Analisi Vettoriale 2017

Def. Lo spazio di tutte le $n - uple$ di numeri reali forma uno **spazio vettoriale** di dimensione n su $\mathbb{R}$, indicato con $\mathbb{R}^n$. Su esso sono definite le operazioni di somma e prodotto:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots) \tag{1}$$
$$a\mathbf{x} = (ax_1, ax_2, \dots) \tag{2}$$

Def. Il **prodotto scalare** si definisce in questo modo: Ha la proprieta' simmetrica, ed è lineare rispetto al primo termine:

$$\langle \mathbf{x},\, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y},\, \mathbf{x} \rangle \tag{3}$$
$$\langle \mathbf{x} + \mathbf{a},\, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x},\, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{a},\, \mathbf{y} \rangle \tag{4}$$

Def. Una **norma** è una funzione che assegna ad ogni vettore dello spazio vettoriale, tranne lo zero, una lunghezza positiva. Segue le seguenti proprieta':

$$||x|| \geq 0 \tag{5}$$
$$||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \tag{6}$$
$$||\lambda x|| = |\lambda| ||x|| \tag{7}$$
$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \tag{8}$$

Alcune norme esemplari sono la norma 1: $||x||_1 = \sum |x_i|$ e la norma 2 (euclidea): $||x||_2 = \sqrt{\sum x_i^2}$

Def. La **distanza** è una qualsiasi funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ che soddisfa le seguenti proprieta':

$$d(x, y) \geq 0 \tag{9}$$
$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \tag{10}$$
$$d(x, y) = d(y, x) \tag{11}$$
$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \tag{12}$$

In realta' basta che sono verificate la seconda e la quarta per verificare anche la prima e la terza. Se una distanza segue queste proprieta':

$$d(x, y) = d(x + a, y + a) \tag{13}$$
$$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y) \tag{14}$$

Allora la funzione $||x|| := d(x, 0)$ è una norma.

Def. Uno **spazio metrico** è un insieme di elementi detti punti, nel quale è definita una funzione distanza, detta anche metrica.

Def. La disugualianza di **Cauchy-Schwartz** dice che il valore assoluto del prodotto scalare di due elementi è minore o uguale al prodotto delle loro norme: $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||$

Def. La successione $f_n(x)$ **converge** per $x \in E$ alla funzione $f(x)$ se $\forall x_0 \in E$ la successione numerica $f_n(x_0)$ converge a $f(x_0)$, cioè:

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon \quad \forall \epsilon > 0, \forall x_0 \in E \tag{15}$$

Def. La successione $f_n(x)$**converge uniformemente** alla funzione $f(x)$ se $\forall \epsilon > 0$ esiste un'unica soglia n_ϵ valida per tutti i punti x_0, cioè:

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon \quad \forall \epsilon > 0, \forall x_0 \in E, \forall n > n_\epsilon \tag{16}$$
$$\text{oppure: } \max_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \tag{17}$$

Th. Il teorema di **Bolzano-Weierstrass** afferma che in uno spazio euclideo finito dimensionale $\mathbb{R}^n$ ogni successione reale limitata ammette almeno una sottosuccessione convergente.

Th. Il teorema della continuita' del limite afferma che il limite $f(x)$ di una successione $f(x)$ di funzioni continue uniformemente convergenti in un intervallo I è una funzione continua in I.

Dimostrazione Prendiamo due punti $x_1 \simeq x_2$, e poichè stiamo parlando di funzioni continue, vale che $f(x_1) \simeq f(x_2)$.
Per la proprieta' triangolare si ha che:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f_n(x_2)| + |f_n(x_1) - f_n(x_2)| + +f_n(x_2) - f(x_2)|$$

Siccome il primo e il terzo modulo a secondo membro sono minori di ϵ:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq 2\epsilon + |f_n(x_1) - f_n(x_2)|$$

Quindi anche la funzione limite $f(x)$ possiede il requisito tipico delle funzioni continue di prendere *valori vicini su punti vicini*

Th. Passaggio al limite sotto il segno di integrale:

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E \lim_{n \to \infty} f_n(x) dx$$

Th. Passaggio al limite sotto il segno di derivata:

$$f'(x) = \lim_{n \to \infty} f'_n(x)$$

Def. Una successione x_n in uno spazio metrico (X, d) prende il nome di **successione di Cauchy** se esiste un N tale che:

$$d(x_m, x_n) < \epsilon \quad \forall m, n \geq N, \forall \epsilon > 0$$

In sostanza significa che al tendere all'infinito, lo spazio tra due elementi della successione tende ad annullarsi.

Def. Uno **spazio metrico completo** è uno spazio in cui tutte le successioni di Cauchy sono convergenti ad un elemento dello spazio. Viene anche chiamato **spazio di Banach**.

Osservazione Lo spazio metrico $\mathbb{Q}$ dei razionali con la metrica standard non è completo. Infatti, se prendo la successione i troncamenti di $\sqrt{2}$ definita come $x_n = \frac{\lfloor 10^n \sqrt{2} \rfloor}{10^n}$, è una successione di Cauchy $(1, 1.4, 1.41, \dots)$ che converge a $\sqrt{2}$, un numero non razionale.
Invece, un qualsiasi sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^n$ è completo.

Def. Una **funzione lipschitziana** è una funzione di variabile reale caratterizzata da *crescita limitata*, nel senso che il rapporto tra variazione di ordinata e variazione di ascissa non può mai superare un valore fissato definito come costante di Lipshitz.

Def. Si definisce **contrazione** una funzione $f : X \to X$ tale che esiste L che soddisfa:

$$d(f(x), f(y)) \leq L d(x, y), \quad L < 1$$

In altre parole, f è una contrazione se *contrae* la distanza tra due elementi x e y.

Osservazione Ogni contrazione è lipschitziana, e quindi anche continua!

Th. Il **teorema di Banach-Cacciopolli** dice che dato uno spazio metrico completo non vuoto (X, d), e una sua contrazione f, allora la mappa f ammette uno e un solo punto fisso $x^* \in X \mid x^* = f(x^*)$

Dimostrazione 1) Dimostriamo prima l'esistenza, definendo la successione ricorrente:

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \dots, x_n = f(x_{n-1})$$

Usiamo la contrazione per valutare la distanza tra due elementi successivi:

$$\begin{gathered} d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq L d(x_{n-1}, x_n) = \\ L d(f(x_{n-2}), f(x_{n-1})) \leq L^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq \dots \leq L^n d(x_0, x_1) \end{gathered} \tag{18}$$

Prendiamo due numeri $m, n \in \mathbb{N}, m < n$, e con la disuguaglianza triangolare:

$$\begin{gathered} d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_m) \leq \sum_{i=m}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq \\ \leq d(x_0, x_1) \sum_{i=m}^{n-1} = d(x_0, x_1) \sum_{i=0}^{n-m-1} L^{i+m} = L^m d(x_0, x_1) \sum_{i=0}^{n-m-1} L^i \end{gathered} \tag{19}$$

Siccome $0 < L < 1$, la serie geometrica converge:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_0, x_1) \frac{L^m}{1 - L} \to 0 \quad \text{per} \quad m \to 0$$

che soddisfa il criterio di Cauchy per le successioni. Dato che per ipotesi X è completo, sappiamo che la successione converge. Siccome f è un'applicazione continua:

$$x^* = \lim_{n \to \infty} x_n \quad \Rightarrow \quad f(x^*) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = x^*$$

Percio' abbiamo dimostrato che $f(x^*) = x^*$.
2) Passiamo ora all'unicita', che dimostriamo per assurdo dicendo che esiste un secondo punto $f(y^*) = y^*$:

$$d(x^*, y^*) \leq d(f(x^*), f(y^*)) \leq L d(x^*, y^*) \quad L \geq 1$$

che contraddice l'ipotesi della contrazione $L < 1$.