MENENTUKAN HUBUNGAN PROBABILITAS BERSYARAT MENGGUNAKAN GRAF

WISNU MURTI MUHAMAD
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Terbuka
wiznuceae@gmail.com

abstrak

Teori probabilitas digunakan untuk menyatakan besar kemungkinan munculnya suatu kejadian, semakin besar nilainya semakin mungkin terjadi. Pada Suatu kejadian yang saling berkaitan probabilitas suatu kejadian dapat dipengaruhi oleh kejadian lain yang telah muncul, kasus ini dinamakan kejadian bersyarat. kejadian seperti ini sering dijumpai dalam kehidupan, misalnya probabilitas seekor kelinci dapat hidup hingga dewasa jika diketahui ia terlahir normal, yang berbeda nilainya jika ia terlahir tak normal. probabilitas survive kelinci tersebut juga dapat berhubungan dengan jenis kelinci. jika telah diketahui jenis kelinci A memiliki peluang lahir normal lebih baik dari jenis B, namun kelinci jenis B memiliki probabilitas survive lebih besar dari jenis A, maka untuk menentukan hubungan probabilitas kelinci A atau B yang hidup hingga dewasa jika diketahui jenisnya atau kondisi saat lahir, atau kejadian sebaliknya diketahui seekor kelinci dewasa ingin diketahui berapa probabilitasnya merupakan kelinci jenis A , digunakanlah hubungan probabilitas bersyarat. Pada kasus hanya terdapat sebuah syarat kejadian, hubungan probabilitas bersyarat telah dinyatakan dalam bentuk teorema bayes, dalam tulisan ini akan dibahas hubungan probabilitas bersyarat yang berkaitan dengan beberapa kejadian bersyarat. Dan digunakan graf sebagai alat bantu penggambaran kejadian dan mencari hubungannya

Kata kunci : *perluasan teorema bayes, probabilitas bersyarat, graf probabilitas*

1. Pendahuluan

Probabilitas bersyarat terjadinya kejadian B setelah kejadian A yang mendahului B ditentukan dengan $P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)}$, sebaliknya probabilitas kejadian A jika diketahui kejadian B telah terjadi, ditentukan dengan menggunakan teorema bayes yaitu

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B\,|\,A)}{P(A)P(B\,|\,A)+P(B)P(A\,|\,B)}$$

yang merupakan hubungan peluang kejadian bersyarat . Namun pada kejadian dengan syarat yang lebih, misalnya pada kejadian bersyarat yang masih memiliki syarat lagi, perlu dicari dahulu hubungan antar kejadiannya. Dengan memodelkan kejadian kedalam bentuk graf akan terlihat keterkaitan tersebut, berdasarkan graf probabilitas kemudian dapat dinentukan hubungan probabilitas bersyaratnya. Tulisan ini membahas cara menentukan probabilitas bersyarat dengan memodelkannya kedalam bentuk graf.

2. Metodologi

Pembahasan di mulai dengan konsep himpunan, yang merupakan pengetahuan dasar untuk mendefinisikan himpunan kejadian dan himpunan ruang sampel dalam probabilitas. kemudian dijelaskan Teori probabilitas berdasarkan himpunan kejadian, dan probabilitas bersyarat. Dilanjutkan dengan pengertian graf, dan bagaimana membuat pemodelan graf dari masalah probabilitas bersyarat. Setelah graf probabilitas dibuat maka akan dibahas cara menentukan hubungan probabilitas bersyarat yang ingin dicari.

3.himpunan

Definisi 1. himpunan adalah kumpulan elemen-elemen yang terhimpun dengan syarat tertentu, elemen-elemen itu disebut sebagai anggota himpunan.

Himpunan dinyatakan dengan huruf besar, sedangkan elemennya ditulis oleh huruf kecil yang dipisahkan dengan tanda koma, dan dilingkupi tanda { }. Misalnya himpunan munculnya mata dadu genap G pada pelemparan sebuah dadu dinyatakan dengan G={2,4,6}. dengan G adalah himpunan bilangan genap, dan 2,4,6 adalah anggota himpunan G. Banyaknya anggota dari himpunan A ditulis n(A)

Jika x anggota himpunan A ditulis $x \in A$, x bukan anggota A ditulis $x \notin A$. jika semua anggota himpunan A juga merupakan anggota himpunan B, dikatakan A himpunan bagian dari himpunan B yang ditulis $A \subseteq B$

komplemen himpunan H ditulis H^c adalah himpunan yang elemen-elemenya selain anggota H

Definisi 2 . gabungan himpunan A dan B ditulis $A \cup B$ adalah himpunan yang anggotanya merupakan anggota himpunan A atau B

Definisi 3 . irisan himpunan A dan B ditulis $A \cap B$ adalah himpunan yang angotanya berada dalam kedua himpunan

*Definisi 4 .*Himpunan A dan B saling asing jika elemen-elemennya tak ada yang sama

Definisi 5. Himpunan semesta S adalah himpunan terbesar yang tak ada lagi elemen diluarnya

Sifat-sifat himpunan yang diperlukan

1. jika $x \in A$ dan $A \subset B$ maka $x \in B$
2. $A \cup A^c = S$
3. Jika A dan B saling asing maka $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
4. Jika A dan B tak saling asing maka $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

4. Probabilitas

Definisi 6 . ruang sampel S adalah himpunan semua kejadian yang mungkin terjadi

Definisi 7 . Probabilitas suatu kejadian A adalah perbandingan antara banyaknya elemen anggota A dengan jumlah seluruh kejadian yang mungkin diperoleh.

Jika $n(A)$menyatakan banyaknya anggota himpunan A, dan $n(S)$ menyatakan banyaknya semua anggota himpunan ruang sampel S maka Probabilitas kejadian A ditulis P(A) =$\frac{n(A)}{n(S)}$, nilai probabilitas suatu kejadian terlatak antara 0 dan 1, maka berlaku $0 \leq P(A) \leq 1$

Sifat-sifat probabilitas yang diperlukan

1. Probabilitas terjadinya kejadian ruang sampel S adalah P(S) = 1
2. Probabilitas kejadian yang tak terdapat dalam ruang sampel = 0
3. $P(A)+P(A^c) = 1$

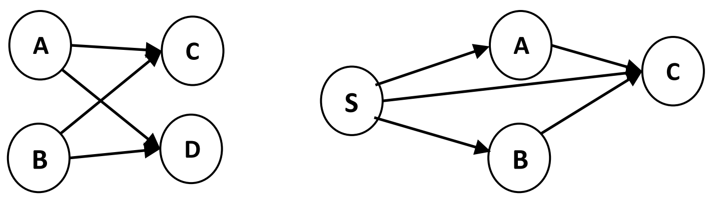
5. Graf

Definisi 7 . Graf adalah sekumpulan simpul-simpul yang dihubungkan oleh busur pada simpul yang memiliki keterkaitan atau hubungan tertentu

Ada 2 jenis busur, yaitu busur berarah dan busur tak berarah

Pada tulisan ini akan digunakan graf berarah,yaitu graf dengan arah busur yang berbeda memiliki arti yang berlainan. Graf tersusun atas 3 komponen yang membentuk suatu system yaitu :

1. Simpul, menyatakan himpunan suatu kejadian. Yang digambarkan sebagai lingkaran dengan huruf yang menamai simpul tersebut
2. Busur, menyatakan keterhubungan antar kejadian. Yang digambarkan oleh busur berarah yang menghubungkan dua simpul yang memiliki hubungan. Ujung busur menyatakan kejadian yang terjadi setelah kejadian sebelumnya pada pangkal busur
3. Nilai busur, menyatakan besaran yang merupakan nilai probabilitas kejadian pada ujung busur bersangkutan setelah kejadian pada pangkal busur terjadi



Gambar 1, graf

5. Graf probabilitas

a. pengertian graf probabilitas

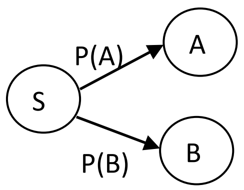
Graf probabilitas adalah gambar graf yang dibuat untuk menyatakan keterkaitan antara kejadian dalam probabilitas bersyarat. Graf probabilitas terbuat dari unsur simpul, busur dan nilai busur.

Simpul pada graf probabilitas menyatakan kejadian, sedangkan busur berarah menyatakan keterhubungan dari kejadian, nilai busur menyatakan probabilitas kejadian simpul yang dituju. Misalnya, kejadian A disimbolkan dengan simpul A, dan kejadian bersyarat sebelum A digambarkan dengan sebuah busur yang menuju A.

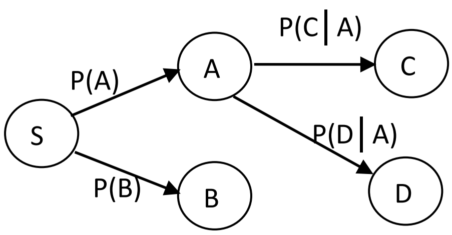
Akan dibuat simpul pertama pada graf probabilitas yang menyatakan ruang sampel kejadian, yaitu himpunan semua kejadian yang mungkin diperoleh, yang disimbolkan dengan S.

Jadi peluang kejadian A ditulis P(A), sedangkan hubungan simpul S dan A adalah busur berarah SA, probabilitas kejadian B ditulis P(B) hubungan simpul S ke B dengan busur berarah SB, seperti terlihat dalam gambar 2.

Untuk probabilitas bersyarat kejadian C setelah A terjadi ditulis P(C│A) yang digambarkan dengan busur berarah dari A ke C, probabilitas bersyarat D setelah A terjadi ditulis P(D│A) yang digambarkan oleh busur berarah dari A ke D, seperti terlihat pada gambar 3. Selain busur yang berpangkal dari S, maka notasi busur berarah X ke Y menyatakan kejadian Y setelah kejadian X, yang probabilitasnya ditulis P(Y│X) .



Gambar 2.



Gambar 3.

Pada gambar 2 himpunan semua kejadian yang mungkin yaitu simpul S, terbagi menjadi 2 subhimpunan. Kejadian A merupakan Subhimpunan dari S, demikian pula kejadian B merupakan subhimpunan lainnya dari S. Jika terdapat lebih dari 2 kejadian yang saling lepas maka jumlah nilai busur yang keluar dari simpul S adalah 1.

sedangkan pada kasus S terbagi menjadi 2 kejadian, dengan kejadian B adalah komplemen kejadian A maka berlaku jumlah probabilitasnya adalah 1. Misalnya S adalah himpunan semua kemungkinan kejadian munculnya sisi muka dan sisi belakang dari pelemparan sebuah koin,

maka A kejadian munculnya sisi muka dengan peluang P(A), dan B kejadian bukan muka yaitu munculnya sisi belakang dengan peluang P(B) yang merupakan komplemen kejadian A

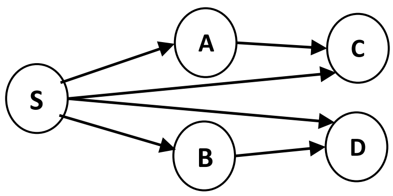
sehingga P(A)+P(B)=1 atau P(B)=P(A^c)=1-P(A).

Pada gambar 3, kejadian A terbagi lagi menjadi 2 subkejadian yaitu kejadian C dan kejadian D. Khususnya jika kejaian D adalah komplemen dari kejadian C, berlaku hubungan

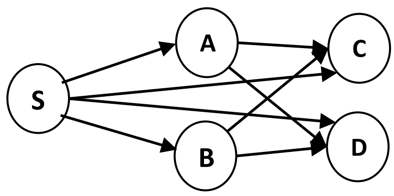
P(C│A)+ P(D│A)=1. Jika kejadian A terbagi menjadi lebih dari 2 subkejadian yang masing-masing saling lepas juga berlaku hubungan jumlah nilai busur yang keluar dari simpul A sama dengan 1. Lintasan S-A-C merupakan probabilitas kejadian C yang berasal dari A, dalam notasi himpunan ditulis $C \cap A$, jadi probabilitas kejadian $C \cap A$ adalah P$(C \cap A) = P(A)P(C\,|\,A)$, yaitu perkalian busur pada lintasan S-A-C =$SA \times AC$

pada gambar 3 dapat pula dibuat busur berarah dari S ke C yang menyatakan hubungan kejadian S dan kejadian C dengan nilai P(C), atau busur S ke D dengan nilai P(D), seperi gambar 4 atau secara lengkap graf tersebut seperti gambar 5.

Untuk menyederhanakan tampilan graf, selanjutnya besar busur tidak ditulis



Gambar 4



Gambar 5

b. membuat graf probabilitas

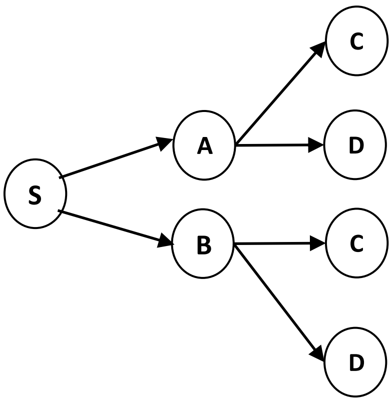
Graf probabilitas dibuat dengan mengambarkan kejadian dan hubungan antar kejadian kejadian kedalam bentuk graf, yaitu simpul dan busur yang sesuai

Misalnya pada contoh 1 berikut

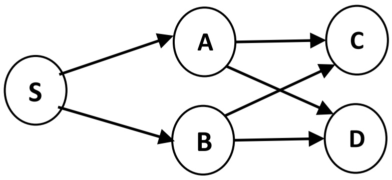
Contoh 1

Terdapat 10 kotak yang terdiri atas 4 kotak merah dan 6 kotak biru. Setiap kotak merah berisi 8 bola hitam dan 4 bola putih, sedangkan setiap kotak biru berisi 5 bola hitam dan 15 bola putih.

Pada masalah tersebut ruang sampel kejadian dapat dibagi menjadi 2 subkejadian yaitu kejadian A adalah kotak merah, dan kejadian B adalah kotak biru. dengan probabilitas kejadian A yaitu P(A) yang dihubungkan oleh busur SA , dan probabilitas kejadian B yaitu P(B) dihubungkan sebagai busur SB, kemudian masing-masing terbagi lagi menjadi 2 subkejadian, sehingga diperoleh hubungan seperti gambar 6, setelah itu dapat disederhanakan menjadi bentuk graf seperti gambar 7 berikut



Gambar 6



gambar 7

Pada gambar 7

Kejadian A sebagai kejadian kotak merah dengan probabilitas P(A)=4/10, yaitu busur SA

Kejadian B sebagai kejadian kotak biru dengan probabilitas P(B)=6/10 , yaitu busur SB

Kejadian C sebagai kejadian banyaknya bola hitam, dengan

Probabilitas Kejadian C setelah A ditulis P(C│ A)=8/12, yaitu busur AC

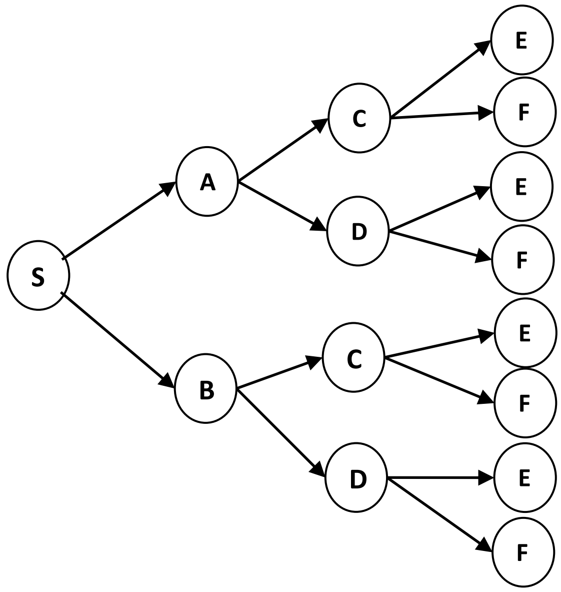
Probabilitas Kejadian C setelah B ditulis P(C│ B)=5/20, yaitu busur BC

Kejadian D yaitu banyaknya bola putih, dengan

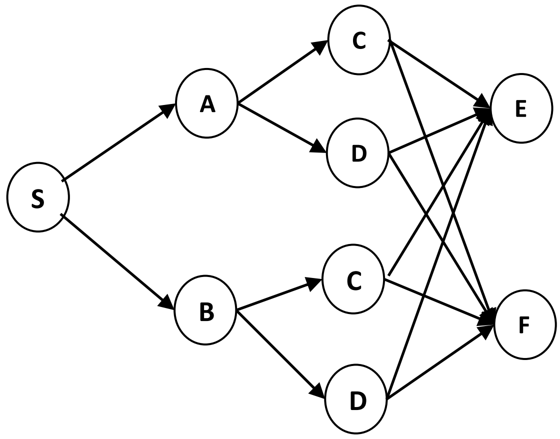
Probabilitas Kejadian D setelah A ditulis P(D│ A)=4/12, yaitu busur AD

Probabilitas Kejadian D setelah B ditulis P(D│ B)=15/20, yaitu busur BD

Graf probabilitas juga dapat digunakan untuk mengggambarkan kejadian bersyarat yang bersyarat lagi seperti gambar 8 berikut, simpul E dan simpul F yang merupakan kejadian terakhir dapat digambarkan menjadi masing-masing 1 simpul pada graf, sehingga dapat dirubah menjadi bentuk graf seperti gambar 9. Sedangkan simpul C dan D tetap



Gambar 8



Gambar 9

Pada gambar 8 Simpul C yang merupakan subkejadian A dan B terbagi lagi kedalam subkejadian E dan F

Pada gambar 9

busur CE pada lintasan S-A-C-E menyatakan hubungan kejadian E setelah kejadian $C \cap A$ yang besarnya P(E$\mid (C \cap A)$)

busur CF pada lintasan S-A-C-F menyatakan hubungan kejadian F setelah kejadian $C \cap A$ yang besarnya P(F$\mid (C \cap A)$)

busur CE pada lintasan S-B-C-E menyatakan hubungan kejadian E setelah kejadian $C \cap B$ yang besarnya P(E$\mid (C \cap B)$)

busur DF pada lintasan S-B-C-F menyatakan hubungan kejadian F setelah kejadian $D \cap B$ yang besarnya P(F$\mid (C \cap B)$)

7. teorema pada graf probabilitas

berdasarkan graf probabilitas yang telah dibuat selanjutnya graf dapat digunakan untuk mencari hubungan dan probabilitas antar kejadian bersyarat, untuk itu akan dianalisis lintasan dan ruang sampel yang terbentuk setelah diberikan syarat kejadian yang telah terjadi dengan menggunakan teorema-teorema berikut:

Teorema 1

pada kejadian yang saling asing, Jika $P(A_i)$ adalah nilai busur dari simpul A ke simpul A_i . yaitu probabilitas kejadian A_i setelah A , maka Jumlah besar semua busur-busur yang keluar dari A sama dengan 1 .

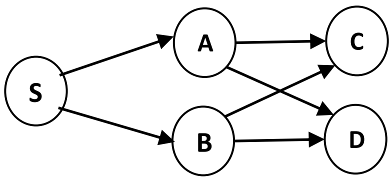
$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

Misal simpul A terbagi menjadi 3 simpul yaitu B, C , dan D dengan masing masing simpul adalah kejadian yang saling asing , maka berdasarkan teorema 1 berlaku hubungan P(B)+P(C)+P(D)=1

Teorema 2

Pada kejadian yang saling asing, maka besar probabilitas untuk irisan beberapa kejadian $(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_i)$ adalah perkalian nilai busur yang melalui simpul pada lintasan kejadian-kejadian tersebut .

Teorema 2 berasal dari definisi probabilitas kejadian, Misalkan pada contoh 1



Gambar 10

Pada graf tersebut P(C∩A) adalah peluang kejadian C yang sekaligus merupakan kejadian A,atau kejadian C yang berasal dari kejadian A sehingga berdasarkan teorema 2 berlaku

P(C∩A) = P(A) X P(C│A) , yang merupakan lintasan S-A-C

P(D∩B) = P(B) X P(D│B) , yang merupakan lintasan S-B-D

P(C∩B) = P(B) X P(C│B) lintasan S-B-C

P(D∩A) = P(A) X P(D│A) lintasan S-A-D

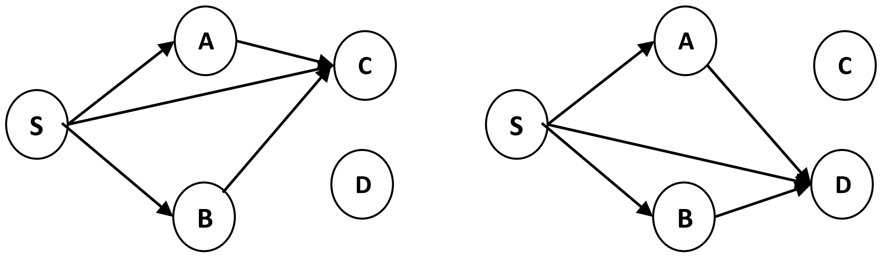
Teorema 3

Probabilitas kejadian K yaitu P(K) adalah jumlah dari besar semua lintasan dari S menuju simpul k melalui simpul-simpul yang dapat dilalui

Misalkan pada graf gambar 11 dibawah, berdasarkan teorema 3 berlaku

Probabilitas C yaitu busur SC adalah P(C) = [SA X AC]+[SB X BC] = [P(A) X P(C│A)] +[P(B) X P(C│B)] , dan

Probabilitas D yaitu busur SD adalah P(D) = [SA X AD]+[SB X BD] = [P(A) X P(D│A)] + P(B) X P(D│B)]



Gambar 11

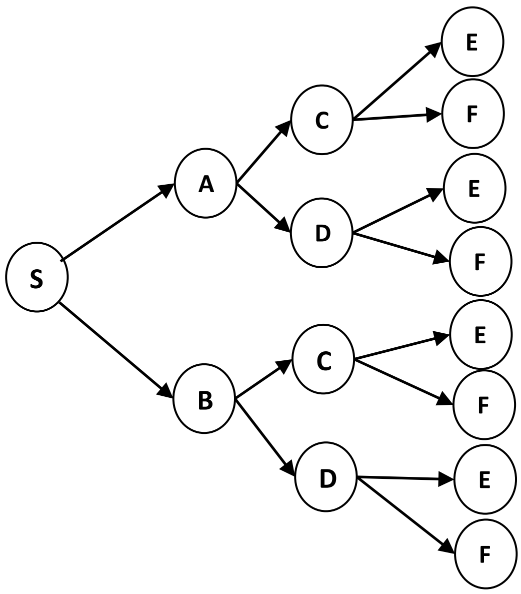
8. Menentukan hubungan peluang bersyarat dari Graf probabilitas

a. menentukan probabilitas bersyarat lebih dari 2

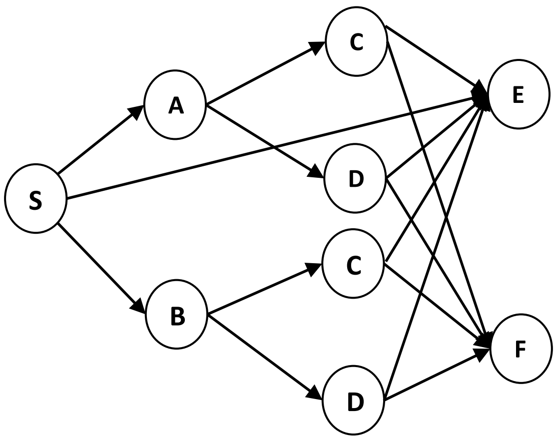
berdasarkan teorema 1 sampai 3 dan definisi probabilitas, dapat dicari hubungan peluang bersyarat pada graf yang terdiri lebih dari dua kejadian bersyarat yang bersyarat lagi.

misalkan terdapat kasus berikut

ada 2 jenis kelinci A dan B, masing-masing kelinci dibagi 2 golongan sewaktu lahir yaitu normal (disimbolkan C) dan tak normal (disimbolkan D), dari 2 golongan dibagi lagi menjadi kelinci yang hidup hingga dewasa (disimbolkan E) dan yang mati sebelum dewasa (disimbolkan F), graf probabilitasnya dibuat seperti gambar 12 berikut



Gambar 12



Gambar 13

Graf yang disederhanakan seperti gambar 13.

Berdasarkan graf tersebut dapat dicari hubungan kejadian C, misalnya dengan A atau B.

Maka probabilitas kejadian C ,yaitu P(C) adalah jumlah nilai lintasan dari S menuju C, yaitu S-A-C dan S-B-C, Sehingga didapat

$P(C) = P(A)P(C|A) + P(B)P(C|B)$

probabilitas kejadian E , P(E) dapat ditentukan dari jumlah lintasan dari S ke E yaitu

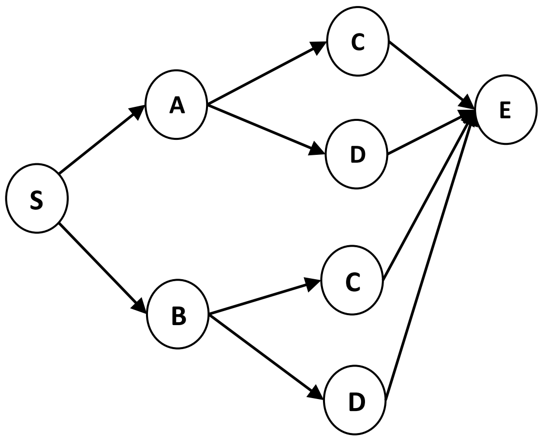
(S-A-C-E) + (S-A-D-E) +(S-B-C-E) + (S-B-D-E)

P(E) = P(A)P(C│A)P(E│$(C \cap A)$) + P(A)P(D│A)P(E│$(D \cap A)$) + P(B)P(C│B)P(E│$(C \cap B)$) + P(B)P(D│B)P(E│$(C \cap B)$)

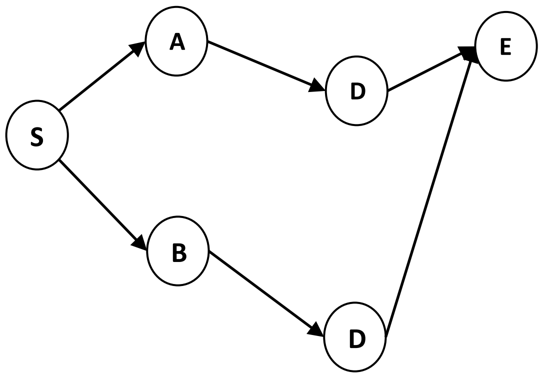
Atau dapat juga dinyatakan dalam bentuk irisan kejadian

P(E) = $P(A \cap C \cap E) + P(A \cap D \cap E) + P(B \cap C \cap E) + P(B \cap D \cap E)$

Sedangkan untuk mencari probabilitas kejadian A jika diketahui kejadian E telah terjadi pada graf ini dapat di cari dengan cara mengeliminasi kejadian F, sebab kejadian E telah terjadi sehingga P(F) menjadi sama dengan nol, kita buat graf yang telah di eliminasi F nya pada gambar 14



Gambar 14



Gambar 15

Sehingga P(A│E) berdasarkan definisi probabilitas (definisi 1) adalah perbandingan jumlah nilai lintasan yang bermula dari S , melalui A, dan berakhir di E, yaitu (S-A-C-E)+(S-A-D-E)

Dengan nilai semua lintasan S yang menuju E sebagai ruang sampel semua kejadian, yaitu (S-A-C-E)+(S-A-D-E)+(S-B-C-E)+ (S-B-D-E)

Jadi peluang bersyarat pada kasus ini adalah

$$P(A|E) = \frac{(\mathrm{S-A-C-E}) + (\mathrm{S-A-D-E})}{(\mathrm{S-A-C-E}) + (\mathrm{S-A-D-E}) + (\mathrm{S-B-C-E}) + (\mathrm{S-B-D-E})}$$

$$= \frac{\mathrm{P(A)P(C|A)P(E|}(C \cap A)) + \mathrm{P(A)P(D|A)P(E|}(D \cap A))}{\mathrm{P(A)P(C|A)P(E|}(C \cap A)) + \mathrm{P(A)P(D|A)P(E|}(D \cap A)) + \mathrm{P(B)P(C|B)P(E|}(C \cap B)) + \mathrm{P(B)P(D|B)P(E|}(C \cap B))}$$

Untuk probabilitas kejadian A setelah diketahui kejadian $(\mathrm{E} \cap \mathrm{D})$ telah terjadi dapat ditentukan dengan mengeliminasi kejadian yang berhubungan dengan simpul C (sebab E hanya berasal dari simpul D) Seperti pada gambar 15, sehingga hubungannya diperoleh dari

$$P(A|(E \cap D)) = \frac{(S-A-D-E)}{(S-B-D-E)} = \frac{P(A)P(D \mid A)P(E \mid (D \cap A))}{P(A)P(D|A)P(E|(D \cap A)) + P(B)P(D \mid B)P(E \mid (D \cap B))}$$

Sedangkan untuk menentukan probabilitas kejadian E irisan D irisan A adalah

$$P(E \cap D \cap A) = \frac{(S-A-D-E)}{(S-A-C-E)+(S-A-D-E)+(S-B-C-E)+(S-B-D-E)} =$$

$$\frac{P(A)P(D \mid A)P(E \mid (D \cap A))}{P(A)P(C \mid A)P(E \mid (C \cap A)) + P(A)P(D \mid A)P(E \mid (D \cap A)) + P(B)P(C \mid B)P(E \mid (C \cap B)) + P(B)P(D \mid B)P(E \mid (C \cap B))}$$

9. Penutup

Dengan menggunakan graf probabilitas dapat dilihat seluruh keterkaitan antar himpunan kejadian.Hal ini dapat membantu untuk menentukan hubungan kejadian-kejadian bersyarat, dengan melihat susunan kejadian, dan lintasannya. Kemudian digunakanlah teorema dan definisi yang telah diketahui pada probabilitas dan himpunan untuk mencari hubungan probabilitas yang lebih kompleks dan bervariasi seperti $P(A \mid (E \cap D))$, $P((A \cap C) \mid E)$, $P(E \cap D \cap A)$, dan variasi hubungan lainnya

Referensi

Subanar. (2007). *Pengantar probabilitas*. Jakarta: Universitas Terbuka.

Kerami, Djati. 2008. *Analisis Jaringan*. Jakarta: Universitas Terbuka.