CALCOLO PROBABILITA'

28/09/16

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{m!(n-m)!} & \text{se } 0 \le k \le n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Sia A un insieme di elementi distinti allora i possibili sottoinsiemi non ordinati di A aventi esattamente K elementi sono $\binom{n}{k}$

DIMOSTRAZIONE:

1° caso

$K \notin \{0,1,2 \dots n\}$

Non esistono sottoinsiemi

2° caso

$K \in \{0,1,2 \dots n\}$

qual è il principio fondamentale della combinatoria?

Cmq per scegliere k elementi $(n)(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$

E poi devo dividere per togliere le ripetizioni $k!$

quindi $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

DIMOSTRAZIONE

Con il teorema del binomio che dice che $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ oppure si può dimostrare combinatorialmente che 2^n sono il numero di sottoinsiemi di un insieme con n elementi. $\binom{n}{k}$ sono il numero di sottoinsiemi con k elementi

TEOREMA MULTINOMIALE

Siano n, r interi positivi, $(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^n = \sum\limits_{\substack{n_1, n_2 \dots n_r \ge 0 \\ \text{con } n_1+n_2+\dots+n_r = n}} \binom{n}{n_1, n_2, \dots n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \dots x_r^{n_r}$

Spazio campionario: lancio del dado $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Evento: sottoinsieme dello spazio campionario

Evento certo: evento dato dallo stesso spazio campionario (si verifica sempre)

Evento Impossibile: evento dato dall'insieme vuoto

INCOMPATIBILI non significa INDIPENDENTI AAA

Spazio di probabilità: è una coppia $\{S, P\}$ dove S è lo spazio campionario e P, detta funzione di probabilità, è una funzione reale definita sulla famiglia degli eventi di S, cioè su $\mathcal{P}(S)$ (insieme delle parti) tale che:

1) $\forall E \subset S \quad P(E) \in [0, 1]$
2) $P(S) = 1$
3) Addidività numerabile: Data una successione di eventi $E_1 E_2 \ldots$ a due a due disgiunti $(E_1 \cap E_2 = \emptyset)$ vale

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

PROP $P(\emptyset) = 0$

DIMOSTRAZIONE. $E_1 = \emptyset \quad E_2 = \emptyset \quad E_3 = \emptyset \ \ldots$

$$\bigcup^{\infty} E_i = \emptyset \qquad E_i \cap E_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

$$P(\emptyset) = P\left(\bigcup^{\infty} E_i\right) = \sum^{\infty} P(E_i) \text{ (per assioma 3)} = \sum^{\infty} (P(\emptyset))$$

$$P(\emptyset) \in [0, 1]$$

$$P(\emptyset) = \sum^{\infty} \quad \text{se } P(\emptyset) \in (0, 1] \text{ avrei } P(\emptyset) = \infty \text{ assurdo!}$$

(additività finita)

PROP Dati eventi $E_1, E_2 \ldots$ a due a due disgiunti, $P\left(\bigcup_{i=1}^{m} E_i\right) = \sum_{i=1}^{m} P(E_i)$

DIMOSTRAZIONE

Definisco $E_{m+1}, E_{m+2}, E_{m+3}, \ldots$ tutti $= \emptyset$

Gli eventi $E_1 \ldots E_m$ sono a due a due disgiunti per ipotesi, e lo sono anche quelli da E_{m+1} in poi

$P\left(\bigcup^{\infty} E_i\right) = \sum^{\infty} P(E_i)$ per assioma 3. Ma lo posso scrivere come $P\left(\bigcup^{m} E_i\right)$, poiché da m in poi sono $\emptyset$

quindi $P\left(\bigcup^{\infty} E_i\right) = P\left(\bigcup^{m} E_i\right) = \sum^{m} P(E_i)$

PROP $\forall E \subset S \quad P(E^c) = 1 - P(E)$

DIMOSTRAZIONE

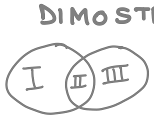
Applico l'additività finita su E, E^c, e ottengo $P(E \cup E^c) = P(E) + P(E^c)$

$P(E \cup E^c) = P(S) = P(1)$ per assioma 1

(caso elementare del principio di esclusione/inclusione)

PROP Dati due eventi A e B, vale $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

DIMOSTRAZIONE



$\mathrm{I} = A \setminus B \qquad A = \mathrm{I} \cup \mathrm{II}$

$\mathrm{II} = A \cap B \qquad B = \mathrm{II} \cup \mathrm{III}$

$\mathrm{III} = B \setminus A \qquad A \cap B = \mathrm{II}$

$A \cup B = \mathrm{I} \cup \mathrm{II} \cup \mathrm{III}$

$P(A) = P(\mathrm{I}) + P(\mathrm{II})$

$P(B) = P(\mathrm{II}) + P(\mathrm{III})$

$P(A \cap B) = P(\mathrm{II})$

$P(A \cup B) = P(\mathrm{I}) + P(\mathrm{II}) + P(\mathrm{III})$

$P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$

$= P(\mathrm{I}) + P(\mathrm{II}) + P(\mathrm{III}) = P(A \cup B)$

Def Sia S finito. Diciamo che gli esiti sono equiprobabili se:

$$P(\{a\}) = P(\{a'\}) \quad \forall a, a' \in S$$

PROP Dato un S finito, se gli esiti sono equiprobabili, vale che

$$P(E) = \frac{|E|}{|S|}$$

DIMOSTRAZIONE

$S = \{a_1, a_2 \dots a_m\}$, e per ipotesi $P(\{a_1\}) = P(\{a_m\})$

$P\left(\bigcup_{i=1}^{m} \{a_i\}\right) = \sum_{i=1}^{m} P(\{a_i\}) =$ per additività finita

$= mx = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{m} = \frac{1}{|S|}$ e quindi $P(\{a_i\}) = \frac{1}{|S|}$, cioè la probabilità di un singolo evento è $\frac{1}{|S|}$

per generalizzare, un evento $E = \bigcup_{a \in E} \{a\}$ ha $P(E) = \sum_{a \in E} P(\{a\}) = \frac{|E|}{|S|}$

De Morgan

$$\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{m} A_i^c \quad ; \quad \left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{m} A_i^c$$

Nel problema del bastoncino, con 5 persone, hanno tutti $\frac{1}{5}$

Scegliendo 5 persone su 120, ognuno ha $\frac{5}{120}$, poiché la probabilità di essere scelto per primo o per secondo o per quinto è uguale e quindi viene

$$\frac{1}{120} + \frac{1}{120} + \frac{1}{120} + \frac{1}{120} + \frac{1}{120} = \frac{5}{120}$$

pam pam pam pam

pam pam

PAM PAM PAM PAM

PAM PAM PAM PAM

PAM PAM PAM PAM

PAM PAM PAM PAM

A

The fundam

CIAO :D

CIAO :)

:D

CIAO CIAO CIAO AoAoAo

CIAO

CIAO

HACKATON HACKATHON

$$\frac{\cancel{40} \times 9 \times \cancel{38} \times \cancel{37}}{\cancel{40} \times 39 \times \cancel{38} \times \cancel{37}} = \frac{9}{39}$$

ABABAB

ABABAB

ABABAB

ABABAB

CIAO, lo ho tanti modi per scegliere le carte

AoAoAoAoAo

pam PAM PAM PAM

abcdefghilm m o

dieci scelgo due

DIECI SCELGO DUE

AOAOAOAOAOAOAOAO

$\binom{10}{2}\binom{10}{2} \times 4!$

$$\frac{\binom{10}{2}\cdot\binom{10}{2}}{\binom{40}{4}}$$

a b c d e f g h i l m n o p q

CIAO

$$\frac{6^3}{\binom{24}{4}}$$

$1 - \frac{5^4}{6^4}$

6 ⊔ ⊔ ⊔

$$\frac{36 \cdot 6}{216}$$

AOAOAOAOAOAO

CIAO
CIAO
CIAO

$$\frac{6^3}{\cancel{24} \times 23 \times 22 \times 21} \cdot \cancel{4 \cdot 3 \cdot 2}$$

$$\frac{6^3}{23 \times 22 \times 21}$$

$$\frac{216}{10.626}$$

3 blu, 10 rosse

Be?

Vedete che

AoAoAoAoAoAoAo

$$\frac{\binom{23}{3}}{\binom{24}{4}}$$

$$\frac{\cancel{24 \times 23 \times 22}}{\cancel{24} \times \cancel{23} \times \cancel{22} \times 21} \cdot \frac{4!}{3!}$$

$\frac{4}{3 \cdot 21} = \frac{4}{63}$

CIAO

I AM

che

bbb

chess

CHESS

CHESS

CHESS

CHESS

chess

CIAO

NO!

NON 24, ma 23!

$\frac{5^4}{6^4} =$

WALKING

CIAO

CIAO

$\cancel{23 \times 22 \times 21}$

$\cancel{24} \cdot \frac{\cancel{4}}{3}$ = $\frac{1}{18}$

CIAO CIAO

X ∆ Y

a a

AAAAA

AAAAA

chess chess

CHESS

AoAo

$\boxed{6}$

$$\frac{\binom{18}{3}}{\binom{24}{4}} = \frac{\cancel{18} \times 17 \times 16}{\cancel{24} \times 23 \times 22 \times 21}$$

AoAoAoAoAo

Ao

AoAoAoAoAo AoAo

AoAo

oooo
oooo

Almeno uno dei bastoni

0,0255975

0,48225

ah ah

GH

GH

\1 \2 \3 \4 \5 \6 o

GH GH gh

$P(x) + P(y)$

GHHHH

000,152

AAAGH

AGH

INCLUSIONE/ESCLUSIONE

GII

La probabilità di $X \cap Y$

Intersezione

CIAO

o 3 blu,
o 3 rosse

CIAO

UN'OSSSERVAZIONE BANALE

CIAO

$P(x) + P(y) - 2P(x \setminus y)$

GH

o

G

GH

CIAO

$P(X \Delta Y) = P(X) + P(Y) - 2P(X \wedge Y)$ ← DIFFERENZA SIMMETRICA
- Tutti gli elementi che stanno in X,
- tutti gli elementi che stanno in Y

FAI ESERCIZIO 15 cap 2

PROP Siano E e F eventi con $E \subset F$. Allora $P(E) \leq P(F)$

DIMOSTRAZIONE

$F = E \cup (F \setminus E)$.

$P(F) = P(E) + P(F \setminus E)$ per additività finita, poiché E ed $F \setminus E$ sono disgiunti

PROP Siano $F_1 \dots F_m$ eventi, vale $P\left(\bigcup_{i=1}^{m} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m} P(F_i)$

DIMOSTRAZIONE

Definisco $A_1 = F_1$, $A_2 = F_2 \setminus F_1$, $A_K = F_K \setminus (F_1 \cup F_2 \cup \dots F_{K-1})$

Gli eventi $A_1 \dots A_m$ sono disgiunti, e $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = \bigcup_{i=1}^{m} F_i$

$P\left(\bigcup_{i=1}^{m} F_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i)$ per additività finita

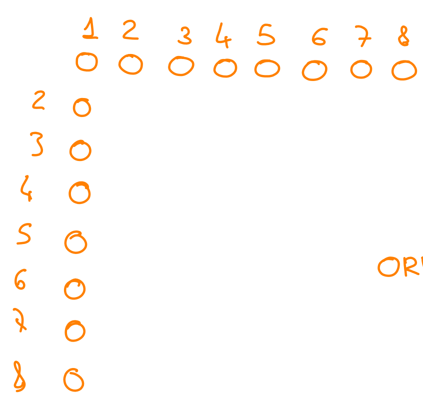
osserviamo che $A_i \subset F_i \Rightarrow P(A_i) \leq P(F_i)$

allora $\sum_{i=1}^{m} P(A_i) \leq \sum_{i=1}^{m} P(F_i)$

$$\left(\frac{8!}{8^8}\right)^2 =$$

$$\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{8^8}$$

Disponete a caso 8 torri



ORDINATE : $\left(\frac{8!}{8^8}\right)^2 =$

ORDINATE : $\left(\frac{1}{\binom{15}{8}}\right)^2 =$

$$\frac{4 \cdot \binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}$$

$$\frac{8!}{\binom{64}{8}}$$

MERDA

MERDAA

$$\frac{13 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{12}{2} \cdot 4^2}{\binom{52}{5}}$$

4 coppie di sposi   prob. che nessun marito si siede accanto a sua moglie

$M_1 S_1 M_2 S_2 M_3 S_3 M_4 S_4$

$$P_1 = \frac{7!\,2!}{8!}$$

$$F = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup F_4$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{4} P_i\right) = \sum_{i=1}^{4} P_i - \sum_{1 \leq i < j \leq 4} P_i \cap P_j + \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} P_i P_j P_k - P_i P_j P_k P_z$$

$$1 - \left(4 \cdot \frac{7!\,2!}{8!} \quad \binom{4}{2} \frac{6! \cdot 2!\,2!}{8!} + \binom{4}{3} \frac{5!\,2!\,2!\,2!}{8!} - \frac{2!\,2!\,2!\,2!}{8!}\right)$$

c'è un solo esito

4 mogli e 4 mariti, ballano a coppie.
Qual è la probabilità che nessuno balla con sua moglie? $1 - \left(4 \cdot \frac{3!}{4!} - \binom{4}{2}\frac{2!}{4!} + \binom{4}{3}\frac{1}{4!} - \frac{1}{4!}\right)$
Per n grande, questa probabilità tende a $1 - e^{-1}$

si potrebbe pensare a un mo

Def Una successione di eventi $E_1, E_2 \dots$ è detta monotona crescente se

$$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset E_n \dots$$

ed è detta monotona decrescente se succede l'opposto, cioè:

$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots E_n$$

Def Se $E_1, E_2 \dots E_n$ è monotona crescente, si definisce

$$\lim_{n \to \infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

Se invece $E_1, E_2 \dots E_n$ è monotona decrescente, si pone

$$\lim_{n \to \infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

Prop Sia $E_1, E_2 \dots E_n$ una successione monotona di eventi, allora

$$P\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$$

DIMOSTRAZIONE

1) Per una serie crescente: $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \dots$

Definiamo $F_1 = E_1$, $F_2 = E_2 \setminus E_1$, $F_3 = E_3 \setminus E_2$, $F_n = E_n \setminus E_{n-1}$

Siccome gli E_i sono ognuno inclusi nel successivo, gli F_i sono a due a due disgiunti

Osservo che $E_i = F_1 \cup F_2 \cup \dots F_i$; poi vedo che

$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$; poi osservo che $P(E_n) = \sum_{k=1}^{n} P(F_k)$ (per additività finita)

$$\lim_{n\to\infty} P(E_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(F_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(F_k)$$

$$P\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(F_n)$$

– sono uguali

per additività numerata

2) Per una serie decrescente $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \dots$

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

TESI: $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$

però $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 1 - P\left(\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right]^c\right) = 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^c\right)$

Allora dobbiamo dimostrare che

$$1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^c\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(E_n^c)$$

e cioè $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^c\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n^c)$

Osservo che $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \dots = E_1^c \subset E_2^c \subset E_3^c \dots$

e quindi posso riusare la dimostrazione di prima

Def La definizione di probabilità usata finora va bene solo per spazi numerabili.

Quando S non è numerabile, lo spazio degli eventi NON è $\mathcal{P}(S)$ (insieme delle parti)

Esempio: lancio una moneta infinite volte. probabilità che esce sempre testa?

$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ dove E_n = "Testa esce le prime n volte". E' una successione monotona di eventi

quindi $P(E) = P\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ (Ma avere prob 0 non significa essere impossibile, poiché $E \neq \emptyset$)

24/10/16

E = almeno un dado dà 6

F_i = la somma dei dadi è i

$$|F_i| = \begin{cases} i-1 & 2 \leq i \leq 7 \\ 13-i & 8 \leq i \leq 12 \end{cases}$$

$$P(E \mid F_i) = \frac{|E \cap F_i|}{|F_i|} = \begin{cases} 0 & 2 \leq i \leq 6 \\ \frac{2}{13-i} & 7 \leq i \leq 11 \\ 1 & i = 12 \end{cases}$$

E = "prima e terza bianca" F = "tre bianche e una nera" U = 8 bianche e 4 nere

$$P(E|F) = \frac{|E \cap F|}{|F|}$$

$|F| = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \binom{4}{3}$

$|E \cap F| = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 4$

3 urne U_A = 2 bianche, 2 rosse U_B = 8 bianche, 4 rosse U_C = 1 bianca, 3 rosse

F = "Tra le tre palline che hai preso, ce ne sono 2 bianche e 1 rossa"
E = "Da U_A estraggo 1 bianca"

$$P(\text{2 bianche e 1 rossa}) = P(R,B,B) + P(B,R,B) + P(B,B,R) = \left(\frac{4}{6} \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{2}{6} \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{2}{6} \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{3}{4}\right)$$

$$P(E|F) = P(B,R,B) + P(B,B,R) = \frac{2 \cdot 4 \cdot 1 + 2 \cdot 8 \cdot 3}{4 \cdot 8 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 1 + 2 \cdot 8 \cdot 3}$$

F = La Moneta esce T $P(F) = \frac{1}{3}$

E = 3R

$$P(E) = P(F)P(E|F) + P(F^c)P(E|F^c) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\binom{4}{3}}{\binom{6}{3}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}} =$$

(legge delle prob. totali)

Teor Supponiamo di avere n eventi $F_1 \dots F_n$ tali che $S = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$; $F_i \cap F_j = \emptyset$ cioè formano una partizione di S, e supponiamo che $P(F_i) > 0 \; \forall i$, Allora, $\forall E$ evento, vale:

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(F_i) P(E|F_i)$$

DIMOSTRAZIONE

$E = \bigcup_{i=1}^{n} (EF_i) \leftarrow$ a due a due disgiunti

$E = \sum_{i=1}^{n} P(EF_i) = \sum_{i=1}^{n} P(E|F_i) P(F_i)$

Urna con 4 bianche e 2 rosse
Lancio un dado. Se esce i, estraggo i palline
Probabilità di estrarre due palline bianche

0,4 di fare incidenti - 30%
0,2 di fare incidenti

$$P(E) = P(F)P(E|F) + P(F^c)P(E|F^c)$$

Teorema di Bayes

Sia F un evento con $P(F) > 0$ e sia E evento con $P(E) > 0$

Allora $P(F|E) = \dfrac{P(E|F)\,P(F)}{P(E)}$

DIMOSTRAZIONE

$$P(F|E) = \frac{P(EF)}{P(E)} = \frac{P(E|F)P(F)}{P(E)}$$ ← per scambiare le implicazioni

0,5 % della popolazione soffre della malattia

95% Becca il malato

1 % Falso positivo

Qual è la probabilità che se il test è positivo siete malati

lo so

ciao.

lo sono luca.

lo sono luca

$$P(D|E) = \frac{P(E|D)\,P(D)}{P(E)} = \frac{P(E|D)\,P(D)}{P(E|D)P(D) + P(E|D^c)\,P(D^c)} = 32{,}3\ \%$$

Rossa, Nera.

RR = "La carta ha due faccie rosse"

NN = "La carta ha due faccie nere

NR = "La carta ha una faccia nera e una rossa

$$P(RN|R) = \frac{P(RN \cap R)}{P(R)} = \frac{P(R|RN)P(RN)}{P(R|RN)P(RN) + P(R|RR)P(RR) + P(R|NN)P(NN)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 0}$$

Altro modo per farlo

$S = \{R_1, R_2, N_1, N_2, R_3, N_3\}$

$$P(RN|R) = \frac{|RN \cap R|}{|R|} = \frac{1}{3}$$

32% fumatrici

E = donna ha grav. extra uterina $\quad P(F) = 0.32$

F = donna fuma $\quad P(E|F) = 2P(E|F^c)$

$$P(F|E) = \frac{P(FE)}{P(E)} = \frac{P(E|F)P(F)}{P(E)} = \frac{P(E|F)P(F)}{P(E|F)P(F) + P(F^c)P(E|F^c)} = \frac{2P(F)}{2P(F) + (1-P(F))} =$$

96% sopravvissuti al cesario

98% neonati sopravvive

15% parti cesari

E = Neonato sopravvive

F = Il parto è cesario

$F|E = 0.22$

E = ha cane = 0.36

22% chi ha un cane ha gatto

F = ha gatto = 0.30

$$P(E \cap F) = P(E)P(F|E)$$

Teorema Bayes Siano $F_1, F_2 \dots F_m$ eventi che formano partizione di S

Supponiamo che $P(F_i) > 0 \ \forall i = 1 \dots m$, allora $\forall E$ evento con $P(E) > 0$,

$\forall j = 1 \dots m$ vale

$$P(F_j|E) = \frac{P(E|F_j)P(F_j)}{P(E)} = \frac{P(E|F_j)P(F_j)}{\sum_{i=1}^{m} P(E|F_i)P(F_i)}$$

DIMOSTRAZIONE

Tutti i rapporti hanno senso poichè tutti i $P(F) > 0$ e $P(E) > 0$

$$P(F_j|E) = \frac{P(EF_j)}{P(E)} = \frac{P(E|F_j)P(F_j)}{P(E)} = \frac{P(E|F_j)P(F_j)}{\sum_{i=1}^{m} P(E|F_i)P(F_i)}$$

Def Due eventi E e F sono indipendenti se $P(EF) = P(E)P(F)$

Oss Se $P(F) > 0$ allora E e F sono indipenti $\Leftrightarrow P(E) = P(E|F)$

DIMOSTRAZIONE

$(\Rightarrow)$ $P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)} = \frac{P(E)P(F)}{P(F)} = P(E)$

$(\Leftarrow)$ Supponiamo $P(E) = P(E|F)$ Allora $P(E) = \frac{P(EF)}{P(F)}$

Allora $P(F)P(E) = P(FE)$

Es = esce testa due volte

$E =$ "esce T al 1° lancio" $\quad F =$ "due facce uguali"

$P(E) = \frac{1}{2} \quad P(F) = \frac{1}{2} \quad P(EF) = P(E)P(F) = \frac{1}{4}$ poiché E ed F sono indipendenti

Prop $\quad E \overset{\text{indipendenza}}{\perp\!\!\!\perp} F \Rightarrow E \perp\!\!\!\perp F^c$

DIMOSTRAZIONE

Dobbiamo dimostrare che $P(EF^c) = P(E)P(F^c)$

Sappiamo che $P(EF) = P(E)P(F)$. $EF^c = E \setminus (EF)$

$P(EF^c) = P(E) - P(EF)$; $E = (EF^c) \cup (EF)$; $P(E) = P(EF^c) + P(EF)$

$P(EF^c) = P(E) - P(EF) = P(E) - P(E)P(F) = P(E)(1 - P(F)) = P(E)P(F^c)$

Def Gli eventi E, F, G si dicono indipendenti se

a) $P(EF) = P(E)P(F)$ $\quad$ c) $P(FG) = P(F)P(G)$

b) $P(EG) = P(E)P(G)$ $\quad$ d) $P(EFG) = P(E)P(F)P(G)$

Es. $E =$ "a e b hanno lo stesso compleanno"
$F =$ "b e c hanno lo stesso compleanno"
$G =$ "c e a hanno lo stesso compleanno"

Sono 3 eventi indipendenti a coppie, ma non tutti e 3 insieme.

Infatti $P(EF) = \frac{1}{365^2} = P(E)P(F)$

Ma $P(EFG) = \frac{1}{365^2} \neq P(E)P(F)P(G)$

Prop Se E, F, G sono indipendenti allora E è indipendente da ogni evento costruito a partire da F e da G tramite unioni, intersezioni o complementari.

Es. $E \perp\!\!\!\perp (F \cup G)$:

$P(E \cap (F \cup G)) = P(EF \cup EG) = P(EF) + P(EG) - P(EF \cap EG) = P(EF) + P(EG) - P(EFG) =$

Usando l'ipotesi che EFG indipendenti:

$= P(E)P(F) + P(E)P(G) - P(E)P(F)P(G) = P(E)(P(F) + P(G) - P(F)P(G)) = P(E)(P(F) + P(G) - P(FG)) =$

$= P(E)P(F \cup G) \Rightarrow E \perp\!\!\!\perp F \cup G$

Def Gli eventi $E_1 \dots E_m$ si dicono indipendenti se $\forall A \subset \{1, 2 \dots m\}$ vale

$$P\left(\bigcap_{i \in A} E_i\right) = \prod P(E_i)$$

Def Consideriamo un esperimento composto da m sottoesperimenti operativamente indipendenti, svolti con lo stesso protocollo (identici). I sottoesperimenti si chiamano prove, e spesso sono di tipo successo/insuccesso

$E =$ "Ho almeno un successo"

$E^c = F_1 F_2 \dots F_m \quad F_i =$ "Ho insuccesso alla prova i-esima"

$P(E^c) = P(F_1 \dots F_m) = P(F_1) \dots P(F_m)$

$p =$ probabilità che una singola prova dia successo.

$P(E^c) = (1-p)^m \Rightarrow P(E) = 1 - (1-p)^m$

Proviamo a fare un modello per calcolare la probabilità per le prove:

$S = \{(x_1 \dots x_m) : x_i \in \{I, S\}\}$ $\quad P(\{(x_1 \dots x_m)\}) = P\left(\bigcap_{i=1}^{m} E_i\right)$ con $E_i =$ "alla prova i esce x_i"

Voglio $E_1 \dots E_m$ indipendenti

$\Rightarrow P\left(\bigcap_{i=1}^{m} E_i\right) = \prod P(E_i) = \prod f(x_i)$ dove $f(x) = \begin{cases} p & \text{se } x = S \\ 1-p & \text{se } x = I \end{cases} \Rightarrow$

$= p^k (1-p)^{m-k}$, dove k è il numero dei successi

Prop La probabilità di avere esattamente k successi in n prove:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

DIMOSTRAZIONE

E = "Ho esattamente k successi" $\quad P(E) = ?$ $\quad E = \{(x_1 \dots x_n) \in \{S, I\}\}^n$

$$P(E) = \sum_{(x_1 \dots x_n) \in E} P(\{(x_1 \dots x_n)\}) = \sum_{(x_1 \dots x_n) \in E} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

<— Da sapere molto bene come si ricava