Analisi Vettoriale 2017

Def. Lo spazio di tutte le $n-uple$ di numeri reali forma uno **spazio vettoriale** di dimensione n su $\mathbb{R}$, indicato con $\mathbb{R}^n$. Su esso sono definite le operazioni di somma e prodotto:

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots)$$
$$a\mathbf{x} = (ax_1, ax_2, \dots)$$

Def. Il **prodotto scalare** si definisce in questo modo: Ha la proprieta' simmetrica, ed è lineare rispetto al primo termine:

$$\langle \mathbf{x},\, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{y},\, \mathbf{x}\rangle$$
$$\langle \mathbf{x}+\mathbf{a},\, \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x},\, \mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{a},\, \mathbf{y}\rangle$$

Def. Una **norma** è una funzione che assegna ad ogni vettore dello spazio vettoriale, tranne lo zero, una lunghezza positiva. Segue le seguenti proprieta':

$$||x|| \geq 0$$
$$||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
$$||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$$
$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$$

Alcune norme esemplari sono la norma 1: $||x||_1 = \sum |x_i|$

e la norma 2 (euclidea): $||x||_2 = \sqrt{\sum x_i^2}$

Osservazione Due norme $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$ si dicono equivalenti se $\exists c_1, c_2$ tali che $c||x||_1 \leq ||x||_2 \leq C||x||_1,\ \forall x \in V$

Osservazione In $\mathbb{R}^n$, tutte le norme sono equivalenti.

Def. La **distanza** è una qualsiasi funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ che soddisfa le seguenti proprieta':

$$d(x,y) \geq 0$$
$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$
$$d(x,y) = d(y,x)$$
$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

In realta' basta che sono verificate la seconda e la quarta per verificare anche la prima e la terza. Se una distanza segue queste proprieta':

$$d(x,y) = d(x+a, y+a)$$
$$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$$

Allora la funzione $||x|| := d(x,0)$ è una norma.

Osservazione La norma euclidea induce una distanza: $d(x,y) = ||\,x-y\,||_2$

Def. Uno **spazio metrico** è un insieme di elementi detti punti, nel quale è definita una funzione distanza, detta anche metrica.

Def. La disugualianza di **Cauchy-Schwartz** dice che il valore assoluto del prodotto scalare di due elementi è minore o uguale al prodotto delle loro norme: $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| \leq ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||$

Def. Una successione x_n in uno spazio metrico (X,d) prende il nome di **successione di Cauchy** se esiste un N tale che:

$$d(x_m, x_n) < \epsilon \quad \forall m,n \geq N, \forall \epsilon > 0$$

In sostanza significa che al tendere all'infinito, lo spazio tra due elementi della successione tende ad annullarsi.

Def. Uno **spazio metrico completo** è uno spazio in cui tutte le successioni di Cauchy sono convergenti ad un elemento dello spazio. Viene anche chiamato **spazio di Banach**.

Osservazione Lo spazio metrico $\mathbb{Q}$ dei razionali con la metrica standard non è completo. Infatti, se prendo la successione i troncamenti di $\sqrt{2}$ definita come $x_n = \frac{\lfloor 10^n \sqrt{2} \rfloor}{10^n}$, è una successione di Cauchy $(1, 1.4, 1.41, \dots)$ che converge a $\sqrt{2}$, un numero non razionale.
Invece, un qualsiasi sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^n$ è completo.

Osservazione $\mathbb{R}^n$ é completo con la norma euclidea. Siccome poi in $\mathbb{R}^n$ tutte le norme sono equivalenti, qualunque spazio normato in $\mathbb{R}^n$ é completo.
Segue anche che tutti gli spazi metrici in $\mathbb{R}^n$ in cui la distanza proviene da una norma sono completi.

Def. Una **funzione lipschitziana** è una funzione di variabile reale caratterizzata da *crescita limitata*, nel senso che il rapporto tra variazione di ordinata e variazione di ascissa non può mai superare un valore fissato definito come costante di Lipshitz.

Def. Si definisce **contrazione** una funzione $f : X \to X$ tale che esiste L che soddisfa:

$$d(f(x), f(y)) \leq L d(x,y), \quad L < 1$$

In altre parole, f è una contrazione se *contrae* la distanza tra due elementi x e y.

Osservazione Ogni contrazione è lipschitziana, e quindi anche continua!

Th. Il **teorema di Banach-Cacciopolli** dice che dato uno spazio metrico completo non vuoto (X,d), e una sua contrazione f, allora la mappa f ammette uno e un solo punto fisso $x^* \in X \mid x^* = f(x^*)$

Dimostrazione 1) Dimostriamo prima l'esistenza, definendo la successione ricorrente:

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \dots, x_n = f(x_{n-1})$$

Usiamo la contrazione per valutare la distanza tra due elementi successivi:

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq Ld(x_{n-1}, x_n) =$$
$$Ld(f(x_{n-2}), f(x_{n-1})) \leq L^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq \dots \leq L^n d(x_0, x_1)$$

Prendiamo due numeri $m, n \in \mathbb{N}, m < n$, e con la disugualianza triangolare:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_m) \leq \sum_{i=m}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq$$
$$\leq d(x_0, x_1) \sum_{i=m}^{n-1} = d(x_0, x_1) \sum_{i=0}^{n-m-1} L^{i+m} = L^m d(x_0, x_1) \sum_{i=0}^{n-m-1} L^i$$

Siccome $0 < L < 1$, la serie geometrica converge:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_0, x_1) \frac{L^m}{1-L} \to 0 \quad \text{per} \quad m \to 0$$

che soddisfa il criterio di Cauchy per le successioni. Dato che per ipotesi X è completo, sappiamo che la successione converge. Siccome f è un'applicazione continua:

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \quad \Longrightarrow \quad f(x^*) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*$$

Percio' abbiamo dimostrato che $f(x^*) = x^*$.
2) Passiamo ora all'unicita', che dimostriamo per assurdo dicendo che esiste un secondo punto $f(y^*) = y^*$:

$$d(x^*, y^*) \leq d(f(x^*), f(y^*)) \leq Ld(x^*, y^*) \quad L \geq 1$$

che contraddice l'ipotesi della contrazione $L < 1$.

Def. La successione $f_n(x)$ **converge** per $x \in E$ alla funzione $f(x)$ se $\forall x_0 \in E$ la successione numerica $f_n(x_0)$ converge a $f(x_0)$, cioè:

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon \quad \forall \epsilon > 0, \forall x_0 \in E,\ \forall n > n_\epsilon$$
$$\text{oppure } \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in E$$

Def. La successione $f_n(x)$**converge uniformemente** alla funzione $f(x)$ se $\forall \epsilon > 0$ esiste un'unica soglia n_ϵ valida per tutti i punti x_0, cioè:

$$\forall n > n_\epsilon,\ |f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon \quad \forall \epsilon > 0, \forall x_0 \in E,$$
$$\text{oppure: } \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Osservazione La convergenza uniforme implica quella puntuale, ma non vale il viceversa.

Th. Il teorema di **Bolzano-Weierstrass** afferma che in uno spazio euclideo finito dimensionale $\mathbb{R}^n$ ogni successione reale limitata ammette almeno una sottosuccessione convergente.

Th. Il **teorema della continuita' per le successioni** afferma che il limite $f(x)$ di una successione $f(x)$ di funzioni continue uniformemente convergenti in un intervallo I è una funzione continua in I.

Dimostrazione Prendiamo due punti $x_1 \simeq x_2$, e poichè stiamo parlando di funzioni continue, vale che $f(x_1) \simeq f(x_2)$.
Per la proprieta' triangolare si ha che:
$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f_n(x_2)| + |f_n(x_1) - f_n(x_2)| + +f_n(x_2) - f(x_2)|$
Siccome il primo e il terzo modulo a secondo membro sono minori di ϵ:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq 2\epsilon + |f_n(x_1) - f_n(x_2)|$$

Quindi anche la funzione limite $f(x)$ possiede il requisito tipico delle funzioni continue di prendere *valori vicini su punti vicini*

Th. Il **Teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale** dice che sia f_n una successione di funzioni continue su $[a,b]$ tali che $f_n \rightrightarrows f$ (f_n converge uniformemente a f), allora:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

Dimostrazione Bisogna dimostrare che $\forall\epsilon > 0, \quad \exists n_\epsilon$ tale che::

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| < \epsilon, \quad \forall n \geq n_\epsilon$$

Siccome le f_n sono continue, sono tutte integrabili. Inoltre, siccomeme $f_n \rightrightarrows f$, per il teorema di continuitá del limite, f è continua e quindi integrabile

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx$$
$$\leq \int_a^b \sup_{x\in[a,b]} \mid f_n(x) - f(x) \mid dx$$
$$\leq \mid b-a \mid \sup_{x\in[a,b]} \mid f_n(x) - f(x) \mid \quad \to 0$$

Th. Il **Teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata** dice che data $\{f_n(x)\} \in C^1([a,b])$, se esiste $x_0 \in [a,b]$ tale che $f_n(x_0) \to l$, e se $f_n' \rightrightarrows g$ in $[a,b]$, allora si ha che la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente a f in $[a,b]$, e inoltre:

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

Dimostrazione Manca!

Def. La **serie** di funzioni $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ non é altro che la successione $\{s_n\}_k$ delle sue somme parziali.

Def. La **convergenza puntuale per le serie** di funzioni si verifica se $\forall x \in I, \forall\epsilon > 0, \exists n_{\epsilon,x} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| < \epsilon, \quad \forall n > n_\epsilon$$

cioé se la successione $\{s_n\}$ delle somme parziali converge.

Def. La **convergenza uniforme delle serie** di funzioni si verifica se $\forall\epsilon > 0, \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sup_{x\in I}\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| < \epsilon$$

Osservazione La convergenza uniforme implica quella puntuale.

Osservazione Se voglio dimostrare che una serie non converge, basta che trovo un n per cui il sup non é 0:

$$\sup_{x\in I} \mid f_{n+1}(x) \mid \not\to 0$$

Osservazione Se ho una serie della forma

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k f_k(x), \quad \text{con} \quad f_k(x) \geq 0, f_{k+1}(x) \geq f_k(x), f_k(x) \to 0$$

allora converge puntualmente $\forall x$ per Leibniz.
Inoltre, se ho che $f_k(x) \rightrightarrows 0$, allora converge anche uniformemente, poiché

$$\left|\sum_{k=n+1} (-1)^k f_k(x)\right| \leq \sup \mid f_{n+1}(x) \mid \to 0$$

Def. La serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$ **converge assolutamente** in I se converge (puntualmente) in I la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mid f_k(x) \mid$ converge.

Osservazione La convergenza assoluta implica quella puntuale.
Questo é verificabile poichè per il teorema del confronto di serie, vale che $- \mid f_k(x) \mid \leq f_k(x) \leq \mid f_k(x) \mid$

Osservazione Se $f_k \geq 0$, allora la convergenza puntuale é uguale a quella assoluta.

Def. La serie f_k si dice **totalmente convergente** in I se esiste una successione di numeri reali non negativi M_k tale che:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} M_k < \infty \quad \text{e} \quad \mid f_k(x) \mid \leq M_k, \quad \forall x \in I$$

Osservazione La serie é totalmente convergente se e solo se posso prendere $M_k = \sup_{x\in I} \mid f_k(x) \mid$, cosa che é molto utile fare quasi sempre.

Osservazione Si dice "totalmente convergente" perché scegliendo una successione numerica M_k non dipendente da x, la serie converge "per tutti gli x".

Def. Il **criterio di Cauchy per le serie** dice che la successione $\{s_n\}_n$ converge se e solo se é di Cauchy.

Prop. Se una serie converge totalmente, allora converge anche uniformemente.

Dimostrazione Sia $M_k \geq 0$ tale che $M_k < +\infty$ e $\mid f_k(x) \mid \leq M_k \forall x \in I$.
Uso il criterio di Cauchy uniforme:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \quad \leq \quad \mid f_{n+1}(x) \mid + \cdots + \mid f_{n+p}(x) \mid \quad \leq$$
$$\leq M_{n+1} + \cdots + M_{n+p} = \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k$$

Ma dato che quest'ultima serie converge in $\mathbb{R}$ uso cauchy per serie numeriche: $\forall\epsilon > 0, \exists n_\epsilon$ tale che $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \epsilon, \quad \forall n > n_\epsilon, \quad \forall p \in \mathbb{N}$

E quindi $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \epsilon, \quad \forall\epsilon > 0, \quad \exists n_\epsilon \text{t.c.} \quad \forall x \in I, \forall n > n_\epsilon, \forall p \in \mathbb{N}$

Th. Il **teorema della continuita' del limite per le serie di funzioni** dice che la somma di una serie di funzioni continue (cioè f_k continua $\forall k$) che converge uniformemente é una funzione continua. Questa somma é $s(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$

Th. Il **teorema di integrazione per serie** dice che se $f_k[a,b] \to \mathbb{R}$ continue, e se $s_n(x) \rightrightarrows s(x)$ in $[a,b]$, allora:

$$\int_a^b s(x)dx = \int_a^b \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)dx = \sum_{k=1}^{+\infty}\int_a^b f_k(x)dx$$

Th. Il **teorema di derivazione per serie** dice che data $f_k : I \to \mathbb{R}$, con $f_k \in C^1(I)$, e dato $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, se $S_n' = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x)_k$ converge uniformemente, e $\exists x_0 \in I$ tale che $S_n(x_0)$ converge (in $\mathbb{R}$), allora:

$$S_n(x) \rightrightarrows \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x), \quad \text{e} \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$$

Def. Si dice **serie di potenze** una serie di funzioni di questo genere:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k(x-x_0)^k$$

Assumiamo $x_0 = 0$, altrimenti basta fissare $y = (x - x_0)$

Osservazione Una serie di potenze converge sempre in $x = 0$.

Osservazione Se una serie di potenze converge in $\xi \in \mathbb{R}$, allora converge (assolutamente) in $|x| < |\xi|$.
Analogamente, se *non* converge in $\xi' \in \mathbb{R}$, allora non converge in $|x| > |\xi'|$.
L'insieme dei valori dove la serie converge prende il nome di **insieme di convergenza**.

Osservazione L'insieme di convergenza puó essere solo delle seguenti forme:

$$\{0\}, \quad (-\rho,\rho), \quad [-\rho,\rho), \quad [-\rho,\rho], \quad (-\rho,\rho], \quad \mathbb{R}$$

dove ρ é il raggio di convergenza

Osservazione La definizione formale del raggio di convergenza é questa: $\rho = \sup\{|x| \mid x \in A\}$, dove A é l'insieme di convergenza.

Osservazione Pur conoscendo il raggio di convergenza, non sappiamo come si comporta la serie agli estremi dell'insieme di convergenza. Si devono verificare manualmente.

Osservazione La serie converge in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto nell'insieme di convergenza: $[a,b] \subset (-\rho,\rho)$.

Def. Il **criterio della radice** dice che il raggio di convergenza $\rho \geq 0$ di una serie di potenze é uguale a $\frac{1}{l}$ dove

$$l = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

Osservazione Il limsup é il limite maggiore di tutte le possibili sottosuccessioni. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass, esiste sempre almeno una sottosuccessione convergente, e quindi esiste sempre il limsup.

Def. Il **criterio del rapporto** dice che data una serie di potenze, se esiste

$$l = \lim_{k\to+\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$$

allora il raggio di convergenza é $\rho = \frac{1}{l}$

Th. Il **teorema di Abel** dice che se una serie numerica $\sum_k^\infty a_k\rho^k$ con $\rho > 0$ converge, allora la serie di potenze $\sum_k^\infty a_k x^k$ converge uniformemente in $[-\rho+\delta,\rho]$, $\forall\delta > 0$.
Se invece $\rho < 0$, allora la serie converge uniformemente in $[-\rho,\rho-\delta]$, $\forall\delta > 0$.

Osservazione In altre parole questo teorema afferma che se una serie converge in $(-\rho,\rho)$, ma converge anche nell'estremo ρ, allora la somma della serie puó essere calcolata anche in quell'estremo con il limite $x \to \rho$.

Def. Data una serie di potenze, si dice **serie derivata** la serie:

$$\sum_k^\infty k a_k x^{k-1}$$

Th. Il **raggio di una serie e della sua derivata** é lo stesso.

Dimostrazione Consideriamo $\sum k a_k k^k = x\sum k a_k x^{k-1}$. Il raggio di convergenza di queste due serie é lo stesso poiché la parte indipendente da x é la stessa. Confrontiamo $\sum k a_k x^k$ con $\sum a_k x^k$, usando il criterio della radice. Anche qui i due raggi di convergenza sono uguali poiché $\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = \limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{k|a_k|}$

Th. Se una serie ha raggio di convergenza $\rho > 0$, allora sia la derivata che l'integrale della somma della serie hanno lo stesso raggio di convergenza ρ.

Def. Una funzione $f: I \to \mathbb{R}; \quad f \in C^\infty(I)$, si dice **sviluppabile in serie di Taylor** se é possibile scriverla nella forma

$$f(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k(x-x_0)^k$$

con x_0 fissato e $x \in (x_0-\rho, x_0+\rho)$, per $\rho > 0$.
Se in particolare $x_0 = 0$, allora prende il nome di **serie di MacLaurin**.

Osservazione Calcolando le derivate in x_0 otteniamo i termini a_k:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad \forall k > 0$$

Osservazione Esempi di funzioni sviluppabili in Taylor:

$$log(1+x) = \sum\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} \qquad \frac{1}{1+x} = \sum x^k, \quad x \in (-1,1)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum x^{2k} \qquad arctan(x) = \sum\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$\frac{-1}{(1-x)^{-2}} = \sum k x^{k-1} \qquad e^x = \sum\frac{x^n}{n!}$$

$$sin(x) = \sum\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} \qquad cos(x) = \sum\frac{(-1)^n 2^n}{(2n)!}$$

Notare che l'ultima é stata ottenuta integrando la terza.
In linea di massima, ognuna di queste puó essere derivata/integrata a piacere.

Th. Il **teorema di sviluppabilitá in serie di Taylor** dice che se f é dotata delle derivate di ogni ordine e se $\exists M, L > 0$ tali che

$$\left|f^{(k)}(x)\right| \le M\cdot L^k, \quad \forall k = 0,1,2\ldots, \quad \forall x \in (a,b)$$

allora f é sviluppabile in x_0 per ogni $x_0 \in (a,b)$, per $x \in (a,b)$.

Dimostrazione Vogliamo dimostrare che il resto dello sviluppo di Taylor tende a 0:

$$R(n) = f(x) - \sum_{k=0}^n\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \quad \longrightarrow 0, \quad n \to \infty$$

Ora scriviamolo in forma di Lagrange:

$$R_n(x) = \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad \xi \in (x, x_0)$$

Siccome il valore massimo di $(x-x_0)$ é in $(b-a)$:

$$|R_n(x)| \le \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \le \frac{ML^{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \longrightarrow 0$$

Def. Una **curva** é un'applicazione continua $\varphi : I \to \mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$. L'immagine della curva, anche detto **sostegno**, é l'insieme dei punti per cui passa la curva, definito come $\{\varphi(t) \in \mathbb{R} | t \in I\}$.

Osservazione φ é continua se $t \to \varphi_i(t)$ é continua $\forall i = 1,2,3,\ldots$

Osservazione A uno stesso sostegno possono appartenere varie curve.

Def. Una curva di dice **semplice** se non si auto interseca, cioé se $\varphi : \mathring{I} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é iniettiva, dove $\mathring{I}$ é I senza estremi.

Def. Una curva è derivabile se ogni componente è derivabile. Il vettore $\varphi'(t) = (\varphi_1'(t), \varphi_2'(t), \ldots, \varphi_d'(t))$ è detto **vettore velocitá.**

Def. Una curva si dice **regolare** se $\varphi'(t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathring{I}$

Def. Il versore $T(t) = \dfrac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|}$ è detto **tangente**.

Def. La **lunghezza di una curva** è definita nel seguente modo:

$$L(\varphi) = \sup\begin{cases} L(\pi) \mid \pi \text{ è una poligonale inscritta} \\ \text{con punti } t_0 < t_1 < \cdots < t_k < \infty \end{cases}$$

Dove la poligonale è una curva fatta di segmenti, e una poligonale inscritta è una poligonale che passa per tutti i punti di una data curva (con segmenti infinitesimali)

Th. Se $\varphi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ è una curva regolare, allora:

$$L(\varphi) = \int_a^b \mid \varphi'(t) \mid dt < +\infty$$

Osservazione Il teorema vale anche se la curva è regolare solo a tratti. In questo caso dovró spezzare l'integrale nei vari tratti.

Osservazione La lunghezza della curva non è la lunghezza del sostegno. Infatti, una curva potrebbe fare vari giri.

Def. Le curve **cartesiane** hanno il sostegno che è una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Quindi sono curve definite in questo modo: $\varnothing(t) = (t, f(t))$.

Osservazione Tutte le curve cartesiane sono semplici, in quanto essendo f una funzione, non puó avere due risultati diversi sulla stessa x.

Osservazione Se $f \in C^1$, allora $\varnothing$ è regolare: $\varnothing'(t) = (1, f'(t)) \neq 0$.

Osservazione La lunghezza delle curve cartesiane si calcola come:

$$L(\varnothing) = \int_a^b\sqrt{1+(f'(t))^2}dt$$

Def. Le curve **polari** sono quelle curve che si possono esprimere come funzione dell'angolo con l'origine $\rho(\theta)\colon \;\to (0,+\infty)$. Quindi la curva è definita come: $\varnothing(\theta) = (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta)$

Osservazione Tutte le curve polari sono regolari, in quanto l'angolo cambia sempre.

Osservazione La lunghezza delle curve polari si calcola come:

$$L(\varnothing) = \int_a^b\sqrt{\rho(\theta)^2+\rho'(\theta)^2}d\theta$$

Def. Si definiscono le seguenti **funzioni iperboliche**:

$$\cosh = \frac{e^t+e^{-t}}{2}, \quad \text{pari}, \qquad \text{Immagine: } [1,+\infty]$$

$$\sinh = \frac{e^t-e^{-t}}{2}, \quad \text{dispari}, \qquad \text{Immagine: } [-\infty,+\infty]$$

Si chiamano iperbolici perché se applico la seguente mappatura:

$$\cos \to \cosh \qquad \sin \to \sinh$$

$$\cos^2 \to \cosh^2 \qquad \sin^2 \to -\sinh^2$$

Tutte le identitá trigonometriche sono ancora verificate.

Osservazione

$$\cosh' = \sinh \qquad \sinh' = \cosh$$

Osservazione

$$arccosh(x) = log(x+\sqrt{x^2-1})$$
$$arcsinh(x) = log(x+\sqrt{x^2+1})$$

Def. Due curve $\varnothing\colon [a,b] \to \mathbb{R}^d$ e $\varphi\colon [c,d] \to \mathbb{R}^d$ si dicono **equivalenti** se esiste una funzione $h\colon [c,d] \to [a,b]$ continua e univoca tale che $\varnothing(h(t)) = \varphi(t), \quad \forall t \in [c,d]$.

Th. Due curve equivalenti hanno la stessa lunghezza.

Def. $\underline{P}$ é **punto interno** di E se $\exists r > 0$ t.c. $B(\underline{P}, r) \subseteq E$.
$\underline{P}$ é **punto esterno** di E se $\underline{P}$ é interno a E^c.
$\underline{P}$ é **punto di frontiera** se $\forall r > 0, B(\underline{P})$ contiene sia punti di E che del complementare.
$\underline{P}$ é **punto di accumulazione** per E se $\forall r > 0, (B(\underline{P}, r)\backslash\{\underline{P}\} \cap E \neq \emptyset$.
Ogni punto di E che non é di accumulazione si dice **punto isolato**.

Def. Un insieme E si dice **aperto** se ogni suo punto é interno.
Un insieme E si dice **chiuso** se il suo complementare é aperto.
Un insieme E é **limitato** se $\exists r > 0$ t.c. $E \subseteq B(\underline{0}, r)$.
La **chiusura** di un insieme E é il piú piccolo insieme chiuso E' tale che $E \subseteq E'$.

Osservazione L'unione e l'intersezione di due insiemi aperti é un insieme aperto. L'unione e l'intersezione di due insiemi chiusi é un insieme chiuso.

Funzioni a piú variabili

Def. Tutte le funzioni del tipo $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^d$ si chiamano **vettoriali** se $n > 1$, e **a piú variabili** se $d > 1$.

Def. Sia $\underline{x_0} \in A \subseteq \mathbb{R}^n$, con $\underline{x_0}$ punto di accumulazione di A. Sia $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^d$, e sia $\underline{L} = (L_1, \dots, L_d) \in \mathbb{R}^d$. Definiamo:

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} f(\underline{x}) = \underline{L} \quad \text{se}$$

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che se $|\underline{x} - \underline{x_0}| < \delta$ allora $|f(\underline{x}) - \underline{L}| < \epsilon$

Osservazione $f(\underline{x}) \to \underline{L}$ se e solo se $f_i(x) \to L_i, \quad \forall i = 1, \dots, d$
Manca la dimostrazione!

Osservazione Per dimostrare che non esiste il limite devo trovare due successioni $\underline{P_n} \to c$ e $\underline{Q_n} \to c$ tali che $f(\underline{P_n}) \to \underline{l}$ e $f(\underline{Q_n}) \to \underline{l'}$. Se $\underline{l} \neq \underline{l'}$, allora il limite non esiste.

Osservazione Se bisogna calcolare un limite per $(x, y) \to (x_0, y_0)$ invece che $(x, y) \to (0, 0)$, basta che impongo $x' = x - x_0, y' = y - y_0$, e scrivo la funzione $f(x, y) = f'(x', y')$. Poi calcolo il limite di f' per $(x', y') \to (0, 0)$.

Osservazione Per calcolare il limite di una funzione a piú variabili spesso aiuta molto imporre $y = x^\beta$, con il giusto β.

Osservazione Quando si deve calcolare anche il limite in base a un dato valore α, attenzione a non fare maggiorazioni improprie perché si potrebbero perdere alcuni valori di α.

Osservazione Alcune maggiorazioni utili:

$$2xy \leq x^2 + y^2 \quad (\text{poiché}(x - y)^2 \geq 0)$$

Osservazione Alcuni limiti notevoli utili:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1 - \cos x(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Osservazione Se il limite non si riesce a tirare fuori da una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$, allora si puó usare l'Hopital (vale anche in $\mathbb{R}^n$

Def. In $\mathbb{R}^2$, si definisce il limite a infinito:

$$\lim_{|(x,y)| \to \infty} f(x, y) = l \quad \text{se}$$

$\forall \epsilon > 0, \exists R > 0$ tale che se $|(x, y)| \geq R$ allora $|f(x, y) - l| < \epsilon$

Def. In $\mathbb{R}^2$, se il limite a un punto (x_0, y_0) tende a $\pm\infty$:

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y) = \pm\infty \quad \text{se}$$

$\forall M > 0, \exists \delta > 0$ tale che se $|(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta$ allora $f(x, y) - l > M$ (oppure $< -M$ nel caso di $-\infty$)

Def. In $\mathbb{R}^2$, se il limite a $\pm\infty$ tende a $\pm\infty$:

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y) = \pm\infty \quad \text{se}$$

$\forall M > 0, \exists N > 0$ tale che se $|(x, y) - (x_0, y_0)| > N$ allora $f(x, y) - l > M$ (oppure $< -M$ nel caso di $-\infty$)

Def. Un punto (x, y) puó essere espresso anche in base a un altro (x_0, y_0) attraverso le coordinate polari. In questo caso, si ottiene::

$$x = x_0 + \rho \cos\theta$$
$$y = y_0 + \rho \sin\theta$$

Quindi $(x, y) \to (x_0, y_0) \equiv |(x - x_0, y - y_0)| \to 0 \equiv \rho \to 0$.

Osservazione Attenzione! Non si fissare θ e poi ottenere il limite, poiché il limite deve essere costante per ogni θ!
Se il limite non é costante, é molto probabile che non esiste.

Osservazione Nelle coordinate polari, ρ é sempre positivo, dato che rappresenta la distanza dall'origine.

Def. Sia $f :\in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ e $\underline{c}$ punto di accumulazione in A (con $\underline{c} \in A$. Si dice che f é **continua** in A se:

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che se $|\underline{x} - \underline{c}| < \delta$ allora $|f(\underline{x}) - f(\underline{c})|_{\mathbb{R}^d} < \epsilon$

Osservazione Come per i limiti, vale che $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ é continua in $\underline{c} \in A$ se e solo se $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é continua $\forall i = 1, 2, \dots d$, cioé se sono continue tutte le sue componenti.

Osservazione Data $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$, con A aperto /chiuso, si ha che se f é continua, allora anche f^{-1} é aperto /chiuso, rispettivamente.

Def. Data $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $\underline{x_0}$ punto interno, e dato $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, con $|v| = 1$, allora la **derivata direzionale** di f in x_0 verso $\underline{v}$ é il seguente limite (se esiste):

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{x_0} + t\underline{v}) - f(\underline{x_0})}{t} \equiv D_{\underline{v}} f(x_0) \equiv \frac{df}{d\underline{v}}(\underline{x_0}) \equiv d_{\underline{v}} f(\underline{x_0})$$

Osservazione Potrebbe essere comodo scrivere $\underline{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$.

Osservazione Ponendo $\varphi(t) = f(\underline{x_0} + t\underline{v})$, si ottiene $D_{\underline{v}} f(x_0) = \varphi'(0)$.

Def. Prende il nome di **derivata parziale** di f in x_0 rispetto alla variabile x_i la derivata direzionale usando $\underline{v} = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0, 0)$, con l'1 all'i-esima posizione.

Def. Se nel punto x_0 esistono tutte le derivate parziali (quindi f é derivabile lungo tutti gli assi), allora si dice che f é **derivabile** in x_0. Se risulta derivabile per $\forall x_0 \in A$, allora si dice derivabile in A.

Osservazione Per verificare l'esistenza delle derivate parziali, bisogna usare il limite del rapporto incrementale.

Def. Il **gradiente** é il vettore formato dalle derivate parziali:

$$Df(x_0) = \nabla f(x_0) = (\frac{df}{d\underline{x_0}} f(x_0), \frac{df}{d\underline{x_1}} f(x_0), \dots, \frac{df}{d\underline{x_n}} f(x_0))$$

Def. Data $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice $f \in C^1$ in x_0 se é derivabile e ∇f é continuo in x_0 .

Osservazione Ricordarsi che il gradiente é continuo se e solo se tutte le derivate parziali sono continue!

Def. Il piano tangente a una superficie si trova con:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{df}{dx}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{df}{dy}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Osservazione In sostanza mi fermo al primo passo di approssimazione dello sviluppo di Taylor, dove approssimo una superficie con un piano

Def. Data $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con A aperto, con $x_0 \in A$, f si dice **differenziabile** in x_0 se esiste $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ tale che:

$$f(\underline{x_0} + \underline{h}) - f(\underline{x_0}) = \underline{a} \cdot \underline{h} + o(|\underline{h}|), \text{ dove } \underline{h} \in \mathbb{R}^n \text{ e } \underline{h} \to 0$$

Inoltre, f si dice differenziabile in A se é differenziabile in $\forall x_0 \in A$.

Osservazione Per verificare la differenziabilitá di una funzione in un punto $\underline{x_0}$, verificare che il seguente limite valga 0:

$$\lim_{\underline{h} \to 0} \frac{f(\underline{x_0} + \underline{h}) - f(\underline{x_0}) - \nabla f(\underline{x_0}) \cdot \underline{h}}{|\underline{h}|}$$

Def. Il **differenziale** di f in x_0 é l'applicazione lineare $df(\underline{x_0}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad \underline{h} \to \underline{a} \cdot \underline{h}$

Th. Data $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con A aperto, con $\underline{x_0} \in A$, se f é differenziabile in $\underline{x_0}$, allora vale che:

- f é continua in $\underline{x_0}$

Dimostrazione $f(\underline{x_0} + \underline{h}) - f(\underline{x_0}) = \underline{a} \cdot \underline{h} + o(|\underline{h}|) \to 0 \implies \lim_{t \to 0} f(\underline{x_0} + \underline{h}) = f(\underline{x_0})$

- f é derivabile direzionalmente in $\underline{x_0}$, in particolare é derivabile e $\underline{a} = \nabla f(\underline{x_0})$.

Dimostrazione Pongo $\underline{h} = t\underline{e_j}$, $t \in \mathbb{R}$, $t \to 0$, $\underline{e_j} = (0, 0, \dots, 1, \dots)$ con un 1 alla j-esima posizione.

$$f(\underline{x_0} + t\underline{v}) - f(\underline{x_0}) = \underline{a} \cdot t\underline{e_j} + o(|t|) \implies$$

$$\frac{1}{t}(f(\underline{x_0} + t\underline{e_j}) - f(\underline{x_0})) = \underline{a}\, \underline{e_j} + \frac{o(|t|)}{t} \implies$$

$$\lim_{t \to 0} f(\underline{x_0} + t\underline{e_j}) - f(\underline{x_0}) = \underline{a_j}$$

Tuttavia, questo dimostra solo la derivabilitá. Per dimostrare che é derivabile direzionalmente, vedere la prossima dimostrazione.

- $D_{\underline{v}} f(\underline{x_0}) = \nabla f(\underline{x_0}) \cdot \underline{v}$

Dimostrazione Pongo $\underline{h} = t\underline{v}$), $\implies f(x_0 + tv) - f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot tv + o(|t|)$
Dividendo entrambi i membri per $t \implies D_{\underline{v}} f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v, \forall v \in \mathbb{R}^n$.
(In pratica ho dimostrato che la derivata direzionale esiste sempre, e che quindi la f é derivabile direzionalmente)

Def. Data $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $\underline{x_0} \in A$, con f differenziabile in $\underline{x_0}$, allora:
$D_{\underline{v}} f(\underline{x_0}) = \nabla f(\underline{x_0})) \cdot \underline{v} = |\nabla f(\underline{x_0}))||\underline{v}| \cos\beta = |\nabla f(\underline{x_0}))| \cos\beta$ é massimo quando $\cos\beta = 1$, cioé quando $\beta = 0$, cioé quando $\nabla f(\underline{x_0}))$ é parallelo a $\underline{v}$ (e hanno lo stesso verso). In questo caso vorrá dire che:

$$\underline{v} = \frac{\nabla f(\underline{x_0}))}{|\nabla f(\underline{x_0}))|}$$

<u>Def.</u> Se f é differenziabile in $\underline{x}_0$, allora l'iperpiano tangernte si ottiene come:

$$x_{n+1} = f(\underline{x}_0)) + \nabla f(\underline{x}_0))(\underline{x} - \underline{x})$$

Dimostrazione Sapevamo che:

$$f(\underline{x}_0) - \underline{h}) = f(\underline{x}_0) + \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{h} + o(|h|)$$

Tuttavia se poniamo $\underline{h} = (\underline{x} - \underline{x}_0)$:

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \nabla f(\underline{x}_0)(\underline{x} - \underline{x}_0) + o(|\underline{x} - \underline{x}_0|)$$

<u>Th.</u> Il teorema del **differenziale totale** dice che data $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $\underline{x}_0 \in A$, se $f \in C^1$ in $\underline{x}_0$, allora f é differenziabile in $\underline{x}_0$.

Funzioni a piú variabili 2 la vendetta

<u>Th.</u> Il teorema del **differenziale totale** dice che data $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se f é derivabile e $f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n}$ sono continue in $\underline{x}_0$, allora f é differenziabile in $\underline{x}_0$.
<u>Corollario</u>: se $f \in C^1(A)$, allora f é differenziabile in A.

Dimostrazione Il teorema verrá dimostrato per n_2:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) =$$
$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

Adesso poniamo $g(h) = f(x_0 + h, y_0 + k)$.
Siccome per ipotesi g é derivabile, uso il teorema di Lagrange:

$$g(h) - g(0) = g'(x_h)(h - 0), \text{ con } x_h \in (0, h)$$

Poniamo inoltre $l(k) = f(x_0, y_0 + k)$
Siccome anche l é derivabile, sempre per Lagrange:

$$l(h) - l(0) = l'(y_k)(k - 0) \text{ con } y_k \in (0, k)$$

Svolgiamo le derivate in entrambi i membri per l e k:

$$g'(x_h) = \frac{df}{dx}(x_0 + x_h, y_0 + k), \qquad l'(y_k) = \frac{df}{dy}(x_0, y_0 + y_k)$$

Impostiamo $\varepsilon_h = x_0 + x_h$, e $\varepsilon_k = y_0 + y_k$:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{df}{dx}(\varepsilon_h, y_0 + k)h + \frac{df}{dy}(x_0, \varepsilon_k)k$$

Adesso dobbiamo dimostrare che il seguente limite valga 0:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{df}{dx}(x_0, y_0 + k)h + \frac{df}{dy}(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$$
$$\frac{(\frac{df}{dx}(\varepsilon_h, y_0 + k) - \frac{df}{dx}(x_0, y_0))h + (\frac{df}{dy}(x_0, \varepsilon_k) - \frac{df}{dy}(x_0, y_0))k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \to 0?$$

Siccome dobbiamo verificare che il limite vada a 0, possiamo maggiorare il limite con la sommma dei moduli:

$$\le \left| \frac{df}{dx}(\varepsilon_h, y_0 + k) - \frac{df}{dx}(x_0, y_0) \right| \frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$
$$\left| \frac{df}{dy}(x_0, \varepsilon_k) - \frac{df}{dy}(x_0, y_0) \right| \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

Ora abbiamo che $\varepsilon_h \to 0$, $(y_0 + k) \to 0$, $\varepsilon_k \to 0$, $\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} \to 1$, perció tutto il limite tende a 0.

Osservazione Tutte le $f \in C^1$ sono differenziabili. Non é detto il contrario.

Osservazione Il teorema dice che se f é differenziabile in $\underline{x}_0$, allora

$$D_v f(\underline{x}_0) = \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{v}, \quad \forall \underline{v}$$

Questo vuol dire che se il gradiente é 0, e una delle derivate direzionali é diversa da 0, allora vuol dire che la funzione non é differenziabile.

<u>Def.</u> Data $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, si dice che f é derivabile/differenziabile $/C^m$ se lo é componente per componente.

<u>Def.</u> Siano le seguenti funzioni:

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}^k \qquad \text{con } f \text{ differenziabile in } A$$
$$g : B \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d \qquad \text{con } g \text{ differenziabile in } B$$

Se f é derivabile, allora si definisce **jacobiana** la matrice $k \times n$ delle derivate parziali:

$$J_f(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} & \dots & \frac{\delta f_1}{\delta x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\delta f_k}{\delta x_1} & \dots & \frac{\delta f_k}{\delta x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f_1(x_0) \\ \dots \\ \nabla f_k(x_0) \end{bmatrix}$$

Sia $h : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$, definita come $\underline{x} \to g(f(\underline{x}))$.
Allora h é differenziabile in A e inoltre:

$$J_h(\underline{x}) = J_g(f(\underline{x})) \cdot J_f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \frac{\delta h_i}{\delta x_j} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

A questo punto possiamo calcolarci l'elemento generico:

$$\frac{dh_i}{dx_j} = \sum_{s=1}^{k} d_s g_i(f(\underline{x})) \cdot d_j f_s(\underline{x}), \quad \forall i = 1, \dots, d \quad \forall j = 1, \dots, n$$

<u>Def.</u> Data $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con $g \in C^1$, si definisce **l'insieme di livello** come:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = c\} \text{ con } c \in \mathbb{R}$$

Osservazione Per valori di c "buoni", l'insieme di livello é il sostegno di una curva regolare.

<u>Prop.</u> Il gradiente di una funzione é ortogonale al suo insieme di livello.

Dimostrazione Lavoriamo prima in $\mathbb{R}^2$, e parametrizziamo la curva rappresentante l'insieme di livello:

$$\varnothing : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \quad t \to \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} \quad \text{con } Im(\varnothing) = \{g(x, y) = c\}$$

Il processo é simile a quello di tagliare a "fette" la funzione.
Per costruzione abbiamo che $c = g(x(t), y(t))$.
Se deriviamo rispetto a t:

$$\nabla g(\varnothing(t)) \cdot \varnothing'(t) = 0$$

Che significa che ∇g é ortogonale alla tangente in t dell'insieme di livello. (Poiché il prodotto scalare é 0 solo se i vettori sono ortogonali).
Ora proviamo la stessa identica cosa in $\mathbb{R}^3$. Definiamo $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, e il suo insieme di livello $\{(x, y, z) \mid g(x, y, z) = c\}$.
Questo insieme adesso é rappresentato da una superficie regolare, che parametrizziamo in questo modo:

$$\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad (s, t) \to \begin{cases} x(s, t) \\ y(s, t) \\ z(s, t) \end{cases}$$

Il piano tangente dell'insieme di livello é generato da

$$\left(\frac{\delta x(s, t)}{\delta s}, \frac{\delta y(s, t)}{\delta s}, \frac{\delta z(s, t)}{\delta s} \right) \text{ e } \left(\frac{\delta x}{\delta t}, \frac{\delta y}{\delta t}, \frac{\delta z}{\delta t} \right)$$

Definiamo $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ come

$$h(s, t) := g(\pi(s, t)); \quad c = h(s, t) = g(\pi(s, t))$$

Facendo la derivata:

$$J_h(s, t) = J_g(\pi(s, t)) \cdot J_\pi(s, t) = \nabla g(\pi(s, t)) \cdot \begin{bmatrix} \delta x/\delta s & \delta y/\delta s \\ \delta z/\delta s & \delta x/\delta t \\ \delta y/\delta t & \delta z/\delta t \end{bmatrix} = (0, 0)$$

Cioé ∇g é ortogonale ai due vettori che generano il piano tangente alla superficie di livello, e quindi ∇g é ortogonale alla superficie di livello.

<u>Def.</u> Se esistono tutte le derivate seconde parziali, la funzione si dice **derivabile due volte**.
La notazione usata é la seguente:

$$\frac{d}{dx_j}\left(\frac{df}{dx_i}\right) = \frac{d^2}{dx_i dx_j} = f_{x_i, x_j}$$

<u>Def.</u> Si dice matrice **Hessiana** la matrice formata da tutte le possibili derivate seconde:

$$H_f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} f_{x_i x_j}(\underline{x}) & \dots & f_{x_i x_j}(\underline{x}) \\ f_{x_i x_j}(\underline{x}) & \dots & f_{x_i x_j}(\underline{x}) \\ f_{x_i x_j}(\underline{x}) & \dots & f_{x_i x_j}(\underline{x}) \end{bmatrix}$$

Osservazione In generale, la matrice non é simmetrica!

<u>Def.</u> Data $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con A aperto, si dice che $f \in C^2$, se é derivabile due volte e le derivate seconde sono continue in A

<u>Th.</u> Il **Teorema di Schwartz** dice che se $f \in C^2$, l'ordine di derivazione non conta e la matrice Hessian é simmetrica.
In generale $f \in C^k$ le derivate di ordine k non dipendono dall'ordine di derivazione.

<u>Th.</u> Il **teorema di Lagrange** dice che: sia $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con A aperto, $f \in C^1(A)$, se $\underline{x}_0 \in A$, $\underline{x} \in A$, tale che il segmento é in A, $\exists \sigma$ appartenente al segmento $\underline{x}, \underline{x}_0$ tale che:

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \nabla f(\sigma)(\underline{x} - \underline{x}_0)$$

Che non é altro che lo sviluppo di Taylor al primo ordine con resto di Lagrange.

Dimostrazione Poniamo

$$\underline{h} = \underline{x} - \underline{x}_0$$

In modo tale che il segmento sia rappresentato da $\underline{x}_0 + t\underline{h}$. Allora

$$F : [0, 2] \to \mathbb{R}, \qquad F(t) := f(\underline{x} + t\underline{h})$$

Se abbiamo che $f \in C^1$, allora applicando Lagrange:

$$F(1) - F(0) = F'(\varepsilon)(1 - 0) = F'(\varepsilon), \quad \text{con } \varepsilon \in (0, 1)$$

Applicando ancora Lagrange:

$$f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) = \nabla f(\underline{x}_0 + \varepsilon\underline{h}) \cdot \underline{h} =$$
$$\sum f_{x_i}(\underline{x}_0 + \varepsilon\underline{h}_i) \cdot \underline{h}_i$$

Dove $\underline{x}_0 + \varepsilon\underline{h}_i$ rappresenta un punto del segmento.

<u>Th.</u> Il **teorema di Lagrange** dice che: sia $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con A aperto, $f \in C^2(A)$, se $\underline{x}_0 \in A$, $\underline{x} \in A$, tale che il segmento é in A, $\exists \sigma$ appartenente al segmento $\underline{x}, \underline{x}_0$ tale che:

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \nabla f(\sigma)(\underline{x} - \underline{x}_0) + \frac{1}{2}(H_f(\underline{x}_0 + \varepsilon(\underline{x} - \underline{x}_0))(\underline{x} - \underline{x}_0))(\underline{x} - \underline{x}_0$$

Che non é altro che lo sviluppo di Taylor al secondo ordine con resto di Lagrange.

Osservazione con il resto di Peano:

$$f(\underline{x}_0) + \nabla f(\sigma)(\underline{x} - \underline{x}_0) + \frac{1}{2}(H_f(x_0 + \varepsilon(x - x_0))(x - x_0))(x - x_0) + o(|\underline{x} - \underline{x}_0|^2)$$

Dimostrazione Se $f \in C^2(A) \implies F \in C^2([0,1])$, e quindi

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{1}{2}F''(\varepsilon)t^2 \text{ con } \quad \varepsilon \in (0,t)$$

Imponendo $t = 1$:

$$\begin{aligned} f(\underline{x}) &= f(\underline{x}_0) + \nabla f(\underline{x}_0)(\underline{x} - \underline{x}_0) + \frac{1}{2}F''(\varepsilon) \\ &= f(\underline{x}_0) + \nabla f(\underline{x}_0)(\underline{x} - \underline{x}_0) + \frac{1}{2}(H_f(\underline{x}_0 + \varepsilon(\underline{x} - \underline{x}_0))(\underline{x} - \underline{x}_0))(\underline{x} - \underline{x}_0) \end{aligned}$$

Def. Un insieme $A \subseteq R^n$ si dice **connesso** se le condizioni

$$\exists A_1, A_2 \text{ aperti t.c.} \qquad A_1 \cup A_2 = A, \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

implicano che uno dei due insiemi aperti é vuoto.

Th. Dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e connesso, allora $\forall \underline{x}, \underline{y} \in A$ esiste una curva $\varnothing \in C^1$, definita come $\varnothing : [0,1] \to A$ che collega $\underline{x}$ con $\underline{y}$, cioé $\varnothing(0) = \underline{x}, \varnothing(1) = \underline{y}$. A allora é un insieme **connesso ad archi**.

Prop. $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con A aperto e connesso, con f differenziabile su A, se $\nabla f = 0$ in A allora f é costante su A.

Dimostrazione Fisso $x, y \in A$. Per il teorema precedente, esiste una curva $\varnothing$ che li connette. Definiamo $g(t) = f(\varnothing(t)), \quad t \in [0,1]$.
g é derivabile perché composizione di funzioni derivabili. Ora:

$$f(y) - f(x) = g(1) - g(0) = g'(\varepsilon)(1-0) = g'(\varepsilon)) = \nabla f(\varnothing(\varepsilon)) \cdot \varnothing'(\varepsilon) = 0$$

E con questo abbiamo dimostrato che f é sempre costante su tutto A.

Def. $x_0 \in A$ si dice punto di massimo/minimo relativo (o locale) se

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ oppure } f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \cap A$$

Dove $B_\delta(x_0)$ é una palla di raggio δ di centro x_0.

Prop. Se x_0 é punto di massimo/minimo, e punto interno di A, e f é derivabile in A allora $\nabla f(x_0) = 0$

Dimostrazione Definisco

$$g_i(t) = f(x_0 + te_i), \qquad \text{dove } e_i = (0,0,\ldots,0,1,0,\ldots)$$

Sappiamo che g_i é derivabile perché lo é anche f, e ha massimo/minimo in $t = 0$. Svolgendo:

$$0 = g'(0) = \nabla f(x_0 + 0 \cdot e_i) \cdot e_i = \frac{\delta f}{\delta x_i}(x_0)$$

E questo vale $\forall i$; cioé, qualunque sia la componente, la derivata é nulla, e quindi anche il gradiente é nullo.

Osservazione Non vale il viceversa! Se il gradiente é nullo, potrebbe anche essere che x_0 non é punto di massimo/minimo!

Def. Se $\nabla f(x_0) = 0$ ma x_0 non é punto di massimo/minimo, allora si dice che x_0 é **punto di sella**.

Def. Introduciamo la seguente notazione:

$$(H\underline{v}) \cdot \underline{v} = (H\underline{v}, \underline{v}) = \sum_{i,j=1}^{n} h_{i,j} v_i v_j$$

Prop. Se la matrice H é simmetrica, allora é diagonalizzabile e ha autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Def. La matrice H si dice:

Definita positiva	se $(H\underline{v}, \underline{v}) > 0, \forall \underline{v}$	cioé se $\lambda_i > 0, \forall i$
Definita negativa	se $(H\underline{v}, \underline{v}) < 0, \forall \underline{v}$	cioé se $\lambda_i < 0, \forall i$
Semidefinita positiva	se $(H\underline{v}, \underline{v}) \geq 0, \forall \underline{v}$	cioé se $\lambda_i \geq 0, \forall i$
Semidefinita negativa	se $(H\underline{v}, \underline{v}) \leq 0, \forall \underline{v}$	cioé se $\lambda_i \leq 0, \forall i$
Indefinita	se $\exists v, w$ t.c. $(Hv, v) > 0$ e $(H\underline{w}, \underline{w}) < 0$, cioé se $\exists \lambda_1, \lambda_2$ t.c. $\lambda_1\lambda_2 < 0$	

Prop. Se H é definita positiva, allora $(H\underline{v}, \underline{v}) \geq \lambda_{min}|\underline{v}|^2, \forall \underline{v}$.
Se H é definita negativa, allora $(H\underline{v}, \underline{v}) \leq \lambda_{max}|\underline{v}|^2, \forall \underline{v}$.

Prop. Se $f \in C^2$, $x_0 \in A$, x_0 punto interno e $\nabla f(x_0) = 0$:
Se x_0 é un minimo locale, allora $H_f(x_0)$ é semidefinita positiva.
Se x_0 é un massimo locale, allora $H_f(x_0)$ é semidefinita negativa.

Dimostrazione Manca!

Se $H_f(x_0)$ é definita positiva, allora x_0 é un massimo locale.
Se $H_f(x_0)$ é definita negativa, allora x_0 é un minimo locale.

Dimostrazione Manca!

Se $H_f(x_0)$ é indefinita, allora x_0 é un punto di sella.

Dimostrazione Manca!

Prop. Per n = 2, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$ac - b^2 = \det \text{A} = \lambda_1\lambda_2, \qquad a + c = \text{tr(A)} = \lambda_1 + \lambda_2$
Se detA <, A è indefinita, e $\underline{x}_0$ punto di sella.
Se detA = 0, sappiamo che un autovalore è 0, ma niente altro. (al massimo sappiamo che A è semidefinita positiva o negativa)
Se detA > 0, e tr(A) > 0, A è definita positivamente, e $\underline{x}_0$ è punto di minimo.
Se detA > 0, e tr(A) < 0, A è definita negativamente, e $\underline{x}_0$ è punto di massimo.

Osservazione Se detA $> 0 \implies ac > b^2 \implies a$ e c hanno lo stesso segno. Quindi, per vedere il segno della traccia, mi basta osservare semplicemente il segno di a.

Osservazione Vale anche il viceversa, cioè
Se $\underline{x}_0$ è punto di minimo, allora detA ≥ 0, tr(A) ≥ 0
Se $\underline{x}_0$ è punto di massimo allora detA ≤ 0, tr(A) ≤ 0.

Osservazione La matrice A è simmetrica poichè per ipotesi $f \in C^2$.

Def. I **minimi** principali **nord-ovest** di una matrice sono le sottomatrici quadrate formate a partire dall'angolo in alto a sinistra:

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \ldots$$

Prop. Se A è simmetrica, sappiamo che:
A è definita positiva $\Leftrightarrow \det A_k > 0$ per $k = 1 \ldots n$.
A è definita negativa $\Leftrightarrow \det A_k(-1)^k > 0$ per $k = 1 \ldots n$.

Def. Data $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_m \in A$ è punto di **minimo assoluto** per f in A se $f(\underline{x}_m) \leq f(\underline{x}), \forall \underline{x} \in A$ e $m = f(\underline{x}_m)$ è detto minimo assoluto. Uguale per il massimo.

Th. Il **Teorema di Weierstrass** dice che $f : K \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con f continua, con K compatto di $\mathbb{R}^n$ (cioé chiuso e limitato), allora f ammette massimo e minimo assoluti in K.

Dimostrazione L'idea della dimostrazione é di usare la stessa dimostrazione di Weierstrass in $\mathbb{R}^1$, estendendola a piú dimensioni. Infatti, il teorema di Bolzano Weierstrass funziona anche con successioni in $\mathbb{R}^n$

Def. Data $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = +\infty$ allora la funzione si dice **coerciva**.

Prop. Un corollario al teorema di Weierstrass: se una funzione é coerciva, allora ammette minimo assoluto. (Vale anche il viceversa: se una funzione é coerciva a $-\infty$, allora ammette massimo assoluto).

Dimostrazione

$$\forall N > 0, \exists R_N > 0, \text{ t.c. } f(x) > N, \quad \forall x \text{ t.c. } |x| > R_N$$

Consideriamo $f(\underline{0}) = N$. Per questo N, sia $\min_{B_{R_N}(0)} f = f(x_0)$ per Weierstrass. L'insieme $k = \{|\underline{x}| \leq R_N\}$ é compatto. Quindi,

$$f(x) > N = f(0) \geq f(x_0), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash B_{R_N}(0)$$

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in B_{R_N}(0)$$

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \implies x_0 \text{ é punto di min assoluto}$$

Th. Il **Teorema dei valori intermedi** dice che data $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua, con A connesso, e dati x e $y \in A$ (supponendo $f(x) \leq f(y)$). Allora:

$$\forall c \in [f(x), f(y)], \quad \exists z \in A \text{ t.c. } f(z) = c$$

Dimostrazione $\exists \varnothing : [0,1] \to A$ continua t.c. $\varnothing(0) = x, \varnothing(1) = y$
Definiamo $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, come $t \to f(\varnothing(t))$, continua per comp. di funzioni continue. Applico il teorema dei valori intermedi a g:

$$\text{Dato } c \in [g(0), g(1)], \ \exists \theta \in [0,1] \text{ t.c. } g(\theta) = c$$

Ma allora $f(\varnothing(\theta)) = c$ e vale la tesi con $z = \varnothing(\theta)$

Def. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é convesso se dati due punti dell'insieme, il segmento che li unisce é tutto compreso nell'insieme. Formalmente:

$$(\lambda x + (1-\lambda)y) \in A, \quad \forall x, y \in A, \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

Def. Una funzione $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con A aperto e connesso, si dice **convessa** se
$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \ \forall x, y \in A, \quad \forall \lambda \in [0,1]$
cioé se tutti i valori della funzione stanno sotto il segmento che collega x e y.

Osservazione - se f é convessa, allora f é continua.
- se f é convessa e differenziabile, allora il piano tangente alla funzione sta tutto sotto alla funzione. Formalmente $f(x) \geq f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0), \quad \forall x, x_0 \in A$.
- se f é convessa ed é anche $C^2(A)$, allora $H_f(x)$ é semidefinita positiva.

Osservazione se f é convessa, e ha un minimo, allora quel minimo é assoluto (Per esempio se $f \in C^1$ allora in x_0 punto minimo $\nabla f(x_0) = 0$ e $f(x) \geq f(x_0)$ per osservazione precedente)

Osservazione In generale, se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é convessa e crescente, allora la funzione in $\mathbb{R}^n$ definita come $f(x) = g(|x|)$ é convessa.

Th. Il **Teorema del Dini** dice che data $f : A \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con A aperto, con $F \in C^1$, se prendo $(x_0, y_0) \in A$ tale che $F(x_0, y_0) = 0$ e $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ allora esistono $r, \epsilon > 0$ tali che $F(x, y) = 0$ definisce implicitamente un'unica

$$g : [x_0 - r, x_0 + r] \to [y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon]$$

tale che $F(x, g(x)) = 0$, $\forall x \in [x_0 - r, x_0 + r]$.
Inoltre, $g \in C^1$ e $g'(x) = -\frac{F_x(x,g(x))}{F_y(x,g(x))}$

Dimostrazione Siccome $F(x_0, y_0) = 0, F_y(x_0, y_0) \neq 0$, definiamo $G(x, y) = y - \frac{F(x,y)}{F_y(x_0,y_0)}$, in modo tale che $G(x_0, y_0) = 0$.
$F(x, y) = 0$ solo quando $\frac{F(x,y)}{F_y(x_0,y_0)} = 0$, solo quando $y - \frac{F(x,y)}{F_y(x_0,y_0)} = y$ che non é altro che $G(x, y)$. In pratica, gli zeri di F corrispondono ai punti fissi di G (rispetto alla seconda variabile).
Prendiamo ora un insieme X definito come:

$$X = \{\varphi : [x_0 - r, x_0 + r] \to [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon] \mid \varphi \text{ é continua } \}$$

d_∞ é la distanza indotta dalla norma del sup $||\cdot||_\infty$. Dimostriamo ora che (X, d_∞) é uno spazio metrico completo:

Dim. $\{\varphi_n\}_n \subseteq X$ é di Cauchy, poiché $(C^0([x_0 - r, x_0 + r]), ||\cdot||_\infty)$ é completo $\exists \varphi \in C^0([x_0 - r, x_0 + r])$ tale che $||\varphi_n - \varphi||_\infty \to 0$ per $h \to 0$.
Dobbiamo dimostrare che $\varphi \in X$, cioé che $||\varphi(x) - y_0||_\infty \leq \varepsilon$:

$$||\varphi(x) - y_0|| \leq ||\varphi(x) - \varphi_n(x)||_\infty + ||\varphi_n - y_0||_\infty \leq ||\varphi - \varphi_n||_\infty + \varepsilon \to \varepsilon$$

Se per assurdo fosse che $||\varphi(x) - y_0||_\infty > \varepsilon$, otterremmo che $\varepsilon < \varepsilon$, che é assurdo. Perció abbiamo appena dimostrato che $||\varphi(x) - y_0||_\infty \leq \varepsilon$.

Sia $H : X \to X$, definita come $w \to H[w]$ (dove $H[w]$ é una funzione). Abbiamo allora che $H[w](x) = G(x, w(x))$. Prima di andare avanti , dobbiamo dimostrare che H é ben posta:

Dim. Bisogna dimostrare che $H[w] \in X$, cioé che:
- $H[w]$ é continua su $[x_0 - r, x_0 + r]$ (per comp. di funzioni continue)
- $||H[w](x) - y_0||_\infty \leq \varepsilon$, e lo dimostriamo subito:

$$||H[w](x) - y_0||_\infty = ||G(x, w(x)) - y_0||_\infty$$

per definizione. Ora applichiamo la disugualianza triangolare :

$$||G(x, w(x)) - y_0||_\infty \leq ||G(x, w(x)) - G(x, y_0)||_\infty + ||G(x, y_0) - G(x_0, y_0)||_\infty$$

Per quanto riguarda il primo addendo:

$$||G(x, w(x)) - G(x, y_0)||_\infty \leq ||G_y(x, \varsigma_y)(w(x) - y_0)||_\infty$$

$$\leq \sup_{\varsigma \in [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]} |G_y(x, \varsigma_y)| \, ||w(x) - y_0||_\infty = \sup_{\varsigma \in [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]} \left| 1 - \frac{F_y(x, \varsigma)}{F_y(x_0, y_0)} \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} \text{ (per valori sufficientemente piccoli)}$$

Il secondo addendo invece:

$$||G(x, y_0) - G(x_0, y_0)||_\infty = \frac{||F(x, y_0)||_\infty}{|F_y(x_0, y_0)|} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Quindi entrambi gli addendi sono minori di ε, e quindi H é ben posta.

Infine, ci manca solo da dimostrare che H é una contrazione:

Dim. Per dimostrare che H é una contrazione, dobbiamo mostrare che $||H[w] - H[v]||_\infty \leq L||v - w||\infty$ per $L < 1$, $\forall v, w \in X$.
Prendiamo $\varepsilon, r > 0$ tali che $[x_0 - r, x_0 + r] \times [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon] \subseteq A$:

$$||G(x, w(x)) - G(x, v(x))||_\infty \leq \sup_{\varsigma \in [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]} |G_y(x, \varsigma)| \, ||w - v||_\infty$$

che si risolve usando lo stesso ragionamento di prima sostituendo v al posto di y_0 e imponendo $v(x) \in [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$.
Quindi, $||G(x, w(x)) - G(x, v(x))||_\infty \leq \frac{1}{2}||v - w||_\infty$, per cui H é una contrazione.

Ora, sia $g(x)$ un punto fisso di H (che esiste per Caccioppoli).

$$H[g](x) = g(x) = G(x, g(x)) = g(x) - \frac{F(x, g(x))}{F_y(x, g(x))} \implies F(x, g(x)) = 0$$

Non dimostriamo che $g \in C^1$.
Ma per completezza calcoliamo il valore di $g'(x)$:

$$F(x, g(x)) = 0 \implies F'(x) = F_x(x, g(x)) + F_y(x, g(x))g'(x) = 0$$

$$\implies g'(x) = \frac{-F_x(x, g(x))}{F_y(x, g(x))}$$

Def. Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con A aperto, $F \in C^1$, $z = \{(x, y) \in A | F(x, y) = 0\}$, allora:
un punto $(x_0, y_0) \in z$ si dice **punto regolare** se $\nabla F(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.
Un punto $(x_0, y_0) \in z$ si dice **punto singolare** se $\nabla F(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Osservazione Se un punto é regolare, allora posso applicarci Dini. Inoltre, z é il sostegno di una curva.

Osservazione Se un punto invece é singolare, non é detto che non ci posso applicare Dini.

Def. Equazione retta tangente a una funzione implicita:

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + D_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

$$\text{oppure } y = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0)$$

Prop. Preso un insieme di livello $\{F(x, y) = c\}$, con $F \in C^1$, allora se (x_0, y_0) é un punto regolare, allora posso esprimere $y = g(x)$ oppure $x = h(y)$ (in un intorno di (x_0, y_0), poiché dato che é regolare vuol dire che almeno una delle due derivate parziali é diversa da zero.

Th. Dini generale. Manca!

Dimostrazione Manca!

Def. Le coordinate sferiche sono definite in questo modo:

$$\begin{cases} x(\rho, \theta, \varphi) = \rho \cos\theta \sin\varphi & \rho = \text{ raggio della sfera} \\ y(\rho, \theta, \varphi) = \rho \sin\theta \sin\varphi & \theta \in [0, 2\pi] \\ z(\rho, \theta, \varphi) = \rho \cos\varphi & \varphi \in [0, \pi] \end{cases}$$

Th. Il **teorema dei moltiplicatori di Lagrange** dice che: dati $f, F : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, entrambi C^1, se x_0 é un punto critico di f, e $\nabla f(x_0) \neq 0$, allora esiste $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tale che

$$\nabla f(x_0) = \lambda_0 \nabla F(x_0) \text{ per } \begin{cases} \nabla f(x_0) = \lambda_0 \nabla F(x_0) \\ F(x_0) = 0 \end{cases}$$

Quel λ_0 prende il nome di moltiplicatore di Lagrange.

Osservazione Ponendo $L(\underline{x}, \lambda) = f(x) - \lambda F(x)$, otteniamo

$$\nabla L(\underline{x}, \lambda) = (\nabla f(\underline{x}) - \lambda \nabla F(\underline{x}), -F(x))$$

e questo gradiente si annulla quando $\nabla f(\underline{x}) = \lambda \nabla F(\underline{x})$ e $f(x) = 0$. Quindi i punti critici di $f(x)$ sul vincolo $F(x)$ sono gli stessi di $L(x, \lambda)$.

Dimostrazione Dimostriamolo solo nel caso di due dimensioni: Sapendo che $\nabla F(x_0, y_0) \neq 0$, supponendo che $F_y \neq 0$ (ma potrebbe anche essere $F_x \neq 0$, basta che una delle due derivate parziali sia $\neq 0$), allora per Dini: $\exists g \in C^1$ tale che $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x)$ in un intorno di (x_0, y_0). Consideriamo $\varphi(t) = f(t, g(t))$. poiché $t \to (t, g(t))$ é una parametrizzazione del bordo $(F(x, y) = 0)$, abbiamo che $\varphi(t) \in C^1$. Inolre, (x_0, y_0) é punto di estremo relativo per $f_{|\{F=0\}}$, e $t = x_0$ é punto di estremo relativo di φ. Quindi per il teorema di Fermat:
$\varphi'(x_0) = 0 \implies \nabla f(x_0, g(x_0)) \cdot (1, g'(x_0)) = 0 \implies \nabla f(x_0, y_0) \cdot (1, g'(x_0)) = 0$. Quindi significa che $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ oppurre $\nabla f(x_0, y_0) \perp (1, g'(x_0))$. Sempre per Dini, $\varphi(t) := f(t, g(t)) = 0$ per t in un intorno di x_0. Quindi $\varphi'(x_0) = 0 \implies \nabla F(x_0, g(x_0))(1, g'(x_0)) = 0 \implies \nabla F(x_0, y_0)(1, g'(x_0)) = 0 \implies \nabla F(x_0, y_0) \perp (1, g'(x_0)) \implies \nabla F(x_0, y_0) \mathbin{//} \nabla f(x_0, y_0)$ oppure $\nabla f(x_0, y_0) = 0$. Dato che sono paralleli $\exists \lambda_0$ tale che $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla F(x_0, y_0)$. Il λ_0 viene messo al membro di destra per includere il caso $\nabla f(x_0, y_0) = 0$.

mancano gli appunti di venus qui

Th. Il teorema di Dini per sistemi in $\mathbb{R}^3$:
Siano $F, G \colon A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ di classe C^1, con A aperto. Sia $(x_0, y_0, z_0) \in A$ tale che $\begin{cases} F(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ G(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{cases}$ e $\begin{bmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{bmatrix} (x_0, y_0, z_0) \neq 0$ Allora esiste un intorno I di x_0, e un intorno J di (y_0, z_0) e esistono $\phi : I \to J, x \to (f(x), g(x))$, cioé esistono f e g tali che $I \times J$: $\begin{cases} F(x_0, y_0, z_0) = 0 \iff z = f(x) \\ G(x_0, y_0, z_0) = 0 \iff y = g(x) \end{cases}$, inoltre $f, g \in C^1$,
e $f(x) = -\frac{\begin{bmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{bmatrix}}, g(x) = -\frac{\begin{bmatrix} F_y & F_x \\ G_y & G_x \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{bmatrix}}$

Manca un bel pezzo anche qui.

Integrali

Def. Un **diffeomorfismo** é una funzione sia C^1, sia invertibile.

Osservazione E quindi anche la funzione inversa é C^1!

Th. Siano A, B due aperti di $\mathbb{R}^2$. Data una funzione $\phi : A \to B$, definita come $(u, v) \to (X(u, v), Y(u, v))$, in modo tale che $x = X(u, v)$ e $y = Y(u, v)$, allora se $E \subseteq B$, e A é un insieme misurabile, allora :

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\phi^{-1}(E)} f(X(u,v),Y(u,v))\,|J_\phi(u,v)|\,du\,dv$$

cioé, per lasciare invariato il valore dell'integrale dopo un cambio di variabile, bisogna moltiplicare per il determinante della Jacobiana del cambio di variabile $\phi(u, v)$

Dimostrazione La dimostrazione é troppo impegnativa, non richiesta.

Def. Le **Coordinate polari per integrali multipli**:
É un cambio di variabile in cui (u, v) sono (ρ, θ):

$$\phi(\rho,\theta) \to \begin{cases} x = \rho\cos\theta & \rho \in [0,+\infty] \\ y = \rho\sin\theta & \theta \in [0,2\pi] \end{cases}$$

Osservazione Il determinante della jacobiana $J_\phi(\rho, \theta)$ é sempre ρ.

Osservazione In realtá, ϕ non é sempre invertibile, in quanto ha problemi nella retta $y = 0$. Tuttavia, la formula é applicabile lo stesso in quanto la misura dell'insieme in cui non é invertibile é vuota. $(m_2\{y = 0, x \geq 0\} = 0)$

Def. Coordinate cilindriche per integrali multipli:
Facciamo un cambio di variabili in cui (u, v, w) sono (ρ, θ, z):

$$\phi(\rho,\theta,z) \to \begin{cases} x = \rho\cos\theta & \rho \in [0,+\infty] \\ y = \rho\sin\theta & \theta \in [0,2\pi] \\ z = z & z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Osservazione Il determinante della jacobiana $J_\phi(\rho, \theta, z)$ vale ρ, come nelle polari.

Osservazione Anche qui, come nelle polari, la funzione ϕ non é completamente invertibile, ma la formula puó essere applicata lo stesso

Def. Coordinate sferiche per integrali multipli:
Anche qui un cambio di variabili in cui (u, v, w) sono (ρ, θ, φ):

$$\phi(\rho,\theta,\varphi) \to \begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho \in [0,+\infty] \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi & \theta \in [0,2\pi] \\ z = \rho\cos\varphi & \varphi \in [0,2\pi] \end{cases}$$

Osservazione Il determinante della jacobiana $J_\phi(\rho, \theta, \varphi)$ é $\rho^2 \sin\varphi$.

Def. Il **momento di inerzia** rispetto a una retta é:

$$I_r(E) = \iiint_E d^2(r,\rho)\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

dove $d^2(r, \rho)$ é il quadrato della distanza di ρ dalla retta r.

Def. Un **dominio z-normale in** $\mathbb{R}^3$ é definito cosí:
$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2, \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}$
con α e β continue, con $\alpha(x, y) \leq \beta(x, y)$, e D misurabile.

Osservazione Un dominio normale é misurabile. da rimuovere

Def. Integrali per fili su domini normali:
Per calcolare l'integrale su un dominio z-normale, possiamo integrare lungo i fili tra le superfici descritte dalle funzioni α e β:

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz\;\;dy\,dx$$

dove D é la proiezione di E sul piano xy

Def. Integrali per strati:
Un altro modo per calcolare l'integrale su di un dominio tridimensionale (anche se non é normale??) é quello di farlo a *fette*, cioé di trovare due piani $z = a$ e $z = b$ che racchiudano tutto E, e integrare su di essi:

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \iint_{E_z} f(x,y,z)\,dx\,dy\;\;dz$$

dove E_z é la proiezione di E su un particolare piano z.

Def. Centro di massa di una superficie:
Dato una superficie e una funzione di densitá $\mu(x, y)$, la massa della superficie é:

$$M = \iint \mu(x,y)\,dx\,dy$$

Le coordinate del baricentro si ottengono cosí:

$$x_B = \iint x\mu(x,y)\,dx\,dy$$
$$y_B = \iint y\mu(x,y)\,dx\,dy$$

Le formule valgono anche in $\mathbb{R}^n$, basta includere anche le altre coordinate.

Th. Il **teorema di Guldino** dice che il volume di un solido di rotazione é uguale all'area di una sua sezione D moltiplicata per la lunghezza dell'arco di circonferenza percorso dal baricentro di D.

Dimostrazione Un solido di rotazione lo possiamo definire come un insieme di punti $D = y = 0, x \geq 0$ tutti sul semipiano xz. Facendo ruotare D attorno all'asse z, otteniamo il solido. Ora, possiamo esprimere D con le coordinate polari, con $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = x$, poiché $y = 0, x \geq 0$.
Calcolando il volume:

$$Vol(E) = \iiint_E 1 = \int_0^{\theta'} d\theta \iint_D 1 \cdot \rho\,d\rho\,dz = \theta' \iint_D x\,dx\,dz = \theta' x_B Area(D)$$

Dove θ' é l'angolo di rotazione, e x_B é la coordinata x del baricentro.

Osservazione Tutte le volte che z é una funzione di $(x^2 + y^2)$ o $\sqrt{x^2 + y^2}$ allora si tratta di un solido di rotazione.

Def. Sia $K \subseteq \mathbb{R}^2$ la chiusura di un aperto connesso (cioé comprendente il bordo); una **superficie regolare** é un'applicazione:

$$\underline{r} : K \to \mathbb{R}^3$$

tale che $\underline{r} \in C^1(K)$, $\underline{r}$ é iniettiva in un interno di K, e la sua jacobiana ha rango 2, cioé $\underline{r}_u$ e $\underline{r}_v$ sono linearmente indipendenti, cioé che $r_u \times r_v \neq 0$, cioé che le due derivate parziali non si annullano mai in uno stesso punto.
Il **sostegno** della superficie é l'insieme dei punti da cui é composta.

Def. Una **superficie cartesiana** é una superficie definita in questo modo:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v) \end{cases} \qquad \text{con } f \in C^1$$

Osservazione Lo jacobiano di una superficie regolare ha sempre rango 2.

Osservazione Il cono non é una superficie regolare, in quanto nel vertice non é C^1.

Osservazione

$$\underline{r}_u \times \underline{r}_v = det \begin{bmatrix} I & J & K \\ 1 & 0 & f_u(u,v) \\ 0 & 1 & f_v(u,v) \end{bmatrix} = (-f_u, -f_v, 1) \implies$$

$$|\ \underline{r}_u \times \underline{r}_v\ | \ = \sqrt{1 + |\nabla f|^2}$$

Osservazione Una superficie parametrizzata con le coordinate sferiche é regolare anch'essa:

$$\underline{r}(\theta,\varphi) \to \begin{cases} x = x_0 + R\cos\theta\sin\varphi & \rho \in [0,+\infty] \\ y = y_0 + R\sin\theta\sin\varphi & \theta \in [0,2\pi] \\ z = z_0 + R\cos\varphi & \varphi \in [0,2\pi] \end{cases}$$

Non é iniettiva solo ai poli, ma possiamo usare lo stesso la parametrizzazione (lo é quasi ovunque).

Def. Ogni punto (x, y, z) del **piano tangente** a una superficie regolare deve verificare:

$$det \begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \delta_u r_1(x,y,z) & \delta_u r_2(x,y,z) & \delta_u r_3(x,y,z) \\ \delta_v r_1(x,y,z) & \delta_v r_2(x,y,z) & \delta_v r_3(x,y,z) \end{bmatrix} = 0$$

Osservazione $r_u(u_0, v_0) \times r_v(u_0, v_0)$ é un vettore orgonale al piano tangente alla superficie.

Osservazione Nel caso si tratti di una superficie regolare, allora il piano tangente alla superficienel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ha formula

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$$

Def. Per calcolare l'**area di una superficie** regolare, dobbiamo approssimarla con l'*inf* delle poligonali tangenti alla superficie:

$$\text{Area}(\Sigma) = \iint_K 1\, d\varsigma = \iint_K |r_u(u,v) \times r_v(u,v)|\, du\, dv$$

Osservazione Come per la lunghezza delle curve, l'area non dipende dalla parametrizzazione scelta, cioé da come é fatta $\underline{r}$.

Def. Integrale superficiale:
Data una superficie regolare con sostegno Σ e una $f : \Sigma \to \mathbb{R}$

$$\iint_\Sigma f\, d\varsigma := \iint_K f(\underline{r}(u,v))|r_u(u,v) \times r_v(u,v)|\, du\, dv$$

Osservazione Questo integrale non dipende dalla parametrizzazione della superficie, cioé da come scrivo $\underline{r}$.

Def. Baricentro di una superficie parametrizzata:

$$x_B = \iint_\Sigma x\mu(x,y,z)\, d\varsigma \quad = \iint_K r_1(u,v)\mu(\underline{r}(u,v))\, du\, dv$$
$$y_B = \iint_\Sigma y\mu(x,y,z)\, d\varsigma \quad = \iint_K r_2(u,v)\mu(\underline{r}(u,v))\, du\, dv$$
$$z_B = \iint_\Sigma z\mu(x,y,z)\, d\varsigma \quad = \iint_K r_3(u,v)\mu(\underline{r}(u,v))\, du\, dv$$
$$M = \iint_\Sigma \mu(x,y,z)\, d\varsigma \quad = \iint_K \mu(\underline{r}(u,v))|r_u \times r_v|\, du\, dv$$

Def. Momento di inerzia di una superficie:

$$I_r(\Sigma) = \iint_\Sigma d^2(r,\rho)\mu(\rho) = \iint_K d^2(\underline{r}(u,v), r)\mu(\underline{r}(u,v))\, du\, dv$$

dove $d^2(r,\rho)$ é il quadrato della distanza di ρ dalla retta r.

Th. Il teorema di **derivazione sotto il segno di integrale** dice che data una funzione $f : [a,b] \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, se vale che $\forall t \in [a,b]$, $y \longrightarrow f(x,y)$ é sommabile in E, e data $F(x) = \int_E f(x,y)\, dx\, dy$, se $f \in C^1([a,b] \times E)$ e $\exists g_0, g_1 : E \longrightarrow \mathbb{R}$ sommabili tali che $|f(x,y)| \le g_0(y)$ e che $|f_x(x,y)| \le g_1(y)$ per q.o $x \in [a,b]$, allora:

$$F \in C^1 \text{ e } F'(x) = \int f_x(x,y)\, dy$$

Osservazione Corollario: se inoltre $\alpha, \beta : [c,d] \longrightarrow [a,b] \in C^1$ allora vale:
$$\frac{d}{dx}\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\, dy\right) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(x,y)\, dy + f(x,\beta(x))\beta'(x) - f(x,\alpha(x))\alpha'(x)$$

Def. Formule di Gauss-Green nel piano:
Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio normale, e siano $A, B : E \longrightarrow \mathbb{R}$, con $\overline{D} \subseteq E \subseteq \mathbb{R}^2$, con E aperto e $A, B \in C^1$. $\underbrace{\textit{Allora}}_{\text{ciao}}$ valgono:

$$\iint_D A_x(x,y)\, dx\, dy = \int_{\delta^+ D} A(x,y)\, dy$$
$$\iint_D B_y(x,y)\, dx\, dy = \int_{\delta^+ D} A(x,y)\, dx$$