Def. La disugualianza di **Cauchy-Schwartz** dice che il valore assoluto del prodotto scalare di due elementi è minore o uguale al prodotto delle loro norme: $|\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle| \leq ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||$

Def. Una successione x_n in uno spazio metrico (X, d) prende il nome di **successione di Cauchy** se esiste un N tale che:

$$d(x_m, x_n) < \epsilon \quad \forall m, n \geq N, \forall \epsilon > 0$$

In sostanza significa che al tendere all'infinito, lo spazio tra due elementi della successione tende ad annullarsi.

Def. Uno **spazio metrico completo** è uno spazio in cui tutte le successioni di Cauchy sono convergenti ad un elemento dello spazio. Viene anche chiamato **spazio di Banach**.

Osservazione Lo spazio metrico $\mathbb{Q}$ dei razionali con la metrica standard non è completo. Infatti, se prendo la successione i troncamenti di $\sqrt{2}$ definita come $x_n = \frac{\lfloor 10^n \sqrt{2} \rfloor}{10^n}$, è una successione di Cauchy $(1, 1.4, 1.41, \dots)$ che converge a $\sqrt{2}$, un numero non razionale.
Invece, un qualsiasi sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^n$ è completo.

Osservazione $\mathbb{R}^n$ é completo con la norma euclidea. Siccome poi in $\mathbb{R}^n$ tutte le norme sono equivalenti, qualunque spazio normato in $\mathbb{R}^n$ é completo.
Segue anche che tutti gli spazi metrici in $\mathbb{R}^n$ in cui la distanza proviene da una norma sono completi.

Def. Si definisce **contrazione** una funzione $f : X \to X$ tale che esiste L che soddisfa:

$$d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y), \quad L < 1$$

In altre parole, f è una contrazione se *contrae* la distanza tra due elementi x e y.

Osservazione Ogni contrazione è lipschitziana, e quindi anche continua!

Th. Il **teorema di Banach-Cacciopolli** dice che dato uno spazio metrico completo non vuoto (X, d), e una sua contrazione f, allora la mappa f ammette uno e un solo punto fisso $x^* \in X \mid x^* = f(x^*)$

. . . .

Def. La successione $f_n(x)$ **converge** per $x \in E$ alla funzione $f(x)$ se $\forall x_0 \in E$ la successione numerica $f_n(x_0)$ converge a $f(x_0)$, cioè:

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon \quad \forall \epsilon > 0, \forall x_0 \in E, \ \forall n > n_\epsilon$$

$$\text{oppure} \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in E$$

Def. La successione $f_n(x)$**converge uniformemente** alla funzione $f(x)$ se $\forall \epsilon > 0$ esiste un'unica soglia n_ϵ valida per tutti i punti x_0, cioè:

$$\forall n > n_\epsilon, \ |f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon \quad \forall \epsilon > 0, \forall x_0 \in E,$$

$$\text{oppure:} \quad \lim_{n\to\infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Osservazione La convergenza uniforme implica quella puntuale, ma non vale il viceversa.

Th. Il teorema di **Bolzano-Weierstrass** afferma che in uno spazio euclideo finito dimensionale $\mathbb{R}^n$ ogni successione reale limitata ammette almeno una sottosuccessione convergente.

Th. Il **teorema della continuita' per le successioni** afferma che il limite $f(x)$ di una successione $f(x)$ di funzioni continue uniformemente convergenti in un intervallo I è una funzione continua in I.

Th. Il **Teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale** dice che sia f_n una successione di funzioni continue su $[a, b]$ tali che $f_n \rightrightarrows f$ (f_n converge uniformemente a f), allora:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

Th. Il **Teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata** dice che data $\{f_n(x)\} \in C^1([a, b])$, se esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f_n(x_0) \to l$, e se $f'_n \rightrightarrows g$ in $[a, b]$, allora si ha che la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente a f in $[a, b]$, e inoltre:

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$$

Def. La **serie** di funzioni $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ non é altro che la successione $\{s_n\}_k$ delle sue somme parziali.

Def. La **convergenza puntuale per le serie** di funzioni si verifica se $\forall x \in I, \forall \epsilon > 0, \exists n_{\epsilon,x} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| < \epsilon, \quad \forall n > n_\epsilon$$

cioé se la successione $\{s_n\}$ delle somme parziali converge.

Def. La **convergenza uniforme delle serie** di funzioni si verifica se $\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sup_{x\in I} \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| < \epsilon$$

Osservazione La convergenza uniforme implica quella puntuale.

Osservazione Se voglio dimostrare che una serie non converge, basta che trovo un n per cui il sup non é 0:

$$\sup_{x\in I} \mid f_{n+1}(x) \mid \not\to 0$$

Osservazione Se ho una serie della forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f_k(x), \quad \text{con} \quad f_k(x) \geq 0, f_{k+1}(x) \geq f_k(x), f_k(x) \to 0$$

allora converge puntualmente $\forall x$ per Leibnitz.
Inoltre, se ho che $f_k(x) \rightrightarrows 0$, allora converge anche uniformemente, poiché

$$\left|\sum_{k=n+1} (-1)^k f_k(x)\right| \leq \sup \mid f_{n+1}(x) \mid \to 0$$

Def. La serie $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$ **converge assolutamente** in I se converge (puntualmente) in I la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \mid f_k(x) \mid$ converge.

Osservazione La convergenza assoluta implica quella puntuale.
Questo é verificabile poichè per il teorema del confronto di serie, vale che $- \mid f_k(x) \mid \leq f_k(x) \leq \mid f_k(x) \mid$

Osservazione Se $f_k \geq 0$, allora la convergenza puntuale é uguale a quella assoluta.

Def. La serie f_k si dice **totalmente convergente** in I se esiste una successione di numeri reali non negativi M_k tale che:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} M_k < \infty \quad \text{e} \quad \mid f_k(x) \mid \leq M_k, \quad \forall x \in I$$

Osservazione La serie é totalmente convergente se e solo se posso prendere $M_k = \sup_{x\in I} \mid f_k(x) \mid$, cosa che é molto utile fare quasi sempre.

Osservazione Si dice "totalmente convergente" perché scegliendo una successione numerica M_k non dipendente da x, la serie converge "per tutti gli x".

Th. Il **teorema della continuita' del limite per le serie di funzioni** dice che la somma di una serie di funzioni continue (cioè f_k continua $\forall k$) che converge uniformemente é una funzione continua. Questa somma é $s(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$

Th. Il **teorema di integrazione per serie** dice che se $f_k[a, b] \to \mathbb{R}$ continue, e se $s_n(x) \rightrightarrows s(x)$ in $[a, b]$, allora:

$$\int_a^b s(x)dx = \int_a^b \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^b f_k(x)dx$$

Th. Il **teorema di derivazione per serie** dice che data $f_k : I \to \mathbb{R}$, con $f_k \in C^1(I)$, e dato $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$, se $S'_n = \sum_{k=1}^n f'_k(x)_k$ converge uniformemente, e $\exists x_0 \in I$ tale che $S_n(x_0)$ converge (in $\mathbb{R}$), allora:

$$S_n(x) \rightrightarrows \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x), \quad \text{e} \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$$

Def. Si dice **serie di potenze** una serie di funzioni di questo genere:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k (x - x_0)^k$$

Assumiamo $x_0 = 0$, altrimenti basta fissare $y = (x - x_0)$

Osservazione Una serie di potenze converge sempre in $x = 0$.

Osservazione Se una serie di potenze converge in $\xi \in \mathbb{R}$, allora converge (assolutamente) in $|x| < |\xi|$.
Analogamente, se *non* converge in $\xi' \in \mathbb{R}$, allora non converge in $|x| > |\xi'|$.
L'insieme dei valori dove la serie converge prende il nome di **insieme di convergenza**.

Osservazione L'insieme di convergenza puó essere solo delle seguenti forme:

$$\{0\}, \ (-\rho, \rho), \ [-\rho, \rho), \ [-\rho, \rho], \ (-\rho, \rho], \ \mathbb{R}$$

dove ρ é il raggio di convergenza

Osservazione La definizione formale del raggio di convergenza é questa: $\rho = \sup\{|x| \mid x \in A\}$, dove A é l'insieme di convergenza.

Osservazione Pur conoscendo il raggio di convergenza, non sappiamo come si comporta la serie agli estremi dell'insieme di convergenza. Si devono verificare manualmente.

Osservazione La serie converge in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto nell'insieme di convergenza: $[a, b] \subset (-\rho, \rho)$.

Def. Il **criterio della radice** dice che il raggio di convergenza $\rho \geq 0$ di una serie di potenze é uguale a $\frac{1}{l}$ dove

$$l = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

Osservazione Il limsup é il limite maggiore di tutte le possibili sottosuccessioni. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass, esiste sempre almeno una sottosuccessione convergente, e quindi esiste sempre il limsup.

Def. Il **criterio del rapporto** dice che data una serie di potenze, se esiste

$$l = \lim_{k\to+\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$$

allora il raggio di convergenza é $\rho = \frac{1}{l}$

Th. Il **teorema di Abel** dice che se una serie numerica $\sum_k^{\infty} a_k \rho^k$ con $\rho > 0$ converge, allora la serie di potenze $\sum_k^{\infty} a_k x^k$ converge uniformemente in $[-\rho + \delta, \rho]$, $\forall \delta > 0$. Se invece $\rho < 0$, allora la serie converge uniformemente in $[-\rho, \rho - \delta]$, $\forall \delta > 0$.

Osservazione In altre parole questo teorema afferma che se una serie converge in $(-\rho, \rho)$, ma converge anche nell'estremo ρ, allora la somma della serie puó essere calcolata anche in quell'estremo con il limite $x \to \rho$.

Def. Data una serie di potenze, si dice **serie derivata** la serie:

$$\sum_k^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

Th. Il **raggio di una serie e della sua derivata** é lo stesso.

Th. Se una serie ha raggio di convergenza $\rho > 0$, allora sia la derivata che l'integrale della somma della serie hanno lo stesso raggio di convergenza ρ.

Th. Il **teorema di sviluppabilitá in serie di Taylor** dice che se f é dotata delle derivate di ogni ordine e se $\exists M, L > 0$ tali che

$$\left|f^{(k)}(x)\right| \leq M \cdot L^k, \quad \forall k = 0, 1, 2 \dots, \quad \forall x \in (a, b)$$

allora f é sviluppabile in x_0 per ogni $x_0 \in (a, b)$, per $x \in (a, b)$.

. . . .

Def. Una **curva** é un'applicazione continua $\varphi : I \to \mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$. L'immagine della curva, anche detto **sostegno**, é l'insieme dei punti per cui passa la curva, definito come $\{\varphi(t) \in \mathbb{R} | t \in I\}$.

Osservazione φ é continua se $t \to \varphi_i(t)$ é continua $\forall i = 1, 2, 3, \dots$

Osservazione A uno stesso sostegno possono appartenere varie curve.

Def. Una curva di dice **semplice** se non si auto interseca, cioé se $\varphi : \mathring{I} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é iniettiva, dove $\mathring{I}$ é I senza estremi.

Def. Una curva è derivabile se ogni componente è derivabile. Il vettore $\varphi'(t) = (\varphi'_1(t), \varphi'_2(t), \dots, \varphi'_d(t))$ è detto **vettore velocitá.**

Def. Una curva si dice **regolare** se $\varphi'(t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathring{I}$

Def. Il versore $T(t) = \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|}$ è detto **tangente**.

Def. La **lunghezza di una curva** è definita nel seguente modo:

$$L(\varphi) = \sup \begin{cases} L(\pi) \mid \pi \text{ è una poligonale inscritta} \\ \text{con punti } t_0 < t_1 < \dots < t_k < \infty \end{cases}$$

Dove la poligonale è una curva fatta di segmenti, e una poligonale inscritta è una poligonale che passa per tutti i punti di una data curva (con segmenti infinitesimali)

Th. Se $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ è una curva regolare, allora:

$$L(\varphi) = \int_a^b \mid \varphi'(t) \mid dt < +\infty$$

Osservazione Il teorema vale anche se la curva è regolare solo a tratti. In questo caso dovró spezzare l'integrale nei vari tratti.

Osservazione La lunghezza della curva non è la lunghezza del sostegno. Infatti, una curva potrebbe fare vari giri.

Def. Le curve **cartesiane** hanno il sostegno che è una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Quindi sono curve definite in questo modo: $\varnothing(t) = (t, f(t))$.

Osservazione Tutte le curve cartesiane sono semplici, in quanto essendo f una funzione, non puó avere due risultati diversi sulla stessa x.

Osservazione Se $f \in C^1$, allora $\varnothing$ è regolare: $\varnothing'(t) = (1, f'(t)) \neq 0$.

Osservazione La lunghezza delle curve cartesiane si calcola come:

$$L(\varnothing) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$$

Def. Le curve **polari** sono quelle curve che si possono esprimere come funzione dell'angolo con l'origine $\rho(\theta) : \ \to (0, +\infty)$. Quindi la curva è definita come: $\varnothing(\theta) = (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta)$

Osservazione Tutte le curve polari sono regolari, in quanto l'angolo cambia sempre.

Osservazione La lunghezza delle curve polari si calcola come:

$$L(\varnothing) = \int_a^b \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} d\theta$$

Def. Si definiscono le seguenti **funzioni iperboliche**:

$$\cosh = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \text{pari}, \quad \text{Immagine: } [1, +\infty]$$

$$\sinh = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad \text{dispari}, \quad \text{Immagine: } [-\infty, +\infty]$$

Si chiamano iperbolici perché se applico la seguente mappatura:

$$\cos \to \cosh \qquad \sin \to \sinh$$

$$\cos^2 \to \cosh^2 \qquad \sin^2 \to -\sinh^2$$

Tutte le identitá trigonometriche sono ancora verificate.

Osservazione

$$\cosh' = \sinh \qquad \sinh' = \cosh$$

Osservazione

$$arccosh(x) = log(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$arcsinh(x) = log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Def. Due curve $\varnothing : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ e $\varphi : [c, d] \to \mathbb{R}^d$ si dicono **equivalenti** se esiste una funzione $h : [c, d] \to [a, b]$ continua e univoca tale che $\varnothing(h(t)) = \varphi(t), \quad \forall t \in [c, d]$.

Th. Due curve equivalenti hanno la stessa lunghezza.

Def. $\underline{P}$ é **punto interno** di E se $\exists r > 0$ t.c. $B(\underline{P}, r) \subseteq E$.
$\underline{P}$ é **punto esterno** di E se $\underline{P}$ é interno a E^c.
$\underline{P}$ é **punto di frontiera** se $\forall r > 0$, $B(\underline{P})$ contiene sia punti di E che del complementare.
$\underline{P}$ é **punto di accumulazione** per E se $\forall r > 0, (B(\underline{P}, r) \backslash \{\underline{P}\} \cap E \neq \emptyset$.
Ogni punto di E che non é di accumulazione si dice **punto isolato**.

Def. Un insieme E si dice **aperto** se ogni suo punto é interno.
Un insieme E si dice **chiuso** se il suo complementare é aperto.
Un insieme E é **limitato** se $\exists r > 0$ t.c. $E \subseteq B(\underline{0}, r)$.
La **chiusura** di un insieme E é il piú piccolo insieme chiuso E' tale che $E \subseteq E'$.

Osservazione L'unione e l'intersezione di due insiemi aperti é un insieme aperto. L'unione e l'intersezione di due insiemi chiusi é un insieme chiuso.

Def. Sia $\underline{x_0} \in A \subseteq \mathbb{R}^n$, con $\underline{x_0}$ punto di accumulazione di A. Sia $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^d$, e sia $\underline{L} = (L_1, \dots, L_d) \in \mathbb{R}^d$. Definiamo:

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{x_0}} f(\underline{x}) = \underline{L} \quad \text{se}$$

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che se $|\underline{x} - \underline{x_0}| < \delta$ allora $|f(\underline{x}) - \underline{L}| < \epsilon$

Osservazione $f(\underline{x}) \to \underline{L}$ se e solo se $f_i(x) \to L_i, \quad \forall i = 1, \dots, d$
Manca la dimostrazione!

Osservazione Per dimostrare che non esiste il limite devo trovare due successioni $\underline{P_n} \to c$ e $\underline{Q_n} \to c$ tali che $f(\underline{P_n}) \to \underline{l}$ e $f(\underline{Q_n}) \to \underline{l'}$. Se $\underline{l} \neq \underline{l'}$, allora il limite non esiste.

Osservazione Se bisogna calcolare un limite per $(x, y) \to (x_0, y_0)$ invece che $(x, y) \to (0, 0)$, basta che impongo $x' = x - x_0, y' = y - y_0$, e scrivo la funzione $f(x, y) = f'(x', y')$. Poi calcolo il limite di f' per $(x', y') \to (0, 0)$.

Osservazione Per calcolare il limite di una funzione a piú variabili spesso aiuta molto imporre $y = x^\beta$, con il giusto β.

Osservazione Quando si deve calcolare anche il limite in base a un dato valore α, attenzione a non fare maggiorazioni improprie perché si potrebbero perdere alcuni valori di α.

Osservazione Alcune maggiorazioni utili:

$$2xy \leq x^2 + y^2 \quad (\text{poiché}(x - y)^2 \geq 0)$$

Osservazione Alcuni limiti notevoli utili:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1 - \cos x(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Osservazione Se il limite non si riesce a tirare fuori da una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$, allora si puó usare l'Hopital (vale anche in $\mathbb{R}^n$

Def. Un punto (x, y) puó essere espresso anche in base a un altro (x_0, y_0) attraverso le coordinate polari. In questo caso, si ottiene::

$$x = x_0 + \rho\cos\theta$$

$$y = y_0 + \rho\sin\theta$$

Quindi $(x, y) \to (x_0, y_0) \equiv |(x - x_0, y - y_0)| \to 0 \equiv \rho \to 0$
.

Osservazione Attenzione! Non si fissare θ e poi ottenere il limite, poiché il limite deve essere costante per ogni θ!
Se il limite non é costante, é molto probabile che non esiste.

Osservazione Nelle coordinate polari, ρ é sempre positivo, dato che rappresenta la distanza dall'origine.

Def. Sia $f :\in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ e $\underline{c}$ punto di accumulazione in A (con $\underline{c} \in A$. Si dice che f é **continua** in A se:
$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che se $|\underline{x} - \underline{c}| < \delta$ allora $|f(\underline{x}) - f(\underline{c})|_{\mathbb{R}^d} < \epsilon$

Osservazione Come per i limiti, vale che $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ é continua in $\underline{c} \in A$ se e solo se $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é continua $\forall i = 1, 2, \dots d$, cioé se sono continue tutte le sue componenti.

Osservazione Data $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$, con A aperto /chiuso, si ha che se f é continua, allora anche f^{-1} é aperto / chiuso, rispettivamente.

Def. Data $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $\underline{x_0}$ punto interno, e dato $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, con $|v| = 1$, allora la **derivata direzionale** di f in x_0 verso $\underline{v}$ é il seguente limite (se esiste):

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\underline{x_0} + t\underline{v}) - f(\underline{x_0})}{t} \equiv D_{\underline{v}} f(x_0) \equiv \frac{df}{d\underline{v}}(\underline{x_0}) \equiv d_{\underline{v}} f(\underline{x_0})$$

Osservazione Potrebbe essere comodo scrivere $\underline{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$.

Osservazione Ponendo $\varphi(t) = f(\underline{x_0} + t\underline{v})$, si ottiene $D_{\underline{v}} f(x_0) = \varphi'(0)$.

Def. Prende il nome di **derivata parziale** di f in x_0 rispetto alla variabile x_i la derivata direzionale usando $\underline{v} = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0, 0)$, con l'1 all'i-esima posizione.

Def. Se nel punto x_0 esistono tutte le derivate parziali (quindi f é derivabile lungo tutti gli assi), allora si dice che f é **derivabile** in x_0. Se risulta derivabile per $\forall x_0 \in A$, allora si dice derivabile in A.

Osservazione Per verificare l'esistenza delle derivate parziali, bisogna usare il limite del rapporto incrementale.

Def. Il **gradiente** é il vettore formato dalle derivate parziali:

$$Df(x_0) = \nabla f(x_0) = \left(\frac{df}{d\underline{x_0}} f(x_0), \frac{df}{d\underline{x_1}} f(x_0), \dots, \frac{df}{d\underline{x_n}} f(x_0)\right)$$

Def. Data $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice $f \in C^1$ in x_0 se é derivabile e ∇f é continuo in x_0 .

Osservazione Ricordarsi che il gradiente é continuo se e solo se tutte le derivate parziali sono continue!

Def. Il piano tangente a una superficie si trova con:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{df}{dx}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{df}{dy}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Osservazione In sostanza mi fermo al primo passo di approssimazione dello sviluppo di Taylor, dove approssimo una superficie con un piano

. . . .

Def. Data $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con A aperto, con $x_0 \in A$, f si dice **differenziabile** in x_0 se esiste $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ tale che:
$f(\underline{x_0} + \underline{h}) - f(\underline{x_0}) = \underline{a} \cdot \underline{h} + o(|\underline{h}|)$, dove $\underline{h} \in \mathbb{R}^n$ e $\underline{h} \to 0$
Inoltre, f si dice differenziabile in A se é differenziabile in $\forall x_0 \in A$.

Osservazione Per verificare la differenziabilitá di una funzione in un punto $\underline{x_0}$, verificare che il seguente limite valga 0:

$$\lim_{\underline{h}\to 0} \frac{f(\underline{x_0} + \underline{h}) - f(\underline{x_0}) - \nabla f(\underline{x_0}) \cdot \underline{h}}{|\underline{h}|}$$

Def. Il **differenziale** di f in x_0 é l'applicazione lineare $df(\underline{x_0}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \underline{h} \to \underline{a} \cdot \underline{h}$

Th. Data $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con A aperto, con $\underline{x_0} \in A$, se f é differenziabile in $\underline{x_0}$, allora vale che:
- f é continua in $\underline{x_0}$
- f é derivabile direzionalmente in $\underline{x_0}$, in particolare é derivabile e $\underline{a} = \nabla f(\underline{x_0})$.
- $D_{\underline{v}} f(\underline{x_0}) = \nabla f(\underline{x_0}) \cdot \underline{v}$

Def. Data $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $\underline{x_0} \in A$, con f differenziabile in $\underline{x_0}$, allora:
$D_{\underline{v}} f(\underline{x_0}) = \nabla f(\underline{x_0}) \cdot \underline{v} = |\nabla f(\underline{x_0})||\underline{v}|\cos\beta = |\nabla f(\underline{x_0})|\cos\beta$ é massimo quando $\cos\beta = 1$, cioé quando $\beta = 0$, cioé quando $\nabla f(\underline{x_0})$ é parallelo a $\underline{v}$ (e hanno lo stesso verso).
In questo caso vorrá dire che:

$$\underline{v} = \frac{\nabla f(\underline{x_0}))}{|\nabla f(\underline{x_0}))|}$$

Def. Se f é differenziabile in $\underline{x_0}$, allora l'iperpiano tangernte si ottiene come:

$$x_{n+1} = f(\underline{x_0}) + \nabla f(\underline{x_0})(\underline{x} - \underline{x_0})$$

Th. Il teorema del **differenziale totale** dice che data $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se f é derivabile e $f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n}$ sono continue in $\underline{x_0}$, allora f é differenziabile in $\underline{x_0}$.
Corollario: se $f \in C^1(A)$, allora f é differenziabile in A.

Osservazione Non è detto che se $f \notin C^1$ allora non è differenziabile.

Osservazione Il teorema dice che se f é differenziabile in $\underline{x_0}$, allora

$$D_v f(\underline{x_0}) = \nabla f(\underline{x_0}) \cdot \underline{v}, \quad \forall \underline{v}$$

Questo vuol dire che se il gradiente é 0, e una delle derivate direzionali é diversa da 0, allora vuol dire che la funzione non é differenziabile.

Def. Data $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, si dice che f é derivabile/differenziabile $/C^m$ se lo é componente per componente.

Def. Siano le seguenti funzioni:

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}^k \qquad \text{con } f \text{ differenziabile in } A$$

$$g : B \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d \qquad \text{con } g \text{ differenziabile in } B$$

Se f é derivabile, allora si definisce **jacobiana** la matrice $k \times n$ delle derivate parziali:

$$J_f(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} & \dots & \frac{\delta f_1}{\delta x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\delta f_k}{\delta x_1} & \dots & \frac{\delta f_k}{\delta x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f_1(x_0) \\ \dots \\ \nabla f_k(x_0) \end{bmatrix}$$

Sia $h : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$, definita come $\underline{x} \to g(f(\underline{x}))$.
Allora h é differenziabile in A e inoltre:

$$J_h(\underline{x}) = J_g(f(\underline{x})) \cdot J_f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \frac{\delta h_i}{\delta x_j} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

A questo punto possiamo calcolarci l'elemento generico:

$$\frac{dh_i}{dx_j} = \sum_{s=1}^k d_s g_i(f(\underline{x})) \cdot d_j f_s(\underline{x}), \quad \forall i = 1, \dots, d \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Def. Data $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con $g \in C^1$, si definisce **l'insieme di livello** come:

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = c\right\} \text{ con } c \in \mathbb{R}$$

Osservazione Per valori di c "buoni", l'insieme di livello é il sostegno di una curva regolare.

Prop. Il gradiente di una funzione é ortogonale al suo insieme di livello.

Def. Si dice matrice **Hessiana** la matrice formata da tutte le possibili derivate seconde:

$$H_f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} f_{x_i x_j}(\underline{x}) & \dots & f_{x_i x_j}(\underline{x}) \\ f_{x_i x_j}(\underline{x}) & \dots & f_{x_i x_j}(\underline{x}) \\ f_{x_i x_j}(\underline{x}) & \dots & f_{x_i x_j}(\underline{x}) \end{bmatrix}$$

Osservazione In generale, la matrice non é simmetrica!

Def. Data $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con A aperto, si dice che $f \in C^2$, se é derivabile due volte e le derivate seconde sono continue in A

Th. Il **Teorema di Schwartz** dice che se $f \in C^2$, l'ordine di derivazione non conta e la matrice Hessian é simmetrica. In generale $f \in C^k$ le derivate di ordine k non dipendono dall'ordine di derivazione.

Th. Il **teorema di Lagrange** dice che: sia $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con A aperto, $f \in C^1(A)$, se $\underline{x_0} \in A$, $\underline{x} \in A$, tale che il segmento é in A, $\exists\sigma$ appartenente al segmento $\underline{x}, \underline{x_0}$ tale che:

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x_0}) + \nabla f(\sigma)(\underline{x} - \underline{x_0})$$

Che non é altro che lo sviluppo di Taylor al primo ordine con resto di Lagrange.

Th. Il **teorema di Lagrange** dice che: sia $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con A aperto, $f \in C^2(A)$, se $\underline{x_0} \in A$, $\underline{x} \in A$, tale che il segmento é in A, $\exists\sigma$ appartenente al segmento $\underline{x}, \underline{x_0}$ tale che:

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x_0}) + \nabla f(\sigma)(\underline{x} - \underline{x_0}) + \frac{1}{2}(H_f(\underline{x_0} + \varepsilon(\underline{x} - \underline{x_0}))(\underline{x} - \underline{x_0}))(\underline{x} - \underline{x_0})$$

Che non é altro che lo sviluppo di Taylor al secondo ordine con resto di Lagrange.

Osservazione con il resto di Peano:

$$f(\underline{x_0}) + \nabla f(\sigma)(\underline{x} - \underline{x_0}) + \frac{1}{2}(H_f(x_0 + \varepsilon(x - x_0))(x - x_0))(x - x_0) + o(|\underline{x} - \underline{x_0}|^2)$$

Def. Un insieme $A \subseteq R^n$ si dice **connesso** se le condizioni

$$\exists A_1, A_2 \text{ aperti t.c.} \quad A_1 \cup A_2 = A, \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

implicano che uno dei due insiemi aperti é vuoto.

Th. Dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e connesso, allora $\forall \underline{x}, \underline{y} \in A$ esiste una curva $\varnothing \in C^1$, definita come $\varnothing : [0, 1] \to A$ che collega $\underline{x}$ con $\underline{y}$, cioé $\varnothing(0) = \underline{x}, \varnothing(1) = \underline{y}$. A allora é un insieme **connesso ad archi**.

Prop. $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con A aperto e connesso, con f differenziabile su A, se $\nabla f = 0$ in A allora f é costante su A.

. . . .

Def. $x_0 \in A$ si dice punto di **massimo/minimo relativo** (o locale) se

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ oppure } f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \cap A$$

Dove $B_\delta(x_0)$ é una palla di raggio δ di centro x_0.

Prop. Se x_0 é punto di massimo/minimo, e punto interno di A, e f é derivabile in A allora $\nabla f(x_0) = 0$

Osservazione Non vale il viceversa! Se il gradiente é nullo, potrebbe anche essere che x_0 non é punto di massimo/minimo!

Def. Se $\nabla f(x_0) = 0$ ma x_0 non é punto di massimo/minimo, allora si dice che x_0 é **punto di sella**.

Def. Introduciamo la seguente notazione:

$$(H\underline{v}) \cdot \underline{v} = (H\underline{v}, \underline{v}) = \sum_{i,j=1}^n h_{i,j} v_i v_j$$

Prop. Se la matrice H é simmetrica, allora é diagonalizzabile e ha autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Def. La matrice H si dice:

Definita positiva	se $(H\underline{v}, \underline{v}) > 0, \forall \underline{v}$	cio
Definita negativa	se $(H\underline{v}, \underline{v}) < 0, \forall \underline{v}$	cio
Semidefinita positiva	se $(H\underline{v}, \underline{v}) \geq 0, \forall \underline{v}$	cio
Semidefinita negativa	se $(H\underline{v}, \underline{v}) \leq 0, \forall \underline{v}$	cio
Indefinita	se $\exists v, w$ t.c. $(Hv, v) >$ cioé se $\exists \lambda_1, \lambda_2$ t.c. λ_1	

Prop. Se H é definita positiva, allora $(H\underline{v}, \underline{v}) \geq \lambda_{min}|\underline{v}|^2, \forall \underline{v}$.
Se H é definita negativa, allora $(H\underline{v}, \underline{v}) \leq \lambda_{max}|\underline{v}|^2, \forall \underline{v}$.

Prop. Se $f \in C^2$, $x_0 \in A$, x_0 punto interno e $\nabla f(x_0) = 0$:
Se x_0 é un minimo locale, allora $H_f(x_0)$ é semidefinita positiva.
Se x_0 é un massimo locale, allora $H_f(x_0)$ é semidefinita negativa. Se $H_f(x_0)$ é definita positiva, allora x_0 é un massimo locale.
Se $H_f(x_0)$ é definita negativa, allora x_0 é un minimo locale. Se $H_f(x_0)$ é indefinita, allora x_0 é un punto di sella.

Prop. Per n = 2, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$ac - b^2 = \det A = \lambda_1\lambda_2, \quad a + c = \text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$
Se detA <, A è indefinita, e $\underline{x_0}$ punto di sella.
Se detA = 0, sappiamo che un autovalore è 0, ma niente altro. (al massimo sappiamo che A è semidefinita positiva o negativa)
Se detA > 0, e tr(A) > 0, A è definita positivamente, e $\underline{x_0}$ è punto di minimo.
Se detA > 0, e tr(A) < 0, A è definita negativamente, e $\underline{x_0}$ è punto di massimo.

Osservazione Se detA $> 0 \implies ac > b^2 \implies a$ e c hanno lo stesso segno. Quindi, per vedere il segno della traccia, mi basta osservare semplicemente il segno di a.

Osservazione Vale anche il viceversa, cioè
Se $\underline{x_0}$ è punto di minimo, allora detA ≥ 0, tr(A) ≥ 0
Se $\underline{x_0}$ è punto di massimo allora detA ≤ 0, tr(A) ≤ 0.

Osservazione La matrice A è simmetrica poichè per ipotesi $f \in C^2$.

Def. I **minimi** principali **nord-ovest** di una matrice sono le sottomatrici quadrate formate a partire dall'angolo in alto a sinistra:

$$A_1 = [a_{11}], \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \dots$$

Prop. Se A è simmetrica, sappiamo che:
A è definita positiva $\Leftrightarrow \det A_k > 0$ per $k = 1 \dots n$.
A è definita negativa $\Leftrightarrow \det A_k(-1)^k > 0$ per $k = 1 \dots n$.

Def. Data $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_m \in A$ è punto di **minimo assoluto** per f in A se $f(\underline{x_m}) \leq f(\underline{x}), \forall \underline{x} \in A$ e $m = f(\underline{x_m})$ è detto minimo assoluto. Uguale per il massimo.

Th. Il **Teorema di Weierstrass** dice che $f : K \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con f continua, con K compatto di $\mathbb{R}^n$ (cioé chiuso e limitato), allora f ammette massimo e minimo assoluti in K.

Def. Data $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = +\infty$ allora la funzione si dice **coerciva**.

Prop. Un corollario al teorema di Weierstrass: se una funzione é coerciva, allora ammette minimo assoluto. (Vale anche il viceversa: se una funzione é coerciva a $-\infty$, allora ammette massimo assoluto).

Th. Il **Teorema dei valori intermedi** dice che data $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua, con A connesso, e dati x e $y \in A$ (supponendo $f(x) \leq f(y)$). Allora:

$$\forall c \in [f(x), f(y)], \quad \exists z \in A \text{ t.c. } f(z) = c$$

Def. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é convesso se dati due punti dell'insieme, il segmento che li unisce é tutto compreso nell'insieme. Formalmente:

$$(\lambda x + (1 - \lambda)y) \in A, \quad \forall x, y \in A, \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

Def. Una funzione $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con A aperto e connesso, si dice **convessa** se

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \ \forall x, y \in A, \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

cioé se tutti i valori della funzione stanno sotto il segmento che collega x e y.

Osservazione - se f é convessa, allora f é continua.
- se f é convessa e differenziabile, allora il piano tangente alla funzione sta tutto sotto alla funzione. Formalmente $f(x) \geq f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0), \quad \forall x, x_0 \in A$.
- se f é convessa ed é anche $C^2(A)$, allora $H_f(x)$ é semidefinita positiva.

Osservazione se f é convessa, e ha un minimo, allora quel minimo é assoluto (Per esempio se $f \in C^1$ allora in x_0 punto minimo $\nabla f(x_0) = 0$ e $f(x) \geq f(x_0)$ per osservazione precedente)

Osservazione In generale, se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é convessa e crescente, allora la funzione in $\mathbb{R}^n$ definita come $f(x) = g(|x|)$ é convessa.

integrali $\sin(x)$ é una funzione **dispari** $\cos(x)$ é una funzione **pari**

Rigurda gli spazi topologici. PRIMA dell'esonero.

Alcuni limiti notevoli utili:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\frac{1-\cos x(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}=\frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)}=\frac{\sin x}{1+\cos x}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Alcune maggiorazioni utili:

$$2xy\leq x^2+y^2 \quad (\text{poiché}(x-y)^2\geq 0)$$

Esempi di funzioni sviluppabili in Taylor:

$$log(1+x)=\sum\frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} \qquad \frac{1}{1+x}=\sum x^k, \quad x\in(-1,1)$$

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum(-1)^k x^{2k} \qquad arctan(x)=\sum\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$\frac{-1}{(1-x)^{-2}}=\sum kx^{k-1} \qquad e^x=\sum\frac{x^n}{n!}$$

$$sin(x)=\sum\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad cos(x)=\sum\frac{(-1)^n 2^n}{(2n)!}$$

Notare che l'ultima é stata ottenuta integrando la terza.

In linea di massima, ognuna di queste puó essere derivata/integrata a piacere.