 $u_{Cp}(t)$ 和通解 $u_{Ch}(t)$ 之和，即

$$u_C(t) = u_{Cp}(t) + u_{Ch}(t)$$

由于激励是正弦交流激励， $u_{Cp}(t)$ 即为稳态分量， $u_{Ch}(t)$ 即为暂态分量。

稳态分量 $u_{Cp}(t)$ 可利用相量计算

$$\dot{I}(R - j\frac{1}{\omega C}) = \dot{U}$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{U|\underline{\psi}_u|}{\sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2} \angle \varphi} = \frac{U}{z} \angle \psi_u - \varphi$$

$$\text{式中 } \varphi = \arctan(-\frac{1}{\omega CR}) \quad z = \sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}$$

$$\dot{U}_{Cp} = \dot{I}(-j\frac{1}{\omega C}) = \frac{U}{z\omega C} \angle \psi_u - \varphi - 90^\circ$$

$$u_{Cp}(t) = \frac{\sqrt{2}U}{z\omega C} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi - 90^\circ)$$

暂态分量 $u_{Ch}(t)$ 仍为 $Ae^{-\frac{t}{\tau}}$, 于是全解为

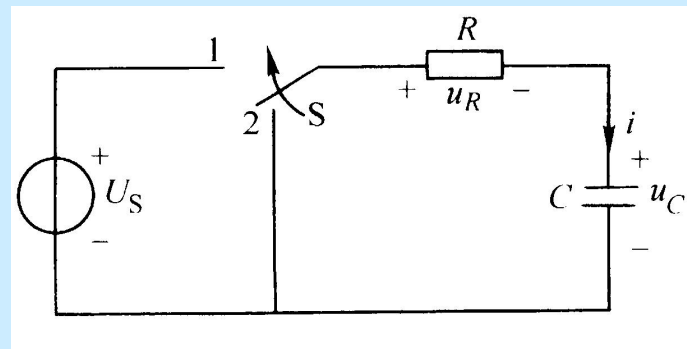
$$u_C(t) = \frac{\sqrt{2}U}{z\omega C} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi - 90^\circ) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

当 $t = 0$ 时刻, 根据换路定则 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$, 确定积分常数, 由上式

$$u_C(0_+) = \frac{\sqrt{2}U}{z\omega C} \sin(\psi_u - \varphi - 90^\circ) + A = 0$$

$$A = -\frac{\sqrt{2}U}{z\omega C} \sin(\psi_u - \varphi - 90^\circ)$$

最终得到



$$u_C(t) = \frac{\sqrt{2}U}{z\omega C} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi - 90^\circ) - \frac{\sqrt{2}U}{z\omega C} \sin(\psi_u - \varphi - 90^\circ) e^{-\frac{t}{RC}} \quad (8-5-16)$$

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = \frac{\sqrt{2}U}{z} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) + \frac{\sqrt{2}U}{z\omega CR} \sin(\psi_u - \varphi - 90^\circ) e^{-\frac{t}{RC}} \quad (8-5-17)$$

$$u_R(t) = Ri(t) = \frac{\sqrt{2}RU}{z} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) + \frac{\sqrt{2}U}{z\omega C} \sin(\psi_u - \varphi - 90^\circ) e^{-\frac{t}{RC}} \quad (8-5-18)$$

式(8-5-16)~式(8-5-18)说明电源的初相角 ψ_u 对暂态分量的大小有影响，通常 ψ_u 称为接通角。当 $\psi_u = \varphi$ 或 $\psi_u = \varphi + 180^\circ$ ，电容电压的暂态分量最大。

从式(8-5-16)不难看出，电容过渡电压的最大值无论如何不会超过稳态电压幅值 $\frac{\sqrt{2}U}{z\omega C}$ 的两倍，但是从式(8-5-17)可以看出，在某些情况下，过渡电流的最大值将大大超过稳态电流的幅值 $\frac{\sqrt{2}U}{z}$ 。

$$u_C(t) = \frac{\sqrt{2}U}{z\omega C} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi - 90^\circ) - \frac{\sqrt{2}U}{z\omega C} \sin(\psi_u - \varphi - 90^\circ) e^{-\frac{t}{RC}} \quad (8-5-16)$$

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = \frac{\sqrt{2}U}{z} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) + \frac{\sqrt{2}U}{z\omega CR} \sin(\psi_u - \varphi - 90^\circ) e^{-\frac{t}{RC}} \quad (8-5-17)$$

$$u_R(t) = Ri(t) = \frac{\sqrt{2}RU}{z} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) + \frac{\sqrt{2}U}{z\omega C} \sin(\psi_u - \varphi - 90^\circ) e^{-\frac{t}{RC}} \quad (8-5-18)$$

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{1}{\omega CR}\right)$$

例如，当 $\frac{X_C}{R} = \frac{1}{\omega CR} = 500$ 时， $\varphi \approx -90^\circ$ ，若设接通角 $\psi_u = 90^\circ$ ，

则在换路后瞬间电流暂态分量约为 $\frac{500\sqrt{2}U}{z}$ ，比稳态分量的幅值将大500倍左右。

工程上遇到接通电容电路，例如接通空载电缆或架空母线时，会形成极大的电流冲击，应注意采取相应的安全措施。

RL串联电路

仍以如图所示电路为例，将直流电压源改为正弦交流电压源

$$u_s(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \psi_u)$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri = u_s(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \psi_u)$$

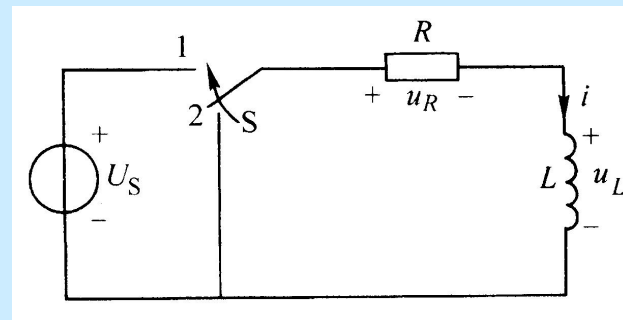
初始条件 $i(0_-) = 0$

非齐次微分方程的全解是特解 $i_p(t)$ 与通解 $i_h(t)$ 之和

$$i(t) = i_p(t) + i_h(t)$$

特解就是正弦交流激励下的稳态电流，可用相量求解

$$\dot{I}_p(R + j\omega L) = \dot{U}$$



$$i_p = \frac{\dot{U}}{R + j\omega L} = \frac{U \angle \psi_u}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \angle \varphi} = \frac{U}{Z} \angle \psi_u - \varphi$$

式中 $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$, $\varphi = \arctan \frac{\omega L}{R}$

$$i_p(t) = \frac{\sqrt{2}U}{Z} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi)$$

暂态电流仍为

$$i_h(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

于是全解为

$$i(t) = i_p(t) + i_h(t) = \frac{\sqrt{2}U}{Z} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) + A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

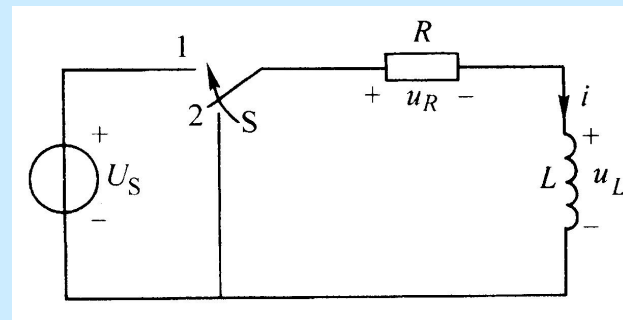
根据换路定则

$$i(0_+) = i(0_-) = 0$$

$$i(0_+) = \frac{\sqrt{2}U}{Z} \sin(\psi_u - \varphi) + A$$

$$\text{因而 } A = -\frac{\sqrt{2}U}{Z} \sin(\psi_u - \varphi)$$

最终得到



$$L \frac{di}{dt} + Ri = u_s(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \psi_u)$$

初始条件 $i(0_-) = 0$

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}U}{Z} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) - \frac{\sqrt{2}U}{Z} \sin(\psi_u - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t} \quad (8-5-23)$$

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = \frac{\sqrt{2}U}{Z} \omega L \sin(\omega t + \psi_u - \varphi + 90^\circ) + \frac{\sqrt{2}U}{Z} R \sin(\psi_u - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t} \quad (8-5-24)$$

$$u_R(t) = \frac{\sqrt{2}U}{Z} R \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) - \frac{\sqrt{2}U}{Z} R \sin(\psi_u - \varphi) e^{-\frac{R}{L}t} \quad (8-5-25)$$

两种极端情况：

(1)换路时，恰好 $\psi_u = \varphi$ ，由式(8-5-23) ~ (8-5-25)知，
 $\sin(\psi_u - \varphi) = 0$ ， $i(t)$ 、 $u_L(t)$ 、 $u_R(t)$ 中无暂态分量，即没有发生过渡过程，从初始状态直接进入稳定状态。

(2) 换路时, $\psi_u = \varphi \pm 90^\circ$, 由式(8-5-23) ~ (8-5-25)知,

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}U}{Z} \sin(\omega t \pm 90^\circ) \mp \frac{\sqrt{2}U}{Z} e^{-\frac{Rt}{L}}$$

$$u_L(t) = \mp \frac{\sqrt{2}U}{Z} \omega L \sin \omega t \pm \frac{\sqrt{2}U}{Z} R e^{-\frac{Rt}{L}}$$

$$u_R(t) = \frac{\sqrt{2}U}{Z} R \sin(\omega t \pm 90^\circ) \mp \frac{\sqrt{2}U}{Z} R e^{-\frac{Rt}{L}}$$

$$i(t) = \frac{\sqrt{2}U}{Z} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) - \frac{\sqrt{2}U}{Z} \sin(\psi_u - \varphi) e^{-\frac{Rt}{L}}$$

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = \frac{\sqrt{2}U}{Z} \omega L \sin(\omega t + \psi_u - \varphi + 90^\circ) + \frac{\sqrt{2}U}{Z} R \sin(\psi_u - \varphi) e^{-\frac{Rt}{L}}$$

$$u_R(t) = \frac{\sqrt{2}U}{Z} R \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) - \frac{\sqrt{2}U}{Z} R \sin(\psi_u - \varphi) e^{-\frac{Rt}{L}}$$

这时, $i(t)$ 中暂态分量指数函数的系数达到最大, 通常情况下暂态分量中指数函数的系数介于(1)、(2)两种情况之间。倘若时间常数 τ 很大, 衰减很慢, 则在经过半个周期时, $i(t)$ 中暂态分量与稳态分量相加后的瞬时

电流约为稳态分量幅值 $\frac{\sqrt{2}u}{Z}$ 的两倍, 同样 $u_L(t)$ 、 $u_R(t)$ 也会超过其稳态分量的幅值。

这种过电流、过电压现象在实际电路中必须予以考虑。

回顾上述的RC、RL电路的零状态响应, 无论是在直流还是在正弦交流激励下, 零状态响应的大小均与激励成正比关系。倘若激励扩大K倍, 各零状态响应也随之扩大K倍, 这一特性称为零状态线性。

8-6 一阶电路的全响应和三要素法

全响应

由外加激励和非零初始状态的储能元件的初始储能共同引起的响应，称为全响应。

全响应就是微分方程的全解，是方程的特解与其齐次方程的通解之和。

开关S闭合前，电容两端已有初始电压 $u_C(0_-)=U_0$

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_S \quad (8-6-1)$$

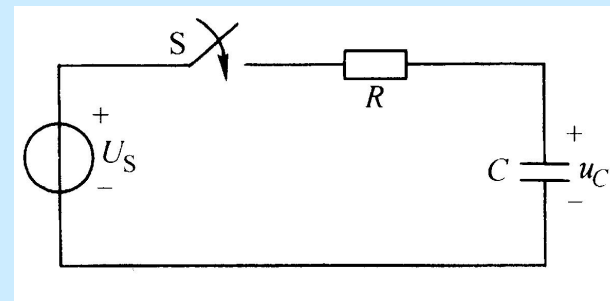
$$u_C(t) = u_{Cp}(t) + u_{Ch}(t) = U_S + Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

根据换路定则 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$

$$u_C(0_+) = U_S + A$$

$$A = U_0 - U_S$$

$$\text{全响应 } u_C(t) = U_S + (U_0 - U_S)e^{-\frac{t}{RC}}$$



$$\text{零输入响应} \quad u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (8-4-4)$$

$$\text{零状态响应} \quad u_C(t) = U_S (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (8-5-3)$$

$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} + U_S (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

零输入响应 $u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (8-4-4)$

零状态响应 $u_C(t) = U_S (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (8-5-3)$

全响应=零输入响应+零状态响应

高阶电路也具备这一性质。

三要素法

用经典法求解一阶电路过渡过程，一阶电路的全响应等于对应的一阶线性常系数微分方程的全解，记为 $f(t)$

$$f(t) = f_p(t) + f_h(t)$$

$f_p(t)$ 代表方程特解， $f_h(t)$ 代表齐次方程的通解。 $f_h(t)$ 为指数形式 $Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ ，则

$$f(t) = f_p(t) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

取 $t = 0_+$ 时刻的值 $f(0_+) = f_p(0_+) + A$

$$A = f(0_+) - f_p(0_+)$$

于是得到

$$f(t) = f_p(t) + [f(0_+) - f_p(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (8-6-11)$$

上式就是著名的三要素公式。

$$f(t) = f_p(t) + [f(0_+) - f_p(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (8-6-11)$$

一阶动态电路的三个要素

(1) $f_p(t)$: 是一阶线性常系数微分方程的特解, 是一阶动态电路在激励作用下的强制分量。各种激励函数作用下的特解形式详见表8—6—1。当激励是直流或正弦交流电源时, 强制分量即是稳态分量, 这时候, 可按直流电路、正弦交流稳态电路的求解方法求得 $f_p(t)$, $f_p(t) = f(\infty)$ 。

(2) $f(0_+)$: 是响应在换路后瞬间的初始值, 按本章第三节中介绍的方法求解。

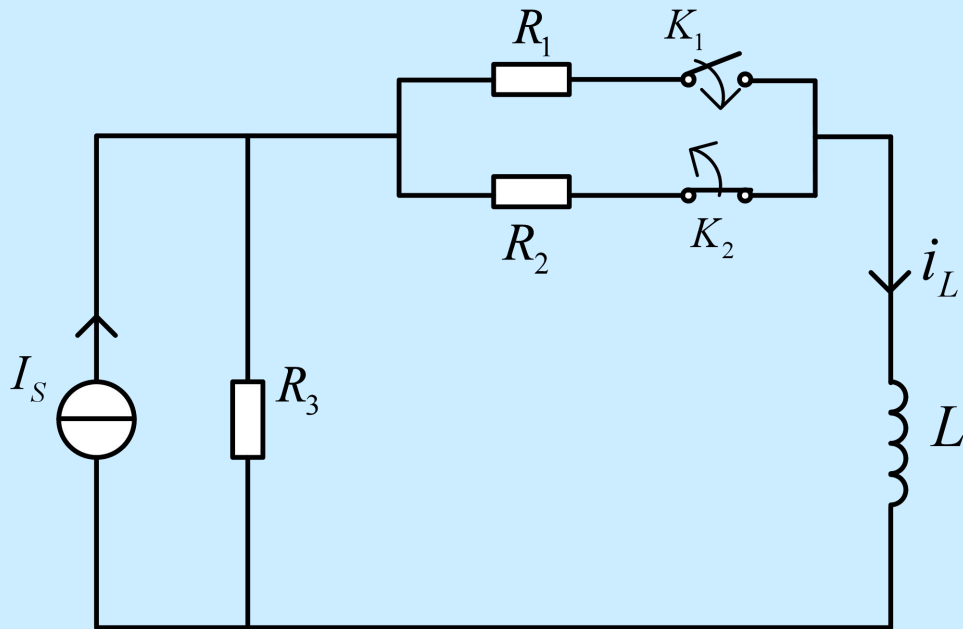
(3) τ : 是时间常数, 一个一阶电路只有一个时间常数。

$\tau = R_{eq}C$ 或 $\tau = \frac{L}{R_{eq}}$, R_{eq} 是电路储能元件两端的端口等效电阻。

表 8-6-1 微分方程的特解形式

激励 $e(t)$ 的形式	响应 $f(t)$ 的形式
1. a (常量)	A (常数)
2. at^n	$B_0 t^n + B_1 t^{n-1} + \cdots + B_n$
3. ae^{Kt}	Ce^{Kt}
4. $a\sin\omega t$	$C\sin\omega t + D\cos\omega t$
5. $a\cos\omega t$	
6. $at^n e^{Kt} \sin\omega t$	$(F_0 t^n + F_1 t^{n-1} + \cdots + F_n) e^{Kt} \sin\omega t +$ $(G_0 t^n + G_1 t^{n-1} + \cdots + G_n) e^{Kt} \cos\omega t$
7. $at^n e^{Kt} \cos\omega t$	

如图所示电路，已知 $R_1 = 1\Omega$ ， $R_2 = 2\Omega$ ， $L = 1H$ ， $R_3 = 3\Omega$ ， $I_S = 1A$ ， K_2 闭合， K_1 断开，历时已久， $t=0$ 时， K_1 闭合， K_2 断开，求 $t > 0$ 时的 i_L



$$i_L(0_-) = I_S \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 1 \times \frac{3}{2 + 3} = 0.6A$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0.6A$$

$t \rightarrow \infty$ 时，L看作短路

$$i_{Lp}(t) = I_S \frac{R_3}{R_1 + R_3} = 1 \times \frac{3}{1 + 3} = 0.75A$$

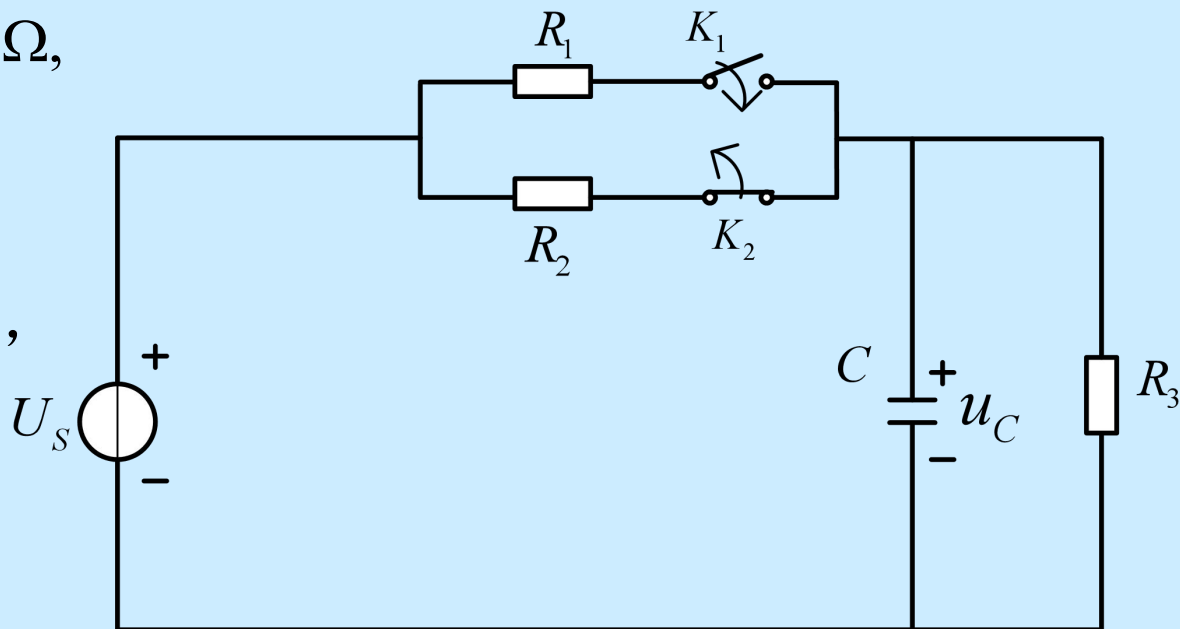
$$\tau = \frac{L}{R_1 + R_3} = \frac{1}{1 + 3} = 0.25s$$

$$f(t) = f_p(t) + [f(0_+) - f_p(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (8-6-11)$$

$t > 0$ 时

$$\begin{aligned} i_L(t) &= i_p(t) + [i(0_+) - i_p(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= 0.75 + [0.6 - 0.75]e^{-\frac{t}{0.25}}A \\ &= 0.75 - 0.15e^{-\frac{t}{0.25}}A \end{aligned}$$

如图所示电路，已知 $R_1 = 1\Omega$ ，
 $R_2 = 2\Omega$ ， $C = 0.4F$ ， $R_3 = 3\Omega$ ，
 $U_s = 5V$ ， K_2 闭合， K_1 断开，
 历时已久， $t=0$ 时， K_1 闭合，
 K_2 断开，求 $t > 0$ 时的 u_C



$$u_C(0_-) = \frac{U_s}{R_2 + R_3} R_3 = \frac{5}{2+3} \times 3 = 3V$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 3V$$

$$u_{Cp}(t) = \frac{U_s}{R_1 + R_3} \times R_3 = \frac{5}{1+3} \times 3 = 3.75V$$

$$\tau = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} C = \frac{1 \times 3}{1+3} \times 0.4 = 0.3s$$

$t > 0$ 时

$$u_C(t) = u_{Cp}(t) + [u_C(0_+) - u_{Cp}(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$= 3.75 + [3 - 3.75]e^{-\frac{t}{0.3}} V$$

$$= 3.75 - 0.75e^{-\frac{10t}{3}}$$

用三要素法求解RC电路零输入响应

$$u_C(0_-) = U_0$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$$

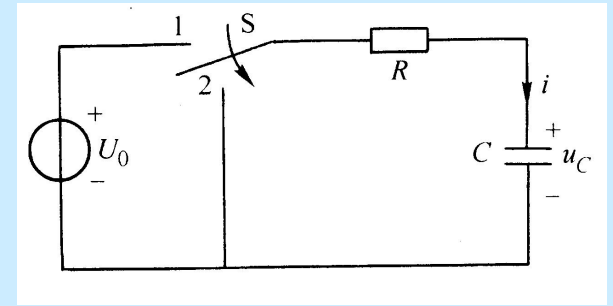
$$u_{Cp}(t) = 0$$

$$u_{Cp}(0_+) = 0$$

$$\tau = RC$$

$$u_C(t) = u_{Cp}(t) + [u_C(0_+) - u_{Cp}(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$= U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$



$$f(t) = f_p(t) + [f(0_+) - f_p(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (8-6-11)$$

用三要素法求解RL电路零输入响应

$$i_L(0_-) = \frac{U_S}{R}$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{U_S}{R}$$

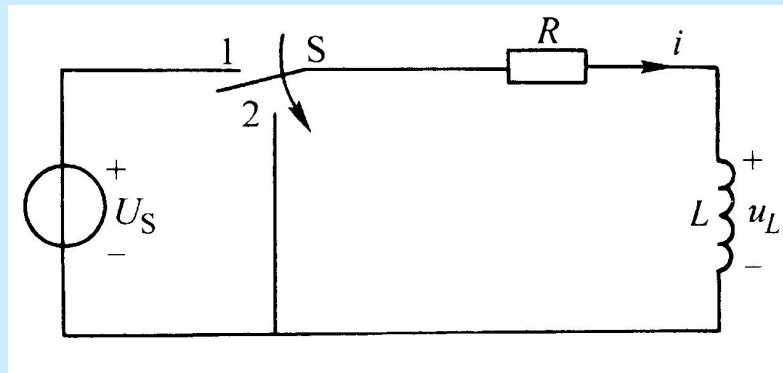
$$i_{Lp}(t) = 0$$

$$i_{Lp}(0_+) = 0$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$

$$i_L(t) = i_{Lp}(t) + [i_L(0_+) - i_{Lp}(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$= \frac{U_S}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$



如图所示电路，已知 $U_s = 10V$, $R_1 = 20\Omega$, $R_2 = 20\Omega$, $R_3 = 30\Omega$, $C = 0.2F$, 开关K闭合已久，当 $t = 0$ 时，开关断开，求 $t > 0$ 时的 u_C 。

R_2 、 R_3 并联电阻

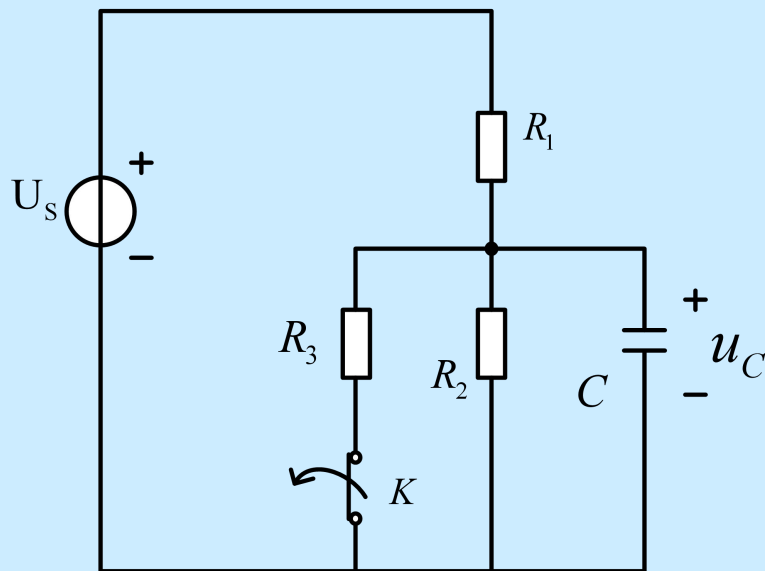
$$R_{//} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{20 \times 30}{20 + 30} = 12\Omega$$

$$u_C(0_-) = \frac{U_s}{R_1 + R_{//}} R_{//} = \frac{10}{20 + 12} \times 12 = \frac{15}{4} V$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = \frac{15}{4} V$$

$$u_{Cp}(t) = \frac{U_s}{R_1 + R_2} \times R_2 = \frac{10}{20 + 20} \times 20 = 5V$$

$$\tau = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C = \frac{20 \times 20}{20 + 20} \times 0.2 = 2s$$



$t > 0$ 时

$$u_C(t) = u_{Cp}(t) + [u_C(0_+) - u_{Cp}(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$= 5 + \left[\frac{15}{4} - 5\right]e^{-\frac{t}{2}} V$$

$$= 5 - 1.25e^{-\frac{10t}{3}} V$$

如图所示电路，已知 $R_1 = 10\Omega$ ，
 $R_2 = 20\Omega$ ， $L = 1H$ ， $R_3 = 20\Omega$ ， $U_s = 3V$ ，
 K 断开，历时已久， $t=0$ 时， K 闭合，
 求 $t > 0$ 时的 i_L

$$i_L(0_-) = \frac{U_s}{R_1 + R_3} = \frac{3}{10 + 20} = 0.1A$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0.1A$$

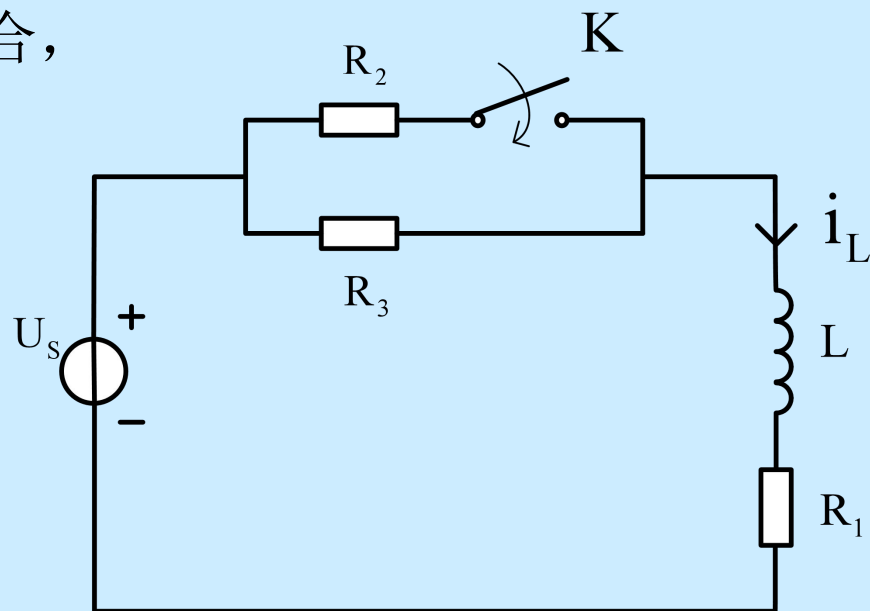
$t \rightarrow \infty$ 时， L 看作短路

R_2 、 R_3 并联电阻

$$R_{//} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{20 \times 20}{20 + 20} = 10\Omega$$

$$i_{Lp}(t) = \frac{U_s}{R_1 + R_{//}} = \frac{3}{10 + 10} = 0.15A$$

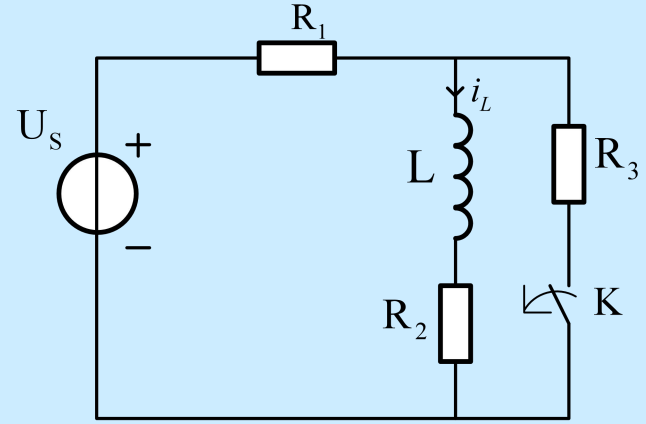
$$\tau = \frac{L}{R_1 + R_{//}} = \frac{1}{10 + 10} = 0.05s$$



$t > 0$ 时

$$\begin{aligned} i_L(t) &= i_p(t) + [i(0_+) - i_p(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= 0.15 + [0.1 - 0.15]e^{-\frac{t}{0.05}} A \\ &= 0.15 - 0.05e^{-\frac{t}{0.05}} A \end{aligned}$$

例 如图所示, $R_1=10\Omega$, $R_2=10\Omega$, $R_3=10\Omega$,
 $L=0.1\text{H}$, $U_s=15\text{V}$, 开关闭合已久, $t=0$ 时
开关断开, 求 $t>0$ 时的电感电流 i_L 。



例 如图所示, $R_1=10\Omega$, $R_2=10\Omega$, $R_3=10\Omega$, $L=0.1\text{H}$, $U_s=15\text{V}$, 开关闭合已久, $t=0$ 时开关断开, 求 $t>0$ 时的电感电流 i_L 。

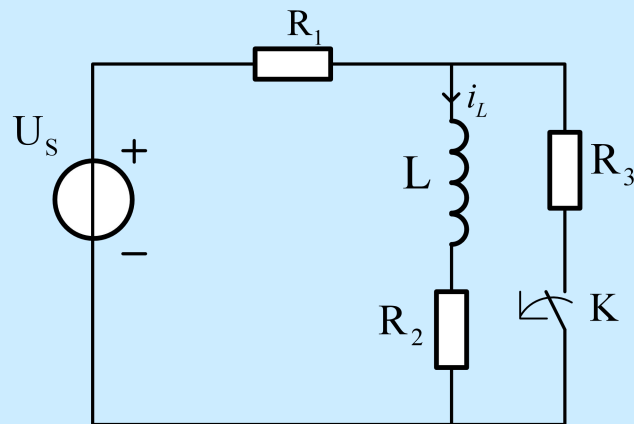
$$i_L(0_-) = \frac{1}{2} \frac{U_s}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{1}{2} \times \frac{15}{10 + \frac{10 \times 10}{10 + 10}} = 0.5\text{A}$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0.5\text{A}$$

$$i_{Lp}(t) = i(\infty) = \frac{U_s}{R_1 + R_2} = \frac{15}{10 + 10} = 0.75\text{A}$$

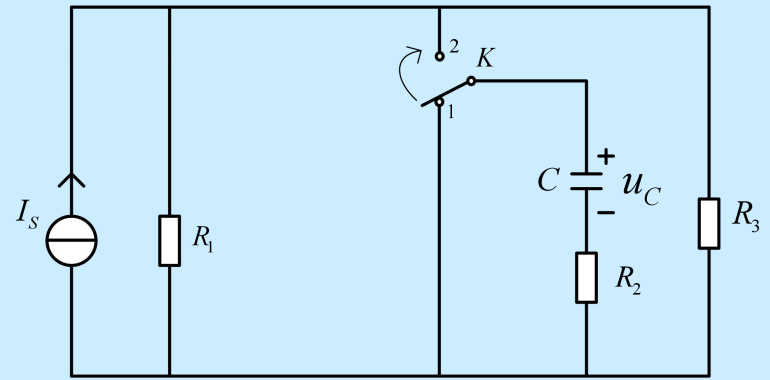
$$\tau = \frac{L}{R_1 + R_2} = \frac{0.1}{10 + 10} = 0.005\text{s}$$

$$i_L(t) = 0.75 + (0.5 - 0.75)e^{-\frac{t}{\tau}} = 0.75 - 0.25e^{-\frac{t}{0.005}} = 0.75 - 0.25e^{-200t}$$



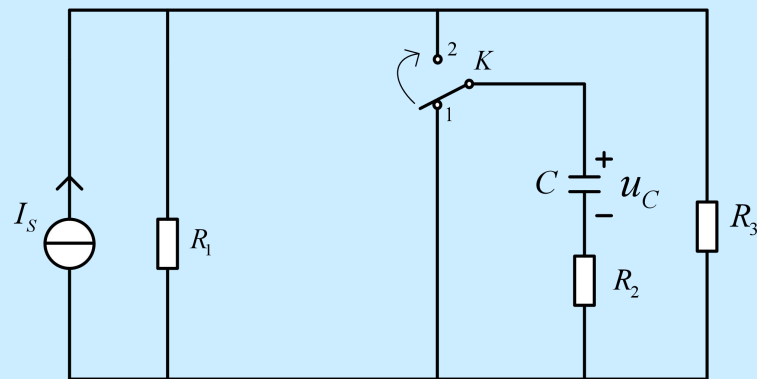
$$f(t) = f_p(t) + [f(0_+) - f_p(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (8-6-11)$$

如图所示电路， $I_s = 1A$, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 20\Omega$, $R_3 = 30\Omega$, $C = 0.01F$, 开关K原在1处闭合已久，当 $t = 0$ 时，开关切换到2处，求 $t > 0$ 时电容上的电压 $u_C(t)$ 。



$$f(t) = f_p(t) + [f(0_+) - f_p(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (8-6-11)$$

如图所示电路， $I_s = 1A$, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 20\Omega$, $R_3 = 30\Omega$, $C = 0.01F$, 开关K原在1处闭合已久，当 $t = 0$ 时，开关切换到2处，求 $t > 0$ 时电容上的电压 $u_C(t)$ 。



$$u_C(0_-) = 0$$

由换路定则

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$$

$$u_{Cp}(t) = I_s \times \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = 1 \times \frac{10 \times 30}{10 + 30} = 7.5V$$

$$\tau = (R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3})C = (20 + \frac{10 \times 30}{10 + 30}) \times 0.01 = 0.275s$$

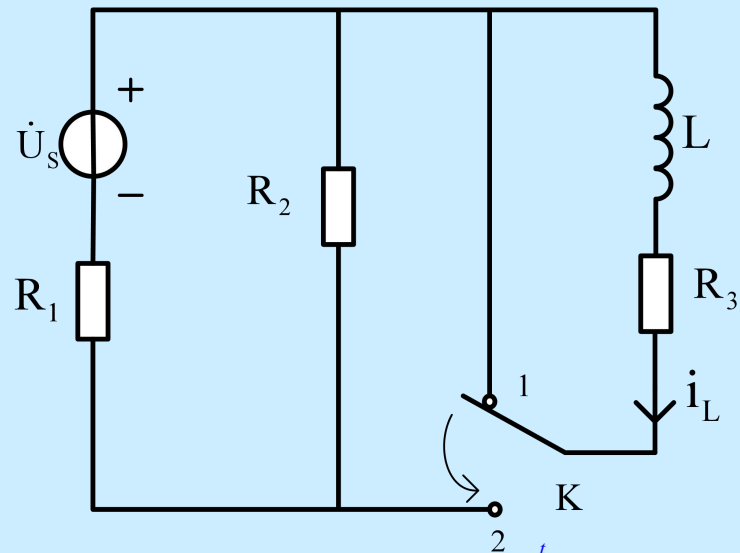
$$u_C(t) = u_{Cp}(t) + [u_C(0_+) - u_{Cp}(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$= 7.5 + [0 - 7.5]e^{-\frac{t}{0.275}}$$

$$= 7.5 - 7.5e^{-\frac{t}{0.275}}$$

$$f(t) = f_p(t) + [f(0_+) - f_p(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (8-6-11)$$

如图所示电路, $U_s = 2V, R_1 = 10\Omega, R_2 = 20\Omega, R_3 = 30\Omega, L = 2mH$, 开关 K 在1处已久, 当 $t = 0$ 时开关切换到2处, 求当 $t > 0$ 时的 i_L 。



$$f(t) = f_p(t) + [f(0_+) - f_p(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (8-6-11)$$

因为开关在1处已久

$$i_L(0_-) = 0$$

由换路定则

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$$

$$i_{Lp}(t) = \frac{U_s}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} \times \frac{R_2}{R_2 + R_3} = \frac{2}{10 + \frac{20 \times 30}{20 + 30}} \times \frac{20}{20 + 30}$$

$$= 0.0363636 A$$

$$\tau = \frac{L}{R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{2 \times 10^{-3}}{30 + \frac{10 \times 20}{10 + 20}} = 5.45455 \times 10^{-5} s$$

$$f(t) = f_p(t) + [f(0_+) - f_p(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (8-6-11)$$

$$\begin{aligned} i_L(t) &= i_{Lp}(t) + [i_L(0_+) - i_{Lp}(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= 0.0363636 + [0 - 0.0363636]e^{-\frac{t}{5.45455 \times 10^{-5}}} \\ &= 0.0363636 - 0.0363636e^{-\frac{t}{5.45455 \times 10^{-5}}} \text{ A} \end{aligned}$$

例8-6-4如图所示电路，已知 $U_S = 12V$, $I_S = 5A$, $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 3\Omega$, $L_2 = 2.5H$, 电路原处于 S_1 打开、 S_2 闭合的稳态。当 $t = 0$ 时， S_1 闭合、 S_2 打开，求 $i_2(t)$ 、 $u_{ab}(t)$ 与 $i_1(t)$ 。

解：换路前电路处于 S_1 打开、 S_2 闭合的稳态，则

$$i_2(0_-) = \frac{U_S}{R_2} = 4A$$

根据换路定则

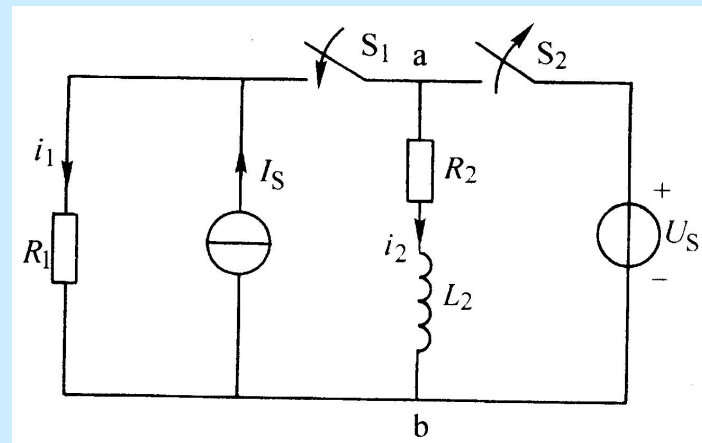
$$i_2(0_+) = i_2(0_-) = 4A$$

$t = 0$ 时， S_1 闭合、 S_2 打开，则 $i_2(t)$ 就是稳态电流，即

$$i_{2p}(t) = i_2(\infty) = I_S \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 2A$$

$$\tau = \frac{L_2}{R_{eq}} = \frac{L_2}{R_1 + R_2} = 0.5s$$

利用三要素公式



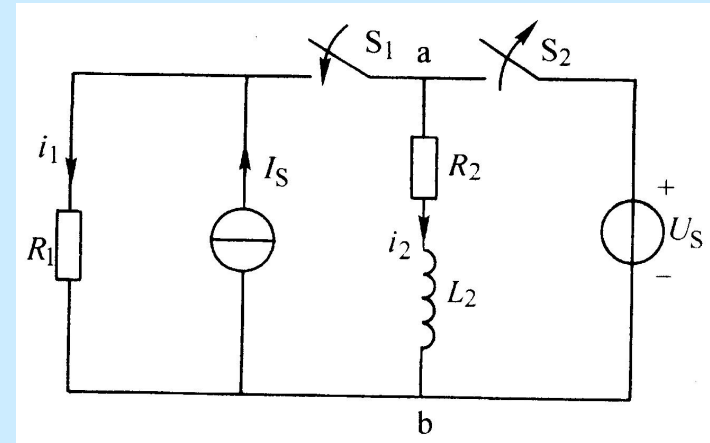
$$i_2(t) = i_{2p}(t) + [i_2(0_+) - i_{2p}(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$= (2 + (4 - 2)e^{-\frac{t}{0.5}})A = (2 + 2e^{-2t})A$$

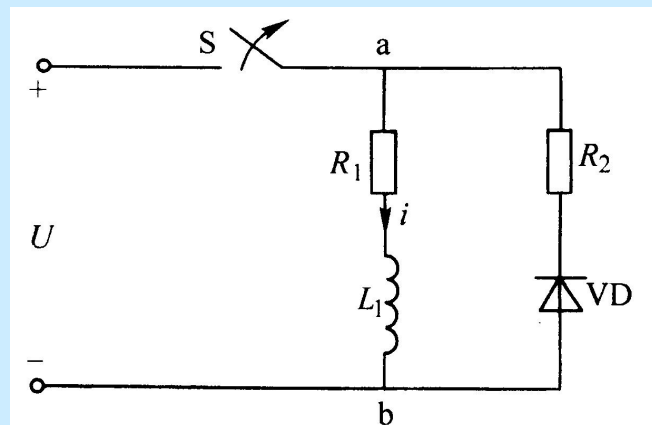
$$u_{ab}(t) = R_2 i_2(t) + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

$$= 3(2 + 2e^{-2t})V + 2.5(-4e^{-2t})V = (6 - 4e^{-2t})V$$

$$i_1(t) = I_S - i_2(t) = (3 - 2e^{-2t})A$$



例8-6-5在如图所示的电路中， R_1 、 L_1 是磁力线圈， $R_1=20\Omega$ ， $L_1=1H$ ，接在 $U=100V$ 的直流电源上。现要求断开时电压 u_{ab} 不超过 U 的2倍，且使电流 i 在 $0.06s$ 内衰减至初值的5%以下，求 R_2 为多少？



解：开关 S 断开前，电路处于稳态，则

$$i(0_-) = \frac{U}{R_1} = 5A$$

根据换路定则

$$i(0_+) = i(0_-) = 5A$$

$t > 0$ 后， S 断开，回路中没有激励，则

$$i_p(t) = i(\infty) = 0$$

假设二极管 VD 导通时电阻为零，则时间常数

$$\tau = \frac{L_1}{R_{eq}} = \frac{L_1}{R_1 + R_2} = \frac{1}{20 + R_2}$$

利用三要素公式

$$i(t) = i_p(t) + [i(0_+) - i_p(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 5e^{-(20+R_2)t}$$

$$u_{ab}(t) = R_1 i(t) + L_1 \frac{di}{dt}$$

$$= 20 \times 5e^{-(20+R_2)t} - 5 \times (20 + R_2)e^{-(20+R_2)t}$$

$$= -5R_2 e^{-(20+R_2)t}$$

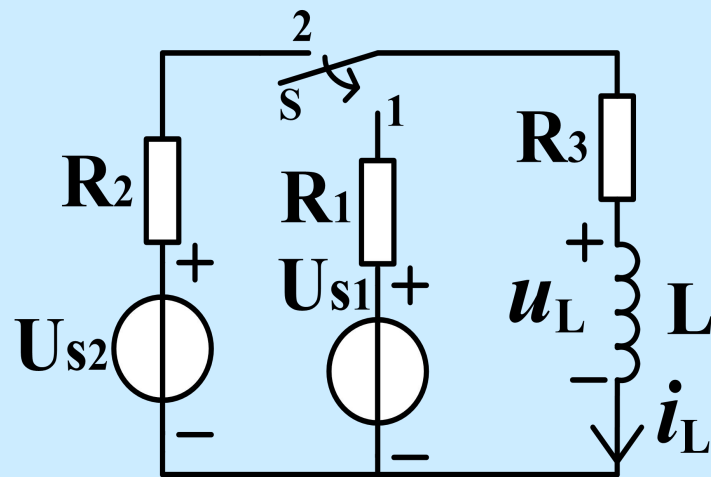
$$\text{根据题意 } |u_{ab}(0_+)| = 5R_2 \leq 2 \times 100 \quad R_2 \leq 40\Omega$$

$$i(0.06) \leq 5\% \times i(0_+)$$

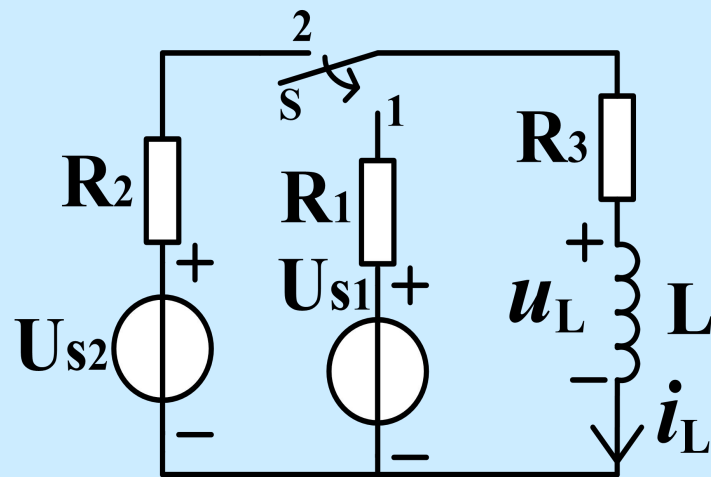
$$5e^{-(20+R_2) \times 0.06} \leq 0.25 \quad R_2 \geq 29.9\Omega$$

因此, $29.9\Omega \leq R_2 \leq 40\Omega$, R_2 在此范围内取值均能满足要求。

例 如图所示电路， $R_1=10\Omega$ ， $R_2=2\Omega$ ， $R_3=2\Omega$ ， $L=12\text{mH}$ ， $U_{s1}=6\text{V}$ ， $U_{s2}=10\text{V}$ ，开关S原在2处已久，在 $t=0$ 时开关S由2切换至1，求 i_L 和 u_L 。



例 如图所示电路， $R_1=10\Omega$ ， $R_2=2\Omega$ ， $R_3=2\Omega$ ， $L=12\text{mH}$ ， $U_{s1}=6\text{V}$ ， $U_{s2}=10\text{V}$ ，开关S原在2处已久，在 $t=0$ 时开关S由2切换至1，求 i_L 和 u_L 。



$$\text{解 } i_L(0_-) = \frac{U_{s2}}{R_2 + R_3} = \frac{10\text{V}}{2\Omega + 2\Omega} = 2.5\text{A}$$

$$\text{由换路定则 } i_L(0_+) = 2.5\text{A}$$

$$i_{Lp}(t) = \frac{U_{s1}}{R_1 + R_3} = \frac{6}{10\Omega + 2\Omega} = 0.5\text{A}$$

$$\tau = \frac{L}{R_1 + R_3} = \frac{12\text{mH}}{10\Omega + 2\Omega} = 10^{-3}\text{s}$$

由三要素法

$$i_L(t) = i_{Lp}(t) + [i_L(0_+) - i_{Lp}(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$= 0.5A + [2.5A - 0.5A]e^{-\frac{t}{10^{-3}}}$$

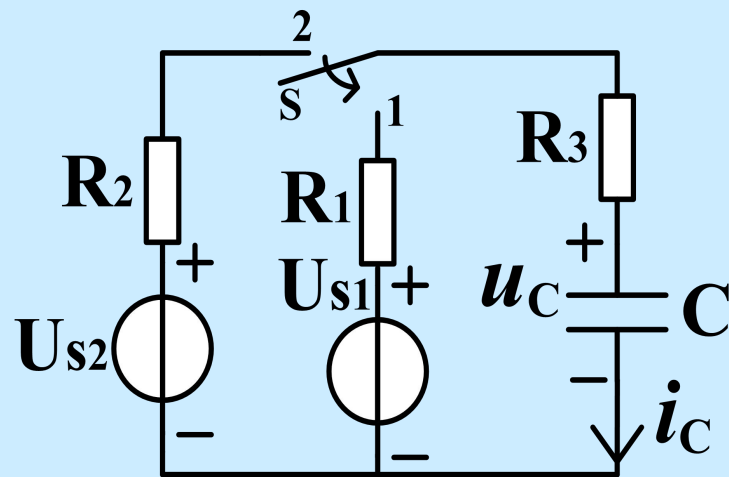
$$= 0.5 + 2e^{-1000t}A$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

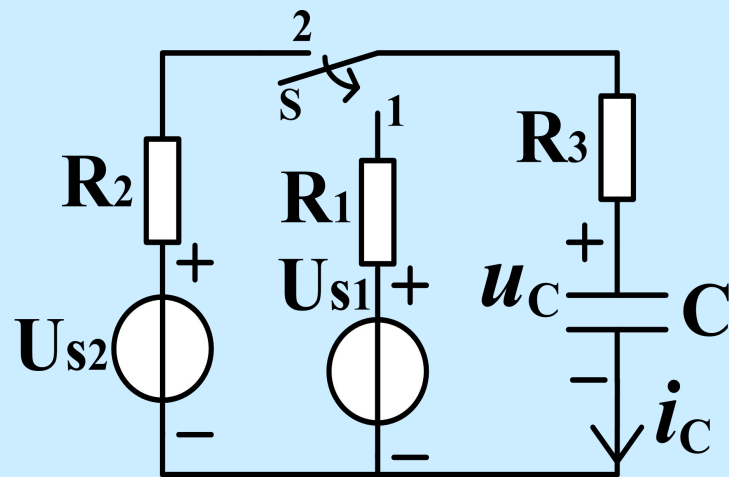
$$= 12 \times 10^{-3} \times (-2000)e^{-1000t}$$

$$= -24e^{-1000t}V$$

例 如图所示电路， $R_1=3\Omega$ ， $R_2=2\Omega$ ， $R_3=2\Omega$ ， $C=100\mu\text{F}$ ， $U_{s1}=6\text{V}$ ， $U_{s2}=10\text{V}$ ，开关S原在2处已久，在 $t=0$ 时开关S由2切换至1，求 i_C 和 u_C 。



例 如图所示电路, $R_1=3\Omega$,
 $R_2=2\Omega$, $R_3=2\Omega$, $C=100\mu\text{F}$,
 $U_{s1}=6\text{V}$, $U_{s2}=10\text{V}$, 开关S原
 在2处已久, 在 $t=0$ 时开关S
 由2切换至1, 求 i_C 和 u_C 。



解 $u_C(0_-) = U_{s2} = 10\text{V}$

由换路定则 $u_C(0_+) = 10\text{V}$

$u_{Cp}(t) = U_{s1} = 6\text{V}$

$\tau = (R_1 + R_3)C = (3 + 2) \times 100 \times 10^{-6} = 5 \times 10^{-4} \text{ s}$

由三要素法

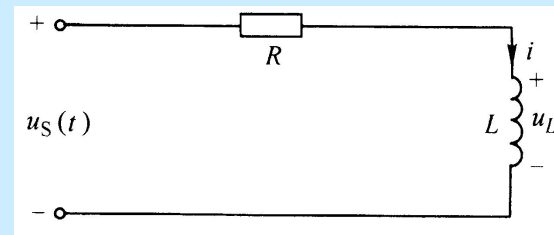
$$\begin{aligned}u_C(t) &= u_{Cp}(t) + [u_C(0_+) - u_{Cp}(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}} \\&= 6 + (10 - 6)e^{-\frac{t}{5 \times 10^{-4}}} \\&= (6 + 4e^{-2000t})V \\i_C(t) &= C \frac{du_C}{dt} = 100 \times 10^{-6} \times (-8000e^{-2000t}) \\&= -0.8e^{-2000t}A\end{aligned}$$

8-7 一阶电路的阶跃响应和冲激响应

阶跃响应

在单位阶跃函数激励下的零状态响应，称为单位阶跃响应。

如图所示RL电路，设电压 $u_s(t)=1\text{V}$ 是单位阶跃函数，即 $u_s(t)=1(t)$ ，相当于在 $t=0$ 时刻接通1 V的直流电压



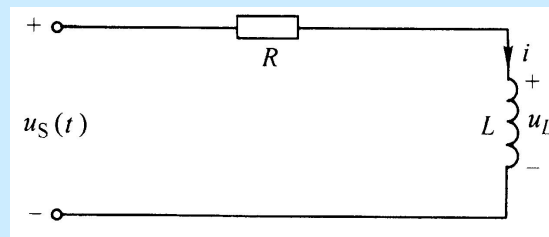
$$\begin{aligned} i(t) &= i_p(t) + [i(0_+) - i_p(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= \frac{1}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \cdot 1(t) \quad (8-7-1) \end{aligned}$$

倘若将图中的激励改变为延时的单位阶跃函数，即 $u_s(t) = 1(t - t_0)$

相当于在 $t=t_0$ 时刻接通1 V的直流电压，仍以 $t=0$ 时刻作为时间的起点，利用三要素公式得

$$\begin{aligned}
 i(t) &= i_p(t) + [i(t_{0+}) - i_p(t_{0+})]e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \\
 &= \frac{1}{R}[1 - e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}] \cdot 1(t-t_0) \quad (8-7-2)
 \end{aligned}$$

$$i(t) = \frac{1}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \cdot 1(t) \quad (8-7-1)$$



非时变电路

比较式(8-7-1)与式(8-7-2)，发现只要将式(8-7-1)中的时间变量 t 用延时的时间变量 $(t-t_0)$ 替代，就得到式(8-7-2)。

由此可见，该电路的激励延时 t_0 ，则响应也随之延时 t_0 ，这种电路称为非时变电路。若电路中的 R 、 L 、 C 、 M 均为常系数，这样的电路都是非时变电路。

例8-7-1在如图所示电路中，激励 $u_S(t)$ 是图8-7-2所示的矩形脉冲，求电路中产生的零状态响应 $i(t)$ 。

解：当 $t < 0$ 时， $i(0_-) = 0$ ，根据换路定则

$$i(0_+) = i(0_-) = 0$$

当 $0 < t < t_0$ 时

$$i_p(t) = i(\infty) = \frac{U}{R}$$

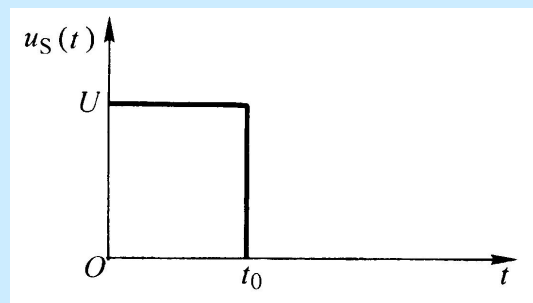
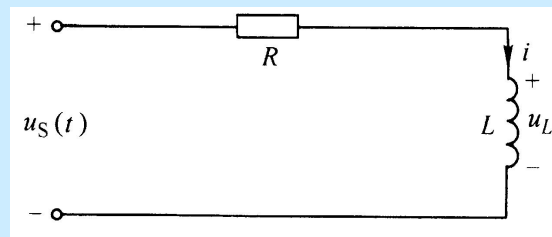
利用三要素公式的

$$\begin{aligned} i(t) &= i_p(t) + [i(0_+) - i_p(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= \frac{U}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \quad (8-7-3) \end{aligned}$$

当 $t > t_0$ 时，由上式可得

$$i(t_{0-}) = \frac{U}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t_0})$$

根据换路定则



$$i(t_{0+}) = i(t_{0-}) = \frac{U}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t_0})$$

$$i_p(t) = i(\infty) = 0$$

由三要素公式得

$$\begin{aligned} i(t) &= i_p(t) + [i(t_{0+}) - i_p(t_{0+})]e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \\ &= \frac{U}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t_0}) e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)} \quad (8-7-4) \end{aligned}$$

当 $t > t_0$ 时

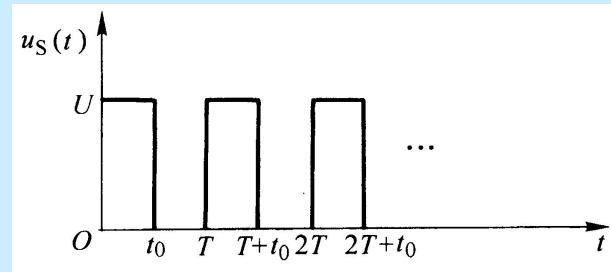
$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{U}{R} [1 - e^{-\frac{R}{L}t}] \cdot 1(t) - \frac{U}{R} [1 - e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}] \cdot 1(t-t_0) \\ &= -\frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)} \\ &= -\frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L}(t-t_0+t_0)} + \frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)} \\ &= \frac{U}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t_0}) e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)} \end{aligned}$$

以上求解方法是根据激励的作用对时间矩形分段求解得方法。考虑到激励为矩形脉冲，依据叠加定理， $u_s(t) = U[1(t) - 1(t-t_0)]$ ，因而根据式(8-7-1)、式(8-7-2)以及零状态线性性质，可直接得到

$$i(t) = \frac{U}{R} [1 - e^{-\frac{R}{L}t}] \cdot 1(t) - \frac{U}{R} [1 - e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}] \cdot 1(t-t_0) \quad (8-7-5)$$

式(8-7-5)按时间写成分段函数，即是式(8-7-3)和式(8-7-4)。

如图所示的周期性矩形脉冲电压序列 $u_s(t)$ 作用下RL串联电路的零状态响应电流 $i(t)$ 为



$$i(t) = \frac{U}{R} [1 - e^{-\frac{R}{L}t}] \cdot 1(t) - \frac{U}{R} [1 - e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}] \cdot 1(t-t_0) + \frac{U}{R} [1 - e^{-\frac{R}{L}(t-T)}] \cdot 1(t-T) - \frac{U}{R} [1 - e^{-\frac{R}{L}[t-(T+t_0)]}] \cdot 1[t-(T+t_0)] + \dots$$

冲激响应

单位冲激响应是指单位冲激函数 $\delta(t)$ 激励下电路的零状态响应，常以 $h(t)$ 表示。

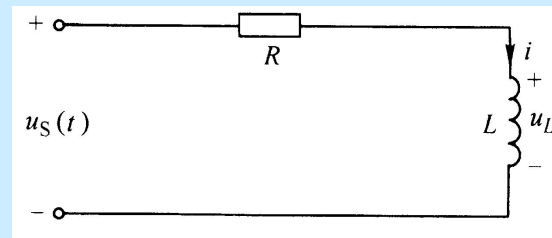
根据冲激函数的特点，冲激激励 $\delta(t)$ 可看做在 $t=0$ 时刻电路中有一个幅度为无限大而作用时间为无限小的电源。当 $t<0$ 时，显然没有激励作用；当 $t=0$ 时，无限大激励作用，使储能元件的初始储能从 0^- 到 0^+ 无限短时间里发生跳变，建立起 $t=0^+$ 时刻的初始储能；当 $t>0$ 后，显然也没有激励，电路依靠 $t=0^+$ 时刻的初始储能产生零输入响应。因此，求冲激响应的关键是求换路后瞬间的初始值。

$u_S(t) = \delta(t)$, 求电流 $i(t)$ 的冲激响应。

由KVL, $t = 0$ 时刻电路微分方程

$$L \frac{di}{dt} + Ri = \delta(t) \quad (8-7-7)$$

式(8-7-7)可知, $i(t)$ 本身发生跳变, 跳变后为有限值, 倘若: $i(t)$ 本身为无限值, 则 di/dt 中将含有 $\delta(t)$ 的一阶导数, 这样式(8-7-7)就不可能成立。



$$\int_{0-}^{0+} L \frac{di}{dt} dt + \int_{0-}^{0+} Ri dt = \int_{0-}^{0+} \delta(t) dt$$

$i(t)$ 为有限值, 上式第二项积分为零

$$L[i(0_+) - i(0_-)] + 0 = 1$$

由于 $i(0_-) = 0$, 所以

$$i(0_+) = \frac{1}{L}$$

这里电感电流不满足换路定则, $i(0_+) = \frac{1}{L} \neq i(0_-) = 0$

当 $t > 0$ 后, $\delta(t) = 0$, 式 (8-7-7) 变为齐次微分方程。直接由三要素公式

$$i(t) = i_p(t) + [i(0_+) - i_p(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

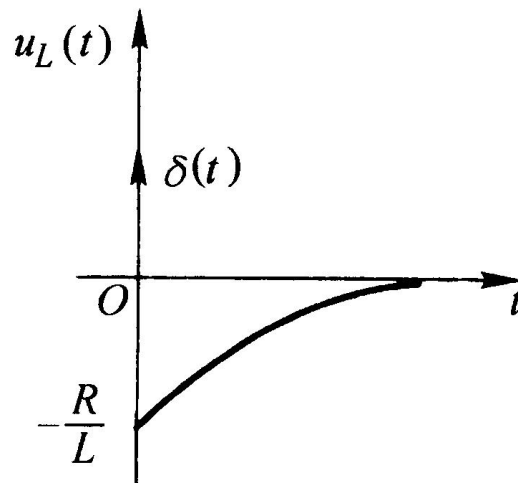
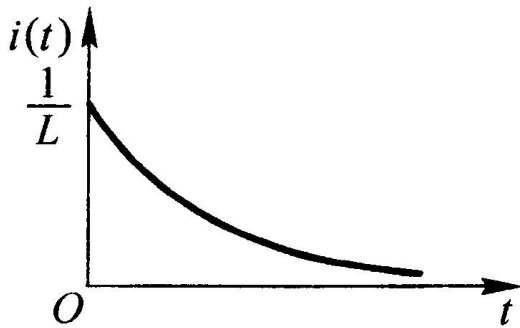
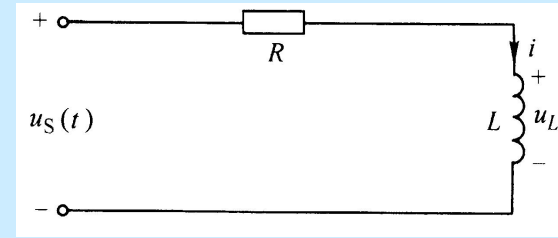
$$= \frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t} \quad t > 0$$

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t} \quad t > 0$$

最终得到RL电路的冲激响应

$$i(t) = \frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t} \cdot 1(t)$$

$$u_L(t) = \delta(t) - \frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t} \cdot 1(t)$$



$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt} \quad \delta(t) \text{ 的响应是 } h(t) \quad 1(t) \text{ 的响应是 } s(t)$$

单位冲激函数是单位阶跃函数的导数，因此在线性非时变电路中，单位冲激响应 $h(t)$ 亦是单位阶跃响应 $s(t)$ 的导数，即

$$\left. \begin{aligned} h(t) &= \frac{ds(t)}{dt} \\ s(t) &= \int_{-\infty}^t h(t) dt \end{aligned} \right\} \quad (8-7-10)$$

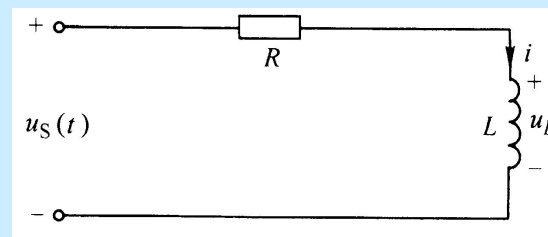
$$\delta(t) = \frac{d}{dt} 1(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} [1(t) - 1(t - \Delta)] = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left[\frac{1(t)}{\Delta} - \frac{1(t - \Delta)}{\Delta} \right]$$

冲激响应就是由阶跃函数 $\frac{1(t)}{\Delta}$ 所产生的响应 $\frac{s(t)}{\Delta}$ 与延时阶跃函数

$\frac{1(t-\Delta)}{\Delta}$ 所产生的响应 $\frac{s(t-\Delta)}{\Delta}$ 的代数差，取极限 $\Delta \rightarrow 0$ 得

$$h(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} [s(t) - s(t - \Delta)] = \frac{d}{dt} s(t)$$

根据式(8-7-10)，得到冲激响应的另一种求解方法。在上面的RL串联电路中，为求其冲激响应，可先求其阶跃响应，阶跃响应很容易由三要素公式得到。



$$s[i(t)] = i_p(t) + [i(0_+) - i_p(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$= \frac{1}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \cdot 1(t)$$

$$s[u_L(t)] = u_{Lp}(t) + [u_L(0_+) - u_{Lp}(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$= e^{-\frac{R}{L}t} \cdot 1(t)$$

冲激响应 $h[i(t)] = \frac{ds[i(t)]}{dt} = \frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t} \cdot 1(t)$

$$h[u_L(t)] = \frac{ds[u_L(t)]}{dt} = -\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t} \cdot 1(t) + \delta(t)$$

$$\frac{ds[i(t)]}{dt} = \frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t} \cdot 1(t) + \frac{1}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \cdot \frac{d1(t)}{dt}$$

$$= \frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t} \cdot 1(t) + \frac{1}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \cdot \delta(t)$$

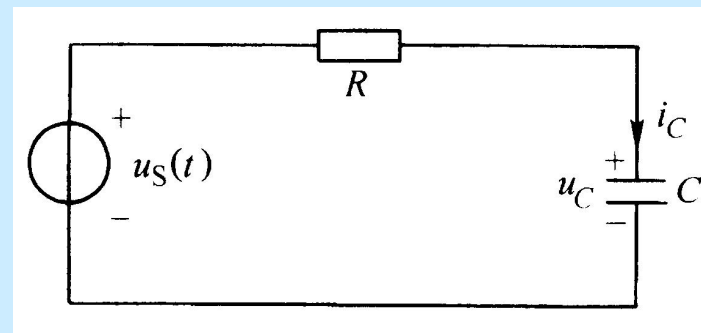
$$= \frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t} \cdot 1(t) + \frac{1}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}0}) \cdot \delta(t)$$

$$= \frac{1}{L}e^{-\frac{R}{L}t} \cdot 1(t)$$

$$f(t) \cdot \delta(t) = f(0) \cdot \delta(t)$$

RC串联电路的冲激响应

$$u_S(t) = \delta(t)$$



$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = \delta(t)$$

初值 $u_C(0_-) = 0$, 分析上式可得, $\frac{du_C}{dt}$ 中含有冲激, u_C 本身在 $t = 0$

时刻跳变但仍为有限值, 对上式两边从 0_- 到 0_+ 作积分

$$\int_{0_-}^{0_+} RC \frac{du_C}{dt} dt + \int_{0_-}^{0_+} u_C dt = \int_{0_-}^{0_+} \delta(t) dt$$

$$RC[u_C(0_+) - u_C(0_-)] = 1$$

$$u_C(0_+) = \frac{1}{RC}$$

此处电容电压也不满足换路定则, $u_C(0_+) = \frac{1}{RC} \neq u_C(0_-) = 0$ 。

当 $t > 0$ 后, $\delta(t) = 0$, RC串联电路相当于短接, 由三要素公式得

$$u_C(t) = u_{Cp}(t) + [u_C(0_+) - u_{Cp}(0_+)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_C(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \cdot 1(t)$$

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{R^2 C} e^{-\frac{t}{RC}} \cdot 1(t) + \frac{1}{R} \delta(t)$$

当然也可以先求阶跃响应，求导后得到相应的冲激响应，即

$$s[u_C(t)] = (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \cdot 1(t)$$

$$h[u_C(t)] = \frac{ds[u_C(t)]}{dt} = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \cdot 1(t)$$

$$s[i_C(t)] = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \cdot 1(t)$$

$$h[i_C(t)] = \frac{ds[i_C(t)]}{dt} = -\frac{1}{R^2 C} e^{-\frac{t}{RC}} \cdot 1(t) + \frac{1}{R} \delta(t)$$

