Analisi Vettoriale 2017

Def. Lo spazio di tutte le $n-uple$ di numeri reali forma uno **spazio vettoriale** di dimensione n su $\mathbb{R}$, indicato con $\mathbb{R}^n$. Su esso sono definite le operazioni di somma e prodotto:

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots) \tag{1}$$

$$a\mathbf{x} = (ax_1, ax_2, \dots) \tag{2}$$

Def. Il **prodotto scalare** si definisce in questo modo: Ha la proprieta' simmetrica, ed è lineare rispetto al primo termine:

$$\langle \mathbf{x},\ \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{y},\ \mathbf{x}\rangle \tag{3}$$

$$\langle \mathbf{x}+\mathbf{a},\ \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x},\ \mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{a},\ \mathbf{y}\rangle \tag{4}$$

Def. Una **norma** è una funzione che assegna ad ogni vettore dello spazio vettoriale, tranne lo zero, una lunghezza positiva. Segue le seguenti proprieta':

$$||x|| \geq 0 \tag{5}$$

$$||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \tag{6}$$

$$||\lambda x|| = |\lambda| ||x|| \tag{7}$$

$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y|| \tag{8}$$

Alcune norme esemplari sono la norma 1: $||x||_1 = \sum |x_i|$ e la norma 2 (euclidea): $||x||_2 = \sqrt{\sum x_i^2}$

Osservazione Due norme $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$ si dicono equivalenti se $\exists c_1, c_2$ tali che $c||x||_1 \leq ||x||_2 \leq C||x||_1,\ \forall x \in V$

Osservazione In $\mathbb{R}^n$, tutte le norme sono equivalenti.

Def. La **distanza** è una qualsiasi funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ che soddisfa le seguenti proprieta':

$$d(x,y) \geq 0 \tag{9}$$

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \tag{10}$$

$$d(x,y) = d(y,x) \tag{11}$$

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \tag{12}$$

In realta' basta che sono verificate la seconda e la quarta per verificare anche la prima e la terza. Se una distanza segue queste proprieta':

$$d(x,y) = d(x+a, y+a) \tag{13}$$

$$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y) \tag{14}$$

Allora la funzione $||x|| := d(x,0)$ è una norma.

Osservazione La norma euclidea induce una distanza: $d(x,y) = ||\ x-y\ ||_2$

Def. Uno **spazio metrico** è un insieme di elementi detti punti, nel quale è definita una funzione distanza, detta anche metrica.

Def. La disugualianza di **Cauchy-Schwartz** dice che il valore assoluto del prodotto scalare di due elementi è minore o uguale al prodotto delle loro norme: $|\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle| \leq ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||$

Def. La successione $f_n(x)$ **converge** per $x \in E$ alla funzione $f(x)$ se $\forall x_0 \in E$ la successione numerica $f_n(x_0)$ converge a $f(x_0)$, cioè:

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon \quad \forall \epsilon > 0, \forall x_0 \in E \tag{15}$$

Def. La successione $f_n(x)$**converge uniformemente** alla funzione $f(x)$ se $\forall \epsilon > 0$ esiste un'unica soglia n_ϵ valida per tutti i punti x_0, cioè:

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon \quad \forall \epsilon > 0, \forall x_0 \in E, \forall n > n_\epsilon \tag{16}$$

$$\text{oppure: } \max_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \tag{17}$$

Th. Il teorema di **Bolzano-Weierstrass** afferma che in uno spazio euclideo finito dimensionale $\mathbb{R}^n$ ogni successione reale limitata ammette almeno una sottosuccessione convergente.

Th. Il teorema della continuita' del limite afferma che il limite $f(x)$ di una successione $f(x)$ di funzioni continue uniformemente convergenti in un intervallo I è una funzione continua in I.

Dimostrazione Prendiamo due punti $x_1 \simeq x_2$, e poichè stiamo parlando di funzioni continue, vale che $f(x_1) \simeq f(x_2)$.
Per la proprieta' triangolare si ha che:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f_n(x_2)| + |f_n(x_1) - f_n(x_2)| + +f_n(x_2) - f(x_2)|$$

Siccome il primo e il terzo modulo a secondo membro sono minori di ϵ:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq 2\epsilon + |f_n(x_1) - f_n(x_2)|$$

Quindi anche la funzione limite $f(x)$ possiede il requisito tipico delle funzioni continue di prendere *valori vicini su punti vicini*

Th. Passaggio al limite sotto il segno di integrale:
Sia f_n una successione di funzioni continue su $[a,b]$ tali che $f_n \rightrightarrows f$ (uniformemente), allora:

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

Dimostrazione Bisogna dimostrare che $\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_\epsilon$ tale che::

$$\left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| < \epsilon, \quad \forall n \geq n_\epsilon$$

Siccome le f_n sono continue, sono tutte integrabili. Inoltre, siccomeme $f_n \rightrightarrows f$, per il teorema di continuitá del limite, f è continua e quindi integrabile

$$\left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx \tag{18}$$

$$\leq \int_a^b \sup_{x\in[a,b]} |\ f_n(x) - f(x)\ |\ dx \tag{19}$$

$$\leq |\ b-a\ | \sup_{x\in[a,b]} |\ f_n(x) - f(x)\ | \quad \to 0 \tag{20}$$

Th. Passaggio al limite sotto il segno di derivata:

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

Dimostrazione Manca!

Def. Una successione x_n in uno spazio metrico (X,d) prende il nome di **successione di Cauchy** se esiste un N tale che:

$$d(x_m, x_n) < \epsilon \quad \forall m,n \geq N, \forall \epsilon > 0$$

In sostanza significa che al tendere all'infinito, lo spazio tra due elementi della successione tende ad annullarsi.

Def. Uno **spazio metrico completo** è uno spazio in cui tutte le successioni di Cauchy sono convergenti ad un elemento dello spazio. Viene anche chiamato **spazio di Banach**.

Osservazione Lo spazio metrico $\mathbb{Q}$ dei razionali con la metrica standard non è completo. Infatti, se prendo la successione i troncamenti di $\sqrt{2}$ definita come $x_n = \frac{\lfloor 10^n \sqrt{2} \rfloor}{10^n}$, è una successione di Cauchy $(1, 1.4, 1.41, \dots)$ che converge a $\sqrt{2}$, un numero non razionale.
Invece, un qualsiasi sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^n$ è completo.

Osservazione $\mathbb{R}^n$ é completo con la norma euclidea. Siccome poi in $\mathbb{R}^n$ tutte le norme sono equivalenti, qualunque spazio normato in $\mathbb{R}^n$ é completo.
Segue anche che tutti gli spazi metrici in $\mathbb{R}^n$ in cui la distanza proviene da una norma sono completi.

Def. Una **funzione lipschitziana** è una funzione di variabile reale caratterizzata da *crescita limitata*, nel senso che il rapporto tra variazione di ordinata e variazione di ascissa non può mai superare un valore fissato definito come costante di Lipshitz.

Def. Si definisce **contrazione** una funzione $f : X \to X$ tale che esiste L che soddisfa:

$$d(f(x), f(y)) \leq Ld(x,y), \quad L < 1$$

In altre parole, f è una contrazione se *contrae* la distanza tra due elementi x e y.

Osservazione Ogni contrazione è lipschitziana, e quindi anche continua!

Th. Il **teorema di Banach-Cacciopolli** dice che dato uno spazio metrico completo non vuoto (X,d), e una sua contrazione f, allora la mappa f ammette uno e un solo punto fisso $x^* \in X \mid x^* = f(x^*)$

Dimostrazione 1) Dimostriamo prima l'esistenza, definendo la successione ricorrente:

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \dots, x_n = f(x_{n-1})$$

Usiamo la contrazione per valutare la distanza tra due elementi successivi:

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq Ld(x_{n-1}, x_n) = \\ Ld(f(x_{n-2}), f(x_{n-1})) \leq L^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq \dots \leq L^n d(x_0, x_1) \tag{21}$$

Prendiamo due numeri $m, n \in \mathbb{N}, m < n$, e con la disugualianza triangolare:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_m) \leq \sum_{i=m}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq \\ \leq d(x_0, x_1) \sum_{i=m}^{n-1} = d(x_0, x_1) \sum_{i=0}^{n-m-1} L^{i+m} = L^m d(x_0, x_1) \sum_{i=0}^{n-m-1} L^i \tag{22}$$

Siccome $0 < L < 1$, la serie geometrica converge:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_0, x_1) \frac{L^m}{1-L} \to 0 \quad \text{per} \quad m \to 0$$

che soddisfa il criterio di Cauchy per le successioni. Dato che per ipotesi X è completo, sappiamo che la successione converge. Siccome f è un'applicazione continua:

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \quad \Longrightarrow \quad f(x^*) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*$$

Percio' abbiamo dimostrato che $f(x^*) = x^*$.
2) Passiamo ora all'unicita', che dimostriamo per assurdo dicendo che esiste un secondo punto $f(y^*) = y^*$:

$$d(x^*, y^*) \leq d(f(x^*), f(y^*)) \leq Ld(x^*, y^*) \quad L \geq 1$$

che contraddice l'ipotesi della contrazione $L < 1$.

Def. La **serie** di funzioni $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ non é altro che la successione $\{s_n\}_k$ delle sue somme parziali.

Def. La **convergenza puntuale per le serie** di funzioni si verifica se $\forall x \in I, \forall \epsilon > 0, \exists n_{\epsilon,x} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| < \epsilon, \quad \forall n > n_\epsilon$$

Def. La **convergenza uniforme delle serie** di funzioni si verifica se $\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sup_{x\in I} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| < \epsilon$$

Osservazione La convergenza uniforme implica quella puntuale.

Osservazione Se voglio dimostrare che una serie non converge, basta che trovo un n per cui il sup non é 0:

$$\sup_{x\in I} \mid f_{n+1}(x) \mid \nrightarrow 0$$

Osservazione Se ho una serie della forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f_k(x), \quad \text{con} \quad f_k(x) \geq 0, f_{k+1}(x) \geq f_k(x), f_k(x) \to 0$$

allora converge puntualmente $\forall x$ per Leibnitz.
Tuttavia, se ho che $f_k(x) \rightrightarrows 0$, allora converge anche uniformemente, poiché

$$\left| \sum_{k=n+1} (-1)^k f_k(x) \right| \leq \sup \mid f_{n+1}(x) \mid \to 0$$

Def. La serie $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$ **converge assolutamente** in I se converge (puntualmente) in I la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \mid f_k(x) \mid < +\infty$

Osservazione La convergenza assoluta implica quella puntuale.
Questo é verificabile poichè per il teorema del confronto di serie, vale che $- \mid f_k(x) \mid \leq f_k(x) \leq \mid f_k(x) \mid$

Osservazione Se $f_k \geq 0$, allora la convergenza puntuale é uguale a quella assoluta.

Def. La serie f_k si dice **totalmente convergente** in I se $\forall k, \exists M_k \geq 0$ tale che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} M_k < \infty \quad \text{e} \quad \mid f_k(x) \mid \leq M_k, \quad \forall x \in I$$

Osservazione La serie é totalmente convergente se e solo se posso prendere $M_k = \sup_{x\in I} \mid f_k(x) \mid$, cosa che poi mi é molto utile fare quasi sempre.

Def. Il **criterio di Cauchy per le serie** dice che la successione $\{s_n\}_n$ converge se e solo se é di Cauchy.

Prop. Se una serie converge totalmente, allora converge anche uniformemente.

Dimostrazione Sia $M_k \geq 0$ tale che $M_k < +\infty$ e $\mid f_k(x) \mid \leq M_k \forall x \in I$.
Uso il criterio di Cauchy uniforme:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq \mid f_{n+1}(x) \mid + \dots + \mid f_{n+p}(x) \mid \leq \\ \leq M_{n+1} + \dots + M_{n+p} = \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k \tag{23}$$

Ma dato che quest'ultima serie converge in $\mathbb{R}$ uso cauchy per serie numeriche: $\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon$ tale che $\sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \epsilon, \quad \forall n > n_\epsilon, \quad \forall p \in \mathbb{N}$

E quindi $\sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists n_\epsilon \text{t.c.} \quad \forall x \in I, \forall n > n_\epsilon, \forall p \in \mathbb{N}$

Th. Il **teorema della continuita' del limite per le serie di funzioni** dice che la somma di una serie di funzioni continue (cioè f_k continua $\forall k$) che converge uniformemente é una funzione continua. Questa somma é $s(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$

Th. Il **teorema di integrazione per serie** dice che se $f_k[a,b] \to \mathbb{R}$ continue, e se $s_n(x) \rightrightarrows s(x)$ in $[a,b]$, allora:

$$\int_a^b s(x)dx = \int_a^b \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^b f_k(x)dx$$

Th. Il **teorema di derivazione per serie** dice che data $f_k : I \to \mathbb{R}$, con $f_k \in C^1(I)$, e dato $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$, se $S'_n = \sum_{k=1}^n f'_k(x)_k$ converge uniformemente, e $\exists x_0 \in I$ tale che $S_n(x_0)$ converge (in $\mathbb{R}$), allora:

$$S_n(x) \rightrightarrows \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x), \quad \text{e} \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$$

Def. Si dice **serie di potenze** una serie di funzioni di questo genere:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k (x - x_0)^k$$

Assumiamo $x_0 = 0$, altrimenti basta fissare $y = (x - x_0)$

Osservazione Una serie di potenze converge sempre in $x = 0$.

Osservazione Se una serie di potenze converge in $\xi \in \mathbb{R}$, allora converge (assolutamente) in $|x| < |\xi|$.
Analogamente, se *non* converge in $\xi' \in \mathbb{R}$, allora non converge in $|x| > |\xi'|$.

L'insieme dei valori dove la serie converge prende il nome di **insieme di convergenza**.

Osservazione L'insieme di convergenza puó essere solo delle seguenti forme: $\{0\}, (-\rho, \rho), [-\rho, \rho), [-\rho, \rho], (-\rho, \rho], \mathbb{R}$, dove ρ é il raggio di convergenza

Osservazione La definizione formale del raggio di convergenza é questa: $\rho = \sup\{|x| \mid x \in A\}$, dove A é l'insieme di convergenza.

Def. Il **criterio della radice** dice che il raggio di convergenza $\rho \geq 0$ di una serie di potenze é uguale a $\frac{1}{l}$ dove

$$l = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

Osservazione Il limsup é il limite maggiore di tutte le possibili sottosuccessioni. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass, esiste sempre almeno una sottosuccessione convergente, e quindi esiste sempre il limsup.

Def. Il **criterio del rapporto** dice che data una serie di potenze, se esiste

$$l = \lim_{k\to+\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$$

allora il raggio di convergenza é $\rho = \frac{1}{l}$

Th. Il **teorema di Abel** dice che se una serie numerica $\sum_k^{\infty} a_k \rho^k$ con $\rho > 0$ converge, allora la serie di potenze $\sum_k^{\infty} a_k x^k$ converge uniformemente in $[-\rho + \delta, \rho]$, $\forall \delta > 0$.
Se invece $\rho < 0$, allora la serie converge uniformemente in $[-\rho, \rho - \delta]$, $\forall \delta > 0$.

Def. Data una serie di potenze, si dice **serie derivata** la serie:

$$\sum_k^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

Th. Il **raggio di una serie e della sua derivata** é lo stesso.

Dimostrazione Consideriamo $\sum ka_k k^k = x \sum ka_k x^{k-1}$. Il raggio di convergenza di queste due serie é lo stesso poiché la parte indipendente da x é la stessa. Confrontiamo $\sum ka_k x^k$ con $\sum a_k x^k$, usando il criterio della radice. Anche qui i due raggi di convergenza sono uguali poiché $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{k|a_k|}$

Th. Se una serie ha raggio di convergenza $\rho > 0$, allora sia la derivata che l'integrale della somma della serie hanno lo stesso raggio di convergenza ρ.

Def. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}; \quad f \in C^\infty(I)$, si dice **sviluppabile in serie di Taylor** se é possibile scriverla nella forma

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

con x_0 fissato e $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, per $\rho > 0$.
Se in particolare $x_0 = 0$, allora prende il nome di **serie di MacLaurin**.

Osservazione Calcolando le derivate in x_0 otteniamo i termini a_k:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad \forall k > 0$$

Osservazione Esempi di funzioni sviluppabili in Taylor:

$$log(1+x) = \sum \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} \qquad \frac{1}{1+x} = \sum x^k, \quad x \in (-1,1)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum x^{2k} \qquad arctan(x) = \sum \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$\frac{-1}{(1-x)^{-2}} = \sum kx^{k-1} \qquad e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$$

$$sin(x) = \sum \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} \qquad cos(x) = \sum \frac{(-1)^n 2^n}{(2n)!}$$

Notare che l'ultima é stata ottenuta integrando la terza.
In linea di massima, ognuna di queste puó essere derivata/integrata a piacere.

Th. Il **teorema di sviluppabilitá in serie di Taylor** dice che se f é dotata delle derivate di ogni ordine e se $\exists M, L > 0$ tali che

$$\left| f^{(k)}(x) \right| \le M \cdot L^k, \quad \forall k = 0, 1, 2 \ldots, \quad \forall x \in (a,b)$$

allora f é sviluppabile in x_0 per ogni $x_0 \in (a,b)$, per $x \in (a,b)$.

Dimostrazione Vogliamo dimostrare che il resto dello sviluppo di Taylor tende a 0:

$$R(n) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \quad \longrightarrow 0, \quad n \to \infty$$

Ora scriviamolo in forma di Lagrange:

$$R_n(x) = \frac{\left| f^{(n+1)}(\xi) \right|}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad \xi \in (x, x_0)$$

Siccome il valore massimo di $(x - x_0)$ é in $(b - a)$:

$$|R_n(x)| \le \frac{\left| f^{(n+1)}(\xi) \right|}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \le \frac{ML^{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \longrightarrow 0$$

Def. Una **curva** é un'applicazione continua $\varphi : I \to \mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$. L'immagine della curva, anche detto **sostegno**, é l'insieme dei punti per cui passa la curva, definito come $\{\varphi(t) \in \mathbb{R} | t \in I\}$.

Osservazione φ é continua se $t \to \varphi_i(t)$ é continua $\forall i = 1, 2, 3, \ldots$

Osservazione A uno stesso sostegno possono appartenere varie curve.

Def. Una curva di dice **semplice** se non si auto interseca, cioé se $\varphi : \mathring{I} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é iniettiva, dove $\mathring{I}$ é I senza estremi.

Def. Una curva è derivabile se ogni componente è derivabile. Il vettore $\varphi'(t) = (\varphi'_1(t), \varphi'_2(t), \ldots, \varphi'_d(t))$ è detto **vettore velocitá.**

Def. Una curva si dice **regolare** se $\varphi'(t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathring{I}$

Def. Il versore $T(t) = \dfrac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|}$ è detto **tangente**.

Def. La **lunghezza di una curva** è definita nel seguente modo:

$$L(\varphi) = \sup \begin{cases} L(\pi) \mid \pi \text{ è una poligonale inscritta} \\ \text{con punti } t_0 < t_1 < \cdots < t_k < \infty \end{cases}$$

Dove la poligonale è una curva fatta di segmenti, e una poligonale inscritta è una poligonale che passa per tutti i punti di una data curva (con segmenti infinitesimali)

Th. Se $\varphi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ è una curva regolare, allora:

$$L(\varphi) = \int_a^b \mid \varphi'(t) \mid dt < +\infty$$

Osservazione Il teorema vale anche se la curva è regolare solo a tratti. In questo caso dovró spezzare l'integrale nei vari tratti.

Osservazione La lunghezza della curva non è la lunghezza del sostegno. Infatti, una curva potrebbe fare vari giri.

Def. Le curve **cartesiane** hanno il sostegno che è una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Quindi sono curve definite in questo modo: $\varnothing(t) = (t, f(t))$.

Osservazione Tutte le curve cartesiane sono semplici, in quanto essendo f una funzione, non puó avere due risultati diversi sulla stessa x.

Osservazione Se $f \in C^1$, allora $\varnothing$ è regolare: $\varnothing'(t) = (1, f'(t)) \neq 0$.

Osservazione La lunghezza delle curve cartesiane si calcola come:

$$L(\varnothing) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$$

Def. Le curve **polari** sono quelle curve che si possono esprimere come funzione dell'angolo con l'origine $\rho(\theta)\colon \to (0, +\infty)$. Quindi la curva è definita come: $\varnothing(\theta) = (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta)$

Osservazione Tutte le curve polari sono regolari, in quanto l'angolo cambia sempre.

Osservazione La lunghezza delle curve polari si calcola come:

$$L(\varnothing) = \int_a^b \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} d\theta$$

Def. Si definiscono le seguenti **funzioni iperboliche**:

$$\cosh = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \text{pari,} \quad \text{Immagine:} \quad [1, +\infty]$$

$$\sinh = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad \text{dispari,} \quad \text{Immagine:} \quad [-\infty, +\infty]$$

Si chiamano iperbolici perché se applico la seguente mappatura:

$$\cos \to \cosh \qquad \sin \to \sinh$$
$$\cos^2 \to \cosh^2 \qquad \sin^2 \to -\sinh^2$$

Tutte le identitá trigonometriche sono ancora verificate.

Osservazione

$$\cosh' = \sinh \qquad \sinh' = \cosh$$

Osservazione

$$arccosh(x) = log(x + \sqrt{x^2 - 1})$$
$$arcsinh(x) = log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Def. Due curve $\varnothing\colon [a,b] \to \mathbb{R}^d$ e $\varphi\colon [c,d] \to \mathbb{R}^d$ si dicono **equivalenti** se esiste una funzione $h\colon [c,d] \to [a,b]$ continua e univoca tale che $\varnothing(h(t)) = \varphi(t), \quad \forall t \in [c,d]$.

Th. Due curve equivalenti hanno la stessa lunghezza.

Def. $\underline{P}$ é **punto interno** di E se $\exists r > 0$ t.c. $B(\underline{P}, r) \subseteq E$.
$\underline{P}$ é **punto esterno** di E se $\underline{P}$ é interno a E^c.
$\underline{P}$ é **punto di frontiera** se $\forall r > 0, B(\underline{P})$ contiene sia punti di E che del complementare.
$\underline{P}$ é **punto di accumulazione** per E se $\forall r > 0, (B(\underline{P}, r) \backslash \{\underline{P}\} \cap E \neq \emptyset$.
Ogni punto di E che non é di accumulazione si dice **punto isolato**.

Def. Un insieme E si dice **aperto** se ogni suo punto é interno.
Un insieme E si dice **chiuso** se il suo complementare é aperto.
Un insieme E é **limitato** se $\exists r > 0$ t.c. $E \subseteq B(\underline{0}, r)$.
La **chiusura** di un insieme E é il piú piccolo insieme chiuso E' tale che $E \subseteq E'$.

Osservazione L'unione e l'intersezione di due insiemi aperti é un insieme aperto. L'unione e l'intersezione di due insiemi chiusi é un insieme chiuso.

Funzioni a piú variabili

Def. Tutte le funzioni del tipo $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^d$ si chiamano **vettoriali** se $n > 1$, e **a piú variabili** se $d > 1$.

Def. Sia $\underline{x_0} \in A \subseteq \mathbb{R}^n$, con $\underline{x_0}$ punto di accumulazione di A. Sia $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^d$, e sia $\underline{L} = (L_1, \dots, L_d) \in \mathbb{R}^d$. Definiamo:

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x_0}} f(\underline{x}) = \underline{L} \quad \text{se}$$

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che se $|\underline{x} - \underline{x_0}| < \delta$ allora $|f(\underline{x}) - \underline{L}| < \epsilon$

Osservazione $f(\underline{x}) \to \underline{L}$ se e solo se $f_i(x) \to L_i, \quad \forall i = 1, \dots, d$
Manca la dimostrazione!

Osservazione Per dimostrare che non esiste il limite devo trovare due successioni $\underline{P_n} \to c$ e $\underline{Q_n} \to c$ tali che $f(\underline{P_n}) \to \underline{l}$ e $f(\underline{Q_n}) \to \underline{l'}$. Se $\underline{l} \neq \underline{l'}$, allora il limite non esiste.

Osservazione Se bisogna calcolare un limite per $(x, y) \to (x_0, y_0)$ invece che $(x, y) \to (0, 0)$, basta che impongo $x' = x - x_0, y' = y - y_0$, e scrivo la funzione $f(x, y) = f'(x', y')$. Poi calcolo il limite di f' per $(x', y') \to (0, 0)$.

Osservazione Per calcolare il limite di una funzione a piú variabili spesso aiuta molto imporre $y = x^\beta$, con il giusto β.

Osservazione Quando si deve calcolare anche il limite in base a un dato valore α, attenzione a non fare maggiorazioni improprie perché si potrebbero perdere alcuni valori di α.

Osservazione Alcune maggiorazioni utili:

$$2xy \leq x^2 + y^2 \quad (\text{poiché}(x - y)^2 \geq 0)$$

Osservazione Alcuni limiti notevoli utili:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1 - \cos x(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Def. In $\mathbb{R}^2$, si definisce il limite a infinito:

$$\lim_{|(x,y)| \to \infty} f(x, y) = l \quad \text{se}$$

$\forall \epsilon > 0, \exists R > 0$ tale che se $|(x, y)| \geq R$ allora $|f(x, y) - l| < \epsilon$

Def. In $\mathbb{R}^2$, se il limite a un punto (x_0, y_0) tende a $\pm\infty$:

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = \pm\infty \quad \text{se}$$

$\forall M > 0, \exists \delta > 0$ tale che se $|(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta$ allora

$f(x, y) - l > M$ (oppure $< -M$ nel caso di $-\infty$)

Def. In $\mathbb{R}^2$, se il limite a $\pm\infty$ tende a $\pm\infty$:

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = \pm\infty \quad \text{se}$$

$\forall M > 0, \exists N > 0$ tale che se $|(x, y) - (x_0, y_0)| > N$ allora

$f(x, y) - l > M$ (oppure $< -M$ nel caso di $-\infty$)

Def. Un punto (x, y) puó essere espresso anche in base a un altro (x_0, y_0) attraverso le coordinate polari. In questo caso, si ottiene::

$$x = x_0 + \rho \cos \theta$$

$$y = y_0 + \rho \sin \theta$$

Quindi $(x, y) \to (x_0, y_0) \equiv |(x - x_0, y - y_0)| \to 0 \equiv \rho \to 0$.

Osservazione Attenzione! Non si fissare θ e poi ottenere il limite, poiché il limite deve essere costante per ogni θ!
Se il limite non é costante, é molto probabile che non esiste.

Def. Sia $f :\in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ e $\underline{c}$ punto di accumulazione in A (con $\underline{c} \in A$. Si dice che f é **continua** in A se:
$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che se $|\underline{x} - \underline{c}| < \delta$ allora $|f(\underline{x}) - f(\underline{c})|_{\mathbb{R}^d} < \epsilon$

Osservazione Come per i limiti, vale che $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ é continua in $\underline{c} \in A$ se e solo se $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é continua $\forall i = 1, 2, \dots d$, cioé se sono continue tutte le sue componenti.

Osservazione Data $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$, con A aperto /chiuso, si ha che se f é continua, allora anche f^{-1} é aperto /chiuso, rispettivamente.

Def. Data $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $\underline{x_0}$ punto interno, e dato $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, con $|v| = 1$, allora la **derivata direzionale** di f in x_0 verso $\underline{v}$ é il seguente limite (se esiste):

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{x_0} + t\underline{v}) - f(\underline{x_0})}{t} \equiv D_{\underline{v}} f(x_0) \equiv \frac{df}{d\underline{v}}(\underline{x_0}) \equiv d_{\underline{v}} f(\underline{x_0})$$

Osservazione Potrebbe essere comodo scrivere $\underline{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$.

Osservazione Ponendo $\varphi(t) = f(\underline{x_0} + t\underline{v})$, si ottiene $D_v f(x_0) = \varphi'(0)$.

Def. Prende il nome di **derivata parziale** di f in x_0 rispetto alla variabile x_i la derivata direzionale usando $\underline{v} = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0, 0)$, con l'1 all'i-esima posizione.

Def. Se nel punto x_0 esistono tutte le derivate parziali (quindi f é derivabile lungo tutti gli assi), allora si dice che f é **derivabile** in x_0. Se risulta derivabile per $\forall x_0 \in A$, allora si dice derivabile in A.

Osservazione Per verificare l'esistenza delle derivate parziali, bisogna usare il limite del rapporto incrementale.

Def. Il **gradiente** é il vettore formato dalle derivate parziali:

$$Df(x_0) = \nabla f(x_0) = \left(\frac{df}{d\underline{x_0}} f(x_0), \frac{df}{d\underline{x_1}} f(x_0), \dots, \frac{df}{d\underline{x_n}} f(x_0)\right)$$

Def. Data $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice $f \in C^1$ in x_0 se é derivabile e ∇f é continuo in x_0 .

Osservazione Ricordarsi che il gradiente é continuo se e solo se tutte le derivate parziali sono continue!

Def. Il piano tangente a una superficie si trova con:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{df}{dx}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{df}{dy}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Osservazione In sostanza mi fermo al primo passo di approssimazione dello sviluppo di Taylor, dove approssimo una superficie con un piano

Def. Data $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con A aperto, con $x_0 \in A$, f si dice **differenziabile** in x_0 se esiste $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ tale che:

$$f(\underline{x_0} + \underline{h}) - f(\underline{x_0}) = \underline{a} \cdot \underline{h} + o(|\underline{h}|), \text{ dove } \underline{h} \in \mathbb{R}^n \text{ e } \underline{h} \to 0$$

Inoltre, f si dice differenziabile in A se é differenziabile in $\forall x_0 \in A$.

Osservazione Per verificare la differenziabilitá di una funzione in un punto $\underline{x_0}$, verificare che il seguente limite valga 0:

$$\lim_{\underline{h} \to 0} \frac{f(\underline{x_0} + \underline{h}) - f(\underline{x_0}) - \nabla f(\underline{x_0}) \cdot \underline{h}}{|\underline{h}|}$$

Def. Il **differenziale** di f in x_0 é l'applicazione lineare $df(\underline{x_0}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad \underline{h} \to \underline{a} \cdot \underline{h}$

Th. Data $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con A aperto, con $\underline{x_0} \in A$, se f é differenziabile in $\underline{x_0}$, allora vale che:

- f é continua in $\underline{x_0}$

Dimostrazione $f(\underline{x_0} + \underline{h}) - f(\underline{x_0}) = \underline{a} \cdot \underline{h} + o(|\underline{h}|) \to 0 \implies \lim_{t \to 0} f(\underline{x_0} + \underline{h}) = f(\underline{x_0})$

- f é derivabile direzionalmente in $\underline{x_0}$, in particolare é derivabile e $\underline{a} = \nabla f(\underline{x_0})$.

Dimostrazione Pongo $\underline{h} = t\underline{e_j}$, $t \in \mathbb{R}$, $t \to 0$, $\underline{e_j} = (0, 0, \dots, 1, \dots)$ con un 1 alla j-esima posizione.

$$f(\underline{x_0} + t\underline{v}) - f(\underline{x_0}) = \underline{a} \cdot t\underline{e_j} + o(|t|) \implies$$

$$\frac{1}{t}(f(\underline{x_0} + t\underline{e_j}) - f(\underline{x_0})) = \underline{a}\, \underline{e_j} + \frac{o(|t|)}{t} \implies$$

$$\lim_{t \to 0} f(\underline{x_0} + t\underline{e_j}) - f(\underline{x_0}) = \underline{a_j}$$

Tuttavia, questo dimostra solo la derivabilitá. Per dimostrare che é derivabile direzionalmente, vedere la prossima dimostrazione.

- $D_{\underline{v}} f(\underline{x_0}) = \nabla f(\underline{x_0}) \cdot \underline{v}$

Dimostrazione Pongo $\underline{h} = t\underline{v}$), $\implies f(x_0 + tv) - f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot tv + o(|t|)$
Dividendo entrambi i membri per $t \implies D_{\underline{v}} f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v, \forall v \in \mathbb{R}^n$.
(In pratica ho dimostrato che la derivata direzionale esiste sempre, e che quindi la f é derivabile direzionalmente)

Def. Data $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $\underline{x_0} \in A$, con f differenziabile in $\underline{x_0}$, allora:
$D_{\underline{v}} f(\underline{x_0}) = \nabla f(\underline{x_0})) \cdot \underline{v} = |\nabla f(\underline{x_0}))||\underline{v}| \cos \beta = |\nabla f(\underline{x_0}))| \cos \beta$
é massimo quando $\cos \beta = 1$, cioé quando $\beta = 0$, cioé quando $\nabla f(\underline{x_0}))$ é parallelo a $\underline{v}$ (e hanno lo stesso verso). In questo caso vorrá dire che:

$$\underline{v} = \frac{\nabla f(\underline{x_0}))}{|\nabla f(\underline{x_0}))|}$$

Def. Se f é differenziabile in $\underline{x_0}$, allora l'iperpiano tangernte si ottiene come:

$$x_{n+1} = f(\underline{x_0})) + \nabla f(\underline{x_0}))(\underline{x} - \underline{x})$$

Dimostrazione Sapevamo che:

$$f(\underline{x_0}) - \underline{h}) = f(\underline{x_0}) + \nabla f(\underline{x_0}) \cdot \underline{h} + o(|h|)$$

Tuttavia se poniamo $\underline{h} = (\underline{x} - \underline{x_0})$:

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x_0}) + \nabla f(\underline{x_0})(\underline{x} - \underline{x_0}) + o(|\underline{x} - \underline{x_0}|)$$

Th. Il teorema del **differenziale totale** dice che data $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $\underline{x_0} \in A$, se $f \in C^1$ in $\underline{x_0}$, allora f é differenziabile in $\underline{x_0}$.

Funzioni a piú variabili 2 la vendetta

Th. Il teorema del **differenziale totale** dice che data $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se f é derivabile e $f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n}$ sono continue in $\underline{x}_0$, allora f é differenziabile in $\underline{x}_0$.
Corollario: se $f \in C^1(A)$, allora f é differenziabile in A.

Dimostrazione Il teorema verrá dimostrato per n_2:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) =$$
$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

Adesso poniamo $g(h) = f(x_0 + h, y_0 + k)$.
Siccome per ipotesi g é derivabile, uso il teorema di Lagrange:

$$g(h) - g(0) = g'(x_h)(h - 0), \text{ con } x_h \in (0, h)$$

Poniamo inoltre $l(k) = f(x_0, y_0 + k)$
Siccome anche l é derivabile, sempre per Lagrange:

$$l(h) - l(0) = l'(y_k)(k - 0) \text{ con } y_k \in (0, k)$$

Svolgiamo le derivate in entrambi i membri per l e k:

$$g'(x_h) = \frac{df}{dx}(x_0 + x_h, y_0 + k), \qquad l'(y_k) = \frac{df}{dy}(x_0, y_0 + y_k)$$

Impostiamo $\varepsilon_h = x_0 + x_h$, e $\varepsilon_k = y_0 + y_k$:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{df}{dx}(\varepsilon_h, y_0 + k)h + \frac{df}{dy}(x_0, \varepsilon_k)k$$

Adesso dobbiamo dimostrare che il seguente limite valga 0:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{df}{dx}(x_0, y_0 + k)h + \frac{df}{dy}(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$$
$$\frac{(\frac{df}{dx}(\varepsilon_h, y_0 + k) - \frac{df}{dx}(x_0, y_0))h + (\frac{df}{dy}(x_0, \varepsilon_k) - \frac{df}{dy}(x_0, y_0))k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \to 0?$$

Siccome dobbiamo verificare che il limite vada a 0, possiamo maggiorare il limite con la sommma dei moduli:

$$\leq \left| \frac{df}{dx}(\varepsilon_h, y_0 + k) - \frac{df}{dx}(x_0, y_0) \right| \frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$
$$\left| \frac{df}{dy}(x_0, \varepsilon_k) - \frac{df}{dy}(x_0, y_0) \right| \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

Ora abbiamo che $\varepsilon_h \to 0$, $(y_0 + k) \to 0$, $\varepsilon_k \to 0$, $\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} \to 1$,
perció tutto il limite tende a 0.

Osservazione Tutte le $f \in C^1$ sono differenziabili. Non é detto il contrario.

Osservazione Il teorema dice che se f é differenziabile in $\underline{x}_0$, allora

$$D_v f(\underline{x}_0) = \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{v}, \quad \forall \underline{v}$$

Questo vuol dire che se il gradiente é 0, e una delle derivate direzionali é diversa da 0, allora vuol dire che la funzione non é differenziabile.

Def. Data $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, si dice che f é derivabile/differenziabile $/C^m$ se lo é componente per componente.

Def. Siano le seguenti funzioni:

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}^k \qquad \text{con } f \text{ differenziabile in } A$$
$$g : B \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d \qquad \text{con } g \text{ differenziabile in } B$$

Se f é derivabile, allora si definisce **jacobiana** la matrice $k \times n$ delle derivate parziali:

$$J_f(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} & \dots & \frac{\delta f_1}{\delta x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\delta f_k}{\delta x_1} & \dots & \frac{\delta f_k}{\delta x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f_1(x_0) \\ \dots \\ \nabla f_k(x_0) \end{bmatrix}$$

Sia $h : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$, definita come $\underline{x} \to g(f(\underline{x}))$.
Allora h é differenziabile in A e inoltre:

$$J_h(\underline{x}) = J_g(f(\underline{x})) \cdot J_f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \frac{\delta h_i}{\delta x_j} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

A questo punto possiamo calcolarci l'elemento generico:

$$\frac{dh_i}{dx_j} = \sum_{s=1}^{k} d_s g_i(f(\underline{x})) \cdot d_j f_s(\underline{x}), \quad \forall i = 1, \dots, d \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Def. Data $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con $g \in C^1$, si definisce **l'insieme di livello** come:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = c\} \text{ con } c \in \mathbb{R}$$

Osservazione Per valori di c "buoni", l'insieme di livello é il sostegno di una curva regolare.

Prop. Il gradiente di una funzione é ortogonale al suo insieme di livello.

Dimostrazione Lavoriamo prima in $\mathbb{R}^2$, e parametrizziamo la curva rappresentante l'insieme di livello:

$$\varnothing : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \quad t \to \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} \quad \text{con } Im(\varnothing) = \{g(x, y) = c\}$$

Il processo é simile a quello di tagliare a "fette" la funzione.
Per costruzione abbiamo che $c = g(x(t), y(t))$.
Se deriviamo rispetto a t:

$$\nabla g(\varnothing(t)) \cdot \varnothing'(t) = 0$$

Che significa che ∇g é ortogonale alla tangente in t dell'insieme di livello. (Poiché il prodotto scalare é 0 solo se i vettori sono ortogonali).
Ora proviamo la stessa identica cosa in $\mathbb{R}^3$. Definiamo $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, e il suo insieme di livello $\{(x, y, z) \mid g(x, y, z) = c\}$.
Questo insieme adesso é rappresentato da una superficie regolare, che parametrizziamo in questo modo:

$$\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad (s, t) \to \begin{cases} x(s, t) \\ y(s, t) \\ z(s, t) \end{cases}$$

Il piano tangente dell'insieme di livello é generato da

$$\left(\frac{\delta x(s, t)}{\delta s}, \frac{\delta y(s, t)}{\delta s}, \frac{\delta z(s, t)}{\delta s} \right) \text{ e } \left(\frac{\delta x}{\delta t}, \frac{\delta y}{\delta t}, \frac{\delta z}{\delta t} \right)$$

Definiamo $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ come

$$h(s, t) := g(\pi(s, t)); \quad c = h(s, t) = g(\pi(s, t))$$

Facendo la derivata:

$$J_h(s, t) = J_g(\pi(s, t)) \cdot J_\pi(s, t) = \nabla g(\pi(s, t)) \cdot \begin{bmatrix} \delta x/\delta s & \delta y/\delta s \\ \delta z/\delta s & \delta x/\delta t \\ \delta y/\delta t & \delta z/\delta t \end{bmatrix} = (0, 0)$$

Cioé ∇g é ortogonale ai due vettori che generano il piano tangente alla superficie di livello, e quindi ∇g é ortogonale alla superficie di livello.

Def. Se esistono tutte le derivate seconde parziali, la funzione si dice **derivabile due volte**.
La notazione usata é la seguente:

$$\frac{d}{dx_j}\left(\frac{df}{dx_i}\right) = \frac{d^2}{dx_i dx_j} = f_{x_i, x_j}$$

Def. Si dice matrice **Hessiana** la matrice formata da tutte le possibili derivate seconde:

$$H_f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} f_{x_i x_j}(\underline{x}) & \dots & f_{x_i x_j}(\underline{x}) \\ f_{x_i x_j}(\underline{x}) & \dots & f_{x_i x_j}(\underline{x}) \\ f_{x_i x_j}(\underline{x}) & \dots & f_{x_i x_j}(\underline{x}) \end{bmatrix}$$

Osservazione In generale, la matrice non é simmetrica!

Def. Data $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con A aperto, si dice che $f \in C^2$, se é derivabile due volte e le derivate seconde sono continue in A

Th. Il **Teorema di Schwartz** dice che se $f \in C^2$, l'ordine di derivazione non conta e la matrice Hessian é simmetrica. In generale $f \in C^k$ le derivate di ordine k non dipendono dall'ordine di derivazione.

Th. Il **teorema di Lagrange** dice che: sia $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con A aperto, $f \in C^1(A)$, se $\underline{x}_0 \in A$, $\underline{x} \in A$, tale che il segmento é in A, $\exists \sigma$ appartenente al segmento $\underline{x}, \underline{x}_0$ tale che:

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \nabla f(\sigma)(\underline{x} - \underline{x}_0)$$

Che non é altro che lo sviluppo di Taylor al primo ordine con resto di Lagrange.

Dimostrazione Poniamo

$$\underline{h} = \underline{x} - \underline{x}_0$$

In modo tale che il segmento sia rappresentato da $\underline{x}_0 + t\underline{h}$. Allora

$$F : [0, 2] \to \mathbb{R}, \qquad F(t) : = f(\underline{x} + t\underline{h})$$

Se abbiamo che $f \in C^1$, allora applicando Lagrange:

$$F(1) - F(0) = F'(\varepsilon)(1 - 0) = F'(\varepsilon), \quad \text{con } \varepsilon \in (0, 1)$$

Applicando ancora Lagrange:

$$f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) = \nabla f(\underline{x}_0 + \varepsilon \underline{h}) \cdot \underline{h} =$$
$$\sum f_{x_i}(\underline{x}_0 + \varepsilon \underline{h}_i) \cdot \underline{h}_i$$

Dove $\underline{x}_0 + \varepsilon \underline{h}_i$ rappresenta un punto del segmento.

Th. Il **teorema di Lagrange** dice che: sia $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con A aperto, $f \in C^2(A)$, se $\underline{x}_0 \in A$, $\underline{x} \in A$, tale che il segmento é in A, $\exists \sigma$ appartenente al segmento $\underline{x}, \underline{x}_0$ tale che:

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \nabla f(\sigma)(\underline{x} - \underline{x}_0) + \frac{1}{2}(H_f(\underline{x}_0 + \varepsilon(\underline{x} - \underline{x}_0))(\underline{x} - \underline{x}_0))(\underline{x} - \underline{x}_0$$

Che non é altro che lo sviluppo di Taylor al secondo ordine con resto di Lagrange.

Osservazione con il resto di Peano:

$$f(\underline{x}_0)+\nabla f(\sigma)(\underline{x}-\underline{x}_0)+\frac{1}{2}(H_f(x_0+\varepsilon(x-x_0))(x-x_0))(x-x_0)+o(|\underline{x}-\underline{x}_0|^2)$$

Dimostrazione Se $f \in C^2(A) \implies F \in C^2([0,1])$, e quindi

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{1}{2}F''(\varepsilon)t^2 \text{ con } \quad \varepsilon \in (0,t)$$

Imponendo $t = 1$:

$$\begin{aligned} f(\underline{x}) &= f(\underline{x}_0) + \nabla f(\underline{x}_0)(\underline{x}-\underline{x}_0) + \frac{1}{2}F''(\varepsilon) \\ &= f(\underline{x}_0) + \nabla f(\underline{x}_0)(\underline{x}-\underline{x}_0) + \frac{1}{2}(H_f(\underline{x}_0+\varepsilon(\underline{x}-\underline{x}_0))(\underline{x}-\underline{x}_0))(\underline{x}-\underline{x}_0) \end{aligned}$$

Def. Un insieme $A \subseteq R^n$ si dice **connesso** se le condizioni

$$\exists A_1, A_2 \text{ aperti t.c.} \quad A_1 \cup A_2 = A, \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

implicano che uno dei due insiemi aperti é vuoto.

Th. Dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e connesso, allora $\forall \underline{x}, \underline{y} \in A$ esiste una curva $\varnothing \in C^1$, definita come $\varnothing : [0,1] \to A$ che collega $\underline{x}$ con $\underline{y}$, cioé $\varnothing(0) = \underline{x}, \varnothing(1) = \underline{y}$. A allora é un insieme **connesso ad archi**.

Prop. $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con A aperto e connesso, con f differenziabile su A, se $\nabla f = 0$ in A allora f é costante su A.

Dimostrazione Fisso $x, y \in A$. Per il teorema precedente, esiste una curva $\varnothing$ che li connette. Definiamo $g(t) = f(\varnothing(t)), \quad t \in [0,1]$.
g é derivabile perché composizione di funzioni derivabili. Ora:

$$f(y) - f(x) = g(1) - g(0) = g'(\varepsilon)(1-0) = g'(\varepsilon)) = \nabla f(\varnothing(\varepsilon)) \cdot \varnothing'(\varepsilon) = 0$$

E con questo abbiamo dimostrato che f é sempre costante su tutto A.

Def. $x_0 \in A$ si dice punto di massimo/minimo relativo (o locale) se

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ oppure } f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \cap A$$

Dove $B_\delta(x_0)$ é una palla di raggio δ di centro x_0.

Prop. Se x_0 é punto di massimo/minimo, e punto interno di A, e f é derivabile in A allora $\nabla f(x_0) = 0$

Dimostrazione Definisco

$$g_i(t) = f(x_0 + te_i), \quad \text{dove } e_i = (0,0,\ldots,0,1,0,\ldots)$$

Sappiamo che g_i é derivabile perché lo é anche f, e ha massimo/minimo in $t = 0$. Svolgendo:

$$0 = g'(0) = \nabla f(x_0 + 0 \cdot e_i) \cdot e_i = \frac{\delta f}{\delta x_i}(x_0)$$

E questo vale $\forall i$; cioé, qualunque sia la componente, la derivata é nulla, e quindi anche il gradiente é nullo.

Osservazione Non vale il viceversa! Se il gradiente é nullo, potrebbe anche essere che x_0 non é punto di massimo/minimo!

Def. Se $\nabla f(x_0) = 0$ ma x_0 non é punto di massimo/minimo, allora si dice che x_0 é **punto di sella**.

Def. Introduciamo la seguente notazione:

$$(H\underline{v}) \cdot \underline{v} = (H\underline{v}, \underline{v}) = \sum_{i,j=1}^{n} h_{i,j} v_i v_j$$

Prop. Se la matrice H é simmetrica, allora é diagonalizzabile e ha autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Def. La matrice H si dice:

Definita positiva	se $(H\underline{v}, \underline{v}) > 0, \forall \underline{v}$	cioé se $\lambda_i > 0, \forall i$
Definita negativa	se $(H\underline{v}, \underline{v}) < 0, \forall \underline{v}$	cioé se $\lambda_i < 0, \forall i$
Semidefinita positiva	se $(H\underline{v}, \underline{v}) \geq 0, \forall \underline{v}$	cioé se $\lambda_i \geq 0, \forall i$
Semidefinita negativa	se $(H\underline{v}, \underline{v}) \leq 0, \forall \underline{v}$	cioé se $\lambda_i \leq 0, \forall i$
Indefinita	se $\exists v, w$ t.c. $(Hv, v) > 0$ e $(H\underline{w}, \underline{w}) < 0$, cioé se $\exists \lambda_1, \lambda_2$ t.c. $\lambda_1\lambda_2 < 0$	

Prop. Se H é definita positiva, allora $(H\underline{v}, \underline{v}) \geq \lambda_{min}|\underline{v}|^2, \forall \underline{v}$.
Se H é definita negativa, allora $(H\underline{v}, \underline{v}) \leq \lambda_{max}|\underline{v}|^2, \forall \underline{v}$.

Prop. Se $f \in C^2$, $x_0 \in A$, x_0 punto interno e $\nabla f(x_0) = 0$:
Se x_0 é un minimo locale, allora $H_f(x_0)$ é semidefinita positiva.
Se x_0 é un massimo locale, allora $H_f(x_0)$ é semidefinita negativa.

Dimostrazione Manca!

Se $H_f(x_0)$ é definita positiva, allora x_0 é un massimo locale.
Se $H_f(x_0)$ é definita negativa, allora x_0 é un minimo locale.

Dimostrazione Manca!

Se $H_f(x_0)$ é indefinita, allora x_0 é un punto di sella.

Dimostrazione Manca!

Prop. Per n = 2, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$ac - b^2 = \det \text{A} = \lambda_1\lambda_2, \qquad a + c = \text{tr(A)} = \lambda_1 + \lambda_2$
Se detA <, A è indefinita, e $\underline{x}_0$ punto di sella.
Se detA = 0, sappiamo che un autovalore è 0, ma niente altro. (al massimo sappiamo che A è semidefinita positiva o negativa)
Se detA > 0, e tr(A) > 0, A è definita positivamente, e $\underline{x}_0$ è punto di minimo.
Se detA > 0, e tr(A) < 0, A è definita negativamente, e $\underline{x}_0$ è punto di massimo.

Osservazione Se $\det\text{A} > 0 \implies ac > b^2 \implies a$ e c hanno lo stesso segno. Quindi, per vedere il segno della traccia, mi basta osservare semplicemente il segno di a.

Osservazione Vale anche il viceversa, cioè
Se $\underline{x}_0$ è punto di minimo, allora detA ≥ 0, tr(A) ≥ 0
Se $\underline{x}_0$ è punto di massimo allora detA ≤ 0, tr(A) ≤ 0.

Osservazione La matrice A è simmetrica poichè per ipotesi $f \in C^2$.

Def. I **minimi** principali **nord-ovest** di una matrice sono le sottomatrici quadrate formate a partire dall'angolo in alto a sinistra:

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \ldots$$

Prop. Se A è simmetrica, sappiamo che:
A è definita positiva $\Leftrightarrow \det A_k > 0$ per $k = 1 \ldots n$.
A è definita negativa $\Leftrightarrow \det A_k(-1)^k > 0$ per $k = 1 \ldots n$.

Def. Data $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_m \in A$ è punto di **minimo assoluto** per f in A se $f(\underline{x}_m) \leq f(\underline{x}), \forall \underline{x} \in A$ e $m = f(\underline{x}_m)$ è detto minimo assoluto. Uguale per il massimo.

Th. Il **Teorema di Weierstrass** dice che $f : K \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con f continua, con K compatto di $\mathbb{R}^n$ (cioé chiuso e limitato), allora f ammette massimo e minimo assoluti in K.

Dimostrazione L'idea della dimostrazione é di usare la stessa dimostrazione di Weierstrass in $\mathbb{R}^1$, estendendola a piú dimensioni. Infatti, il teorema di Bolzano Weierstrass funziona anche con successioni in $\mathbb{R}^n$

Def. Data $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = +\infty$ allora la funzione si dice **coerciva**.

Prop. Un corollario al teorema di Weierstrass: se una funzione é coerciva, allora ammette minimo assoluto. (Vale anche il viceversa: se una funzione é coerciva a $-\infty$, allora ammette massimo assoluto).

Dimostrazione

$$\forall N > 0, \exists R_N > 0, \text{ t.c. } f(x) > N, \quad \forall x \text{ t.c. } |x| > R_N$$

Consideriamo $f(\underline{0}) = N$. Per questo N, sia $\min_{B_{R_N}(0)} f = f(x_0)$ per Weierstrass. L'insieme $k = \{|\underline{x}| \leq R_N\}$ é compatto. Quindi,

$$f(x) > N = f(0) \geq f(x_0), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \backslash B_{R_N}(0)$$
$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in B_{R_N}(0)$$
$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \implies x_0 \text{ é punto di min assoluto}$$

Th. Il **Teorema dei valori intermedi** dice che data $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua, con A connesso, e dati x e $y \in A$ (supponendo $f(x) \leq f(y)$). Allora:

$$\forall c \in [f(x), f(y)], \quad \exists z \in A \text{ t.c. } f(z) = c$$

Dimostrazione $\exists \varnothing : [0,1] \to A$ continua t.c. $\varnothing(0) = x, \varnothing(1) = y$
Definiamo $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, come $t \to f(\varnothing(t))$, continua per comp. di funzioni continue. Applico il teorema dei valori intermedi a g:

$$\text{Dato } c \in [g(0), g(1)], \; \exists \theta \in [0,1] \text{ t.c. } g(\theta) = c$$

Ma allora $f(\varnothing(\theta)) = c$ e vale la tesi con $z = \varnothing(\theta)$

<u>Def.</u> Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é convesso se dati due punti dell'insieme, il segmento che li unisce é tutto compreso nell'insieme. Formalmente:

$$(\lambda x + (1-\lambda)y) \in A, \quad \forall x, y \in A, \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

<u>Def.</u> Una funzione $f : A \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con A aperto e connesso, si dice **convessa** se

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),\ \forall x, y \in A, \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

cioé se tutti i valori della funzione stanno sotto il segmento che collega x e y.

Osservazione - se f é convessa, allora f é continua.
- se f é convessa e differenziabile, allora il piano tangente alla funzione sta tutto sotto alla funzione. Formalmente $f(x) \geq f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0), \quad \forall x, x_0 \in A$.
- se f é convessa ed é anche $C^2(A)$, allora $H_f(x)$ é semidefinita positiva.

Osservazione se f é convessa, e ha un minimo, allora quel minimo é assoluto (Per esempio se $f \in C^1$ allora in x_0 punto minimo $\nabla f(x_0) = 0$ e $f(x) \geq f(x_0)$ per osservazione precedente)

Osservazione In generale, se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é convessa e crescente, allora la funzione in $\mathbb{R}^n$ definita come $f(x) = g(|x|)$ é convessa.

Personal reminders

integrali $\sin(x)$ é una funzione **dispari** $\cos(x)$ é una fun- zione **pari**

Rigurda gli spazi topologici. PRIMA dell'esoner