Analisi Vettoriale 2017

Def. Lo spazio di tutte le $n-uple$ di numeri reali forma uno **spazio vettoriale** di dimensione n su $\mathbb{R}$, indicato con $\mathbb{R}^n$. Su esso sono definite le operazioni di somma e prodotto:

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots) \tag{1}$$
$$a\mathbf{x} = (ax_1, ax_2, \dots) \tag{2}$$

Def. Il **prodotto scalare** si definisce in questo modo: Ha la proprieta' simmetrica, ed è lineare rispetto al primo termine:

$$\langle \mathbf{x},\, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y},\, \mathbf{x} \rangle \tag{3}$$
$$\langle \mathbf{x}+\mathbf{a},\, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x},\, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{a},\, \mathbf{y} \rangle \tag{4}$$

Def. Una **norma** è una funzione che assegna ad ogni vettore dello spazio vettoriale, tranne lo zero, una lunghezza positiva. Segue le seguenti proprieta':

$$||x|| \geq 0 \tag{5}$$
$$||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \tag{6}$$
$$||\lambda x|| = |\lambda| ||x|| \tag{7}$$
$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y|| \tag{8}$$

Alcune norme esemplari sono la norma 1: $||x||_1 = \sum |x_i|$ e la norma 2 (euclidea): $||x||_2 = \sqrt{\sum x_i^2}$

Osservazione Due norme $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$ si dicono equivalenti se $\exists c_1, c_2$ tali che $c||x||_1 \leq ||x||_2 \leq C||x||_1,\ \forall x \in V$

Osservazione In $\mathbb{R}^n$, tutte le norme sono equivalenti.

Def. La **distanza** è una qualsiasi funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ che soddisfa le seguenti proprieta':

$$d(x,y) \geq 0 \tag{9}$$
$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \tag{10}$$
$$d(x,y) = d(y,x) \tag{11}$$
$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \tag{12}$$

In realta' basta che sono verificate la seconda e la quarta per verificare anche la prima e la terza. Se una distanza segue queste proprieta':

$$d(x,y) = d(x+a, y+a) \tag{13}$$
$$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y) \tag{14}$$

Allora la funzione $||x|| := d(x,0)$ è una norma.

Osservazione La norma euclidea induce una distanza: $d(x,y) = ||\, x-y \,||_2$

Def. Uno **spazio metrico** è un insieme di elementi detti punti, nel quale è definita una funzione distanza, detta anche metrica.

Def. La disugualianza di **Cauchy-Schwartz** dice che il valore assoluto del prodotto scalare di due elementi è minore o uguale al prodotto delle loro norme: $|\langle \mathbf{x},\mathbf{y} \rangle| \leq ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||$

Def. La successione $f_n(x)$ **converge** per $x \in E$ alla funzione $f(x)$ se $\forall x_0 \in E$ la successione numerica $f_n(x_0)$ converge a $f(x_0)$, cioè:

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon \quad \forall \epsilon > 0, \forall x_0 \in E \tag{15}$$

Def. La successione $f_n(x)$**converge uniformemente** alla funzione $f(x)$ se $\forall \epsilon > 0$ esiste un'unica soglia n_ϵ valida per tutti i punti x_0, cioè:

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon \quad \forall \epsilon > 0, \forall x_0 \in E, \forall n > n_\epsilon \tag{16}$$
$$\text{oppure: } \max_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \tag{17}$$

Th. Il teorema di **Bolzano-Weierstrass** afferma che in uno spazio euclideo finito dimensionale $\mathbb{R}^n$ ogni successione reale limitata ammette almeno una sottosuccessione convergente.

Th. Il teorema della continuita' del limite afferma che il limite $f(x)$ di una successione $f(x)$ di funzioni continue uniformemente convergenti in un intervallo I è una funzione continua in I.

Dimostrazione Prendiamo due punti $x_1 \simeq x_2$, e poichè stiamo parlando di funzioni continue, vale che $f(x_1) \simeq f(x_2)$.
Per la proprieta' triangolare si ha che:
$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f_n(x_2)| + |f_n(x_1) - f_n(x_2)| + +f_n(x_2) - f(x_2)|$
Siccome il primo e il terzo modulo a secondo membro sono minori di ϵ:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq 2\epsilon + |f_n(x_1) - f_n(x_2)|$$

Quindi anche la funzione limite $f(x)$ possiede il requisito tipico delle funzioni continue di prendere *valori vicini su punti vicini*

Th. Passaggio al limite sotto il segno di integrale:
Sia f_n una successione di funzioni continue su $[a,b]$ tali che $f_n \rightrightarrows f$ (uniformemente), allora:

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

Dimostrazione Bisogna dimostrare che $\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_\epsilon$ tale che::

$$\left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| < \epsilon, \quad \forall n \geq n_\epsilon$$

Siccome le f_n sono continue, sono tutte integrabili. Inoltre, siccomeme $f_n \rightrightarrows f$, per il teorema di continuitá del limite, f è continua e quindi integrabile

$$\left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx \tag{18}$$
$$\leq \int_a^b \sup_{x\in[a,b]} |\, f_n(x) - f(x) \,|\, dx \tag{19}$$
$$\leq |\, b-a \,| \sup_{x\in[a,b]} |\, f_n(x) - f(x) \,| \quad \to 0 \tag{20}$$

Th. Passaggio al limite sotto il segno di derivata:

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

Dimostrazione Manca!

Def. Una successione x_n in uno spazio metrico (X,d) prende il nome di **successione di Cauchy** se esiste un N tale che:

$$d(x_m, x_n) < \epsilon \quad \forall m,n \geq N, \forall \epsilon > 0$$

In sostanza significa che al tendere all'infinito, lo spazio tra due elementi della successione tende ad annullarsi.

Def. Uno **spazio metrico completo** è uno spazio in cui tutte le successioni di Cauchy sono convergenti ad un elemento dello spazio. Viene anche chiamato **spazio di Banach**.

Osservazione Lo spazio metrico $\mathbb{Q}$ dei razionali con la metrica standard non è completo. Infatti, se prendo la successione i troncamenti di $\sqrt{2}$ definita come $x_n = \frac{\lfloor 10^n \sqrt{2} \rfloor}{10^n}$, è una successione di Cauchy $(1, 1.4, 1.41, \dots)$ che converge a $\sqrt{2}$, un numero non razionale.
Invece, un qualsiasi sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^n$ è completo.

Osservazione $\mathbb{R}^n$ é completo con la norma euclidea. Siccome poi in $\mathbb{R}^n$ tutte le norme sono equivalenti, qualunque spazio normato in $\mathbb{R}^n$ é completo.
Segue anche che tutti gli spazi metrici in $\mathbb{R}^n$ in cui la distanza proviene da una norma sono completi.

Def. Una **funzione lipschitziana** è una funzione di variabile reale caratterizzata da *crescita limitata*, nel senso che il rapporto tra variazione di ordinata e variazione di ascissa non può mai superare un valore fissato definito come costante di Lipshitz.

Def. Si definisce **contrazione** una funzione $f : X \to X$ tale che esiste L che soddisfa:

$$d(f(x), f(y)) \leq Ld(x,y), \quad L < 1$$

In altre parole, f è una contrazione se *contrae* la distanza tra due elementi x e y.

Osservazione Ogni contrazione è lipschitziana, e quindi anche continua!

Th. Il **teorema di Banach-Cacciopolli** dice che dato uno spazio metrico completo non vuoto (X,d), e una sua contrazione f, allora la mappa f ammette uno e un solo punto fisso $x^* \in X \mid x^* = f(x^*)$

Dimostrazione 1) Dimostriamo prima l'esistenza, definendo la successione ricorrente:

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \ldots, x_n = f(x_{n-1})$$

Usiamo la contrazione per valutare la distanza tra due elementi successivi:

$$\begin{gathered} d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq Ld(x_{n-1}, x_n) = \\ Ld(f(x_{n-2}), f(x_{n-1})) \leq L^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq \cdots \leq L^n d(x_0, x_1) \end{gathered} \tag{21}$$

Prendiamo due numeri $m, n \in \mathbb{N}, m < n$, e con la disugualianza triangolare:

$$\begin{gathered} d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_m) \leq \sum_{i=m}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq \\ \leq d(x_0, x_1) \sum_{i=m}^{n-1} = d(x_0, x_1) \sum_{i=0}^{n-m-1} L^{i+m} = L^m d(x_0, x_1) \sum_{i=0}^{n-m-1} L^i \end{gathered} \tag{22}$$

Siccome $0 < L < 1$, la serie geometrica converge:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_0, x_1) \frac{L^m}{1-L} \to 0 \quad \text{per} \quad m \to 0$$

che soddisfa il criterio di Cauchy per le successioni. Dato che per ipotesi X è completo, sappiamo che la successione converge. Siccome f è un'applicazione continua:

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \quad \Longrightarrow \quad f(x^*) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*$$

Percio' abbiamo dimostrato che $f(x^*) = x^*$.
2) Passiamo ora all'unicita', che dimostriamo per assurdo dicendo che esiste un secondo punto $f(y^*) = y^*$:

$$d(x^*, y^*) \leq d(f(x^*), f(y^*)) \leq Ld(x^*, y^*) \quad L \geq 1$$

che contraddice l'ipotesi della contrazione $L < 1$.

Def. La **serie** di funzioni $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ non é altro che la successione $\{s_n\}_k$ delle sue somme parziali.

Def. La **convergenza puntuale per le serie** di funzioni si verifica se $\forall x \in I, \forall \epsilon > 0, \exists n_{\epsilon,x} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| < \epsilon, \quad \forall n > n_\epsilon$$

Def. La **convergenza uniforme delle serie** di funzioni si verifica se $\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sup_{x\in I} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| < \epsilon$$

Osservazione La convergenza uniforme implica quella puntuale.

Def. La serie $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$ **converge assolutamente** in I se converge (puntualmente) in I la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \mid f_k(x) \mid < +\infty$

Osservazione La convergenza assoluta implica quella puntuale.
Questo é verificabile poichè per il teorema del confronto di serie, vale che $- \mid f_k(x) \mid \leq f_k(x) \leq \mid f_k(x) \mid$

Osservazione Se $f_k \geq 0$, allora la convergenza puntuale é uguale a quella assoluta.

Def. La serie f_k si dice **totalmente convergente** in I se $\forall k, \exists M_k \geq 0$ tale che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} M_k < \infty \quad \text{e} \quad \mid f_k(x) \mid \leq M_k, \quad \forall x \in I$$

Osservazione La serie é totalmente convergente se e solo se posso prendere $M_k = \sup_{x\in I} \mid f_k(x) \mid$, cosa che poi mi é molto utile fare quasi sempre.

Def. Il **criterio di Cauchy per le serie** dice che la successione $\{s_n\}_n$ converge se e solo se é di Cauchy.

Prop. Se una serie converge totalmente, allora converge anche uniformemente.

Dimostrazione Sia $M_k \geq 0$ tale che $M_k < +\infty$ e $\mid f_k(x) \mid \leq M_k \forall x \in I$.
Uso il criterio di Cauchy uniforme:

$$\begin{gathered} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \quad \leq \quad \mid f_{n+1}(x) \mid + \cdots + \mid f_{n+p}(x) \mid \quad \leq \\ \leq M_{n+1} + \cdots + M_{n+p} = \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k \end{gathered} \tag{23}$$

Ma dato che quest'ultima serie converge in $\mathbb{R}$ uso cauchy per serie numeriche: $\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon$ tale che $\sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \epsilon, \quad \forall n > n_\epsilon, \quad \forall p \in \mathbb{N}$

E quindi $\sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists n_\epsilon \text{t.c.} \quad \forall x \in I, \forall n > n_\epsilon, \forall p \in \mathbb{N}$

Th. Il **teorema della continuita' del limite per le serie di funzioni** dice che la somma di una serie di funzioni continue (cioè f_k continua $\forall k$) che converge uniformemente é una funzione continua. Questa somma é $s(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$

Th. Il **teorema di integrazione per serie** dice che se $f_k[a, b] \to \mathbb{R}$ continue, e se $s_n(x) \rightrightarrows s(x)$ in $[a, b]$, allora:

$$\int_a^b s(x)dx = \int_a^b \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^b f_k(x)dx$$

Th. Il **teorema di derivazione per serie** dice che data $f_k : I \to \mathbb{R}$, con $f_k \in C^1(I)$, e dato $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$, se $S_n' = \sum_{k=1}^n f_k'(x)_k$ converge uniformemente, e $\exists x_0 \in I$ tale che $S_n(x_0)$ converge (in $\mathbb{R}$), allora:

$$S_n(x) \rightrightarrows \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x), \quad \text{e} \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$$

Def. Si dice **serie di potenze** una serie di funzioni di questo genere:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k (x - x_0)^k$$

Assumiamo $x_0 = 0$, altrimenti basta fissare $y = (x - x_0)$

Osservazione Una serie di potenze converge sempre in $x = 0$.

Osservazione Se una serie di potenze converge in $\xi \in \mathbb{R}$, allora converge (assolutamente) in $|x| < |\xi|$.
Analogamente, se *non* converge in $\xi' \in \mathbb{R}$, allora non converge in $|x| > |\xi'|$.
L'insieme dei valori dove la serie converge prende il nome di **insieme di convergenza**.

Osservazione L'insieme di convergenza puó essere solo delle seguenti forme: $\{0\}, (-\rho, \rho), [-\rho, \rho), [-\rho, \rho], (-\rho, \rho], \mathbb{R}$, dove ρ é il raggio di convergenza

Osservazione La definizione formale del raggio di convergenza é questa: $\rho = \sup\{|x| \mid x \in A\}$, dove A é l'insieme di convergenza.

Def. Il **criterio della radice** dice che il raggio di convergenza $\rho \geq 0$ di una serie di potenze é uguale a $\frac{1}{l}$ dove

$$l = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

Osservazione Il limsup é il limite maggiore di tutte le possibili sottosuccessioni. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass, esiste sempre almeno una sottosuccessione convergente, e quindi esiste sempre il limsup.

Def. Il **criterio del rapporto** dice che data una serie di potenze, se esiste

$$l = \lim_{k\to+\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$$

allora il raggio di convergenza é $\rho = \frac{1}{l}$

Th. Il **teorema di Abel** dice che se una serie numerica $\sum_k^\infty a_k \rho^k$ con $\rho > 0$ converge, allora la serie di potenze $\sum_k^\infty a_k x^k$ converge uniformemente in $[-\rho + \delta, \rho]$, $\forall \delta > 0$.
Se invece $\rho < 0$, allora la serie converge uniformemente in $[-\rho, \rho - \delta]$, $\forall \delta > 0$.

Def. Data una serie di potenze, si dice **serie derivata** la serie:

$$\sum_k^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

Th. Il **raggio di una serie e della sua derivata** é lo stesso.

Dimostrazione Consideriamo $\sum k a_k k^k = x \sum k a_k x^{k-1}$. Il raggio di convergenza di queste due serie é lo stesso poiché la parte indipendente da x é la stessa. Confrontiamo $\sum k a_k x^k$ con $\sum a_k x^k$, usando il criterio della radice. Anche qui i due raggi di convergenza sono uguali poiché $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{k|a_k|}$

Th. Se una serie ha raggio di convergenza $\rho > 0$, allora sia la derivata che l'integrale della somma della serie hanno lo stesso raggio di convergenza ρ.