代数基本观念

cyb 酱 ⋆

2023 年 7 月 24 日

目录

Chapter 1

说在前面

这是一份涉及各种代数内容的笔记, 是笔者在初学代数几何时整理制作的. 代数几何是数学中一个深奥的（esoteric）、难以入门（exclusive）和极其抽象（abstract）的分支. 这份笔记的目的之一是试图给出一条路径——作为一个初学者, 可以怎样掌握最基础的代数几何语言?

首先为了学习代数几何必须要有基础的交换代数和同调代数知识, 而学生必须要完成线性代数和抽象代数的相关课程才能进入此门, 仅凭须递归学习内容之深已让不少学生望而却步. 其次是教材稀缺之景况, 并不是说现有的教材内容不好, 而是对初学者不友好——要么必要之基础参考于别书, 要么太长太一般或者细节太多, 或者难以迅速建立起现代之框架. 因此, 笔者希望制作一份较为精炼（就是说在正文部分尽量少写废话, 这里是前言, 不过我看很多读者并不怎么关心前言）和（几乎）完备的讲义, 并在此过程中加深对相关知识的理解.

限于笔者的水平, 很难保证这样的笔记符合所有读者的阅读习惯, 聪明的读者在阅读的过程中会在手边多准备同类型的书, 以防在一棵树下吊死, 这些标准的代数几何教材包括 52[7]、升海 [6]、刘青 [5]、Griffiths[8] 甚至 EGA（太猛, 对一般的读者不建议）.

从笔记内容的选择上, 因不希望涵盖一些过于基础的范式, 并且更贴近现代化代数几何的内容, 除了线性代数和抽象代数, 读者大概需要事先熟悉（我们省略的）环和模的基本性质（包括诺特性、链条件、根理想、局部化、张量积等）, 基本的范畴论怪话（也被叫做抽象废话）以及一些集合论（其实涉及不多, 不过应该有对此耿耿于怀的读者）, 这些内容大抵能从 Atiyah[4], Set Theory[21] 和睡前读物 [22]（真的建议大家睡前读一读）的前几章中找到.

最后用 John von Neumann 的名言劝诫诸君（以及笔者）任何时候都不要灰心:

"Young man, in mathematics you don't understand things. You just get used to them."

哦, 对了! 封面妹子可爱吧, 可爱就对了, 笔者就长这样.

1.1 记号和说明

这个笔记的内容编号方式可能会让一些读者感到不适：我们在一章内会按递增的正整数顺序编排出现的每一个定理、定义、引理、推论、命题、性质、注、例、算法甚至习题和提示. 另外带有星号 *,** 的内容是阅读时可选跳过的, 它们不是主线任务也不会在后文主线任务的部分中被引用. 在记号上尽量和 (某些?) 流行统一:

为不引起歧义, 在此特作诸说明. 下各条总适用 (也用于区分派系,?):

• 无特殊说明时, 所有的环都是含幺的交换环. （然而代数几何章后面也常有各种不交换的）

• 我们用 $\mathrm{Spec}(R), \mathrm{Max}(R)$ 表示一个环 R 的全体素理想和极大理想构成的集合.

• 对环 R, 我们用 $\mathrm{Frac}(R)$ 表示 R 的分式域.

• 我们用 $\mathfrak{m}$ 表示一个环的极大理想, $\mathfrak{p}$ 表示一个环的素理想, 有时在这两符号上有上下标. 在不加其他说明、不引起歧义的时候, 它们指代环的任意一个极大（resp. 素）理想.

• 本文中 $R_{\mathfrak{p}}$ 表示局部化 $(R-\mathfrak{p})^{-1}R$, R_a 表示局部化 $\{1, a, a^2, \cdots\}^{-1}R$.

• 当我们声称 $(R, \mathfrak{m})$ 是局部环时, 指 R 是局部环, $\mathfrak{m}$ 是其极大理想.

• 我们用 $\mathrm{Jac}(R)$ 表示环 R 的 Jacobson 根, 即全体极大理想的交. 用 $\sqrt{I}$ 表示 I 的根理想. 有时也用 $\mathrm{Nil}(R)$ 表示 R 的幂零根 $\sqrt{(0)}$, 这是因为有一次讨论数个环的需要.

• 对 R-模 M 和 $m \in M$, 记 $\mathrm{Ann}(m) := \{r \in R : rm = 0\}, \mathrm{Supp}_R(M) := \{\mathfrak{p} : M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}$.

• 没有特殊说明时, $A \subset B$ 时 $A \hookrightarrow B$ 总指典范的嵌入, $A \to A/I$ 总指典范的商映射.

• 在涉及拓扑的时候, 我们使用 $\overline{S}$ 表示一个点集的闭包, 全集的概念清楚时, S^c 表示 S 的补.

• 对两个集合 A, B, 在不作特别说明时, 常用 $A - B$ 表示差集 $A \backslash B$.

（在表达 $\{a - b : a \in A, b \in B\}$ 时会说明, 表达类似含义时大多不是作减法运算. ）

• 本文中的包含记号 $\subset$ 指可以相等的包含, 若表达真包含, 则会使用 $\subsetneq$.

• 设 $\varphi : A \to B$ 是环同态, 理想 $\mathfrak{a} \subset A$ 在 φ 下的像在 B 生成的理想记作 $\mathfrak{a}^e$, 理想 $\mathfrak{b} \subset B$ 在 φ^{-1} 下的原像是 A 中的理想, 记作 $\mathfrak{b}^c$. 在环、映射、字母不引起歧义时我们使用这样的记号.

• 我们用 **TFAE** 表示下列数则命题等价, 即 “The Followings Are Equivalent” 的缩写.

• 文中的 Noether 和 Artin 性都指代上升列、下降列最终稳定的性质, 亦即 a.c.c. 和 d.c.c. .

• 我们常用集合 $\mathscr{I}, \mathscr{J}$ 等表示 i, j 等所取的指标集.

• 我们常用 $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ 等表示一般的范畴, 用 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 表示范畴 $\mathcal{C}$ 中的所有对象, $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(c, d)$ 表示 $\mathcal{C}$ 中对象 c 到 d 间的所有态射. 而 R-模和 S-概形的态射则常用 $\mathrm{Hom}_R, \mathrm{Hom}_S$.

• 我们用 $\mathsf{Set}, \mathsf{Grp}, \mathsf{CRing}, {}_R\mathsf{Mod}, \mathsf{Mod}_R, \mathsf{AssAlg}, \mathsf{PSh}, \mathsf{Sh}$ 表示集合, 群, 交换幺环, 左与右 R-模, 结合含幺代数, 预层和层的范畴. 在记号前加 fg 表示有限生成.

• 常用 $Z(G), Z(A)$ 表示群 G 或代数 A 的中心, 即与所有元素乘法可交换者.

Chapter 2

交换代数基础

我们知道为了发展代数几何的体系, 需交换代数之帮助. 交换代数本身仿佛一台精妙而复杂的机器, 不过很多时候其也被视如黑箱, 但将其拆开细观亦是学习之重要步骤, 当然也为了该笔记的完整性考虑, 在这一章中, 我们将由浅入深举诸交换代数之核心内容, 为后文代数几何部分稍做铺垫. 为笔记简洁性, 我们尽可能选择了定理的较为简单且自洽的证明, 而过程也在清晰的基础上尽量做到简洁, 有时省略一些不重要的细节. 另一方面, 读者只需掌握基础的代数知识就能阅读, 相当于需要完成标准的线性代数和抽象代数课程, 如果要参考, 笔者推荐 Lang 的代数 [1] 和 Atiyah 的交换代数 [4]. 另外本文参考了 [2] 的架构.

2.1 Hilbert 零点定理（Nullstellensatz）

下面引理的证明来自 [3].

引理 2.1. *R 是整环, $K = R[\alpha_1, \cdots, \alpha_n]$ 也是域, 则诸 α_i 在 R 上代数.*

证明. 记 $k := \operatorname{Frac} R$, 对 n 归纳, 设 α_1 不在 R 代数, 归纳假设知 $\alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 在 $k(\alpha_1)$ 代数, 即在 $k[\alpha_1]$ 上代数. 通过添加首项系数的逆, 设 $f_2(\alpha_1), \cdots, f_n(\alpha_1) \in k[\alpha_1]$ 使得 $\alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 在整环 $A = k\left[\alpha_1, \frac{1}{f_2(\alpha_1)}, \cdots, \frac{1}{f_n(\alpha_1)}\right]$ 上整. 整环 A 上的整扩张是域, 说明 A 是域. 因此 $A = k(\alpha_1)$, 但 Euclid 论证知主理想整环 $k[\alpha_1]$ 上有无穷多素元, 至此推出矛盾. □

定理 2.2 (弱零点定理)**.** *K 是代数闭域, $x_1, \cdots, x_n$ 是 K 上的未定元, 那么 $R = K[x_1, \cdots, x_n]$ 上的理想 I 是极大理想当且仅当 $I = (x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n)$, 其中诸 $a_i \in K$.*

证明. 首先若 $I = (x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n)$, 则 $\varphi : R/I \to K, \varphi(x_i) = a_i$ 是同构. 商环是域因此 I 是极大理想. 反设 I 是极大理想, 因为 $\varphi : K \hookrightarrow R \to R/I$ 是域 K 到域 R/I 的同态进而是嵌入, 这说明 R/I 是 K 上的有限生成代数（添加 $x_1, \cdots, x_n$ 的商得到）, 根据前**引理 2.1** 得知 R/I

在 K 代数, 进而由 K 代数闭得到 $R/I=\varphi(K)$. 这说明, 每个 x_i 在 R/I 的像和某个 K 中元素 a_i 的像一样, 即对每个 i 都有对应的 $a_i\in K$ 使 $x_i-a_i\in I$. 另一方面我们已经知道一族 x_i-a_i 生成的理想是极大的, 从而 I 恰由它们生成. □

注 2.3. 更一般的, 对于 K 非代数闭的情形, $R/\mathfrak{m}$ 是 K 的有限扩张.

定义 2.4. 一个**仿射簇**（亦称**代数集**）是指一族多项式 $S\subset K[x_1,\cdots,x_n]$ 的公共零点集:

$$\mathcal{V}(S):=\{(a_1,\cdots,a_n)\in K^n: f(a_1,\cdots,a_n)=0,\forall f\in S\}.$$

一个**零化理想**是指在一个给定集合 $X\subset K^n$ 上取 0 的多项式集:

$$\mathcal{I}(X):=\{f\in K[x_1,\cdots,x_n]: f(p)=0,\forall p\in X\}.$$

观察到将 S 换成 S 生成的理想的根理想不会改变它生成的仿射簇, 另一方面 $\mathcal{I}(X)$ 确实是一个理想. 容易看出它还是一个根理想.

定理 2.5 (强零点定理)**.** K 是代数闭域, 理想 $J\subset K[x_1,\cdots,x_n]$, 则 $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J))=\sqrt{J}$.

证明. 首先左式是一个包含 J 的根理想, 因此包含 $\sqrt{J}$ 即右边. 反过来, 若 $0\neq f\in\mathcal{I}(\mathcal{V}(J))$, 于是在 $R=K[x_1,\cdots,x_{n+1}]$ 中构造一个理想 $\mathfrak{J}=J+(x_{n+1}f-1)$, 其中 J 指在 R 自然嵌入的像. 首先我们声称 $\mathfrak{J}=R$, 否则根据**定理 2.2(弱零点定理)**, 存在 $(a_1,\cdots,a_{n+1})\in\mathcal{V}(\mathfrak{J})$ 公共零点. 因为 $J\subset\mathfrak{J}$ 因此 $(a_1,\cdots,a_n)\in\mathcal{V}(J)$. 根据 f 的定义有 $f(a_1,\cdots,a_n)=0$ 但是 $x_{n+1}f-1$ 代入 $(a_1,\cdots,a_{n+1})$ 得 0, 这是不可能的. 因此存在 $g_1,\cdots,g_n,g\in R,f_1,\cdots,f_n\in J$ 使得

$$g_1f_1+\cdots+g_nf_n+g(x_{n+1}f-1)=1$$

于是在分式环中令 $x_{n+1}=f^{-1}$, 通分即得到 $f^k\in J$ 对某 k. □

推论 2.6. 代数闭 K, 根理想 $I\subset K[x_1,\cdots,x_n]$ 和仿射簇 $X\subset K^n$ 通过 $\mathcal{V},\mathcal{I}$ 对应.

证明. 我们指出对于一个簇 $X=\mathcal{V}(J)\subset K^n$ 有 $\mathcal{V}(\mathcal{I}(X))=X$. 这是**定理 2.5(强零点定理)** 的直接推论. 因此 $\mathcal{V}\circ\mathcal{I}$ 是簇一侧的恒同映射, $\mathcal{I}\circ\mathcal{V}$ 是根理想侧的恒同映射. □

注 2.7. 代数闭 K, 因为对一个理想 J 而言, 根 $\sqrt{J}$ 是包含它的全体素理想的交. 而 $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J))$ 是包含它的全体极大理想的交（为什么）, 因此 R 是 *Jacobson* 环. 一般的事实见**习题 9.3**.

定义 2.8. 一个**坐标环**是指一个仿射簇 $X\subset K^n$ 上的“多项式函数”构成的环, 定义为

$$K[X]:=K[x_1,\cdots,x_n]/\mathcal{I}(X).$$

可以被理解为 $K[x_1,\cdots,x_n]$ 上的多项式限制在 X 上得到的函数构成的环: 多项式限制在 X 上为 0, 当且仅当多项式在 $\mathcal{I}(X)$ 之中.$K[X]$ 中的元素称为 X 上的**正则函数**.

2.2 Zariski 拓扑、态射和谱（Spectrum）

这一节更像一个清单, 列举了我们需要的有关 Zariski 拓扑的诸性质. 其中有些结果没有证明, 它们都是读者容易验证的.

性质 2.9. 记 $R=K[x_1,\cdots,x_n]$.

(1) 设理想 $I,J\subset R$, 则 $\mathcal{V}(I)\cup\mathcal{V}(J)=\mathcal{V}(I\cap J)=\mathcal{V}(IJ)$.

(2) 设 $\{J_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ 是 R 上一族理想. 那么 $\bigcap_{i\in\mathscr{I}}\mathcal{V}(J_i)=\mathcal{V}\left(\bigcup_{i\in\mathscr{I}}J_i\right)$.

定义 2.10. K^n 上的 **Zariski 拓扑**是指将全体仿射簇 $X\subset K^n$ 视作闭集的拓扑.

空集 $\mathcal{V}(1)$、全集 $\mathcal{V}(0)$ 都是闭集, 而且**性质 2.9** 保证了闭集的有限并和任意交还是闭集.

性质 2.11. K^n 上的 *Zariski* 拓扑具有如下一些性质.

(1) 对集合 $X\subset K^n$, 其在 *Zariski* 拓扑下的闭包 $\overline{X}=\mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$.

(2) $\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^n$ 上 *Zariski* 拓扑下的闭集除了全集外都是欧氏拓扑下无处稠密的闭集.

(3) 在 K^1 上,*Zariski* 拓扑恰是余有限拓扑, 一般的, K^n 中的有限集都是 *Zariski* 闭的.

(4) $f\in R=K[x_1,\cdots,x_n]$ 视作 $R\to K$ 的函数都是 *Zariski* 连续的.

(5) K 是无限域, 那么 K^n 上的 *Zariski* 拓扑不是 *Hausdorff* 的.

证明. (3),(4) 显然, 对于 (1) 注意包含 X 的闭集 $\mathcal{V}(J)$ 满足 X 零化 J, 换言之必有 $J\subset\mathcal{I}(X)$, 从而 $\mathcal{V}(\mathcal{I}(X))\subset\mathcal{V}(J)$. 对于 (2) 只需证无处稠密, 而在一个开集恒 0 的多项式只有 0（求导可证）. 最后 (5) 因为整环中两个非零理想的交一定非零. □

定义 2.12. 对于 $X\subset K^m,Y\subset K^n$ 是两个仿射簇, $f:X\to Y$ 称一个**（簇）态射**, 若 $f=(f_1,\cdots,f_n)$ 是 $K^m\to K^n$ 的多项式（即 $f_i\in K[x_1,\cdots,x_m]$）, 使得 $f(X)\subset Y$.

我们用 $\mathrm{Mor}(X,Y)$ 表示全体 $X\to Y$ 的态射, 态射复合还是态射, **簇同构**是指有逆的态射.

性质 2.13. 设 $X\subset K^m,Y\subset K^n$ 是两个仿射簇.

(1)$f\in\mathrm{Mor}(X,Y)$ 诱导了 $\tilde{f}:K[Y]\to K[X]$ 的 K-代数同态.

(2) 反过来任意一个环同态 $f^*:K[Y]\to K[X]$ 诱导了 $f\in\mathrm{Mor}(X,Y)$.

(3) 上述对应关系是仿射簇和坐标环的范畴对偶同构.

证明. (1) 复合 f 可得.(2) 对 $i=1,\cdots,n$ 取投影 $y_i\in K[Y]$, 即得到对应的态射.(3) 显然. □

性质 2.14. 设 R 是环, 对子集 $S\subset R$, 定义 $\mathcal{V}(S):=\{\mathfrak{p}:S\subset\mathfrak{p}\}$. 那么

(1) 设理想 $I,J\subset R$, $\mathcal{V}(I)\cup\mathcal{V}(J)=\mathcal{V}(I\cap J)=\mathcal{V}(IJ)$.

(2) 设 $\{J_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ 是 R 上一族理想. 那么 $\bigcap_{i\in\mathscr{I}}\mathcal{V}(J_i)=\mathcal{V}\left(\bigcup_{i\in\mathscr{I}}J_i\right)$.

定义 2.15. 设 R 是环, $\mathrm{Spec}(R)$ 上的 **Zariski 拓扑**是指将全体 $\mathcal{V}(X)$ 视作闭集的拓扑.

性质 2.16. 设 R 是环. 对 $f \in R$, 记开集 $D(f) = X_f := \mathrm{Spec}(R) - \mathcal{V}(f)$, 称**主开集**.

(1) $X_f \cap X_g = X_{fg}$, 实际上 $\{X_f : f \in R\}$ 构成 *Zariski* 拓扑的一组拓扑基.

(2) $\mathrm{Spec}(R)$ 中开集任意开覆盖都有有限子覆盖（拟紧）当且仅当形如有限个 X_f 的并.

(3) 一个素理想 $\mathfrak{p}$ 作为 $\mathrm{Spec}(R)$ 中的点时, 它的闭包是 $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$. 从而单点闭等价于理想极大.

(4) 对子集 $S \subset \mathrm{Spec}(R)$, 定义 $\mathcal{I}(S) = \bigcap_{\mathfrak{p}\in S} \mathfrak{p} \subset R$. 那么我们有

$$\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)) = \sqrt{J},\ \mathcal{V}(\mathcal{I}(S)) = \overline{S}.$$

因此 R 上的根理想与 $\mathrm{Spec}(R)$ 上的闭集通过取 $\mathcal{V},\mathcal{I}$ 对应.

证明. (1) 注意给定 $F = \mathcal{V}(J)$ 闭和 $\mathfrak{p} \in F^c$, 取 $f \in J - \mathfrak{p}$ 则有 X_f 是 F^c 中 $\mathfrak{p}$ 的邻域. (2) 若 $O = X_{f_1} \cup \cdots \cup X_{f_n}$, 如果 $\bigcup_{i\in\mathscr{I}} X_{g_i}$ 覆盖 O, 说明每个 f_i 的某个幂次可以用 g_i 线性组合得到, 那么只需取 X_{g_i} 中在线性组合里出现的那些即可. (3) 由 (4). 而 (4) 前者因为根理想是含该理想素理想的交, 后者注意对闭集等式取等以及保序. □

于是取 $R = K[x_1, \cdots, x_n]$, $\mathrm{Spec}(R)$ 包含 K^n 中全体的点（极大理想）, 以及一些广义的“点”: 它们是素理想的公共零点集, 特别的, 素理想包含一个特殊的 (0), 它对应整个 K^n.

性质 2.17. 设 $\varphi : A \to B$ 是环同态, $X = \mathrm{Spec}(A), Y = \mathrm{Spec}(B)$.

(1) φ 诱导 $\varphi^* : Y \to X$. 注意 $(\varphi^*)^{-1}(X_f) = Y_{\varphi(f)}$, 因此 φ^* 是 *Zariski* 连续的.

(2) 对映射取上星 $-^*$ 是函子性的, 即 $\psi : B \to C$ 是另一环同态, 则

$$(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*, \mathrm{id}^* = \mathrm{id}|_{\mathrm{Spec}}.$$

(3) 假设 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ 分别是 A, B 中的理想, 则

$$(\varphi^*)^{-1}(\mathcal{V}(\mathfrak{a})) = \mathcal{V}(\mathfrak{a}^e),\ \overline{\varphi^*(\mathcal{V}(\mathfrak{b}))} = \mathcal{V}(\mathfrak{b}^c).$$

(4) 若 φ 满, 则诱导同胚 $\varphi^* : Y \to \mathcal{V}(\mathrm{Ker}\,\varphi)$. 若 φ 单, 则 $\varphi^*(Y)$ 在 X 中稠密（$\varphi^*(Y)$ 在 X 中稠密的等价刻画是 $\mathrm{Ker}\,\varphi \subset \sqrt{(0)}$）.

2.3 Noether 性（Noetherian）与不可约性（Irreducibility）

我们假设读者已经了解关于环的 Noether 性质.

定理 2.18 (Hilbert 基定理)**.** 若 R 是 *Noether* 环, 则多项式环 $R[x]$ 和形式幂级数环 $R[\![x]\!]$ 都是 *Noether* 的.

证明. 先证 $R[x]$, 分为下面几步: (1) 假设 $I \subset R[x]$ 是理想. 用 I_n 表示 I 中全体 $\leq n$ 次多项式的首项系数, 显然它是 R 中理想而且 $I_n \subset I_{n+1}$.(2) 根据 R 的 Noether 性, 设 $I_N = I_{N+1} = \cdots$, 全体 $\{I_k\}$ 只需 $I_0, \cdots, I_N$ 进而只需有限个元素生成, 各取生成元对应的 $R[x]$ 中多项式, 那么声称这些多项式在 R 中生成 I.(3) 实际上对任意一个 I 中多项式, 可以不断用上述生成元凑掉首项来降次, 最后得到. 进而上述生成关系得证.
再看 $R[\![x]\!]$ 也是类似: 一方面取最低非零系数的集合构成 R 中理想, 进而有限生成, 对应取生成元在 $R[\![x]\!]$ 中者, 通过将它们乘 x 的幂次, 可假设最低非零次数皆为 n; 另一方面次数 $< n$ 次的多项式构成的集合 $R[x]_n$ 是 R 上 Noether 模, 因此将 $R[\![x]\!]$ 的理想截断到 $R[x]_n$ 中得到有限生成 R-模, 对应 $R[\![x]\!]$ 中的生成元取出. 同样的, 我们声称前两者生成整个理想, 然而是形式幂级数, 因此最后可以归纳地构造一个组合消去全部系数. □

定义 2.19. X 是拓扑空间. 它称为 **Noether** 的, 若它的闭集满足降链（有限）条件. 它称为**不可约**的, 若它不是两个真闭子集的并; 等价地, 它的任两个非空开集相交.

命题 2.20 (Zariski 拓扑的诸特性)**.** R 是 *Noether* 环, K 是域.
则装配 *Zariski* 拓扑下, 任意子集 $X \subset K^n$ 和 $X \subset \mathrm{Spec}(R)$ 都是 *Noether* 的.

证明. 注意到 Noether 性是子空间遗传的, 而对于 $K^n, \mathrm{Spec}(R)$, 这立刻来自 $K[x_1, \cdots, x_n]$（根据**定理 2.18(Hilbert 基定理)**）和 R 的 Noether 性和闭集理想对应. □

命题 2.21 (Zariski 拓扑的不可约集)**.** 对一般的环 R 和域 K.
则装备 *Zariski* 拓扑下, 子集 $X \subset K^n$ 或者 $X \subset \mathrm{Spec}(R)$ 不可约当且仅当 $\mathcal{I}(X)$ 是素理想.

证明. 不可约和理想的素性都是 $I_1 I_2 \subset \mathfrak{p}$ 必有某 $I_i \subset \mathfrak{p}$ 的刻画. □

定理 2.22 (Noether 空间的不可约分解)**.** 设 X 是 *Noether* 的拓扑空间.
(1) 存在有限个闭、不可约、两两间没有包含关系的子集 $Z_1, \cdots, Z_n \subset X$ 使得

$$X = Z_1 \cup \cdots \cup Z_n.$$

(2) 任意不可约的子集 $Y \subset X$ 一定包含在某 Z_i 中.
(3) 满足 (1) 条件的任意一族闭集, 其诸闭集都是 X 的极大不可约子集. 特别的, Z_i 在换序下被 (1) 的条件唯一确定. 这些 Z_i 以后我们称为 Z 的**不可约分支**.

证明. (1) 设 $\mathscr{A}$ 是由 X 中满足如下条件的闭集 A 构成的子集族：A 不是 A 的有限个闭、不可约子集的并. 若 $\mathscr{A}$ 非空则由 Noether, $\mathscr{A}$ 中存在极小元 A. 则 A 可约, 设写成不平凡闭子集的并 $A = A_1 \cup A_2$, 那么极小性知 $A_1, A_2 \notin \mathscr{A}$, 但 A_1, A_2 的闭不可约有限并写法带来 A 的闭不可约有限并写法而矛盾. 这说明 $\mathscr{A}$ 空, $X \notin \mathscr{A}$ 取其一个 n 最小的写法即可.(2) 依 $Y = \bigcup(Y \cap Z_i)$ 显然.(3) 若某 $Y \supset Z_i$ 不可约, 由 (2) 它包含于某个 Z_j, 因为互不包含关系得 $i = j$. □

推论 2.23 (极小素理想). 一个 *Noether* 环 R 只有有限多个极小素理想, 它们的交正是 $\sqrt{(0)}$. 这结果也常用在 R/I 上, 得到 $\sqrt{I}$ 是包含 I 的（那有限个）极小的素理想的交.

例 2.24. R 是整环当且仅当极小素理想只有 0. 若 K 代数闭, 则 $g \in K[x_1, \cdots, x_n]$ 对应的 $\mathcal{V}(g)$ 的不可约分支恰是 g 素因子分解得到的那些互不相同的 g_i 对应的 $\mathcal{V}(g_i)$.

2.4 Krull 维数（Dimension）

定义 2.25. 环 R 的 **Krull 维数**（或简称**维数**）指 R 的最长素理想升链 $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_d$ 的长度 d, 记作 $\dim R$. 例如, 域的维数是 0, 非域的 *PID* 则是 1（为什么？）.
类似的, 一个拓扑空间的 **Krull 维数**定义为闭的不可约非空子集的最长升链的长度.

2.4.1 准备知识：超越维数、局部化、Artin 性（Artinian）

读者可能已经学过, 我们简单重温超越维数的基本结果. 参考 Lang[1].

定义 2.26. 设 A 是 K-代数, 则它的一组（K-）**超越基**是指 A 的一个极大 K-代数无关组, 它的任一组超越基的元素数量（基数）称 A（在 K）的**超越度**（或**超越维数**）, 记作 $\mathrm{trdeg}_K(A)$.

命题 2.27 (良定性的有限情形). 对整环 A, 上述**定义 2.26** 是合理的：即超越基存在；且任意两组超越基的基数一样.

证明. 超越基的存在性是 **Zorn 引理**的直接推论. 后者不难发现只需如下观察：假设 $\{x_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ 是 A 的一个超越基, $w \in A$ 在 K 超越. 首先 $\{x_i\} \cup \{w\}$ 代数相关. 因此存在 $w, x_1, \cdots, x_m$ 的非平凡代数关系, 且表达式中 x_1 的次数至少为 1. 那么我们声称 $w, x_2, \cdots, x_m$ 以及剩下的 $\{x_i\}_{i\in\mathscr{I}'}$ 构成超越基. 有限时可逐步将基数大者的某子集换成小者推出矛盾（为什么?）.
一方面, 它们代数无关. 因为 A 整, 它们代数相关的表达式可取作 $K[X_1, \cdots, X_n, W]$ 中的不可约多项式, 进而可以利用结式（Resultant）消掉 W 得到 $X_1, \cdots, X_n$ 的非平凡表达式（结式是两个多项式用比对方（关于 W）次数更低的多项式系数的线性组合, 而前文要求 x_1 的次数是为

了保证两个不可约多项式不一样）. 另一方面任意添加元素都使得代数相关, 同样可以用结式消掉 X_1. 这样它们确实构成超越基. 无限超越基基数相等和线性空间的技巧一致.
一个简明的叙述是 X 的势与 $X+2X^2+3X^3+4X^4+\cdots$ 相同. □

注 2.28. 对**命题 2.27** 条件的 A, 它和 $\mathrm{Frac}(A)$ 的超越维数一样. 因为 A 的一组超越基 $\{x_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ 也是 $\mathrm{Frac}(A)$ 的超越基, 任意 x/y $(x,y\in A)$, 设域 $E=K(x_i)_{i\in\mathscr{I}}$, 则 x,y 是 E 上的代数元, 于是 x/y 也是, 这样我们能得到非平凡的代数表达式. 不过有的书上也只关注域的超越维数.

命题 2.29. 设 K 是域, 则 $\mathrm{trdeg}_K(K[x_1,\cdots,x_n])=n$.

证明. 显然 $x_1,\cdots,x_n$ 代数无关, 于是维数不会低于 n, 接下来只需证明任意 $n+1$ 个元素一定代数相关. 为此对 $f_0,\cdots,f_n$, 假设它们的项的次数分别被 $v_i=(v_{i1},\cdots,v_{in})$ 控制住. 那么存在充分大的 $C>0$ 使得 $a_0v_0+\cdots+a_nv_n$ 每个分量都小于 C 者的非负整数解 $(a_0,\cdots,a_n)$ 数量超过 C^n, 于是存在非平凡的线性组合消掉 $f_0^{a_0}\cdots f_n^{a_n}$. □

性质 2.30 (局部化和素谱)**.** 环 R 乘集 S, 典范映射 $R\to S^{-1}R$ 诱导了双射

$$\mathrm{Spec}(S^{-1}R)\xrightarrow{\sim}\{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(R):S\cap\mathfrak{p}=\varnothing\}\subset\mathrm{Spec}(R).$$

显然的作为推论有 $\dim S^{-1}R\leq\dim R$.

定理 2.31 (Nakayama 引理)**.** 理想 $I\subset\mathrm{Jac}(R)$, M 是有限生成 R-模, 若 $IM=M$ 则 $M=0$.

证明. 若 $M\neq 0$, 取一个极小生成元组 $u_1,\cdots,u_n$, 设 $u_n=a_1u_1+\cdots+a_nu_n, a_i\in I$, 注意 $1-a_n$ 可逆, 故 u_n 可以用前 $n-1$ 者生成而与极小矛盾. □

这引理也可以由 **Cayley–Hamilton 技巧**得到: 取 M 的生成元写成在 IM 中线性组合, 得系数在 I 的矩阵 A, 然后对 $I-A$ 左乘伴随得到一个 $1-I$ 的元素即 $\det(I-A)$ 零化 M.
另外因为后文会时常用到, 我们在此亦简单温习 Artin 环的性质, 对此充分熟悉的读者可直接跳过, 为给一般情况作铺垫, 我们先设有局部性条件.

性质 2.32. *Noether* 局部环 $(R,\mathfrak{m})$, **TFAE**: (1) R 只有一个素理想, (2) $\dim R=0$, (3) $\sqrt{(0)}=\mathfrak{m}$, (4) 存在 $q\geq 1$ 使 $\mathfrak{m}^q=0$, (5) R 的任意理想降链终会稳定.

证明. (1),(2),(3) 等价是定义,(4) 推 (3) 显然,(3) 推 (4) 注意 $\mathfrak{m}$ 有限生成,(5) 推 (4) 因 $\mathfrak{m}^n$ 递降, 对 $\mathfrak{m}^q=\mathfrak{m}^{q+1}$ 用 **Nakayama 引理**得 $\mathfrak{m}^q=0$. 最后 (4) 推 (5) 设 I_n 递降, $k=R/\mathfrak{m}$. 则 $\mathfrak{m}^r/\mathfrak{m}^{r+1}$ 皆是有限维（有限生成知）k-线性空间, 进而 $(I_n\cap\mathfrak{m}^r)/(I_n\cap\mathfrak{m}^{r+1})$ 构成 $\mathfrak{m}^r/\mathfrak{m}^{r+1}$ 子空间递降列, 终会稳定. 故存在 N 使 $r\leq q, n\geq N$ 时 $I_n\cap\mathfrak{m}^r\subset I_{n+1}+I_n\cap\mathfrak{m}^{r+1}$, 然后对 $r=0,\cdots,q$ 反复使用此式最终得到 $n\geq N$ 时 $I_n=I_{n+1}$. □

性质 2.33 (Artin 环). **TFAE**：(1) R 的理想降链终会稳定,(2) R 是 *Noether* 的且 $\dim R = 0$,(3) R 是有限个局部 *Artin* 环的乘积.

证明. (1) 推 (2), 这是这个定理最关键的部分, 首先 R 只有有限多极大理想, 若不然 $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i$ 是一列降链, 因此 $J := \mathrm{Jac}(R) = \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i$. 由降链条件得知存在 N, $J^N = J^{N+1}$, 由 **Nakayama 引理**知 $J^N = 0$. 考虑如下的理想链, 相邻两项只差一个极大理想

$$R \supset \mathfrak{m}_1 \supset \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \supset \cdots \supset J \supset \mathfrak{m}_1 J \supset \cdots \supset J^N = 0$$

注意到相邻两项的商都是一个 R-Artin 模, 继而是一个 $R/\mathfrak{m}_i$-Artin 模, 即有限维线性空间（无限维空间可以取基来构造无限链）, 继而是 R-Noether 模. 故 R 是 Noether 的, 在每个极大理想局部化, 用**性质 2.32** 得知极大理想都是极小素理想. 等价的, $\dim R = 0$.
(2) 推 (3), 记 $J := \mathrm{Jac}(R)$, 同样我们证明存在 N 使 $J^N = 0$. 因为它只有有限个极小素理想, 它们也正是全体极大理想, 于是 $J = \sqrt{(0)}$ 结合有限生成得知幂零. 注意**中国剩余定理**得 $R = R/J^N = \prod_{i=1}^{n} R/\mathfrak{m}_i^N$. 观察每个 $(R/\mathfrak{m}_i^N, \mathfrak{m}_i/\mathfrak{m}_i^N)$ 都是局部 Artin 环.
(3) 推 (1) 注意到乘积的理想都是理想的乘积, 且理想的包含关系当且仅当每个分量包含. □

2.4.2 超越维数和 Krull 维数相等

定理 2.34 (超越维数和 Krull 维数相等). 设 $A = K[x_1, \cdots, x_n]/\mathfrak{p}$ 则 $\dim A = \mathrm{trdeg} A$.

证明. 条件保证 $\mathrm{trdeg} A < +\infty$, 而我们的证明分为如下两个部分.
部分 1.$\dim A \le \mathrm{trdeg} A$. 我们对 $n = \mathrm{trdeg} A$ 归纳. 首先 $n = 0$ 的情形, 通过考察 x_i 在 K 的最小多项式, 结合整环, 说明 A 是域, 是 K 的有限代数扩张, 显然 $\dim A = 0$. 一般的 $n > 0$, 设 $0 = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_m$ 是 A 中素理想升链, $m > 0$. 那么 $A/\mathfrak{p}_1$ 中就对应有 $m-1$ 长度链. 我们只需证明 $A/\mathfrak{p}_1$ 中任意 n 个元素都相关即可. 这样根据 $A/\mathfrak{p}_1$ 的归纳假设就有 $m - 1 < n$.
若不然, 设 $a_1, \cdots, a_n$ 到 $A/\mathfrak{p}_1$ 的像代数无关. 则 $a_1, \cdots, a_n$ 在 A 代数无关, 于是它构成超越基. 取 $a \in \mathfrak{p}_1 - \{0\}$, 我们指出 $a, a_1, \cdots, a_n$ 的代数相关式不能只涉及 a, 否则 $K[a]$ 是 K 的有限扩张从而 a 是可逆元. 因此商掉 $\mathfrak{p}_1$ 导致 a 消失而得到 $a_1, \cdots, a_n$ 的非平凡代数表达.
部分 2.$\dim A \ge \mathrm{trdeg} A$. 我们对 n 归纳证明 $\mathrm{trdeg} A = n$ 则 $\dim A \ge n$. 奠基 $n = 0$ 显然, 故设 $n > 0$, $a_1, \cdots, a_n \in A$ 超越基. 考虑 $A' = L \cdot A$ 为 A 添加 $L = K(a_1)$ 得到的代数（局部化 $L^\times$）. 那么显然 A' 在 L 上的超越维数为 $n - 1$, 因此由归纳假设得到 $0 = \mathfrak{p}_0' \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_{n-1}'$ 于 A'. 再设 $\mathfrak{p}_k = \mathfrak{p}_k' \cap A$, 它们显然是 A 的素理想且 $\mathfrak{p}_k \subsetneq \mathfrak{p}_{k+1}$, 因为 $L \cdot \mathfrak{p}_k = \mathfrak{p}_k'$. 而且 $L \cap \mathfrak{p}_{n-1} = 0$, 因为 $\mathfrak{p}_{n-1}'$ 中不能有可逆元. 这说明了 $A/\mathfrak{p}_{n-1}$ 不是域, 否则它是 K-有限生成代数且 a_1 的像在 K 上超越, 这与**引理 2.1** 矛盾. 故 $\mathfrak{p}_{n-1}$ 包含于极大理想 $\mathfrak{p}_n$, 即有 $\dim A \ge n$. □

注 2.35. 对于多个分支情况的补充说明：首先 *Krull* 维数一侧，因为证明了不可约分支数量有限（**定理 2.22**）. 因此依定义不难证明一个诺特环的 *Krull* 维数是其有限个不可约分支（极小素理想）中维数最大的. 其次超越维数一侧，我们须将超越维数定义为超越基的元素上界：例如 $K[x,y,z]/(xy,xz)$ 其中就可能有基数不同，如 $\{x\},\{y,z\}$，的超越基. 那么注意到：
一方面其超越基元素上界大于等于商掉极小素理想后的超越基元素上界；另一方面的不等式：我们声称 A 的无关子集 $a_1,\cdots,a_n$ 可以找合理的极小素理想商掉仍无关，若不然设极小素理想 $\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_m$，商掉 $\mathfrak{p}_i$ 后由非平凡的 f_i 相关，故 $f_1\cdots f_m(a_1,\cdots,a_n)\in\bigcap_{i=1}^m\mathfrak{p}_i=\sqrt{(0)}$. 由幂零推出存在 N 使 $(f_1\cdots f_m)^N(a_1,\cdots,a_n)=0$ 是代数相关表达式而矛盾.

性质 2.36 (零维有限生成 K-代数)**.** *A 是有限生成 K-代数,***TFAE**：
(1) $\dim A=0$. (2) A 在 K 代数. (3) $\dim_K(A)<+\infty$（作为线性空间的维数）.
(4) A 是 *Artin* 的. (5)* A 只有有限个极大理想. （注：(5) 需 *Jacobson* 环性质）

证明. (1) 推 (2) 是**定理 2.34, 注 2.35**. (2) 推 (3) 取生成元幂次的乘积，幂次小于最小多项式的次数，它们 K-线性生成 A. (3) 推 (4) 注意理想都是线性子空间. (4) 推 (5) 因为极大理想都是极小素理想. (5) 推 (1) 由 Jacobson 环性质**习题 9.3** 得任意素理想是包含它的极大理想的交，因此一个素理想等于有限个素理想的交必与某者相等，从而素理想皆极大. □

2.4.3 Krull 维数的另一种视角 *

这一部分的内容来自 [9]，其技巧也反映了 Krull 维数的一些本质，更应该把它看作上证明的某种“简化”，在此作为补充，是笔记阅读时可选跳过的部分，有趣的是其也是 [2] 的一道习题.

定义 2.37. 仅限于本小节中，对于 $x\in R$，定义边界为局部化 $R_{x,(x)}=S_{x,(x)}^{-1}R$，其中

$$S_{x,(x)}=x^{\mathbb{N}}(1+xR)=\{x^n(1+ax):a\in R,n\in\mathbb{N}\}.$$

很显然 x 如果可逆或者幂零时 $S_{x,(x)}$ 包含 0 进而 $R_{x,(x)}$ 平凡. 实际上我们有

定理 2.38. 对正整数 k,**TFAE**：
(1) $\dim R\le k$.(2) 对一切 $x\in R$，$\dim R_{x,(x)}\le k-1$.

证明. 回忆 $S^{-1}R$ 的素理想皆形如 $S^{-1}\mathfrak{p}$，其中 $\mathfrak{p}\cap S=\varnothing$. 作如下断言：
(a) 对诸 $x\in R,\mathfrak{m}\subset R$，有 $S_{x,(x)}\cap\mathfrak{m}$ 非空，因为要么 $x\in\mathfrak{m}$ 要么 $\mathfrak{m}+(x)=(1)$ 即 $\mathfrak{m}\cap(1+xR)$ 非空. **(b)** 若 $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{m}$ 另有 $x\in\mathfrak{m}\backslash\mathfrak{p}$，那么 $\mathfrak{p}\cap S_{x,(x)}=\varnothing$. 否则 $x^k(1+ax)\in\mathfrak{p}$，由于 $x\notin\mathfrak{p}$ 故 $1+ax\in\mathfrak{p}\subset\mathfrak{m}$，故 $1\in\mathfrak{m}$ 矛盾. 现在 **(a)** 告诉我们 R 中的素理想升链在 $R_{x,(x)}$ 中皆长度下行,**(b)** 告诉我们可以合理选择 x 使得长度只差 1，定理证成. □

> **推论 2.39.** 设 k 非负, 则 $\dim R \leq k \iff$
> 任意 $x_0, \cdots, x_k \in R$ 都存在 $a_0, \cdots, a_k \in R$ 和 $m_0, \cdots, m_k \in \mathbb{N}$ 使得
> $$x_0^{m_0}(\cdots(x_{k-1}^{m_{k-1}}(x_k^{m_k}(1+a_kx_k)+a_{k-1}x_{k-1})+\cdots)+a_0x_0)=0.$$

证明. 归纳, 奠基 $k=0$ 显然, 假设命题小于 k 时真. 对 k 左推右, 因为 $\dim R_{x_k,(x_k)} \leq k-1$, 于是对一切 $s \in S_{x_k,(x_k)}$ 有 $k-1$ 时的左推右, 由 s 的可逆性, 我们可以对 1 和诸 a_i 乘 s 而得

$$x_0^{m_0}(x_1^{m_1}\cdots(x_{k-1}^{m_{k-1}}(s+a_{k-1}x_{k-1})+\cdots+a_1x_1)+a_0x_0)=0.$$

本来 $a_i \in R_{x_k,(x_k)}$, 但可乘上 a_i 们的公共分母从而要求 $a_i \in R$, 得到 k 时的左推右. 右推左道理相同, 对一切 $x_k \in R$, 局部化 $R_{x_k,(x_k)}$ 的维数不超过 $k-1$, 于是根据**定理 2.38** $\dim R \leq k$. □

> **推论 2.40.** 设 K 是域, R 是交换 K-代数, 若对一切 $x_0, \cdots, x_k \in R$ 都在 K 代数相关, 则 R 的维数至多为 k. (另一方面维数至少多少的方向是构造性的, 也基本相当于研究清楚了)

证明. 假设 $Q(x_0, \cdots, x_k)=0$ 为代数表示, 将系数非零者项 $x_0^{p_0}\cdots x_k^{p_k}$ 的次数 $(p_0, \cdots, p_k)$ 依字典序排列, 最小者不妨假设其首一. 于是总能将 Q 写作

$$Q = x_0^{m_0}\cdots x_k^{m_k} + x_0^{m_0}\cdots x_k^{m_k+1}R_k + x_0^{m_0}\cdots x_{k-1}^{m_{k-1}+1}R_{k-1}+\cdots+x_0^{m_0+1}R_0,$$

其中 $R_i \in K[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_k]$. 这即**推论 2.39** 之形. □

2.4.4 简单应用：理想的高度（Height）和一个乘积簇定理

定义 2.41. 对 $\mathfrak{p} \subset R$, 定义其**高**为 $\mathrm{ht}_R(\mathfrak{p}) := \dim(R_{\mathfrak{p}})$, 无歧义时省略下标 R（下同）. 它是 R 中到 $\mathfrak{p}$ 的素理想升链的长度上界, 即最大的 n 使得 $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$.
一般的理想 $I \subset R$, 它的高定义为 $\mathrm{ht}_R(I) := \min\{\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) : I \subset \mathfrak{p}\}$. 此二定义对素理想是融贯的.

注 2.42. 另一方面, $\dim(R/\mathfrak{p})$ 则是如下链长度的上界

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n.$$

于是依定义显然有 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + \dim(R/\mathfrak{p}) \leq \dim(R)$. 取等当且仅当 $\mathfrak{p}$ 可以含于一条长度恰是 $\dim R$ 的链. 我们会看到等号在很多时候成立. 比如:

> **性质 2.43** (余一维, 超曲面). $A = K[x_1, \cdots, x_n]/I$,**TFAE**: (1) A 各分支等 $n-1$ 维.(2) $R = K[x_1, \cdots, x_n]$ 中含 I 的极小素理想都是 R 中高为一的.(3) $\sqrt{I} = (g) \neq 0$.

证明. 记 $\mathscr{M}$ 是含 I 的素理想中极小者构成的有限集, 下文全部 $\mathfrak{p}$ 皆于 $\mathscr{M}$. (1) 推 (2), 在 R 中 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})+\dim(R/\mathfrak{p})\le\dim(R)=n$, 由 $\dim(R/\mathfrak{p})=n-1$ 可得 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})\le 1$. 若为 0 说明 $I=0$ 这不可能.(2) 推 (3), 因为 R 是 UFD, 由 $\mathfrak{p}$ 素可通过不断取因子得一 $g_{\mathfrak{p}}\in\mathfrak{p}$ 不可约, 由 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})=1$ 以及 $(g_{\mathfrak{p}})$ 是素理想得知 $\mathfrak{p}=(g_{\mathfrak{p}})$. 因此 $\sqrt{I}=\bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathscr{M}}\mathfrak{p}=\left(\prod_{p\in\mathscr{M}}g_{\mathfrak{p}}\right)\ne 0$. 最后 (3) 推 (1), 设 $g=g_1\cdots g_k$ 为不可约分解, 其不能有重因子否则不是根理想, 于是 $\sqrt{I}=\bigcap_{i=1}^{k}(g_i)$, 故包含 I 的极小素理想们正是 (g_i)（为什么）. 最后只需说明 $\dim R/(g_i)=n-1$, 这是因为取 g_i 次数非零的未定元 x_j 以外其余 $n-1$ 个未定元 $\{\widehat{x_j}\}$, 它们在 $R/(g_i)$ 代数无关, 因为 g_i 在 R 中的倍式看作 x_j 的多项式次数大于 1 或者为 0. 结合其维数不会高于 $n-1$, 故为 $n-1$. □

习题 2.44. $X\subset K^m,Y\subset K^n$ 为代数闭 K 上的非空仿射簇. 则 $X\times Y$ 是 K^{m+n} 中的簇且

$$\dim(X\times Y)=\dim X+\dim Y.$$

提示 2.45. 注意到 $\dim X=\dim K[X]$ 等于从 $x_1,\cdots,x_m$ 在 $K[X]$ 的像中, 能选出的极大无关未定元个数, 实际上有限生成元组的极大无关组总是超越基. 假设选出的未定元在 $X\times Y$ 代数相关, 说明前变量（指前 m 个未定元）代入任意 X 中的点得到 $\mathcal{I}(Y)$ 者, 说明主元后者（指后 n 个未定元）, 其系数皆 0, 继而是平凡相关式. 另一方面若选出更多未定元代数无关, 要么前变量数量超之要么后超之矛盾.

2.5 Krull 主理想定理（Principal Ideal Theorem,Hauptidealsatz）

2.5.1 主理想定理（PIT）及其逆

定理 2.46 (弱主理想定理)**.** *R 是 Noether 环, $\mathfrak{p}$ 是主理想 $(a)\subsetneq R$ 上的极小素理想. 则*

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p})\le 1.$$

特别的, R 的非平凡主理想高度不超过 1.

证明. 我们可以用局部化 $R_{\mathfrak{p}}$ 代替 $\mathfrak{p}$, 因为 $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ 是包含 $a\in R_{\mathfrak{p}}$ 的极小素理想, 而且 $\mathrm{ht}_R(\mathfrak{p})=\mathrm{ht}_{R_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}})$, 从而我们可以假设 $(R,\mathfrak{p})$ 局部. 于是此时 R/aR 有唯一的素理想 $\mathfrak{p}/aR$（为什么）. 于是它是 Artin 的（因为唯一素理想）. 现在 R_a 中理想降链 $I_1\supsetneq\cdots$. 定义 $J_n=I_n\cap R$. 这列理想打到 R/aR 将是降链, 故存在 N 使得 $n\ge N$ 时 $J_n\subset J_{n+1}+aR$. 下设 $n\ge N$, 此时任意 $x\in J_n$ 有 $y\in R$ 使得 $x-ay\in J_{n+1}$, 于是 $ay\in J_n$. 结合 a 在 R_a 可逆故 $y\in J_n$. 这样

$$J_n\subset J_{n+1}+aJ_n\subset J_{n+1}+\mathfrak{p}\cdot J_n.$$

对 J_n/J_{n+1} 用 **Nakayama 引理**得 $J_n = J_{n+1}$. 由 $I_n = R_a J_n$ 得知 $I_n = I_{n+1}$ 从而 R_a 也是 Artin 环. 现在倘若有 R 中素理想 $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$, 那么 $a \notin \mathfrak{q}$, 故 $R_\mathfrak{q} \neq 0$ 显然是 R_a 的局部化. 进而 $R_\mathfrak{q}$ 维数不超过 R_a 从而是零维的. 这说明 $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}) \leq 0$ 即有 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq 1$. □

引理 2.47. *R 是 Noether 环, $a \in R$, 则对 R 中素理想升链 $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ 满足 $a \in \mathfrak{p}_n$. 存在 R 中另一素理想升链 $a \in \mathfrak{q}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_n = \mathfrak{p}_n$（注意长度短 1）.*

证明. 对 n 归纳, $n = 1$ 显然. 可设 $a \notin \mathfrak{p}_{n-1}$ 否则用归纳假设. 取 $\mathfrak{q}_{n-1}$ 是含 $\mathfrak{p}_{n-2} + (a)$ 又含于 $\mathfrak{p}_n$ 中的极小素理想. 则根据 $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_{n-2} \subsetneq \mathfrak{q}_{n-1}$ 的归纳假设, 得 $a \in \mathfrak{q}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_{n-1}$. 根据**定理 2.46(弱 PIT)** 得 $\mathrm{ht}_{R/\mathfrak{p}_{n-2}}(\mathfrak{q}_{n-1}) \leq 1$ 而 $\mathrm{ht}_{R/\mathfrak{p}_{n-2}}(\mathfrak{p}_n) \geq 2$ 得真包含 $\mathfrak{q}_{n-1} \subsetneq \mathfrak{p}_n$. □

定理 2.48 (强主理想定理)**.** *R 是 Noether 环, $\mathfrak{p}$ 是 $(a_1, \cdots, a_n) \subsetneq R$ 上的极小素理想. 则*

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq n.$$

证明. 对 n 归纳, $n = 1$ 已证, 下设 $n > 1$. 设 $I = (a_1, \cdots, a_n)$, 则 I/a_nR 是 R/a_nR 的 $n-1$ 生成理想且 $\mathfrak{p}/a_nR$ 在 R/a_nR 的极小性仍满足. 归纳假设知 $\mathrm{ht}_{R/a_nR}(\mathfrak{p}/a_nR) \leq n-1$. 现设 R 中任意链 $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_k = \mathfrak{p}$, 由**引理 2.47** 知存在一串 $a_n \in \mathfrak{q}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_k = \mathfrak{p}$. 这链在 R/a_nR 的像是长度 $k-1$ 的链, 于是 $k - 1 \leq \mathrm{ht}_{R/a_nR}(\mathfrak{p}/a_nR) \leq n-1$ 即 $k \leq n$ 即 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq n$. □

推论 2.49. *Noether 环中的素理想高度都不超过生成元个数, 进而高度有限.*

定理 2.50 (主理想定理之逆)**.** *R 是 Noether 环, $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = n$. 则存在 $a_1, \cdots, a_n \in \mathfrak{p}$ 使 $\mathfrak{p}$ 在 $I = (a_1, \cdots, a_n)$ 上极小.*

证明. 归纳地我们证明存在 $a_1, \cdots, a_n \in \mathfrak{p}$ 使得 $k \leq n$ 时总有 $\mathrm{ht}(a_1, \cdots, a_k) = k$. 这样 $k = n$ 时若 $\mathfrak{p}$ 不是 I 上极小的则高度一定严格大于 n. 假设 $a_1, \cdots, a_{k-1}$ 已选好, 用 $\mathscr{M}$ 记 $(a_1, \cdots, a_{k-1})$（若 $k = 1$ 则考虑 (0)）上极小素理想构成的集合. 根据 **PIT** 知 $\mathscr{M}$ 中者高度等于 $k-1$. 从而它们都不可能包含 $\mathfrak{p}$. 由素理想回避, 取 $a_k \in \mathfrak{p} - \bigcup_{\mathfrak{q} \in \mathscr{M}} \mathfrak{q}$. 现在 $(a_1, \cdots, a_k)$ 上的任意素理想 $\mathfrak{q}'$ 一定含一个 $\mathfrak{q} \in \mathscr{M}$, 但因为 $a_k \notin \mathfrak{q}$, 因此 $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}') > \mathrm{ht}(\mathfrak{q}) = k-1$. □

推论 2.51 (参数系统)**.** *设 $(R, \mathfrak{m})$ 是 Noether 局部环, 则 $\dim R$ 恰是满足下条件的最小的正整数 n: 存在 $x_1, \cdots, x_n \in \mathfrak{m}$ 使得 $\sqrt{(x_1, \cdots, x_n)} = \mathfrak{m}$.*

证明. 这等价于 $\mathfrak{m}$ 是 $(x_1, \cdots, x_n)$ 上的极小素理想. 于是由 **PIT** 及其逆得知. □

定义 2.52. 符合上**推论 2.51** 的 $x_1, \cdots, x_{\dim R}$ 称 *Noether 局部环* $(R, \mathfrak{m})$ 的**参数系统**.

推论 2.53. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是 *Noether* 局部环，则 $\dim R \leq \dim_{R/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$（线性空间维数）.

证明. 我们声称作为线性空间, $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 的生成元在 $\mathfrak{m}$ 中的原像 $x_1, \cdots, x_n$ 生成 $\mathfrak{m}$. 设 $I = (x_1, \cdots, x_n)$ 则复合 $I \hookrightarrow \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 是满的. 即有 $I + \mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$, 对 $\mathfrak{m}/I$ 用 **Nakayama 引理**得 $\mathfrak{m} = I$. 最后得到 $\dim R = \operatorname{ht} \mathfrak{m} \leq n = \dim_{R/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$. □

注 2.54. *Noether* 局部环维数有限是很不平凡的结论. 使上述不等号取等者称正则局部环.

2.5.2 简单应用：纤维（Fiber）及其维数

定义 2.55. 设 $f : X \to Y$ 是簇的态射，对 $y \in Y$，原像 $f^{-1}(\{y\})$ 称 f 在 y 的**纤维**.

回忆线性空间中的有限维线性满射 $f : V \to W$, 则 $\dim f^{-1}(\{y\}) = \dim V - \dim W$.

命题 2.56 (局部情形，下界). 设 $(R, \mathfrak{m}), (S, \mathfrak{n})$ 为 *Noether* 局部环，同态 $\varphi : R \to S$ 使 $\varphi(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{n}$，则有 $\dim(S/\mathfrak{m}^e) \geq \dim S - \dim R$.

证明. 由**推论 2.51** 取 $a_1, \cdots, a_m \in \mathfrak{m}$ 为 R 的参数系统. 设 k 使 $\mathfrak{m}^k \subset (a_1, \cdots, a_m)_R$. 在 φ 下得 $(\mathfrak{m}^e)^k \subset (\varphi(a_1), \cdots, \varphi(a_m))_S$. 因为 $S/\mathfrak{m}^e$ 是 Noether 局部的, 故取 $b_1, \cdots, b_n \in \mathfrak{n}$ 使得其像是 $S/\mathfrak{m}^e$ 的参数系统. 再由**推论 2.51** 我们只需证明

$$\mathfrak{n} = \sqrt{(\varphi(a_1), \cdots, \varphi(a_m), b_1, \cdots, b_n)_S}.$$

显然右边含于左边, 反过来对 $x \in \mathfrak{n}$, 取 l 使 $x^l \in (b_i)_S + \mathfrak{m}^e$. 故 $x^{lk} \in (b_i)_S + (\mathfrak{m}^e)^k$. □

由**性质 2.17**, 一个同态 $\varphi : R \to S$ 诱导连续 $\varphi^* : \operatorname{Spec}(S) \to \operatorname{Spec}(R)$. 我们同样对 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ 的纤维 $(\varphi^*)^{-1}(\{\mathfrak{p}\})$, 代数上的解释是：考虑乘集 $U := \{\varphi(a) + \mathfrak{p}^e : a \in R - \mathfrak{p}\} \subset S/\mathfrak{p}^e$. 以及对应的局部化 $S_{[\mathfrak{p}]} = U^{-1}(S/\mathfrak{p}^e)$. 于是现在有自然映射 $f : S \to S/\mathfrak{p}^e \to S_{[\mathfrak{p}]}$.

命题 2.57. 如上定义，得到的 $f^* : \operatorname{Spec}(S_{[\mathfrak{p}]}) \to (\varphi^*)^{-1}(\{\mathfrak{p}\})$ 是同胚.

证明. $(\varphi^*)^{-1}(\{\mathfrak{p}\})$ 即 S 中拉回 R 得 $\mathfrak{p}$ 的素理想. $\operatorname{Spec}(S_{[\mathfrak{p}]})$ 即 S 中含 $\mathfrak{p}^e$ 且与 $\varphi(R - \mathfrak{p})$ 不交的, 可验证这两条件推出原像含 $\mathfrak{p}$ 和原像含于 $\mathfrak{p}$. 而 $S_{[\mathfrak{p}]}$ 继承了 S 的 Zariski 拓扑. □

定义 2.58. 环同态 $\varphi : R \to S$，$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$，称上述 $S_{[\mathfrak{p}]}$ 为 φ 在 $\mathfrak{p}$ 的**纤维环**.
特别的，当 $\mathfrak{p}$ 是 R 的极大理想时，$S_{[\mathfrak{p}]} = S/\mathfrak{p}^e$. 这是因为同态要求 1_R 映到 1_S.

定理 2.59 (一般情形, 下界). R, S 是 *Noether* 环, 同态 $\varphi: R \to S$. 若 $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ 为 R, S 中的素理想, 且 $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$, 则 $\dim(S_{[\mathfrak{p}]}) \geq \mathrm{ht}(\mathfrak{q}) - \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$.

证明. 我们证明 $\mathrm{Spec}(S_{[\mathfrak{p}]})$ 中对应 $\mathfrak{q}$ 者的高大于右边即可. 现在题目的条件带给我们 $\psi: R_{\mathfrak{p}} \to S_{\mathfrak{q}}$. 且将 $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ 打入 $\mathfrak{q}S_{\mathfrak{q}}$. 现在**命题 2.56(局部)** 告诉我们 $\dim(S_{\mathfrak{q}}/(\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}})^e) \geq \dim(S_{\mathfrak{q}}) - \dim(R_{\mathfrak{p}}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{q}) - \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$. 实际上 $\mathrm{Spec}(S_{\mathfrak{q}}/(\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}})^e)$ 包含了 S 中含于 $\mathfrak{q}$ 且包含 $\mathfrak{p}^e$ 的素理想. 这要求相当于含于 $\mathfrak{q}$ 且 φ 原像是 $\mathfrak{p}$. 因此 $\mathrm{Spec}(S_{\mathfrak{q}}/(\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}})^e)$ 中的升链对应 $\mathrm{Spec}(S_{[\mathfrak{p}]})$ 中含于 $\mathfrak{q}$ 的升链. □

2.5.3 诺特环上的多项式和形式多项式环维数、纤维的张量积观点、例子 *

作为 $\dim K[x_1, \cdots, x_n] = n$ 这一结果的经典推广, 我们指出:

推论 2.60. 对 *Noether* 环 R, 我们有 $\dim R[x] = \dim R + 1$.

证明. 设 R 中链 $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$, 在 $R \hookrightarrow R[x]$ 的像下它生成的理想也是素的, 其商为 $(R/\mathfrak{p}_i)[x]$, 是整环且不是域, 故 $\dim R[x] \geq R + 1$. 另一边对 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(R[x])$ 和 $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R$. 我们指出 $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}) \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + 1$, 由**定理 2.18(Hilbert 基)** 得知 $R[x]$ 是 Noether 的. 于是由**定理 2.59** 只需证 $\dim(R[x]_{[\mathfrak{p}]}) = 1$, 而计算得到 $R[x]_{[\mathfrak{p}]} \cong \mathrm{Frac}(R/\mathfrak{p})[x]$. □

习题 2.61. 对 *Noether* 环 R, 我们有 $\dim R[\![x]\!] = \dim R + 1$.

提示 2.62. 首先对理想 $I \subset R$, 仍然有 $R[\![x]\!] \to (R/I)[\![x]\!]$ 的核为 I^e, 这点依赖于 I 有限生成. 接下来对于极大 $\mathfrak{m} \subset R[\![x]\!]$, 有 $x \in \mathfrak{m}$, 于是通过取常数项得极大理想与 R 的交还是极大的. 最后 $\dim((R/\mathfrak{m})[\![x]\!]) = 1$ 因为其是 *PID*（甚至是 *DVR*）.

习题 2.63. 思考补全证明细节：设 $(R, \mathfrak{m})$ 为 *Noether* 局部整环, 且维数不小于 2, 则任一非空开集 $U \subset \mathrm{Spec}(R)$ 都是无穷集. 反设有限, 显然 $0 \in U$ 且 $\{0\}$ 是 U 中开集：逐个排掉 0 外的点, 故不妨设 $U = \{0\}$. 闭集 $U^c = \mathcal{V}(I)$, 任取 $0 \neq x \in I$ 则 $\mathcal{V}(I) \subset \mathcal{V}(x)$ 故非零理想都含 x. 由 **PIT 之逆**的具体操作, 在选好 x 的基础上由 $\mathrm{ht}(\mathfrak{m}) = \dim R$ 取 $y_2, \cdots, y_{\dim R}$, 现在 (x, y_2) 高度 2, 而 y_2 上的极小素理想高度 1, 这极小素理想含 y_2 不含 x, 与 x 的取法矛盾.

性质 2.64 (纤维环和张量积). 给定环同态 $\varphi: R \to S$ 和 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$. 记 $K = \mathrm{Frac}(R/\mathfrak{p})$,

以及典范的 $\psi : R \to K$. 这时 $S_{[\mathfrak{p}]}$ 可被刻画成 φ, ψ 的推出, 即如下左侧的图表:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & S \arrow[d, "\alpha"] \arrow[ddr] & \\
K = \mathrm{Frac}(R/\mathfrak{p}) \arrow[r, "\beta"] \arrow[drr] & R_{[\mathfrak{p}]} \arrow[dr, dashed] & \\
& & T
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(R) & \mathrm{Spec}(S) \arrow[l, "\varphi^*"'] & \\
\{\mathfrak{p}\} = \mathrm{Spec}(K) \arrow[u, "\psi^*"] & \mathrm{Spec}(R_{[\mathfrak{p}]}) \arrow[l, "\beta^*"'] \arrow[u, "\alpha^*"'] & \\
& & \mathrm{Spec}(T) \arrow[ull] \arrow[ul, dashed] \arrow[uul]
\end{tikzcd}$$

由此将 $R_{[\mathfrak{p}]}$ 等同于 $S \otimes_R K$. 而右侧的图表即将箭头反向, 在谱上看作拉回.

(一个范畴初学者友好的) 说明: 推出指矩形交换, 且任意 T 使图表交换, 都诱导虚线的箭头. 图中 $R \to S \to T$ 和 $R \to K \to T$ 为了交换, 说明来自 R 的 S, K 中对应部分需被看作等同, 那么 S, K 到 T 的映射自然穿过 $S \otimes_R K \to T$. 本例中, $\frac{x+\mathfrak{p}^e}{y+\mathfrak{p}^e} \in R_{[\mathfrak{p}]}$ 打到 T 的像, 由 $x \in S$, y^{-1} 在 K 的原像打到 T 的乘积决定, 只需验证良定可得到图表显然的交换性. 另一边, 谱集上相当于说 $\mathrm{Spec}(T) \to \mathrm{Spec}(R)$ 全打到 $\mathfrak{p}$ 的映射若穿过 $\mathrm{Spec}(S)$, 一定穿过 $\mathfrak{p}$ 在 $\mathrm{Spec}(S)$ 的原像.

2.6 整相关性（Integral Dependence）、上行和下行

2.6.1 准备知识：整相关性、正规性（Normal）的定义、局部化保持正规

定义 2.65. 环 $R \subset S$, 对 $s \in S$ 若存在 $R[x]$ 中首一多项式零化 s 则称 s 在 R 上**整**.
若任意 $s \in S$ 都在 R 上整, 则称 S 在 R 上**整**. 此时称 S 为 R 的**整扩张**

性质 2.66. 环 $R \subset S$, $s_1, \cdots, s_n \in S$ 那么:

(1) s 在 R 上整当且仅当存在忠实 $R[s]$-模 M 作为 R-模是有限生成的.

(2) $s_1, \cdots, s_n$ 在 R 上整当且仅当 $R[s_1, \cdots, s_n]$ 是 R-有限生成的.

(3) S 中全体 R 上整的元素构成 R-代数.

证明. (1) 若 s 整则取 $M = R[s]$, 用首一多项式对更大幂次降次知其由前有限个 s 的幂次生成. 反过来给定 M, 设它由 $m_1, \cdots, m_n$ 生成, 于是 $sm_i = \sum a_{ij} m_j$, $a_{ij} \in R$, 通过乘伴随矩阵容易证明 $\det(\delta_{ij} s - a_{ij}) \in R[s]$ 零化全体 m_i, 故由忠实性它在 $R[s]$ 中是 0, 而它也是首一多项式.(2) 左推右注意 $R[s_1, \cdots, s_n]$ 由 s_i 的有限个低幂次乘积生成, 右推左由 (1) 取 $M = R[s_1, \cdots, s_n]$.(3) 注意 R 在 R 整且由 (2) 知 s, t 在 R 整推出 $R[s, t]$ 是 R 有限生成的忠实 $R[s+t]$-模, $R[st]$-模, 故由 (1) 推出 $st, s+t$ 在 R 上整. □

推论 2.67. 环 $R \subset S \subset T$. 若 S 在 R 上整, T 在 S 上整, 则 T 在 R 上整.

证明. 对 $t \in T$, 设 $t^n + s_{n-1}t^{n-1} + \cdots + s_0 = 0,\ s_i \in S$. 则由**性质 2.66** 知 $S' = R[s_1, \cdots, s_{n-1}]$ 是有限生成 R-模, 故 $S'[t]$ 是有限生成 S'-模进而是有限生成 R-模, 再次由**性质 2.66** 知. □

定义 2.68 (正规性)**.** 环 $R \subset S$.S 中 R 上整的元素由**性质 2.66** 知构成 R-代数, 称其为 R 在 S 的**整闭包** , 若 R 在 S 的整闭包是 R 则称 R 在 S **整闭**. 由此引入: 对于**整环** R, 若 R 在 $\mathrm{Frac}(R)$ 整闭则称 R 是**正规**的, 整环 R 在 $\mathrm{Frac}(R)$ 的整闭包 $\tilde{R}$ 称 R 的**正规化**, 由**推论 2.67** 知 $\tilde{R}$ 正规. 对于不可约仿射簇 $X \subset K^n$, 若 $K[X]$ 正规则称 X 是**正规**的.

习题 2.69. *UFD* 都是正规的. 这只需对既约的 a/b 的首一零化多项式通分得知 b 整除 a.

命题 2.70. 对整环 R,**TFAE**:
(1) R 正规.(2) 对不含 0 的乘集 S, $S^{-1}R$ 正规.(3) $R_{\mathfrak{m}}$ 正规对一切极大理想 $\mathfrak{m} \subset R$.

证明. 记 $K = \mathrm{Frac}(R)$. 对 (1) 推 (2), 注意这局部化不改变分式域, 设 $a \in K$ 在 $S^{-1}R$ 上整, 通分得一系列 $s \in S,\ a, a_{n-1}, \cdots, a_0 \in R$ 使得 $a^n + (a_{n-1}a^{n-1} + \cdots + a_0)/s = 0$. 而将这式子乘上 s^n 即得 sa 在 R 的整相关式, 由条件 $sa \in R$, 即 $a \in S^{-1}R$. (2) 推 (3) 显然. 最后看 (3) 推 (1), 若 $a \in K - R$ 在 $R \subset R_{\mathfrak{m}}$ 上整, 得 $a \in R_{\mathfrak{m}}$ 对任意 $\mathfrak{m}$. 定义 $I := \{b \in R : ba \in R\}$ 是真理想, 于是 I 包含于某极大 $\mathfrak{m}$. 但依定义 I 中存在某 $S = R - \mathfrak{m}$ 者而矛盾. □

2.6.2 素理想上行（Going Up）、下行（Going Down）的经典判别

命题 2.71 (上行, 一般描述)**.** 记 $R \subset S$ 是环的整扩张.$\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, 理想 $I \subset S$ 满足 $R \cap I \subset \mathfrak{p}$. 记 $\mathscr{M} = \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(S) : R \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{p}, I \subset \mathfrak{q}\}$. 那么如下几个性质成立:
(1) $\mathscr{M} \neq \varnothing$.(2) $\mathscr{M}$ 中不存在 $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{q}'$.(3) 若 S 是有限生成 R-代数, 则 $\mathscr{M}$ 有限.

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
S: \arrow[d] & \boxed{\mathfrak{q}?} \arrow[r, "\supset"] \arrow[d] & I \arrow[d] \\
R: & \mathfrak{p} \arrow[r, "\supset"] & R \cap I
\end{tikzcd}$$

证明. 首先用 $(R/(R \cap I), S/I, \mathfrak{p}/(R \cap I), 0)$ 代替 $(R, S, \mathfrak{p}, I)$ 可设 $I = 0$. 首先, 对 $R \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{p}$, 则 $\mathfrak{p}$ 极大当且仅当 $\mathfrak{q}$ 极大: 因为两整环构成整扩张, 则其一是域当且仅当另一也是. 于是对 (1) 和 (2), 先用 $R - \mathfrak{p}$ 局部化 R, S, 于是由极大理想存在及极大理想不会互相包含得知. 对 (3) 只需注意 $S_{[\mathfrak{p}]}$ 是 $\mathrm{Frac}(R/\mathfrak{p})$ 上的有限生成 0 维（由 (2) 知）代数和**性质 2.36** 知. □

推论 2.72. $R \subset S$ 是环的整扩张, 则 $\dim R = \dim S$. 对 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(S)$ 有 $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}) \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{q} \cap R)$.

证明. 应用**命题 2.71**, 若 $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ 是 R 中的素理想链. 则由 $\mathscr{M}$ 非空得 S 中的素理想链 $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_n$ 使得 $\mathfrak{q}_i \cap R = \mathfrak{p}_i$, 因此 $\dim R \leq \dim S$. 而 S 中的链交到 R 一定是互不相同的, 因为 $\mathscr{M}$ 中没有互相包含的素理想. 由此推出 $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}) \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{q} \cap R)$ 及 $\dim S \leq \dim R$. □

注 2.73. 而另一边的不等式 $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}) \geq \mathrm{ht}(\mathfrak{q} \cap R)$ 则需要素理想下行, 维数的好处在于链的长度可以只用升链或降链讨论. 然而值得注意的是马上要讨论的下行条件更苛刻且更难证.

引理 2.74. R' 是 R 在 S 的整闭包. 则 S 在 $I \subset R$ 上整的全体元素为理想 $\sqrt{R'I} \subset R'$.

证明. 若 $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$, $x \in R', a_i \in I$ 则推出 $x \in \sqrt{R'I}$, 反之 $x \in \sqrt{R'I}$ 说明 $x^n = \sum a_i x_i$, $x_i \in R', a_i \in I$. 于是 $x^n M \subset IM$, 其中 $M = R[x_1, \cdots, x_n]$ 为有限生成 R-模, 于是**性质 2.66** 技巧得知 x^n 在 I 上整, 自然也得到 x 的首一零化多项式. □

引理 2.75. $R \subset S$ 两个整环, R 正规, $x \in S$ 在理想 $I \subset R$ 上整. 则 x 在 $\mathrm{Frac}(R)$ 上是代数元（这一点显然）, 且首一极小多项式系数在 $\sqrt{I}$ 中.

证明. 考察扩域 $L/\operatorname{Frac}(R)$ 含有 x 的诸共轭. 而共轭满足相同的零化多项式因此都在 I 上整. 由正规, **Vieta 定理**和**性质 2.66(3)** 知系数是 $\mathrm{Frac}(R)$ 中 I 上整的, 再由**引理 2.74** 得. □

引理 2.76. $A \to B$ 环同态, $\mathfrak{p}$ 是 A 的素理想, 则它是 B 中素理想的原像当且仅当 $\mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p}$.

证明. 一方面 $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^c$ 则 $\mathfrak{q}^{cec} = \mathfrak{q}^c$（这等式只需检查包含关系而无需 $\mathfrak{q}$ 素）得. 另一方面 $\mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p}$ 时设 U 为 $A - \mathfrak{p}$ 在 B 的像, 则条件知 $\mathfrak{p}^e, U$ 不交. 因此 $\mathfrak{p}^e$ 在 $U^{-1}B$ 中的扩理想是真理想. 从而它含在 $U^{-1}B$ 的某极大理想 $\mathfrak{m}$ 中.$\mathfrak{m}$ 在 B 中的局限理想 $\mathfrak{q}$ 素, 且 $\mathfrak{p}^e \subset \mathfrak{q}$; $\mathfrak{q}, U$ 交为空. 由**命题 2.57** $\mathfrak{q}^c = \mathfrak{p}$ 符合题目条件. □

命题 2.77 (下行, 一般描述)**.** $R \subset S$ 两整环的整扩张, R 正规. 则 R 中素理想 $\mathfrak{p}_1 \supset \mathfrak{p}_2$ 和 S 中素理想 $\mathfrak{q}_1$ 满足 $\mathfrak{q}_1 \cap R = \mathfrak{p}_1$. 存在 S 中素理想降链 $\mathfrak{q}_1 \supset \mathfrak{q}_2$ 使 $\mathfrak{q}_2 \cap R = \mathfrak{p}_2$.

$$\begin{array}{cccc} S: & \mathfrak{q}_1 & \overset{\supset}{\text{———}} & \boxed{\mathfrak{q}_2?} \\ | & | & & | \\ R: & \mathfrak{p}_1 & \overset{\supset}{\text{———}} & \mathfrak{p}_2 \end{array}$$

证明. 由**引理 2.76** 只需证 $(S_{\mathfrak{q}_1}\mathfrak{p}_2) \cap R = \mathfrak{p}_2$. 取 x 在交中, 作 $x = y/s$, $y \in \mathfrak{p}_2 S, s \in S - \mathfrak{q}_1$. 由**引理 2.74** 知 y 在 $\mathfrak{p}_2$ 上整, 再由**引理 2.75** 知 y 在 $\mathrm{Frac}(R)$ 的首一极小多项式为 $y^r + \sum u_i y^i$ 系数在 $\mathfrak{p}_2$. 现在 $x \in R$ 告诉我们 $s = y/x$ 在 $\mathrm{Frac}(R)$ 的首一极小多项式 $s^r + \sum(u_i/x^{r-i})s^i$, 由于 s 在 R 上整, 对 $I = R$ 用**引理 2.75** 得 $u_i/x^{r-i} \in R$. 故 $u_i \in \mathfrak{p}_2$ 下, 若 $x \notin \mathfrak{p}_2$ 则 $u_i/x^{r-i} \in \mathfrak{p}_2$, 这导致 $s^r \in \mathfrak{p}_2 S \subset \mathfrak{q}_1$ 与 $s \notin \mathfrak{q}_1$ 矛盾, 故 $(S_{\mathfrak{q}_1}\mathfrak{p}_2) \cap R \subset \mathfrak{p}_2$. 另一侧的包含关系显然. □

性质 2.78 (从素谱看上行)**.** 由**性质 2.17**, 单射 $\varphi : R \hookrightarrow S$ 诱导 $\varphi^* : \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ 的稠密映射. 当 $R \subset S$ 是整扩张时 φ^* 还是满的闭映射.

证明. 对理想 $I \subset S$ 由**命题 2.71 (上行)** 知 $\mathrm{Spec}(S/I) \to \mathrm{Spec}(R/(I \cap R))$ 是满射, 换言之 $\mathcal{V}_S(I)$ 在 φ^* 的像是 $\mathcal{V}_R(I \cap R)$. □

命题 2.79. 当 $R \subset S$ 满足**命题 2.77** 条件时, 对理想 $I \subset S$ 有 $\mathrm{ht}(I \cap R) = \mathrm{ht}(I)$.

证明. I 素的情形显然. 一般的情况无非是取 R, S 中包含 $I \cap R, I$ 的素理想讨论. □

推论 2.80 (正规化的几何性质). 整环 R, 正规化 $\tilde{R}$. 则对 $\varphi : R \hookrightarrow \tilde{R}$, 我们有:

(1) $\dim R = \dim \tilde{R}$.(2) φ^* 满, 闭映射.

(3) 若 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ 使 $R_\mathfrak{p}$ 正规, 则 $(\varphi^*)^{-1}(\{\mathfrak{p}\})$ 只有一个点.

证明. (1),(2) 由**推论 2.72, 性质 2.78**. 对 (3), 显然 $(R-\mathfrak{p})^{-1}\tilde{R} = R_\mathfrak{p}$. 设 $\mathfrak{q} \in (\varphi^*)^{-1}(\{\mathfrak{p}\})$. 于是 $(R-\mathfrak{p})^{-1}\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}((R-\mathfrak{p})^{-1}\tilde{R}) = \mathrm{Spec}(R_\mathfrak{p})$ 且 $\tilde{R} \cap ((R-\mathfrak{p})^{-1}\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}$ 得知 $R \cap ((R-\mathfrak{p})^{-1}\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$, 因此由 $R_\mathfrak{p}$ 是局部环得 $(R-\mathfrak{p})^{-1}\mathfrak{q} = \mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ 于是 $\mathfrak{q} = \tilde{R} \cap (\mathfrak{p}R_\mathfrak{p})$ 而唯一. □

2.6.3 简单应用：Noether 正规化（Normalization）、纤维维数取等的下行条件

接下来的定理是**定理 2.59** 中不等号能取到等的情况.

定理 2.81 (下行条件下取等). R, S 是 *Noether* 环, 同态 $\varphi : R \to S$, $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ 为 R, S 中的素理想, 且 $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$, 记 $U = \varphi(R-\mathfrak{p})$, 若 $R_\mathfrak{p} \to U^{-1}S$ 满足素理想下行, 则

$$\mathrm{ht}_{S_{[\mathfrak{p}]}}(\mathfrak{q}) = \mathrm{ht}_S(\mathfrak{q}) - \mathrm{ht}_R(\mathfrak{p}).$$

证明. 依定义 $\mathrm{ht}_{S_{[\mathfrak{p}]}}(\mathfrak{q}')$ 是 $\mathrm{Spec}(S)$ 中原像为 $\mathfrak{p}$ 的, 止于 $\mathfrak{q}$ 的素理想链 $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_m = \mathfrak{q}$ 长度 m 的上界. 现在对 $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$, $n = \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$, 注意 $U \cap \mathfrak{q}_0 = \varnothing$ 并用下行条件, 将 $\mathfrak{p}_i$ 拉到 $\mathfrak{q}_{i-n}$（负指标）. 于是 $\mathfrak{q}$ 的高度不小于 $m+n$, 而**定理 2.59** 提供另一侧不等式, 即取等. □

引理 2.82 (首一化引理). $f \in K[x_1, \cdots, x_n]$. 通过取 $N > \deg f$ 进行换元 $\begin{cases} x_i = \tilde{x}_i + \tilde{x}_n^{N^{n-i}}, & i < n \\ x_n = \tilde{x}_n \end{cases}$, 得到 $\{\tilde{x}_i\}$ 们的多项式关于 $\tilde{x}_n$ 主元后最高次系数在 $K^\times$（即不涉及 $\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_{n-1}$）.

证明. 注意 f 的字典序最大的单项展开得到无可匹敌的 $\tilde{x}_n$ 之幂次. □

定理 2.83 (Noether 正规化, 标准版本). A 是域 K 上有限生成代数, 则存在 $x_1, \cdots, x_n \in A$ 使得它们在 K 代数无关, 且 A 在 $B = K[x_1, \cdots, x_n]$ 上整.（且知作为模有限生成）

证明. 取 A 生成元 $y_1, \cdots, y_m$, 记 $A = K[Y_1, \cdots, Y_m]/I$. 我们对 m 归纳定理, 考察 I 非平凡（否则显然）, 取非常多项式 $f \in I$ 并使用**首一化引理**, 得代数无关 $\tilde{Y}_1, \cdots, \tilde{Y}_{m-1}, Y_m \in K[Y_1, \cdots, Y_m]$ 使 f 是关于 Y_m 首一的. 取 $\tilde{Y}_i$ 在 A 的像 $\tilde{y}_i$, 现在 A 在 $K[\tilde{y}_1, \cdots, \tilde{y}_{m-1}]$ 上整, 再由归纳假设以及**推论 2.67** 整的传递性得. □

注 2.84. * 首先对**首一化引理**, 若 K 无限域, 换元也可以用线性的 $\begin{cases} x_i = \tilde{x}_i + \lambda_i \tilde{x}_m, & i < m \\ x_m = \tilde{x}_m \end{cases}$ 代替. 只需使 f 齐最高次的部分代入 $f_{\text{top}}(\lambda_1, \cdots, \lambda_{m-1}, 1) \neq 0$ 即可. 另外 [11] 上有一个更强的正规化声称**定理 2.83** 条件下额外给定 A 的一条理想链 $I_1 \subset \cdots \subset I_p$, 可额外要求每个 $I_i \cap B$ 作为 B 中的理想都形如 $(x_1, \cdots, x_{h(i)})_B$. 证明在前定理的基础上稍作调整:

证明. 只需证 $A = K[Y_1, \cdots, Y_m]$ 的情形, 因为一般者形如 $K[Y_1, \cdots, Y_m]/I_0$, 考虑 $x_{i-h(0)}$ 之像即可. 我们先看 **(a)** $p = 1$, I_1 是单生成的情形, 不妨设是 $x_1 \notin K$ 生成的. 由首一化引理不妨设 x_1 是 Y_1 主元的首一多项式, 对应取 $x_i = Y_i$ $(i > 1)$. 这样 $\{x_i\}$ 代数无关且 Y_i 们整于 $B = K[x_1, \cdots, x_m]$, 故 A 在 B 上整且 $I_1 \cap B = x_1 B$: 因为左式者可写成形如 $x_1 z$, $z \in A \cap \text{Frac}(B) = B$（左式在 B 上整且 B 正规）.**(b)** $p = 1$ 和一般的 I_1, 对 m 归纳, $m = 0, 1$ 是显然的. 设非常数 $x_1 \in I_1$, 对 $x_1 A$ 用 **(a)**, 存在 $t_2, \cdots, t_m \in A$ 使 $x_1, t_2, \cdots, t_m$ 代数无关且 A 在 $C = K[x_1, t_2, \cdots, t_m]$ 上整且 $x_1 A \cap C = x_1 C$. 再用归纳假设, 存在 $x_2, \cdots, x_m \in K[t_2, \cdots, t_m]$ 在 K 上代数无关使 $K[t_2, \cdots, t_m]$ 在 $K[x_2, \cdots, x_m]$ 上整且 $I_1 \cap K[x_2, \cdots, x_m]$ 由 $x_2, \cdots, x_{h(1)}$ 生成. 由**推论 2.67** 整传递, 代数无关, 及 $I_1 \cap B = (x_1, \cdots, x_{h(1)})_B$ 得（左边包含诸 x_i, 反过来用 $x_1 A \cap B = x_1 C \cap B = x_1 B$ 说明左边者可以主元 x_1 而常数项位于 $I_1 \cap K[x_2, \cdots, x_m]$）.**(c)** 最后是 $p-1$ 到 p. 设 $t_1, \cdots, t_m$ 是 A 中符合 $I_1 \subset \cdots \subset I_{p-1}$ 归纳假设者. 记 $r = h(p-1)$, 取 $x_i = t_i (i \leq r)$, 然后用 **(a)** 知存在 $x_{r+1}, \cdots, x_m$ 为 $K[t_{r+1}, \cdots, t_m]$ 中符合 $I_p \cap K[t_{r+1}, \cdots, t_m]$ 者, 这些 $\{x_i\}$ 即所需者. □

注 2.85. * 尽管上面的证明冗长, 其思路和**定理 2.83** 没有什么本质的区别. 标准的诺特正规化结合**推论 2.72** 可以简单地推出**定理 2.34**, 而这个精细版本可更便捷地推出如下命题.

命题 2.86. A 是整环, 且是有限生成 K 代数, 则 A 中素理想链总含于长度 $\dim A$ 者.

证明. 假设 $0 = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ 是 A 中一条极大（不可在前、后、中间加项的）链, 我们对 n 归纳证明 $\dim A = n. n = 0$ 是域显然, $n > 0$ 时 $\mathfrak{p}_1$ 始的部分是 $A/\mathfrak{p}_1$ 的极大链. 于是由归纳假设 $\dim(A/\mathfrak{p}_1) = n - 1$, 所以只需证 $\dim A = \dim(A/\mathfrak{p}_1) + 1$. 由诺特正规化, 存在多项式环 $B \subset A$ 且 A 在 B 上整, 由链极大性 $\text{ht}(\mathfrak{p}_1) = 1$, 现在不难验证 $B \subset A$ 的**命题 2.77(下行)** 条件满足, 于是 $\text{ht}(B \cap \mathfrak{p}_1) = 1$, 由**性质 2.43(超曲面) 的 (2) 推 (1)**, $\dim(B/(B \cap \mathfrak{p}_1)) = \dim B - 1$, 最后由 $A/\mathfrak{p}_1$ 在 $B/(B \cap \mathfrak{p}_1)$ 上整及**推论 2.72** 得证. □

注 2.87. * 使用**注 2.84** 的推导: 素理想链对应交到 B 是 $0 \subset (x_1, \cdots, x_{h(1)}) \subset \cdots \subset (x_1, \cdots, x_{h(n)})$, 于是补全为 $0 \subsetneq (x_1) \subsetneq \cdots \subsetneq (x_1, \cdots, x_{m-1})$ 由**命题 2.77, 命题 2.79** 得.

推论 2.88. A 是整环, 且是有限生成 K 代数, 理想 $I \subset A$ 则 $\mathrm{ht}(I) = \dim A - \dim(A/I)$.

证明. 简单地归约到 I 是素理想的情形. □

注 2.89. 借助上述推论, 我们能把 **PIT** 如此表述: 设 A 是整环, 有限生成 K 代数, 则对真理想 $I = (a_1, \cdots, a_n) \subset A$ 上的极小素理想 $\mathfrak{p}$ 有 $\dim(A/\mathfrak{p}) \geq \dim A - n$. 实际上 $\dim(A/I) \geq \dim A - n$ 且取等当且仅当 A/I 的各不可约分支等维数.

习题 2.90. X, Y 是 K^n 中的不可约仿射簇, Z 是 $X \cap Y$ 的不可约分支, 则

$$\dim Z \geq \dim X + \dim Y - n.$$

提示 2.91. 设 $\Delta = \{(x, x) : x \in K^n\} \subset K^{2n}$ 是对角线, 显然它是 n 生成的理想对应的簇. 另外 $X \cap Y = (X \times Y) \cap \Delta$, 注意**注 2.89** 和**习题 2.44**.

2.6.4 平坦条件的素理想下行 *

定义 2.92. $R \to S$ 环同态, 且 S 作为 R-模 (忠实) 平坦, 则称 $R \to S$ 是 **(忠实) 平坦同态**.

本小节的主要目的是按照 [10] 的方法证明如下的定理, 作为 [2] 上一个定理的推广.

定理 2.93 (平坦同态推出下行)**.** $R \to S$ 平坦同态, 那么 $R \to S$ 满足素理想下行.

证明. 首先还是如同原先的设定, R 中素理想 $\mathfrak{p}_1 \supset \mathfrak{p}_2$ 和 S 中素理想 $\mathfrak{q}_1$ 满足 $\mathfrak{q}_1^c = \mathfrak{p}_1$. 需证存在 S 中素理想降链 $\mathfrak{q}_1 \supset \mathfrak{q}_2$ 使 $\mathfrak{q}_2^c = \mathfrak{p}_2$. 首先我们指出 $R_{\mathfrak{p}_1} \to S_{\mathfrak{q}_1}$ 是平坦同态.

引理 2.94. $R \to S$ 平坦同态, S-模 M 作为 R-模平坦, 则 $M_{\mathfrak{q}}$ 是平坦 $R_{\mathfrak{p}}$-模对 $\mathfrak{q}^c = \mathfrak{p}$.

这引理注意 $N \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{q}} = N \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} (R_{\mathfrak{p}} \otimes_R M_{\mathfrak{q}}) = N \otimes_R M_{\mathfrak{q}} = N \otimes_R M \otimes_S S_{\mathfrak{q}}$ 从而是显然的. □
于是 $R_{\mathfrak{p}_1} \to S_{\mathfrak{q}_1}$ 是局部环间的平坦同态, 下面说明其还是忠实的.

引理 2.95 (忠实平坦的等价刻画)**.** M 是平坦 R-模, 则 **TFAE**:
(1) M 忠实平坦.(2) 对非零 R-模 N, $M \otimes_R N \neq 0$. (3) 对 R 的任意 $\mathfrak{p}$, $M \otimes \mathrm{Frac}(R/\mathfrak{p}) \neq 0$. (4) 将 (3) 改成极大理想, 即 $M \otimes (R/\mathfrak{m}) = M/\mathfrak{m}M \neq 0$ 对任意 $\mathfrak{m}$.

首先 (1) 推 (2), 若不然, $0 \to (\mathrm{Ker}\,\alpha) \otimes_R M \to N \otimes_R M \to N \otimes_R M \to 0$ 正合, 其中 $\alpha : N \to N$ 是零映射, 利用忠实条件得到 $0 \to \mathrm{Ker}\,\alpha \to N \to N \to 0$ 正合, $N \to N$ 是 α, 但这说明 $N = 0$ 矛盾. 其次 (2) 推 (3) 推 (4) 是显然的, 故只需证明 (4) 推 (1). 为此设 $N_1 \to N_2 \to N_3$ 使得作用 $- \otimes_R M$ 后正合, 记 $H = \mathrm{Ker}(N_2 \to N_3)/\,\mathrm{Im}(N_1 \to N_2)$. 取 $x \in H$ 并令 $I = \{f \in R : fx = 0\}$,

因为 $R/I \subset H$ 于是由平坦性 $M/IM \subset H \otimes_R M = 0$. 这说明 $I = R$, 否则 $I \subset \mathfrak{m}$ 而 $M/\mathfrak{m}M \neq 0$ 矛盾. 因此 x 的任意性表明 $H = 0$, 即 $N_1 \to N_2 \to N_3$ 正合. □

作为推论, $R_{\mathfrak{p}_1} \to S_{\mathfrak{q}_1}$ 是局部环的平坦同态, 只要注意 $S_{\mathfrak{q}_1}/\mathfrak{p}_1 S_{\mathfrak{q}_1} \neq 0$ 因为它满射 $S_{\mathfrak{q}_1}/\mathfrak{q}_1 S_{\mathfrak{q}_1} \neq 0$ 于是它忠实平坦. 我们只需证明 $\mathfrak{p}_2 R_{\mathfrak{p}_1}$ 被打到. 而这由忠实平坦的 (3) $S_{\mathfrak{q}_1} \otimes \mathrm{Frac}(R_{\mathfrak{p}_1}/\mathfrak{p}_2 R_{\mathfrak{p}_1})$ 非零得到, 回忆这即是**性质 2.64** 的看法. 于是平坦同态的下行性得证. □

这不比 [2] 原文 S 是诺特、R-自由的版本好多了.

2.6.5 正规化

我们先观察数论中比较有用的一个引理, 它的直接推论是数域的代数整数环的整基存在.

引理 2.96. *R 是 Noether 整环, L 是 $K = \mathrm{Frac}(R)$ 的有限扩张.*
(a) R 是正规的且 L/K 可分.(b) $R \cong k[x_1, \cdots, x_n]$ 是多项式环.
那么条件 (a),(b) 中任一个满足都能推出 R 在 L 的整闭包 S 是 R 有限生成模.

证明. 首先用 L 在 K 的正规闭包代替 L. 因为可分性是元素最小多项式检验的, 以及 Noether 环上有限生成模的子模有限生成, 从而假设 L/K 是有限正规的, 我们记 $G = \mathrm{Aut}(L/K)$, L^G 是 K 的纯不可分闭包. 设 $b_1, \cdots, b_m$ 是 K/L 一组基, 取 q 是 1 或特征的幂次使 $\mathrm{Tr}(b_i)^q \in K$. 先看 (b), 设 k' 是 k 的有限扩张, 包含 $\mathrm{Tr}(b_i)^q$ 写成诸 x_j 有理分式出现的全体系数的 $1/q$ 次方, 这样 $\mathrm{Tr}(b_i) \in K' := k'(x_1^{1/q}, \cdots, x_n^{1/q})$. 于是取 $R' := k'[x_1^{1/q}, \cdots, x_n^{1/q}]$ 满足条件 (i) R' 是有限生成 R-模,(ii) R' 正规,(iii) $\mathrm{Tr}(b_i) \in \mathrm{Frac}(R')$. 而 (a) 下对 $R' := R$ 这三者也满足.
对 $s \in S$, 由 (iii) 知 $\mathrm{Tr}(s) \in \mathrm{Frac}(R')$, 注意 $\mathrm{Tr}(s)$ 在 R 上整, 因此由 (ii) 知 $\mathrm{Tr}(s) \in R'$. 通过乘分母的幂次不妨设 $b_i \in S$, 于是此时由传统 Trace 技巧得到有 R-模 M 使:

$$S \subset M = \{x \in L : \mathrm{Tr}(xb_i) \in R',\ i = 1, \cdots, m\}$$
$$\varphi : M \to (R')^m,\ x \mapsto (\mathrm{Tr}(xb_i))_{i=1}^m$$

而 φ 是单射, 因为域自同构只有平凡线性组合恒零. 所以由 (i) 知 S 是有限生成 R-模. □

命题 2.97. *A 是整环, 也是有限生成 K 代数, 则正规化 $\tilde{A}$ 亦是有限生成 K 代数.*
作为推论, 此时存在 $f \in A$ 使得 A_f 是正规的. 只需取 $\tilde{A} \subset \mathrm{Frac}\, A$ 作为 K 代数生成元的所有分母乘积作为 f. 那么 A_f 的正规化包含于 $(\tilde{A})_f$ 中（一个在 A_f 上整的元素的某个 f 的幂次倍在 A 上整）而 $(\tilde{A})_f = A_f$, 于是 A_f 正规.

证明. 由 **Noether 正规化**取 $R \subset A$ 同构于多项式环 $R \subset A$ 是整扩张. 于是 $\mathrm{Frac}(A) = L$ 是 $\mathrm{Frac}(R)$ 的有限扩张, 从而由**引理 2.96(b)** 知 $\tilde{A}$ 是 R 的有限生成模. □

推论 2.98. X 是代数闭 K 上的不可约仿射簇, 则存在正规仿射簇 $\tilde{X}$ 和满态射 $f:\tilde{X}\to X$ 使 $\dim\tilde{X}=\dim X$; 纤维都是有限的; 且任意 $x\in X$ 使 $K[X]_x$ 正规, x 的纤维只有一个点.

证明. 由**命题 2.95** 知 $A:=K[X]$ 的完备化 $\tilde{A}$ 是不可约仿射簇, 记 $K[\tilde{X}]\cong\tilde{A}$. 于是嵌入 $A\hookrightarrow\tilde{A}$ 诱导 $f:\tilde{X}\to X$. 欲证结论由**推论 2.80**, **命题 2.71(上行)** 知. □

命题 2.99. 设 R 是整环, 则 $\widetilde{R[x]}=\tilde{R}[x]$. 作为推论 R 正规则 $R[x]$ 亦然.

证明. 首先右边含于左边: 系数在 R 整进而在 $R[x]$ 整. 左边含于右边稍麻烦, 记 $K=\mathrm{Frac}(R)$, 设 $f\in K(x)$ 在 $R[x]$ 上整, $f^m=\sum g_if^i$, $g_i\in R[x]$, 只需证 $f\in\tilde{R}[x]$. 因为 $K[x]$ 正规, $f\in K[x]$. 设 $0\neq u\in R$ 使 $uf^i\in R[x]$, $0\leq i<m$. 现在我们试图将 R 换成 uf^i,g_i 系数生成的子环于是不妨设 R 诺特. 现在对 f 的次数归纳, 我们只需证明首项系数 $a\in K$ 在 $\tilde{R}$ 即可用 $f-ax^n$ 的归纳假设. 注意到由整表达式 $uf^i\in R[x]$ 对任意非负整 i, 因此 $ua^i\in R$, 故 $R[a]\subset u^{-1}R$ 从而由 R 诺特知其 $R[a]$ 是有限生成 R-模, 于是由**性质 2.66** 得 $a\in\tilde{R}$. □

2.7 计算交换代数初探 *

注意到交换代数技巧的很大一部分涉及非构造性或非实效性的方法, 而为了在 "实际生活" 中做具体计算, 计算交换代数应运而生. 我们马上要接触的内容像 Euclid 算法或 Gauss 消元法一样基本, 它们在计算交换代数的理论中占有重要的地位. 本节主要参考 [2], 同时也参考了 [12],[13]. 当然对此不感兴趣的读者可以直接跳过本节, 这对后文的阅读没有影响.

2.7.1 准备知识: 基本定义

定义 2.100. K 是域, $K[x_1,\cdots,x_n]$ 中形如 $x_1^{e_1}\cdots x_n^{e_n}$, $e_i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 者称为**项**, 而 $cx_1^{e_1}\cdots x_n^{e_n}$, $c\in K^\times$ 者称**一个单项式**, 其中的 c 称**系数**. 对多项的 $f\in K[x_1,\cdots,x_n]$, 用 $\mathrm{Mon}(f)$ 表 f 系数非零的项构成的集合, 特别的 $\mathrm{Mon}(0)=\varnothing$.

定义 2.101. $K[x_1,\cdots,x_n]$ 上的一个**项序**是其上全体项的某种全序 "$\leq$" (即任二者可比大小) 使 $1\leq t$ 对任意项 t, 以及, $t_1\leq t_2$ 推出 $st_1\leq st_2$ 对任意项 s,t_1,t_2. 典型的例子是字典序. 现在取定一个项序, 对 $0\neq f\in K[x_1,\cdots,x_n]$ 定义 $\mathrm{LM}(f)$ 为 $\mathrm{Mon}(f)$ 中此序下最大的项, $\mathrm{LC}(f),\mathrm{LT}(f)$ 为对应的系数和单项式. 特别的 $f=0$ 时上者皆取 0 且延拓定义 $0<1$.
显然的推论是 $\mathrm{LT}(fg)=\mathrm{LT}(f)\,\mathrm{LT}(g)$, $\mathrm{LM}(f+g)\leq\max\{\mathrm{LM}(f),\mathrm{LM}(g)\}$.

定义 2.102. 本文中我们采用的**字典序**单字顺序为 $x_1<x_2<\cdots<x_n$, **分级 (反) 字典序**为先比对次数和, 相等的条件下采用 (反) 字典序. 尽管实际应用最多的序是字典序, 不过下文讨论中如无特别说明, 还是固定采用某个一般的项序 "$\leq$".

命题 2.103. $K[x_1, \cdots, x_n]$ 中任意的项序都是良序的, 即项的任意子集有下确界于其中.

证明. 由 **Hilbert 基定理**知 Noether 性, 考虑子集生成的理想, 它由子集中有限多者生成. □

注 2.104. 最直接的, 项的下降列一定在有限步稳定, 进而一系列算法会在有限时间内结束.

定义 2.105. 对一族多项式 $S \subset K[x_1, \cdots, x_n]$, 称 $L(S) := (\mathrm{LM}(f) : f \in S)$ 为 S 的**领项理想**. 不难证明若 $g \in L(S)$ 则存在某 $f \in S$ 使得 $\mathrm{LM}(f) | \mathrm{LM}(g)$.
对理想 $I \subset K[x_1, \cdots, x_n]$, 一个有限集 $G \subset I$ 若满足 $L(I) = L(G)$ 则称其 I 的 **Gröbner 基**.

定义 2.106. 有限集 $S = \{g_1, \cdots, g_r\} \subset K[x_1, \cdots, x_n], f \in K[x_1, \cdots, x_n]$. 若不存在 $t \in \mathrm{Mon}(f)$ 是某 $\mathrm{LM}(g_i)$ 的倍式, 则称 f 关于 S **形式正规**. 若 $f^* \in K[x_1, \cdots, x_n]$ 形式正规且 $f - f^* = \sum g_i h_i$, $h_i \in K[x_1, \cdots, x_n]$ 则称 f^* 为 f 的**一个形式正规化**.
一个说明: 关于形式正规化的定义中是否需要加上 $\mathrm{LM}(g_i h_i) \leq \mathrm{LM}(f)$的问题, 见**注 2.110**.

定义 2.107. 对 $f, g \in K[x_1, \cdots, x_n]$, 记 $t := \gcd(\mathrm{LM}(f), \mathrm{LM}(g))$, 定义 f, g 的 **s-多项式**为

$$\mathrm{spol}(f, g) := f \cdot \frac{\mathrm{LT}(g)}{t} - \frac{\mathrm{LT}(f)}{t} \cdot g.$$

2.7.2 Gröbner 基与 Buchberger 算法

算法 2.108 (形式正规化)**. 输入:** 有限集 $S = \{g_1, \cdots, g_r\} \subset K[x_1, \cdots, x_n]$, 多项式 $f \in K[x_1, \cdots, x_n]$. **输出:**$f$ 的一个形式正规化 f^* 以及所用的系数 h_i.
初始化 $f^* := f, h_i := 0$. 然后重复下列步骤: (1) 设 $\mathscr{M} = \{(t, i) : t \in \mathrm{Mon}(f^*), \mathrm{LM}(g_i) | t\}$, 若为空集, 则返回 f^* 和诸 h_i.(2) 在 $\mathscr{M}$ 中选最大的 t, 记 c 为其在 f^* 系数. 取

$$f^* := f^* - \frac{ct}{\mathrm{LT}(g_i)} g_i, \ h_i := h_i + \frac{ct}{\mathrm{LT}(g_i)}.$$

有效性在于 $\mathscr{M}$ 的定义, 而 $\mathscr{M}$ 中的最大者单调变小保证停机. 另易证 $\mathrm{LM}(g_i h_i) \leq \mathrm{LM}(f)$.

定理 2.109 (形式正规映射)**.** G 是理想 I 的 *Gröbner* 基.
(1) 关于 G 的形式正规化存在且唯一, 记 $\mathrm{NF}_G : f \mapsto f^*$.(2) NF_G 是 K 线性的且 $\mathrm{Ker}(\mathrm{NF}_G) = I$.(3) 若 $\tilde{G}$ 是 I 的另一 *Gröbner* 基, 则 $\mathrm{NF}_G = \mathrm{NF}_{\tilde{G}}$.

证明. 我们一并证明 (1),(3). 存在性由**形式正规化算法**知, 假设 f_1, f_2 是 f 关于 Gröbner 基 $G, \tilde{G}$ 的形式正规化. 那么 $f_1 - f_2 \in I$ 故 $\mathrm{LM}(f_1 - f_2) \in L(I) = L(G) = L(\tilde{G})$. 若 $f_1 \neq f_2$ 则 $\mathrm{LM}(f_1 - f_2)$ 必然出现在 $\mathrm{Mon}(f_i)$ 二者之一, 但它又是某 $\mathrm{LM}(g)$ 之倍数, 这与形式正规的定义矛盾. 最后对 (2), K 线性由算法保证, 对 $f \in \mathrm{Ker}(\mathrm{NF}_G)$, 则 $f = f - \mathrm{NF}_G(f) \in I$, 反过来对 $0 \neq f \in I$, 若 $0 \neq f^* = \mathrm{NF}_G(f)$, 注意 f^* 显然在 I, 同前法考察 $\mathrm{LM}(f^*)$ 知矛盾. □

注 2.110. 有趣的是，证明唯一性过程中没有用到 [2] 定义时，即**定义 2.106** 说明提到的条件 $\mathrm{LM}(g_ih_i) \le \mathrm{LM}(f)$，上述定理 $\mathrm{NF}_G(f)$ 虽唯一，但 h_i 的选取可以不唯一，我们的形式正规化算法保证总存在一组 h_i 使条件符合. 一般来说，非 *Gröbner* 基并不能保证形式正规化的唯一性，这条件至少保证了正规化得到的项不会太大. 实际上，在一些计算交换代数教材中，例如 [13]，会避免这样定义正规化而用算法的结果来替代，这或许是一种更加文明的处理 (?) .

推论 2.111. G 是理想 I 的 *Gröbner* 基. 则按 $K[x_1,\cdots,x_n]$ 理想生成 $(G)=I$.

证明. 由 $G\subset I$ 知 $(G)\subset I$，反过来对 $f\in I$，$\mathrm{NF}_G(f)=0$ 故 $f=f-\mathrm{NF}_G(f)\in(G)$. □

定理 2.112 (Buchberger 判别). 设一族有限非零 $G\subset K[x_1,\cdots,x_n]$,**TFAE**:

(1) G 是其生成 (G) 的 *Gröbner* 基.

(2) 任意 $g,h\in G$，按**形式正规化算法**，$\mathrm{spol}(g,h)$ 关于 G 的形式正规化是 0.

证明. (1) 推 (2) 较显然，$\mathrm{spol}(g,h)\in(G)$，从而由**定理 2.109** 知.(2) 推 (1) 反设不是 Gröbner 基，则存在 $f\in(G)$ 使 $\mathrm{LM}(f)\notin L(G)$. 记 $G=\{g_1,\cdots,g_r\}$ 及 $f=\sum_{i=1}^r h_ig_i$，不妨要求 $t=\max\{\mathrm{LM}(h_ig_i)\}$ 最小(**命题 2.103** 保证存在). 现由 f 的线性组合知存在 i 使 $\mathrm{LM}(f)\in\mathrm{Mon}(h_ig_i)$，故由 $\mathrm{LM}(f)\notin L(G)$ 知 $\mathrm{LM}(f)<\mathrm{LM}(h_ig_i)\le t$. 于是观察 t 的系数得:

$$c_i:=\begin{cases}\mathrm{LC}(h_i), & \mathrm{LM}(h_ig_i)=t\\ 0, & \mathrm{LM}(h_ig_i)\neq t\end{cases}\implies\sum_{i=1}^r c_i\,\mathrm{LC}(g_i)=0.$$

不妨设 $c_1\neq0$. 对 $c_i\neq0$，$i>1$，有 $\mathrm{LM}(g_i)|t$，记 $t_i=\mathrm{lcm}(\mathrm{LM}(g_i),\mathrm{LM}(g_1))|t$. 从而写

$$\mathrm{spol}(g_i,g_1)=\frac{\mathrm{LC}(g_1)t_i}{\mathrm{LM}(g_i)}\cdot g_i-\frac{\mathrm{LC}(g_i)t_i}{\mathrm{LM}(g_1)}\cdot g_1.$$

即得 $\mathrm{LM}(\mathrm{spol}(g_i,g_1))<t_i$（为什么）. 而另一方面**形式正规化算法**知存在一族 $h_{i,j}$ 使

$$\mathrm{spol}(g_i,g_1)=\sum_{j=1}^r h_{i,j}g_j,\ \mathrm{LM}(h_{i,j}g_j)\le\mathrm{LM}(\mathrm{spol}(g_i,g_1))<t_i.$$

为了推出矛盾我们需要构造 f 的更小系数的线性组合. 利用 s-多项式消掉首项:

$$\begin{aligned}s_i:=\frac{t}{t_i}\cdot\mathrm{spol}(g_i,g_1)&\implies s_i=\sum_{j=1}^r\frac{t}{t_i}h_{i,j}g_j,\ \mathrm{LM}\left(\frac{t}{t_i}h_{i,j}g_j\right)<t\\&\implies s_i=\mathrm{LC}(g_1)\,\mathrm{LM}(h_i)g_i-\mathrm{LC}(g_i)\,\mathrm{LM}(h_1)g_1.\end{aligned}$$

于是我们定义 $g := \sum_{i=1}^r c_i \operatorname{LM}(h_i) g_i$, 进而得到新的系数组合

$$\begin{aligned}
\operatorname{LC}(g_1) g &= \sum_{i=2}^r c_i \left(\operatorname{LC}(g_1)\operatorname{LM}(h_i) g_i - \operatorname{LC}(g_i)\operatorname{LM}(h_1) g_i\right) + \left(\sum_{i=1}^r c_i \operatorname{LC}(g_i)\right)\operatorname{LM}(h_1) g_1 \\
g &= \sum_{i=2}^r \frac{c_i}{\operatorname{LC}(g_1)} s_i = \sum_{i=1}^r \tilde{h}_i g_i,\ \operatorname{LM}(\tilde{h}_i g_i) < t \\
f &= (f-g) + g = \sum_{i=1}^r (h_i - c_i \operatorname{LM}(h_i) + \tilde{h}_i) g_i
\end{aligned}$$

不难发现, 新的表达式其 t 值严格小于先前, 这与 t 的最小性矛盾, 因此 G 是 Gröbner 基. □

由此我们立刻给出 Gröbner 基的一个算法.

算法 2.113 (Buchberger 算法). **输入:** 有限 $S \subset K[x_1, \cdots, x_n]$, **输出:** (S) 的 *Gröbner* 基 G. 初始化 $G := S - \{0\}$. 对一切 $g, h \in G$ 循环执行下步骤: (1) 计算 $\operatorname{spol}(g, h)$ 的正规化 s^*.(2) 若 s^* 非零则 $G := G \cup \{s^*\}$, 若对一切 $(g, h) \in G^2$ 都无法得到新的非零 s^*, 则返回 G.

有效性: $L(G)$ 增大形成升链,**Hilbert 基定理**保证停机, 再由 **Buchberger 判别**知结果正确.

2.7.3 Buchberger 算法的变种、应用: 数个常用的算法

定义 2.114. *Gröbner* 基 $G \subset I$, 若任意 $g \in G$ 关于 $G - \{g\}$ 形式正规, 则称该基**约化的**.

算法 2.115 (约化 Gröbner 基). **输入:** $G \subset I$ 是 *Gröbner* 基, **输出:** I 的约化 *Gröbner* 基. 首先循环 $g \in G$ 执行 (1) 若 $\operatorname{LM}(g) \in L(G - \{g\})$, 则去除 g, 循环直到 G 不再变小为止. 然后循环 $g \in G$ 各恰一次执行 (2) 用 $\operatorname{NF}_{G-\{g\}} g$ 替代 g. 返回 G.

有效性: 首先 (1) 不改变其仍是 Gröbner 基, 准备做 (2) 时已保证 $\operatorname{LM}(g)$ 不因执行 $\operatorname{NF}_{G-\{g\}}$ 而改变, 所以仍是 Gröbner 基, 而且这足以保证只执行一次每者关于执行后全体仍形式正规.

定理 2.116. 一个理想 I 的约化 *Gröbner* 基是唯一的.

证明. 设 $G, \tilde{G}$ 约化, 任意 $g \in G$ 因 $L(G) = L(\tilde{G})$ 故 $\operatorname{LM}(g) | \operatorname{LM}(\tilde{g})$ 对某 $\tilde{g} \in \tilde{G}$, 同理取 $\operatorname{LM}(\tilde{g}) | \operatorname{LM}(\tilde{\tilde{g}})$, $\tilde{\tilde{g}} \in G$. 于是由约化性 $g = \tilde{\tilde{g}}$. 这样按 $\operatorname{LM}(g) = \operatorname{LM}(\tilde{g})$ 对应起来, 注意到 $g - \tilde{g}$ 不能被 $L(G - \{g\}) = L(\tilde{G} - \{\tilde{g}\})$ 中对应者正规化, 于是 $g - \tilde{g} = \operatorname{NF}_G(g - \tilde{g}) = 0$ 于是 $g = \tilde{g}$. □

注 2.117. 另外在这些算法的基础上, 很容易提出扩展 *Buchberger* 算法, 和经典的扩展 *Euclid* 算法一样, 使用一点额外的空间储存中间所使用的系数, 保存了变换关系.

下面考察应用, 回忆 **Hilbert 零点定理**, 可能最简单的两个应用是:

习题 2.118. 对理想 $I \subset K[x_1, \cdots, x_n]$, 取一个额外未定元 y, 对 $f \in K[x_1, \cdots, x_n]$, 我们有 $f \in \sqrt{I}$ 当且仅当 $1 \in J$, 其中 J 是 I 和 $fy - 1$ 在 $K[x_1, \cdots, x_n, y]$ 生成的理想.

接下来引入核心的定义和定理.

定义 2.119. 设**未定元的子集** $S=\{x_{i_1},\cdots,x_{i_k}\}\subset\{x_1,\cdots,x_n\}$, $\overline{S}=\{x_1,\cdots,x_n\}-S$. 对理想 $I\subset K[x_1,\cdots,x_n]$, 定义 $I_S:=I\cap K[x_{i_1},\cdots,x_{i_k}]$. 对于项 $t\in K[x_{i_1},\cdots,x_{i_k}],x_j\in\overline{S}$, 如果 $t<x_j$ 总被满足, 这样的项序, 我们称其为$\overline{S}$-**消除**的.

> **定理 2.120.** 对理想 $I\subset K[x_1,\cdots,x_n]$, 给定未定元子集 S, 设此时项序是$\overline{S}$-**消除**的, 若 I 有 *Gröbner* 基 G 则 I_S 有 *Gröbner* 基 $G_S:=K[x_{i_1},\cdots,x_{i_k}]\cap G$.

证明. 显然 $G_S\subset I_S$. 为证明 $L_S(G_S)=L_S(I_S)$, 对非零 $f\in I_S$, 因为 $\mathrm{LM}(f)\in L(I)$ 故存在 $g\in G$ 使 $\mathrm{LM}(g)|\,\mathrm{LM}(f)$. 从而 $\mathrm{LM}(g)\in K[x_{i_1},\cdots,x_{i_n}]$. 由 S-消除性和其最大性, g 其他的项也在 $K[x_{i_1},\cdots,x_{i_n}]$ 中. □

应用方面, 首先读者容易想起, $K[x_1,\cdots,x_n]/I$ 的维数为 k, 由**定理 2.34, 注 2.35** 当且仅当最大代数无关组大小为 k, 而 S 无关的等价条件是 $I_S=0$, 这对于非整环的情形（或者一般的各分支维度不相等）来说不见得能保证极大就是最大, 虽然有一些组合学技巧, 但还是颇要费一番功夫. 这方面的细节留到后文 **Hilbert–Samuel 多项式**的讨论中去.
而一个直接的应用是:

习题 2.121. 设理想 $I_1,I_2\subset K[x_1,\cdots,x_n]$, y 是未定元. 再设 $K[x_1,\cdots,x_n,y]$ 中 $yI_1,(1-y)I_2$ 生成理想 J. 则 $I_1\cap I_2=K[x_1,\cdots,x_n]\cap J$.

其次我们介绍一个重要应用, 计算两个有限生成 K 代数间映射的核.

> **命题 2.122.** $\varphi:K[x_1,\cdots,x_n]\to A=K[y_1,\cdots,y_m]/I$. 设 $\varphi(x_i)=g_i+I$.
> 考虑 $K[x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m]$ 中 I 和 g_i-x_i 生成的理想 J. 则 $\mathrm{Ker}(\varphi)=K[x_1,\cdots,x_n]\cap J$.

证明. 显然对 $f\in K[x_1,\cdots,x_n]$, 有 $f(g_1,\cdots,g_n)-f\in J$. 因此一方面对 $f\in\mathrm{Ker}(\varphi)$ 有 $f(g_1,\cdots,g_n)\in I$ 从而 $f\in J$; 反过来 $f\in J$ 说明

$$f(g_1,\cdots,g_n)=\sum h_if_i+\sum p_j(g_j-x_j),\ f_i\in I,\ h_i,p_j\in K[x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m].$$

于是取 $x_j=g_j$ 即得到 $f(g_1,\cdots,g_n)\in I$ 于是 $f\in\mathrm{Ker}(\varphi)$. □

上述结果的一个简单应用是计算商理想.

习题 2.123. 设理想 $I\subset K[x_1,\cdots,x_n],g\in K[x_1,\cdots x_n]$, 则 $(I_1:g)=\mathrm{Ker}\,\varphi$, 其中 $\varphi:K[x_1,\cdots,x_n]\to K[x_1,\cdots,x_n]/I$ 为乘 g 而后商 I 的映射. 一般的 $\left(I:\sum_j I_j\right)=\bigcap_j(I:I_j)$.

另一应用则是 Noether 正规化（**定理 2.83**）的算法实现. 因为上面映射核的算法等价于计算 $g_1,\cdots,g_n$ 在 I 下的“关系”, 所以**定理 2.83** 中 $K[\tilde{y}_1,\cdots,\tilde{y}_{m-1}]=K[Y_1,\cdots,Y_{m-1}]/\tilde{I}$ 中 I 的生成元可以直接计算得到.

几何意义: 环同态 $\varphi:R\to S$, 回忆**性质 2.17** 不难发现 $\overline{\operatorname{Im}\varphi^*}=\mathcal{V}_R(\operatorname{Ker}\varphi)$. 如果 $f:X\to Y$ 是代数闭域上仿射簇的映射, 则 $\varphi:K[Y]\to K[X]$ 诱导 Zariski 拓扑下 $\overline{\operatorname{Im}f}=\mathcal{V}_Y(\operatorname{Ker}\varphi)$. 于是我们可计算核来研究 f 的像: 这实际上是迫不得已的, 一个例子是 $\mathbb{C}[x,y]/(xy-1)$ 打到 x 轴, 显然只打到除 0 外其余点, 而这像不是 Zariski 闭的, 说明闭包的必须性.

解代数方程: 观察**定义 2.119** 中的 I_S. 不难看出对于 $X=\mathcal{V}(I)\subset K^n$ 和未定元的子集 $S=\{x_{i_1},\cdots,x_{i_k}\}$, 则 I_S 刻画了投影 $\pi_S:K^n\to K^S$ 下 X 的像的闭包, 即 $\overline{\pi_S(X)}=\mathcal{V}_S(I_S)$, 这暗示了我们在代数闭域上解代数方程的方法, 考虑**性质 2.36(零维代数)** 我们得知 $X=\mathcal{V}(I)$ 有限当且仅当 $\dim K[X]$ 零维, 下面考虑这种情形, 此时取不取闭包都一样. 于是由**定理 2.120**, 在字典序下求好 I 的 Gröbner 基, 注意: 首先由 PID, $I_{\{x_n\}}=(g)$, 那么 g 的根都来自 X 中点的投影, 然后将某个根代入 $I_{\{x_{n-1},x_n\}}$ 的生成元, 于是逐层而出, 最终可求得 X 的所有点.

习题 2.124. 非平凡 $I\subset K[x_1,\cdots,x_n]$, G 是 I 的一个 *Gröbner* 基. 则 $\mathcal{V}(I)$ 有限当且仅当对每个 $i=1,\cdots,n$ 存在 $g_i\in G$ 使得 $\operatorname{LM}(g_i)=x_i^{d_i}$ 对某正整数 d_i. (注意此时项序是任意的)

提示 2.125. 首先 *Gröbner* 基如此推有限, 注意到 NF_G 的像有限维（**性质 2.36**）. 反过来如果有限, 那么 $x_i,x_i^2,x_i^3\cdots$ 不能都形式正规, 只要有不正规的, 说明存在 $\operatorname{LM}(g_i)=x_i^{d_i}$ 者.

接下来的命题 * 刻画了**定理 2.120** 中未使用的那部分 Gröbner 基的意义.

命题 2.126. * 设同态 $\varphi:K[x_1,\cdots,x_n]\to A:=K[y_1,\cdots,y_m]/I$. 设 $\varphi(x_i)=g_i+I$. 设 $R=\operatorname{Im}\varphi\subset A$. 再定义

$$\psi:R[y_1,\cdots,y_m]\to A,\ y_j\mapsto y_j+I.$$

$$\Phi:K[x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m]\to R[y_1,\cdots,y_m],\ x_i\mapsto g_i+I\in R,\ y_j\mapsto y_j.$$

设“$\leq$”是 $\{y_1,\cdots,y_m\}$ 消除的项序, G 是 $K[x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m]$ 上 $I,g_1-x_1,\cdots,g_n-x_n$ 生成理想的 *Gröbner* 基.$G_x=G\cap K[x_1,\cdots,x_n],G_y=G-G_x$.

(1) G_x 是 $\operatorname{Ker}\varphi$ 的 *Gröbner* 基.(2) $\operatorname{Ker}\psi=(\Phi(G_y))_{R[y_1,\cdots,y_m]}$.

(3) 设 $\leq_x$, $\leq_y$ 是 $K[x_1,\cdots,x_n],K[y_1,\cdots,y_m]$ 上的项序, $\leq$ 则是二者的“分块”项序: 先比较 $\leq_y$, 相同时再看 $\leq_x$. 则 $\Phi(G_y)$ 是 $\operatorname{Ker}\psi$ 在 $\leq_y$ 下的 *Gröbner* 基.

证明. (1) 在**定理 2.120 与命题 2.122** 阐述明白. 对 (2), $g\in G_y$ 则 $\psi\Phi(g)=0$. 反过来 $f\in\operatorname{Ker}\psi$, 记 $f=\Phi(F)$ 则依定义容易验证 $F\in J$（为什么）, 于是 $f\in(\Phi(G_x)\cup\Phi(G_y))_{R[y_1,\cdots,y_m]}$ 但由 (1) 知 $g\in G_x$ 都在 $\operatorname{Ker}\varphi$ 中, 故 $\Phi(g)=\varphi(g)=0$ 从而 $\operatorname{Ker}\psi\subset(\Phi(G_y))_{R[y_1,\cdots,y_m]}$.

(3) 为此我们声称如下的结论成立.

结论 $f \in K[x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m]$ 使得关于 G_x 形式正规. 用 $\mathrm{LM}_y f, \mathrm{LC}_y f$ 表示 f 看作 $y_1, \cdots, y_m$ 主元, 系数 $K[x_1, \cdots, x_n]$ 中者. 则

$$\text{(a)}\ \ \mathrm{LC}(\Phi(f)) = \varphi(\mathrm{LC}_y f),\ \ \text{(b)}\ \ \mathrm{LM}(f) = \mathrm{LM}_y(\Phi(f)) \cdot \mathrm{LM}(\mathrm{LC}_y f).$$

结论的证明 依照定义 $\mathrm{LM}(f) = \mathrm{LM}_y f \cdot \mathrm{LM}(\mathrm{LC}_y f)$. 反设 $\mathrm{LM}_y(\Phi(f)) \neq \mathrm{LM}_y(f)$, 则得到 $\varphi(\mathrm{LC}_y f) = 0$, 于是由 (1) 存在 $g \in G_x$ 使 $\mathrm{LM}(g) | \mathrm{LM}(\mathrm{LC}_y f)$, 这与关于 G_x 形式正规矛盾, 于是立刻得到 (b), $\mathrm{LM}_y(\Phi(f)) = \mathrm{LM}_y(f)$ 也得到 (a).

回到原题, 只需证明对非零 $f \in \mathrm{Ker}\,\psi$, 存在 $g \in G_y$ 使 $\mathrm{LM}_y(\Phi(g)) | \mathrm{LM}_y f$. 由 (b) 取 $F \in J$ 使 $\Phi(F) = f$, 而由 (a) 我们可以用 $\mathrm{NF}_{G_x} F$ 代替 F, 于是由 $F \neq 0$, 存在 $g \in G_y$ 使得 $\mathrm{LM}(g) | \mathrm{LM}(F)$. 再对 F, g 用**结论** (b) 式得到 $\mathrm{LM}_y(\Phi(g)) | \mathrm{LM}_y(\Phi(F)) = \mathrm{LM}_y f$ 而得证. □

注 2.127. * 一般环 K 上多项式的说明, 包括 *Gröbner* 基定义在内的**算法 2.108** 前之内容无需任何修改, 对于形式正规化的处理, 因为不能作除法, 此时用如下者

$$f^* = \mathrm{LC}(g_i) \cdot f^* - \frac{ct}{\mathrm{LM}(g_i)} \cdot g_i,\ \ h_i = \mathrm{LC}(g_i) \cdot h_i + \frac{ct}{\mathrm{LM}(g_i)}$$

代替**算法 2.108(形式正规化)** 的计算, 尽管这样相当于计算了 $u \cdot f$ $(u \in K)$ 而不是 f 的形式正规化, 且此时**定理 2.109** 不成立, 但是其有独到的作用. 这些内容对上命题无任何影响.

命题 2.128 (子代数包含判定)**.** 沿用**命题 2.126** 的符号, 对 $f \in K[y_1, \cdots, y_m]$, 我们有 $f + I \in R$ 当且仅当 $\tilde{f} := \mathrm{NF}_G(f) \in K[x_1, \cdots, x_n]$. 且此时 $f + I = \tilde{f}(g_1 + I, \cdots, g_n + I)$.

证明. 如**命题 2.126(2)** 法得知 $\ker(\psi\Phi) = (G)$. 一方面 $\tilde{f} \in K[x_1, \cdots, x_n]$ 推出 $\psi\Phi(f) = \psi\Phi(\tilde{f}) \in R$, 反过来如果 $f = \varphi(h)$ 在像它们用 $\psi\Phi$ 作用的像相同, 推出 $\mathrm{NF}_G(f) = \mathrm{NF}_G(h)$, 因此由项序分块性知 $\tilde{f}$ 只涉及 x_i. 此时因 $f, \tilde{f}(g_1, \cdots, g_n)$ 由 $\psi\Phi$ 打到 A 的像一样故得证. □

2.7.4 根理想的算法 **

计算根理想看似简单, 实际上是出乎意料麻烦的问题. 本小节关心数简单情形. 参考 [14].

先看有限域, 记 $q = p^r$, $K = \mathbb{F}_q$, $R = K[x_1, \cdots, x_n]$.Frobenius 映射 $\phi : R \to R$, $f \mapsto f^p$.

性质 2.129. $I \subset \phi^{-1}(I) \subset \sqrt{I}$, $I = \sqrt{I} \iff I = \phi^{-1}(I)$.

证明. 只需注意 $I = \sqrt{I}$ 当且仅当 $f^k \in I$ 推出 $f \in I$, 当且仅当 $f^{p^k} \in I$ 推出 $f \in I$, 于是 $\phi^{-1}(I) = I$ 推出 I 是根理想. □

现在我们将 ϕ 的过程分成两步:

$$\phi_c\left(\sum a_{\boldsymbol{e}}x_1^{e_1}\cdots x_n^{e_n}\right):=\sum a_{\boldsymbol{e}}^p x_1^{e_1}\cdots x_n^{e_n},\ \phi_v(f(x_1,\cdots,x_n)):=f(x_1^p,\cdots,x_n^p),\ \phi=\phi_v\circ\phi_c.$$

这样 ϕ_c 是便于计算的有限域自同构, ϕ_v 是 K-代数同态.

算法 2.130 (matsumoto,2001). **输入:** 理想 $I=(f_1,\cdots,f_n)\subset R$, **输出:** 根理想 $\sqrt{I}$.
反复运行下步骤: (1) 计算 $I_1:=\phi_v^{-1}(I)=\mathrm{Ker}(R\to R/I)$, $I_2:=\phi_c^{-1}(I_1)=\phi_c^{r-1}(I_1)$.(2) 计算 I_2 和 I 的约化 *Gröbner* 基以检验其是否相等, 相等则返回 I, 否则 $I:=I_2$ 继续循环.

有效性: 显然 $\phi^{-1}=\phi_c^{-1}\circ\phi_v^{-1}$, 而且这样得到的理想不断增大, 由诺特性知其终会停止. 最后得到的 $I=\phi^{-1}(I)$ 因此 $I=\sqrt{I}$.
接下来我们观察完美域 K 上零维理想的情况. 最后我们尽量将一般情况划归至此.

引理 2.131 (Seidenberg). K 是域, 理想 $I\subset K[x_1,\cdots,x_n]$, 若对任意 i 都存在 $g_i\in I\cap K[x_i]$ 满足 $(g_i,g_i')=1$, 那么 I 是一个根理想.

证明. 对 n 归纳, $n=1$ 是 PID 的情形, 结论显然. 对 $n>1$, 记 $g_1=h_1\cdots h_t$ 是不可约分解. 我们声称 $I=\bigcap_{i=1}^t(I,h_i)$, 只需注意右式中之 f 能被写作 $f=r_i+q_ih_i$, $r_i\in I$. 因此得到 $f\cdot\prod_{j\neq i}h_j\in I$. 而因为存在线性组合 $l_1\prod_{j\neq 1}h_j+\cdots+l_t\prod_{j\neq t}h_j=1$. 于是立刻推出 $f\in I$.
接下来注意根理想的有限交还是根理想, 于是只需证明 $I+(h_i)$ 是根理想, 故不妨设 g_1 不可约. 注意 $L=K[x_1]/(g_1)$ 是 K 的扩域, 满射 $\varphi:K[x_1,\cdots,x_n]\to L[x_2,\cdots,x_n]$ 满足 $\mathrm{Ker}\,\varphi=(g_1)\subset I$. 因为 $L[x_2,\cdots,x_n]/I^e=K[x_1,\cdots,x_n]/I$, 归纳假设得前者幂零元仅 0, 后者亦然. □

性质 2.132 (无平方因子部分计算). 在特征 p 的完美域中, $f=c\prod(x-\alpha_i)^{d_i}\prod(x-\beta_i)^{pe_i}$. 注意 $\gcd(f,f')=\prod(x-\alpha_i)^{d_i-1}\prod(x-\beta_i)^{pe_i}$. 于是不断计算与导数的 *gcd* 可得其不可分部分 $\prod(x-\beta_i)^{pe_i}$. 将其展开然后系数和次数都换成原先的 p 次方即得 $\prod(x-\beta_i)^{e_i}$. 当然另一边 $\prod(x-\alpha_i)^{d_i}$ 由该部分的 $g/\gcd(g,g')$ 立刻得到.

算法 2.133 (Seidenberg). **输入:** K 完美（若特征 $p>0$ 则可在其中便捷地开 p 次方）, 零维理想 $I=(f_1,\cdots,f_n)$, **输出:** 根理想 $\sqrt{I}$.
(1) 用**定理 2.120** 计算诸 $I\cap K[x_i]$ 的生成元 f_i.(2) 利用**性质 2.132** 计算 f_i 的无平方因子部分 g_i.(3) 输出理想 $\sqrt{I}=(I,g_1,\cdots,g_n)$.

有效性: 注意到 $(I,g_1,\cdots,g_n)$ 包含于 $\sqrt{I}$ 且**引理 2.131** 保证了它是根理想（为什么）. 最后诸 f_i 的非零性由理想零维所保证.
对于非完美的域,Kemper 在 2002 年提出的算法也能类似的解决零维理想, 我们简述如下: 设 K 是完美特征 $p>0$ 者, $\tilde{K}=K(t_1,\cdots,t_m)$. 而零维 $I\subset\tilde{K}[x_1,\cdots,x_n]$. 为计算其根理想,

仍取 $f_i \in I \cap \tilde{K}[x_i]$, 并计算 f_i 的无平方因子部分: 注意 t_j 不能开 p 次方, 于是记 $g_i \in K[y_1, \cdots, y_m, x_i], q = p^r$, 将 f_i 无平方因子部分表作 $g_i(\sqrt[q]{t_1}, \cdots, \sqrt[q]{t_m}, x_i)$. 最后考虑 J 是 I 和 $g_i, y_j^q - t_j$ 们在 $K[x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m]$ 生成的理想, $\sqrt{I} = J \cap K[x_1, \cdots, x_n]$.
在处理一般情况前, 我们先考察商理想的某种变种

习题 2.134 (饱和商理想)**.** 对理想 $I, J \subset R$ 定义 $(I : J^\infty) := \{f \in R : \exists k, fJ^k \subset I\}$, 很显然这定义了 R 上的一个理想. 我们指出 $R = K[x_1, \cdots, x_n]$ 时

$$((f_1, \cdots, f_l) : h^\infty) = (f_1, \cdots, f_l, th - 1)_{K[x_1, \cdots, x_n, t]} \cap K[x_1, \cdots, x_n].$$

一般的, 不难验证 $(I : (g_1, \cdots, g_k)^\infty) = \bigcap_{j=1}^k (I : g_j^\infty)$.

下文中为行文便捷, 用 $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$,$\mathbf{x}$ 指代未定元集 $\{u_i\}, \{v_j\}$ 和 $\{x_k\}$.

习题 2.135. 设理想 $I_0 \subset K(\mathbf{u})[\mathbf{v}]$. 其 *Gröbner* 基的计算可以在环 $R = K[\mathbf{u}][\mathbf{v}]$ 中进行. 通分可取 I_0 的 R 中生成元, 取一个诸 v_i 比诸 u_j 大的字典序, 在 R 计算得 I_0 的 *Gröbner* 基即得.

命题 2.136. 设理想 $I_0 \subset K(\mathbf{u})[\mathbf{v}]$, $J = I_0 \cap K[\mathbf{u}][\mathbf{v}]$. 设 I_0 的一组 *Gröbner* 基通分后 $\{f_i\}$ 系数在 $K[\mathbf{u}]$, 记 $\operatorname{lcm}(\mathrm{LC}_v(f_1), \cdots \mathrm{LC}_v(f_n)) = f$, 则 $J = ((f_1, \cdots, f_n) : f^\infty)$.

证明. 任意 $g \in J$, 在 $K(\mathbf{u})[\mathbf{v}]$ 中用诸 f_i 正规化 g 过程中出现在分母的系数都是 $\mathrm{LC}_v(f_i)$. □

最后观察一般情况, 对更高维的理想, 假设 $\{u_1, \cdots, u_d\} \subset \{x_1, \cdots, x_n\}$ 是 $K[x_1, \cdots, x_n]/I$ 极大(不需最大)代数无关组. 剩余的元素为 $\{v_1, \cdots, v_e\}$. 那么 I 在 $K(\mathbf{u})[\mathbf{v}]$ 生成零维理想 I_0(验证代数性). 于是 $\sqrt{I_0}$ 的计算是可以实现的.
现在需要一点结合素理想的知识: 记 R/I 的结合素理想为 $Q_1, \cdots, Q_t$, 假设其中 $Q_1, \cdots, Q_s$ 与 $K[u_1, \cdots, u_d]$ 交为 $0.Q_{s+1}, \cdots, Q_t$ 者交非零. 那么 $\sqrt{I_0 \cap K[x_1, \cdots, x_n]} = Q_1 \cap \cdots \cap Q_s$: 这是因为取 $S = K[u_1, \cdots, u_d] - \{0\}$ 乘集, 我们有 $\mathrm{Ass}(S^{-1}(R/I)) = \mathrm{Spec}(S^{-1}R) \cap \mathrm{Ass}(R/I)$, 而 $S^{-1}(R/I)$ 作为 R-模的零化理想为 $J = S^{-1}I \cap R$, $\mathrm{Spec}(S^{-1}R)$ 中者则是与 S 不交者, 这样

$$\begin{aligned}\sqrt{I} &= (Q_1 \cap \cdots \cap Q_s) \cap (Q_{s+1} \cap \cdots \cap Q_t) \\ &= \left(\sqrt{I_0} \cap K[x_1, \cdots, x_n]\right) \cap (Q_{s+1} \cap \cdots \cap Q_t).\end{aligned}$$

巧妙的事情在于, 我们指出 $R/(I : J)$ 的结合素理想含于 $Q_{s+1}, \cdots, Q_t$. 首先依定义 $S^{-1}(I : S^{-1}I \cap R)$ 包含 1, 即 $S^{-1}(I : J) = (1)$ 而 $S^{-1}(R/(I : J)) = 0$, 这说明 $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$ 时 $R/(I : J)$ 不含 $A/\mathfrak{p}$ 这样的子模, 说明 $R/(I : J)$ 的结合素理想没有 $Q_1, \cdots, Q_s$.
另一方面, $R/(I : J)$ 的结合素理想含于 J/I 者, 设 $J = (j_1, \cdots, j_n)$ 则有嵌入

$$R/(I : J) \hookrightarrow (J/I)^n, \ \overline{r} \mapsto (rj_1, \cdots, rj_n).$$

这说明 $R/(I:J)$ 的结合素理想含于 J/I 者进而含于 R/I 者. 再结合 $I \subset J$ 时验证两边的包含关系得到 $\sqrt{I} = \sqrt{J} \cap \sqrt{(I:J)}$, 我们的算法呼之欲出了. 注意只需处理无限域:

算法 2.137. 输入: 理想 $I \subset K[x_1, \cdots, x_n]$, **输出:** 根理想 $\sqrt{I}$.
(1) 先作坐标线性变换使得 I 处于 "*Noether* 位置", 即 $\{u_1, \cdots, u_d\}$ 是一个极大代数无关组, 而且对 $v_1, \cdots, v_d$ 都存在系数在前 d 者中零化它的首一多项式.(2) 依照先前的方法计算 $J := IK(\mathbf{u})[\mathbf{v}] \cap K[\mathbf{x}]$.(3) 输出 $\sqrt{J} \cap \sqrt{(I:J)}$, 前面的根号是因为 $\sqrt{J} = \sqrt{IK(\mathbf{u})[\mathbf{v}]} \cap K[\mathbf{x}]$ 是零维的可计算情况, 后面的根号是递归调用该算法的结果.

算法在有限递归内结束是因为 $J \neq (1)$(代数无关性), 所以每次都消耗了一些结合素理想. 尽管上面的算法看起来不错, 而且理论的时间复杂度的计算上能带来更好的估计, 但在实用中往往不尽如人意, 因为可能会破坏系数的稀疏性. 下面我们简单阐述另一个根理想算法:

算法 2.138. 输入: 理想 $I \subset K[x_1, \cdots, x_n]$, **输出:** 根理想 $\sqrt{I}$.
初始化 $J = (1)$, 然后循环进行下面两条, 我们保证一直有 $\sqrt{I} \subset J$: (1) 若 J 的生成元都在 $\sqrt{I}$, 则返回 J, 否则取 $g \in J - \sqrt{I}$, 记 $\tilde{I} := (I : g^\infty)$.(2) 利用零维情况, 取 $R/\tilde{I}$ 极大代数无关的 $u_1, \cdots, u_d$ 并计算 $J := J \cap \left(\sqrt{\tilde{I}K(\mathbf{u})[\mathbf{v}]} \cap K[\mathbf{x}]\right)$.

首先 $(I : g^\infty) = \bigcup_{k=1}^{\infty}(I : g^k)$ 是理想上升列一定有限步稳定, 所以 $(I : g^\infty) = (I : (g^k) + I)$ 对某 k, 由先前讨论 $R/\tilde{I}$ 的结合素理想都是 R/I 者, 故只需验证 g 不在新的 $\sqrt{J}$ 中, 这将证明其严格包含了新的素理想. 若不然 g 的某幂次在 $\tilde{I}K(\mathbf{u})[\mathbf{v}]$ 中, 这说明 g 的某幂次乘上 $K[\mathbf{u}]$ 某非零多项式 h 落入 $\tilde{I}$ 中, 然而因为代数无关 h 不在 $\tilde{I}$ 中, 即 h 乘上 g 的幂次不在 I 中矛盾.

2.8 结合素理想

这一部分主要参考 [15], 原文是迷神所写.

定义 2.139. A 是环, M 是 A-模, 若 $m \in M$ 满足 $\mathrm{Ann}(m) = \mathfrak{p}$ 为素理想, 则称 $\mathfrak{p}$ 为 M 的一个**结合素理想**, 等价的说法是 $A/\mathfrak{p}$ 是 M 的子模. 用 $\mathrm{Ass}_A(M)$ 表示 M 的全体结合素理想的集合.$\mathrm{Ass}_A(M)$ 中极小者称 M 的**极小素理想**. 此定义虽一般, 但只对 *Noether* 环表现良好.

例 2.140. 一个典例是 $\mathrm{Ass}_A(A/\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$.

命题 2.141 (存在性)**.** 对 *Noether* 环 A, 与非零 A-模 M, 有 $\mathrm{Ass}_A(M) \neq \varnothing$.
M 的零因子集 $\mathrm{zdv}(M) = \{a \in A : am = 0, m \neq 0\}$ 是所有结合素理想的并.

证明. 由 Noether 性考虑理想集 $\{\mathrm{Ann}(m) : m \in M - \{0\}\}$ 中的任意极大元 $\mathfrak{p} := \mathrm{Ann}(m)$, 我们声称其是素理想. 对 $a, b \notin \mathfrak{p}$, 有 $am \neq 0$, 由极大得知 $b \notin \mathrm{Ann}(am) = \mathfrak{p}$, 于是 $ab \notin \mathfrak{p}$. 而给定的 $0 \neq m \in M$ 考虑 $\mathrm{Ann}(m)$ 含于的极大元即是包含其的结合素理想. □

命题 2.142. 对 A-模短正合列 $0 \to N \to M \to Q \to 0$, 有包含关系 $\mathrm{Ass}(N) \subset \mathrm{Ass}(M) \subset \mathrm{Ass}(N) \cup \mathrm{Ass}(Q)$. 且在正合列分裂时第二个包含取到等.

证明. 第一个包含显然, 对第二者设 $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(m)$, 记 $\overline{m}$ 是 m 在 Q 的像. 若 $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Ass}(Q)$ 即 $\mathfrak{p} \subsetneq \mathrm{Ann}(\overline{m})$. 取 $a \in \mathrm{Ann}(\overline{m}) - \mathfrak{p}$, 此时 $am \in N - \{0\}$. 于是由 $\mathfrak{p}$ 素得 $\mathrm{Ann}(am) = \mathfrak{p}$ 于是 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(N)$. 正合列分裂时 N, Q 都是 M 子模, 故互相包含显然. □

命题 2.143. A 是 *Noether* 环, M 是有限生成 A-模, 则存在模列 $0 = M_0 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n = M$ 以及对应的一列素理想 $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$ 使 $M_i/M_{i-1} \cong A/\mathfrak{p}_i$.

证明. 考虑使命题成立的子模构成的集合, 由 Noether 性知有极大元 N, 若 $N \subsetneq M$, 取 M/N 的结合素理想 $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(\overline{m})$ 以及对应的 $m \in M$, 现在考虑子模 $N + Am$, 在 N 的模列后加上 $N + Am$ 而与极大矛盾. 因此 $N = M$. □

推论 2.144. A 是 *Noether* 环, M 是有限生成 A-模, 则 $\mathrm{Ass}_A(M)$ 有限.

证明. 这是前两个命题以及 $\mathrm{Ass}_A(A/\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}\}$ 的自然推论. □

命题 2.145 (局部化)**.** A 是 *Noether* 环, M 是有限生成 A-模, 乘集 $S \subset A$. 则

$$\mathrm{Ass}_A(S^{-1}M) = \mathrm{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}M) = \mathrm{Ass}_A(M) \cap \mathrm{Spec}(S^{-1}A).$$

以及自然映射 $M \to \prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(M)} M_{\mathfrak{p}}$ 是单射.

证明. 第一个等号以及最右的交包含于左边都是显然的, 另一边取 $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(m/s) \in \mathrm{Ass}_A(S^{-1}M)$, 由诺特 $\mathfrak{p} = (a_1, \cdots, a_n)$, 由 $a_i m/s = 0$ 得存在对应的 s_i 使 $a_i s_i m = 0$, 由 $\mathrm{Ann}_A(s_1 \cdots s_n m) = \mathfrak{p}$ (含 $\mathfrak{p}$ 且零化其当且仅当零化 m/s) 故得到 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(M) \cap \mathrm{Spec}(S^{-1}A)$ (第一个等号).
若非零 m 在自然映射的核, 取 $Am \subset M$ 的结合素理想 $\mathfrak{p}$, 用 Am 中元素替代而设 $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(m)$. 现在 $m \in \mathrm{Ker}(M \to M_{\mathfrak{p}})$, 说明存在 $s \notin \mathfrak{p}$ 使 $sm = 0$ 这与 $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(m)$ 矛盾. □

推论 2.146. A 是 *Noether* 环, $f: M \to N$ 是 A-模同态. 若对每个 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(M)$, f 在 $\mathfrak{p}$ 局部化都是单的, 则 f 是单射.

证明. 子模 $K = \mathrm{Ker}\, f \subset M$ 的结合素理想都是 M 的结合素理想. 由条件知 $K_{\mathfrak{p}} = 0$, 因此由自然映射 $M \to \prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(M)} M_{\mathfrak{p}}$ 是单射 $K = 0$. □

定义 2.147. A-模 M 的**支集**指 $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$ 的素理想集, 记之 $\mathrm{Supp}_A(M) \subset \mathrm{Spec}(A)$.

推论 2.148 (支集). *A 是 Noether 环, $\mathrm{Ass}_A(M) \subset \mathrm{Supp}_A(M)$, $\mathrm{Supp}_A(M)$ 中的极小元都在 $\mathrm{Ass}_A(M)$ 中. 特别的, M 有限生成时 $\overline{\mathrm{Ass}_A(M)} = \mathrm{Supp}_A(M)$, $\sqrt{\mathrm{Ann}_A(M)} = \bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}_A(M)} \mathfrak{p}$.*

证明. 根据先前命题对 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(M)$, 有 $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Ass}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$, 从而 $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$ 而得到欲证包含关系.Noether 条件下, 极小的 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_A(M)$ 保证 $\mathrm{Supp}_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) = \{\mathfrak{p}\}$, 从而由非空得知.
而 M 有限生成时, 依支集定义 $\mathrm{Supp}_A(M) = \mathcal{V}(\mathrm{Ann}(m_1)\cap\cdots\cap\mathrm{Ann}(m_n))$ 是闭集, 其中 $\{m_i\}$ 是 M 的生成元. 而根理想的结论是由 $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)) = \sqrt{J}$ 得知的. □

简单回顾 Hom 和局部化可交换的情形.

引理 2.149. *环 R 乘集 S, 对于 R-模 N 和有限表现 R-模 M, 有*

$$S^{-1}\mathrm{Hom}(M,N) = \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}M, S^{-1}N).$$

证明. 有限表现性知右正合 $R^m \to R^n \to M \to 0$. 取 $-\otimes S^{-1}R$ 得 $S^{-1}R^m \to S^{-1}R^n \to S^{-1}M \to 0$. 对二者取 $\mathrm{Hom}_R(-,N)\otimes S^{-1}R, \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(-,S^{-1}N)$ 后由**五引理 (推论 4.59)** 知

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(M,N)\otimes S^{-1}R & \longrightarrow & S^{-1}N^n & \longrightarrow & S^{-1}N^m. \\
\| & & \downarrow & & \| & & \| \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}M, S^{-1}N) & \longrightarrow & S^{-1}N^n & \longrightarrow & S^{-1}N^m
\end{array}$$

取 $S = R - \mathfrak{p}$ 于是结论得证. □

命题 2.150. *Noether 环 R, 有限生成模 M, N. 则 $\mathrm{Ass}(\mathrm{Hom}(M,N)) = \mathrm{Supp}(M)\cap\mathrm{Ass}(N)$.*

证明. 取 $\mathfrak{p}$ 含于等号左边, 说明 $R/\mathfrak{p}$ 嵌入 $\mathrm{Hom}(M,N)$, 记 $k = R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Frac}(R/\mathfrak{p})$. 现在由先前的引理我们有 $\mathrm{Hom}(M,N)_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, N_{\mathfrak{p}})$. 对应的有嵌入 $\varphi : k \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, N_{\mathfrak{p}})$.
因此 $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$, 另一方面任取 $m \in M_{\mathfrak{p}}$ 使 $\varphi(1)(m) \neq 0$. 则 $x \mapsto \varphi(x)(m)$ 是 k 到 $N_{\mathfrak{p}}$ 的嵌入, 我们说明了 $\mathfrak{p}$ 含于右边. 反过来含于右边的 $\mathfrak{p}$ 使 $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$, 由 **Nakayama 引理**有 $M_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}M_{\mathfrak{p}} \neq 0$ 是非零 k-线性空间. 总能取非零 R-映射 $M_{\mathfrak{p}} \to M_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}M_{\mathfrak{p}} \to k \hookrightarrow N_{\mathfrak{p}}$. 于是 $\mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, N_{\mathfrak{p}})$ 中有一个被 $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ 零化的非零元, 由 $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ 是极大理想得知它是整个零化子, 从而 $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Ass}(\mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, N_{\mathfrak{p}})) = \mathrm{Ass}(\mathrm{Hom}_R(M,N)_{\mathfrak{p}})$ 即 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(\mathrm{Hom}(M,N))$. □

现在读者则能明白先前计算根理想 ** 的算法原理.

2.9 模合成列、滤过、Hilbert 多项式, 维数理论主定理

本节主要为后文正则环的讨论做准备, 标题所涉及的数个内容有逐层递进之关系.

2.9.1 模合成列（Composition Series）

定义 2.151. R 是环, R-模 M. 我们称如下一列 R-模结构为 M 的**模 (下降) 列**:

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_\ell = 0.$$

M 下降列长度最大值称 M 的**长度**, 记 $\ell_R(M)$ 并在无歧义时简写作 $\ell(M)$. 如果相邻的商 M_i/M_{i-1} 都是单模, 即都同构于某 $R/\mathfrak{m}_i$（因不能有非平凡理想）, 则称该模列 M 的**合成列**.

命题 2.152. 如果 M 有合成列, 则 M 的全体合成列等长, 长度均为 $\ell(M) < +\infty$.

证明. 我们用 $k(M)$ 记 M 合成列中最短者的长度. 我们声称 $N \subsetneq M$ 时 $k(N) < k(M)$. 设 $\{M_i\}$ 为 M 的 $k(M)$ 长合成列, 现在考虑 $N_i := M_i \cap N$. 注意到 $N_{i-1}/N_i \subset M_{i-1}/M_i$, 由于右边是单模故 N_{i-1}/N_i 为单模或 0. 而且必须其中必出现过 0, 否则从 $k(M)$ 递减地归纳得出 $M_i = N_i$ 对一切 i 从而 $M = N$ 矛盾, 这样得到了严格短的合成列.
回到原题, 考虑 M 任意模列 $\{M_j\}_{j=0}^{s}$. 由上讨论得 $k(M) > k(M_1) > \cdots > k(M_s) = 0$ 故 $k(M) \geq s$, 而当上述列是合成列时由 $k(M)$ 定义 $s \geq k(M)$, 故合成列长度总是 $k(M)$. 一方面 $\ell(M)$ 的定义保证 $\ell(M) \geq k(M)$, 另一方面上述 $k(M) \geq s$ 推出 $k(M) \geq \ell(M)$ 故取等. □

推论 2.153. (1) 如果 $\ell(M) < +\infty$ 则 M 有合成列, 且长度 $< \ell(M)$ 的模列可以加细为合成列. (2) M 有合成列当且仅当 M *Noether* 且 *Artin*. (3) $N \subset M$ 则 $\ell(M) = \ell(N) + \ell(M/N)$. (4)(Jordan–Hölder) M 有合成列则其任意两个合成列商出的单模在差一个置换下相同.

证明. (1) 任意地加细, 因为 $\ell(M) < +\infty$ 故不能无限操作下去, 必然在某一步得到不能再加细的列, 即合成列. 这表明合成列存在, 由前一命题知其长度必为 $\ell(M)$. (2) 有合成列时 $\ell(M) < +\infty$. 反设有 Noether 和 Artin, 设 $M_0 = M$, Noether 保证可以不断取 $M_{k+1} \subsetneq M_k$ 为极大真子模, Artin 保证 $\{M_k\}$ 有限步内稳定, 此时得到合成列. (3) M 是 Noether 或 Artin 当且仅当 $N, M/N$ 都是 Noether 或 Artin. 故只需将 $M \supset N \supset 0$ 加细成合成列即可. (4) 对

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_\ell = 0,$$

$$M = N_0 \supsetneq N_1 \supsetneq \cdots \supsetneq N_\ell = 0,$$

两条合成列, 设 $M_{\ell-1} \subset N_j$ 对某最大的 j, 则 $M_{\ell-1} \to N_j/N_{j+1}$ 是同构. 划归为

$$M_0/M_{\ell-1} \supsetneq M_1/M_{\ell-1} \supsetneq \cdots \supsetneq M_{\ell-1}/M_{\ell-1} = 0,$$

$$N_0/M_{\ell-1} \supsetneq N_1/M_{\ell-1} \supsetneq \cdots \supsetneq N_j/M_{\ell-1} = (N_{j+1} + M_{\ell-1})/M_{\ell-1} \supsetneq \cdots \supsetneq (N_\ell + M_{\ell-1})/M_{\ell-1} = 0,$$

于是可对长度归纳证明结论. □

推论 2.154. *R 是 Artin 环当且仅当 $\ell_R(R) < +\infty$, 于是 Artin 环上的有限生成模有合成列.*

证明. 注意**性质 2.32** 得 Artin 环是 Noether 的, 反过来 $\ell_R(R) < +\infty$ 说明 R 的理想降链最终稳定. 最后 Artin 环上的有限生成模是某 R^n 的商. □

当然, 当 R 是一个域时, 所谈及的对象立刻对应为域上有限维线性空间及其维数.

命题 2.155. *Noether 环 R 上有限生成模 M, 下四则等价:*

(1) $\ell_R(M) < +\infty$, (2) $\mathrm{Ass}_R(M)$ 只有 R 的极大理想,

(3) $\mathrm{Supp}_R(M)$ 只有 R 的极大理想, (4) $R/\mathrm{Ann}(M)$ 是 Artin 环.

证明. (1) $\implies$ (2): M 有合成列 $\{M_i\}$, 结合素理想保证 $\mathrm{Ass}(M)$ 只含 $\mathrm{Ass}(M_{i-1}/M_i) = \mathrm{Ass}(R/\mathfrak{m}_i) = \{\mathfrak{m}_i\}$ 的并. (2) $\implies$ (3): 注意 $\mathrm{Supp}(M)$ 的极小元都在 $\mathrm{Ass}(M)$ 中. (3) $\implies$ (4): $\mathrm{Supp}(M)$ 恰是 $\mathrm{Ann}(M)$ 包含的素理想, Noether 环 $R/\mathrm{Ann}(M)$ 的素理想都是极大理想所以它 Artin. (4) $\implies$ (1): 设 M 由 $m_1, \cdots, m_n$ 生成, 于是 $(R/\mathrm{Ann}(M))^n \to M$ 的映射 $(\overline{r_1}, \cdots, \overline{r_n}) \mapsto r_1 m_1 + \cdots + r_n m_n$ 是满射, 因此 M 是有限长度模的商. □

2.9.2 滤过 (Filtration)、分次环 (Graded Rings)

定义 2.156. 在环 R 上, 如下理想降链的结构:

$$R = I_0 \supset I_1 \supset \cdots, \ I_m I_n \subset I_{m+n}, \ m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

同时, 如果 R-模 M 上有与之协调的如下子模结构, 都称之为一个**滤过**.

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots, \ I_m M_n \subset M_{m+n}, \ m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

再定义对应的**分次环**和**分次模** $\mathrm{gr}\, R = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I_n/I_{n+1}, \mathrm{gr}\, M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n/M_{n+1}$. 实际上, **分次**的一般看法是, $R = \bigoplus_{k \geq 0} R_k$, $M = \bigoplus_{k \geq 0} M_k$, R_0 是环并将 $R_k (k \geq 1), M_k$ 都看成 R_0-模, 同时要求 $R_m R_n \subset R_{m+n}$, $R_m M_n \subset M_{m+n}$. 反之从分次定义滤过是容易的, 取 $\geq k$ 的直和即可.
特别的, 对理想 $I \subset R$, 如果取 $I_k = I^k$ 则称得到的分次环和分次模为I-**滤过**的. 记 $\mathrm{gr}_I\, R := R/I \oplus I/I^2 \oplus \cdots$, 对应的分次模记 $\mathrm{gr}_I\, M$. 我们再定义 **Rees 代数**为 $B_I R = R \oplus I \oplus I^2 \oplus \cdots \cong R[tI]$, 对应的分次模为 $B_I M$.
另外, 后文中我们讨论滤过或分次时, 均表示它们的结构协调.

接下来这个定义是重要的, 这为我们引入 Artin–Rees 引理做准备:

定义 2.157. 对一个 I-滤过, 若对充分大的 n 总有 $IM_n = M_{n+1}$ 则称该分次为I-**稳定**的.

引理 2.158. *Noether 环 R 上的有限生成模 M 有一个 I-滤过 $\{M_i\}$, 则它是 I-稳定的当且仅当 $B_I M = \bigoplus_{k\geq 0} M_k$ 作为 $B_I R$-模有限生成.*

证明. 如果 I-稳定, 设从 $k \geq K$ 始 $M_{k+1} = IM_k$, 于是 $B_I M$ 作为 $B_I R$-模由 $M_1, \cdots, M_k$ 作为 R-模的生成元生成. 反过来, 设 $B_I M$ 作为 $B_I R$-模的生成元是 $\{(m_{i,0}, \cdots, m_{i,K}, 0, \cdots)\}_{i=1}^N$, 对任意 $x \in M_k, k > K$, 看作 $B_I M$ 的元素, 写成上述生成元的线性组合, 即

$$x = \sum_{i=1}^{N} (a_{i,0}, \cdots, 0, \cdots)(m_{i,0}, \cdots, m_{i,K}, 0, \cdots).$$

于是考察 M_k 分量, 得知 $x = \sum (a_{i,k-K} m_{i,K} + a_{i,k-K+1} m_{i,K-1} + \cdots) \in I^{k-K} M_K \oplus I^{k-K+1} M_{K-1} \oplus \cdots \subset IM_{k-1}$. 另一边的包含 $IM_{k-1} \subset M_k$ 是分次的定义, 于是 $IM_{k-1} = M_k$ 对 $k > K$. □

定理 2.159 (Artin–Rees 引理). *Noether 环 R, 非平凡理想 I. $M' \subset M$ 都是有限生成 R-模, 若 M 有一个 I-稳定的滤过 $\{M_i\}$, 则 M' 的滤过 $\{M' \cap M_i\}$ 也是 I 稳定的.*

证明. 由上引理, M 的 I-滤过稳定当且仅当 $B_I M = \bigoplus_{k\geq 0} M_k$ 作为 $B_I R$-模有限生成. 而由 I 有限生成知 $B_I R \cong R[tI]$ 是有限生成 R-代数, 因此由 **Hilbert 基定理**知其 Noether. 从而 $B_I M' = \bigoplus_{k\geq 0} (M' \cap M_k)$ 是有限生成 $B_I R$-模的子模而有限生成, 从而它 I-滤过稳定. □

推论 2.160 (Krull 交定理). *Noether 环 R, 非平凡 I, 有限生成 R-模 M. 则存在 $r \in I$ 使*

$$(1-r) \bigcap_{k\geq 0} I^k M = 0.$$

证明. 设 $M' = \bigcap_{k\geq 1} I^k M \subset M$, 由 **Artin–Rees 引理**存在正整数 p 使 $M' = M' \cap I^{p+1} M = I(M' \cap I^p M) = IM'$, 于是由 **Cayley–Hamilton 技巧**, 结论得证. □

注 2.161. 这推论在 R 是整环或局部环时可直接推出交为 0 而无需前面的系数 $(1-r)$.

推论 2.162. *Noether 局部环 R, 非平凡 I, 若 $\mathrm{gr}_I R$ 是整环则 R 是整环.*

证明. 取 R 上的 I-滤过. 先证 $R/\bigcap_{k\geq 0} I^k$ 是整环. 设 $a, b \notin \bigcap_{k\geq 0} I^k$, 说明存在 $s, t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 使 $a \in I^s \backslash I^{s+1}$, $b \in I^t \backslash I^{t+1}$. 将 a, b 看成 $\mathrm{gr}_I R$ 中位于 $I^s/I^{s+1}, I^t/I^{t+1}$ 中的非零元, 由整环知 $ab \in I^{s+t} \backslash I^{s+t+1}$, 因此 $ab \notin \bigcap_{k\geq 0} I^k$, 结合 **Krull 交定理**得 $\bigcap_{k\geq 0} I^k = 0$ 从而结论得证. □

2.9.3 Hilbert 多项式、Hilbert–Samuel 多项式

定义 2.163. 分次环 $S = \bigoplus S_n$, 满足 S_0 是 *Artin* 环, S_1 是有限生成 S_0-模且在 S 中生成理想 $S_+ = \bigoplus_{n\geq 1} S_n$. 设 $N = \bigoplus N_n$ 是有限生成的分次 S-模, 则 N 的 **Hilbert 函数** (将证明其在 n

很大时为多项式）定义为 $\varphi_N(n) := \ell_{S_0}(N_n)$, 而 N 的 **Hilbert 级数**定义为:

$$P_N(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_N(n) t^n.$$

当分次环作为自己的模时, 对应定义分次环的 **Hilbert 函数**.

有一些显然的事实: (1) 由 **Hilbert 基定理**, 设 S_1 生成元为 $x_1, \cdots, x_d$, 则 S 是 $S_0[x_1, \cdots, x_d]$ 的商环从而是 Noether 环; (2) $\ell_{S_0}(N_n) < +\infty$, 不难检查 N_n 都是有限生成 S_0-模.（为什么）

> **命题 2.164.** 设 S_1 作为 S_0-模由 d 个元素生成, 则 $(1-t)^d P_N(t) \in \mathbb{Z}[t]$. 作为推论 $\varphi_N(n)$ 在 n 足够大时与某取整值的至多 $d-1$ 次多项式相同（$d=0$ 则为零多项式）.

证明. 对 d 归纳, $d=0$ 时 $S=S_0$, N_n 只能有限项非零. 现设 d 者成立而观察 $d+1$ 时, 设生成元 $s_0, \cdots, s_d \in S_1$. 同态 $m_{s_0}: N_i \to N_{i+1}$, $x \mapsto s_0 x$ 诱导了含核与余核项的正合列

$$0 \to N_i' \to N_i \to N_{i+1} \to N_i'' \to 0.$$

依定义, $S' = S/s_0$ 的分次模 N', N'' 被 s_0 零化, $(1-t)^d P_{N'}(t), (1-t)^d P_{N''}(t) \in \mathbb{Z}[t]$ 因 S_1' 只有 d 个生成元而被归纳假设所保证. 现将正合列拆成若干三项短正合列, 结合**推论 2.153(3)** 得

$$\varphi_{N'}(i) - \varphi_N(i) + \varphi_N(i+1) - \varphi_{N''}(i) = 0;$$
$$\Longrightarrow P_{N'}(t) - P_N(t) + \frac{P_N(t) - P_N(0)}{t} - P_{N''}(t) = 0.$$

于是 $(1-t)^{d+1} P_N \in \mathbb{Z}[t]$. 注意 $1/(1-t)^{d+1} = \sum_{i \geq 0} \binom{i+d}{d} t^i$ 是 d 次多项式故命题得证. □

定义 2.165. *A 是 Noether 环, I 是其理想, 使 $\ell_A(A/I) < +\infty$(即 A/I 是 Artin 环). 对有限生成 A-模 M, 定义* **Hilbert–Samuel 函数**（*将证明其在 n 很大时为多项式*）*为 $\chi_M^I(n) := \ell_A(M/I^n M)$, 当 (A, I) 为局部环和极大理想时, 在记号上常省略 I.*

同样注意到 $I^{i-1}M/I^i M$ 是有限生成 A/I 模可知其良定义.

例 2.166. *明显取 $S = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n/I^{n+1}$, $N = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n M/I^{n+1}M$ 即是有限生成分次 S-模, 符合* **Hilbert 函数***定义的要求, 这时对应的 Hilbert 函数和 Hilbert–Samuel 函数的关系为:*

$$\chi_M^I(n) = \varphi_N(0) + \varphi_N(1) + \cdots + \varphi_N(n-1).$$

这是因为 $\ell_A(M/I^n M) = \sum_{i=0}^{n-1} \ell_{A/I}(I^i M/I^{i+1}M)$.
于是这特殊的情况下, 当 n 充分大时, χ_M^I 是多项式, 次数不超过 I 的生成元个数.

命题 2.167. 如下六则成立. 其中 deg 是指其在 n 充分大时作为多项式的次数.

(1) $I \subset J$, 则 $\chi_M^I \geq \chi_M^J$; (2) 对 $c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 有 $\chi_M^{I^c}(n) = \chi_M^I(cn)$;

(3) $I \subset \sqrt{J}$, 则 $\deg \chi_M^I \geq \deg \chi_M^J$;

(4) 对 A-模短正合列 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$, 存在正整数 c 使 $n \geq c$ 时

$$\chi_{M'}^I(n-c) + \chi_{M''}^I(n) \leq \chi_M^I(n) \leq \chi_{M'}^I(n) + \chi_{M''}^I(n).$$

特别的 $\deg \chi_M^I = \max\{\deg \chi_{M'}^I, \deg \chi_{M''}^I\}$.

证明. (1) 由 ℓ_A 的单调性显然; (2) 依定义; (3) 则是因为 I 有限生成, 从而存在 c 使 $I^c \subset J$ 而由 (1), (2); (4) 注意到对任意 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 有短正合列

$$0 \to \frac{M'}{I^nM \cap M'} \to \frac{M}{I^nM} \to \frac{M''}{I^nM''} \to 0.$$

另外使用 **Artin–Rees 引理**知存在 c 使得 $I^nM \cap M' = I^{n-c}(I^cM \cap M')$ 对 $n \geq c$. 故由 $I^nM' \subset I^nM \cap M' = I^{n-c}(I^cM \cap M') \subset I^{n-c}M'$, 依 χ 的定义展开不等式可验证. □

注 2.168. 其实我们比较关心的是 (3), (4). 在 **2.9.4 维数理论主定理**一小节中我们会用到.

2.9.4 维数理论主定理

趁热打铁, Noether 局部环上有限生成模的维数有如下全面的刻画, 参考 [11], [15]:

定理 2.169 (维数理论主定理)**.** *Noether 局部环 $(R, \mathfrak{m})$ 上有限生成模 M, 如下三值相等:*

(1) $\operatorname{Supp}(M) \subset \operatorname{Spec} R$ 的 Krull 维数, 即 $\dim R/\operatorname{Ann}(M)$; 记作 $\dim M$.

(2) M 关于 $\mathfrak{m}$ 的 Hilbert–Samuel 多项式 $\chi_M^{\mathfrak{m}}(n)$ 的次数 $d(M)$.

(3) 最小的 s 使 $a_1, \cdots, a_s \in \mathfrak{m}$ 使 $\ell_R(M/(a_1, \cdots, a_s)M) < +\infty$; 这数记作 $s(M)$.

证明. 用 $R/\operatorname{Ann}(M)$ 替代 R 而设 $\operatorname{Ann}(M) = 0$. 下证 $\dim M \geq s(M) \geq d(M) \geq \dim M$.

(i) $\dim M \geq s(M)$: 对 $\dim M$ 归纳. $\dim M = 0$ 时 $\operatorname{Supp}(M) = \{\mathfrak{m}\}$ 只有极大理想, 从而由**命题 2.155**, $\ell_R(M) < +\infty$ 故 $d(M) = 0$. 现完成递推, 由**推论 2.148** 设 $\operatorname{Supp}(M)$ 的有限个极小素理想为 $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$. 因为它们都真包含于 $\mathfrak{m}$, 故由素理想回避取 $a \in \mathfrak{m} \backslash \bigcup \mathfrak{p}_i$. 现在 $\operatorname{Supp}(M/aM) \subset \operatorname{Supp}(M)$ 且不包含 $\mathfrak{p}_i$, 从而 $\dim(M/aM) \leq \dim M - 1$. 于是由归纳假设 $s(M/aM) \leq \dim(M/aM) \leq \dim M - 1$ 故 $s(M) \leq s(M/aM) + 1 \leq \dim M$.

(ii) $s(M) \geq d(M)$: 依 $s(M)$ 定义设 $I = (a_1, \cdots, a_{s(M)})$ 使 M/IM 有限长. 设 M 的生成元 $m_1, \cdots, m_k$, 由 $\operatorname{Ann}(M) = 0$ 得知有单射 $R \hookrightarrow M^k$, $r \mapsto (rm_1, \cdots, rm_k)$. 从而将 R 和 I 视为

M^k 的子模, 由 **Artin–Rees 引理**, 存在 c 使 $I^{c+1}M^k \cap R = I(I^cM^k \cap R) \subset I$, 于是

$$\ell_R(R/I) \leq \ell_R\left(\frac{R}{I^{c+1}M^k \cap R}\right) \leq \ell_R\left(\frac{M^k}{I^{c+1}M^k}\right) < +\infty.$$

由**命题 2.155**, **推论 2.148** 从而 $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$, 由**命题 2.167** 有 $\deg \chi_M^{\mathfrak{m}} = \deg \chi_M^I$. 因为 I 至多 $s(M)$ 个元素生成, 由**例 2.166** 得知 $d(M) \leq s(M)$.

(iii) $d(M) \geq \dim M$: 对 $d(M)$ 归纳, $d(M) = 0$ 说明从某 n 开始 $I^nM = I^{n+1}M = \cdots$, 由 **Krull 交定理**, 它们都是 0. 得 M 有限长, **命题 2.155** 知 R 是 Artin 环从而 $\dim R = 0$. 首先注意对 R-模短正合列 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$, 由于 $\mathrm{Supp}(M) = \mathrm{Supp}(M') \cup \mathrm{Supp}(M'')$ 且都是闭集, 于是 $\dim M = \max\{\dim M', \dim M''\}$, 由于**命题 2.167** 知 $d(M) = \max\{d(M'), d(M'')\}$, 说明命题对 M', M'' 成立则对 M 成立. 于是由**命题 2.143**, 可设 $M = R/\mathfrak{p}$.

由归约 $\mathrm{Ann}(M) = 0$ 得知 $\mathfrak{p} = 0$, R 为整环, $M = R$. 设 $0 \subsetneq \mathfrak{p}_1$ 是 R 最长素理想链的前两项, 任取 $0 \neq a \in \mathfrak{p}_1$, 于是 $\dim(R/a) = \dim R - 1$, 只需证 $d(R/a) < d(R)$. 由**命题 2.167** 正合列 $0 \to aR \to R \to R/a \to 0$ 表明存在正整数 c 使 $n \geq c$ 时 $\chi_{R/a}(n) \leq \chi_R(n) - \chi_{aR}(n-c)$. 因为 $aR \cong R$, 由多项式平移相减次数变小而得 $\deg \chi_{R/a} < \deg \chi_R$.

至此, $\dim M = d(M) = s(M)$. □

其应用的一个经典形式如下, 在一定程度上能推出先前节的一些内容:

推论 2.170 (经典的维数理论)**.** *域 k 上有限生成代数 $A = k[x_1, \cdots, x_N]/I$. 设 A 的极大理想 $\mathfrak{m}$ 包含 I, 那么如下三值相等:*

(1) $A_{\mathfrak{m}}$ 的 Krull 维数, 或者说 $\mathrm{ht}_A(\mathfrak{m}) = \dim(A_{\mathfrak{m}})$.

(2) A 关于极大理想 $\mathfrak{m}$ 的 Hilbert–Samuel 多项式 $\chi_A^{\mathfrak{m}}(n) = \dim_{A/\mathfrak{m}}(A/\mathfrak{m}^n)$ 的次数 $d(M)$.

(3) 最小的 s 使 $a_1, \cdots, a_s \in \mathfrak{m}$ 使 $\dim_{A/\mathfrak{m}}(A/(a_1, \cdots, a_s)A) < +\infty$; 这数记作 $s(M)$.

证明. 将 $A_{\mathfrak{m}}$ 看成 Noether 局部环 $(A_{\mathfrak{m}}, \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}})$ 上的有限生成模. 注意到 $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ 作为 A-模, 进而作为 $A/\mathfrak{m}$-线性空间同构于 $\mathfrak{m}^nA_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}^{n+1}A_{\mathfrak{m}}$. 而 $s(M)$ 即 $\mathrm{trdeg}_k(A_{\mathfrak{m}})$. □

推论 2.171. *对 Noether 局部环 $(R, \mathfrak{m})$, 有 $\dim R = \dim \mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} R$, 右边是作为环的维数.*

证明. 我们分别证明 $\dim R \geq \dim \mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} R$ 与 $\dim R \leq \dim \mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} R$. 下记 $k = R/\mathfrak{m}$. 根据**维数理论主定理**, $d := \dim R = \deg \chi_R^{\mathfrak{m}}$; 而取 $\mathfrak{m}$ 的生成元容易证明 $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} R$ 是有限生成 k-代数.

$\dim R \geq \dim \mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} R$: 根据**定理 2.34**, **注 2.35**, 得到 $\dim \mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} R = \mathrm{trdeg}_k(\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} R)$. 于是我们将原结论转化为 $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} R$ 中任意 $d+1$ 个元素都 k-代数相关. 这实际上是普通的线性代数, 因为 $\dim_k(R/\mathfrak{m}^N)$ 被 $O(N^d)$ 控制, 而另一方面 $d+1$ 个元素的不超过 N 次的乘积共有 $O(N^{d+1})$ 种情形, 因此 N 充分大时由 $O(N^{d+1}) > O(N^d)$, 故它们总有不平凡的 k-线性组合.

$\dim R \le \dim \operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} R$: 对 $A = \operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} R$ 和极大理想 $\bigoplus_{n\ge1} \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ 使用**推论 2.170**, 利用两种情形下的 Hilbert–Samuel 多项式相等得到其高为 d 而得证. □

2.10 正则局部环 (Regular Local Ring)

在交换代数中, 我们希望引入类似光滑流形的结构, 即切空间的维数等于本身维数的环; 而正则局部环则是所谓代数簇上非奇异的点.

回忆**推论 2.53** 对 Noether 局部环总成立着 $\dim R \le \dim_{R/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$, 我们定义:

定义 2.172. *设 $(R, \mathfrak{m})$ 是 Noether 局部环, 若 $\dim R = \dim_{R/\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$, 则称之***正则局部环**.

命题 2.173 (分次判别)**.** *Noether 局部环 $(R, \mathfrak{m})$ 正则 $\iff$ $\operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} R$ 是 $k = R/\mathfrak{m}$ 上多项式环.*

证明. 若记 $S = \operatorname{gr}_{\mathfrak{m}} R$, 再记 $P = \operatorname{Sym}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \bigoplus_{n\ge0} \operatorname{Sym}^n(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ 是 $d = \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ 次 k-线性空间的张量代数环, 显然 P 同构于 k 上 d 元多项式环. 我们有自然的满射 $P \to S$, 这说明 $\dim P \ge \dim S$; 而且由于 P 是整环, $\dim P = \dim S \iff P \cong S$.

注意 $\dim P = d$, **推论 2.171** 即 $\dim R = \dim S$. 因此正则时 $d = \dim R$ 从而 $P \cong S$; 另一边 S 是 $\dim R$ 次多项式环时, 记极大理想 $S_+ = \bigoplus_{n\ge1} \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$. 观察一个小结论: 自然映射 $k \hookrightarrow k[X_1, \cdots, X_r] \to k[X_1, \cdots, X_r]/\mathfrak{m}$ 是域同构保证 $\mathfrak{m}$ 形如 $(X_1 - a_1, \cdots, X_r - a_r)$. 现在将这多项式环取作 S, 极大理想取作 S_+, 此时 $\dim_k(S_+/S_+^2) = d = \dim R$. □

推论 2.174. *正则局部环是整环.*

证明. 这是**推论 2.162** 和**命题 2.173** 的立刻推论. □

命题 2.175 (切片判别)**.** *Noether 局部环 $(R, \mathfrak{m})$, $r \in \mathfrak{m}$ 不在任何极小素理想中. 若 R/r 正则, 则 R 正则, 且 $r \notin \mathfrak{m}^2, \dim R = \dim R/r + 1$. 反过来 R 正则, $r \in \mathfrak{m} \backslash \mathfrak{m}^2$, 则 R/r 正则.*

证明. 用 $\tilde{m}$ 记 R/r 的极大理想, 现在 $\tilde{\mathfrak{m}}/\tilde{\mathfrak{m}}^2 = \mathfrak{m}/(\mathfrak{m}^2 + (r))$, 其维数至少是 $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) - 1$, 取等当且仅当 $r \notin \mathfrak{m}^2$. 另外不在极小素理想和**维数理论主定理**保证 $\dim R/r = \dim R - 1$.

现在 R/r 正则推出 $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \le \dim_k \tilde{\mathfrak{m}}/\tilde{\mathfrak{m}}^2 + 1 = \dim R/r + 1 = \dim R$, 故题述结论成立; 反过来 R 正则 $r \notin \mathfrak{m}^2$, $\dim R/r = \dim R - 1 = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 - 1 = \dim_k \tilde{\mathfrak{m}}/\tilde{\mathfrak{m}}^2$. □

定义 2.176. *R 是整环, $s \in \operatorname{Frac}(R)$ 被称为***在 R 上几乎整***的指存在 $0 \ne c \in R$ 使得 $cs^n \in R$ 对一切正整数 n. 这一概念主要用于下面的数个结果.*

引理 2.177. *R 是整环, $s \in \operatorname{Frac}(R)$. (1) s 是整的则它是几乎整的; (2) 反过来 R 是 Noether 环时, s 是几乎整的则它是整的.*

证明. s 整当且仅当 $R[s] \subset \mathrm{Frac}(R)$ 是有限生成 R-模, (1) 对生成元通分得某 $0 \neq c \in R$ 使 $cR[s] \subset R$. (2) 反过来 $R[s] \subset c^{-1}R$ 有限生成, Noether 保证有限生成模的子模有限生成. □

命题 2.178. *Noether 局部环 $(R, \mathfrak{m})$, 若 $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} R$ 是正规环则 R 是正规环.*

证明. 首先**推论 2.162** 已保证都是整环. 现对 $a \in R, 0 \neq b \in \mathfrak{m}$ 使 a/b 在 R 上整. 只需证 $a \in bR$, 我们归纳地证明 $a \in \mathfrak{m}^n + bR$. 若这已证明, 对 Noether 局部环 R/bR 用 **Krull 交定理**即得 $a \in bR$. 奠基 $n = 0$ 显然, 下考虑递推. 设 $\tilde{a} \in \mathfrak{m}^{n-1}, r \in R$ 使 $a = \tilde{a} + br$. 只需考虑 $\tilde{a} \in \mathfrak{m}^{n-1} \backslash \mathfrak{m}^n$ 的情形. 现在 $\tilde{a}/b = a/b - r$ 在 R 整, 由**引理 2.177** 几乎整, 故存在 $0 \neq c \in R$ 使 $c\tilde{a}^n \in Rb^n$ 对一切 n. 注意这样一个映射 $\mathrm{gr} : R \to \mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} R$ 将 $\mathfrak{m}^k \backslash \mathfrak{m}^{k+1}$ 中者映到 $\mathfrak{m}^k/\mathfrak{m}^{k+1}$ 中的非零元. 由 **Krull 交定理**知 R 的非零元都映到 $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} R$ 的非零元.
因为 $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} R$ 是整环, 容易验证 gr 积性, 于是 $\mathrm{gr}(c) \, \mathrm{gr}(\tilde{a})^n \in \mathrm{gr}(b)^n \, \mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} R$ 对一切正整数 n. 由 $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} R$ 的 Noether 性和**引理 2.177** 推出 $\mathrm{gr}(\tilde{a}) / \mathrm{gr}(b) \in \mathrm{Frac}(\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} R)$ 在 $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} R$ 上整. 进而由正规性 $\mathrm{gr}(\tilde{a}) \in \mathrm{gr}(b) \, \mathrm{gr}_{\mathfrak{m}} R$. 设 $b \in \mathfrak{m}^l \backslash \mathfrak{m}^{l+1}$, 于是由齐次性存在 $s \in \mathfrak{m}^{n-1-l} \backslash \mathfrak{m}^{n-l}$ 使

$$0 = \mathrm{gr}(\tilde{a}) - \mathrm{gr}(b) \, \mathrm{gr}(s) = \mathrm{gr}(\tilde{a}) - \mathrm{gr}(bs) = \tilde{a} - bs + \mathfrak{m}^n$$

于是 $a = \tilde{a} + br = (\tilde{a} - bs) + b(s + r)$, 即得 $a \in \mathfrak{m}^n + bR$. □

推论 2.179. *正则局部环是正规环.*

证明. 这是**命题 2.178**, **命题 2.173** 和域上多项式环正规的立刻推论. □

注 2.180. 正则局部环都是 *UFD*, 但这个定理十分困难. 即便特殊的情形也足够复杂: 一维的局部环正则当且仅当正规当且仅当是 *DVR*（离散赋值环）, 详见 **2.13 赋值环**一节.

2.11 微分模

2.11.1 定义及基本性质

定义 2.181. 环 S 与 S-模 M, 一个加法同态 $d : S \to M$ 若满足 $d(fg) = f \cdot dg + g \cdot df$ 则称 d 是一个**求导**. 若 S 是 R-代数, 我们用 $\mathrm{Der}_R(S, M)$ 记所有 R-线性的求导 $d : S \to M$, 称为 **R-求导**构成的集合, 实则 $\mathrm{Der}_R(S, M)$ 具有自然的 S-模结构, 即朴素乘在求导结果上. 因 $d(1 \cdot 1) = 2d(1)$ 故 $d(1) = 0$, 于是对 $r \in R$ 有 $d(r) = rd(1) = 0$. 故 R 是某种"常数环".
若 S 是 R-代数, 用 $\Omega_{S/R}$ 记形式元 $\{d(f) : f \in S\}$ 生成的自由 S-模商掉全体 $d(xy) = xdy + ydx, d(ax + by) = ad(x) + bd(y)$, 其中 $a, b \in R; x, y \in S$. 于是 f 映到 $d(f)$ 的像定义了自然的 R-求导 $d : S \to \Omega_{S/R}$. 我们称 $\Omega_{S/R}$ 为 S 在 R 上的 **Kähler 微分模**或简称**微分模**.

对子 $(\Omega_{S/R}, d: S\to\Omega_{S/R})$ 具有的泛性质为, 对任意的 S-模 M 和 R-求导 $\delta: S\to M$, 存在唯一的 S-线性同态 $f:\Omega_{S/R}\to M$ 使得 $\delta = f\circ d$. 所需的技术和张量积是一样的.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\delta"'] & \Omega_{S/R} \arrow[dl, dashed, "\exists! f"] \\ M & \end{tikzcd}$$

除了用上面的图表, 也可以用等价的 $\mathrm{Der}_R(S,M)\cong \mathrm{Hom}_S(\Omega_{S/R},M)$ 来表达泛性质.

命题 2.182. 若 $S=R[\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}]$ 为多项式环, 则 $\Omega_{S/R}=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} Sd(X_\lambda)$ 为自由 S-模.

证明. 显然 $\Omega_{S/R}$ 可以由 dX_i 生成, 即有满射 $S^\Lambda\to\Omega_{S/R}$, 接下来注意 $\frac{\partial}{\partial X_i}\in\mathrm{Der}_R(S,S)$, 于是由泛性质, 存在 $\partial_i:\Omega_{S/R}\to S$ 满足 $dX_j\mapsto\delta_{ij}$, 这得到 $\Omega_{S/R}\to S^\Lambda$. 复合得 $\mathrm{id}|_{S^\Lambda}$ 故双射. □

性质 2.183. 微分模的构造具有函子性. 准确地说, 对于左侧的交换图表, 自然诱导右侧者.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] & S' \\ R \arrow[u] \arrow[r] & R' \arrow[u] \end{tikzcd} \implies \begin{tikzcd} \Omega_{S/R} \arrow[r] & \Omega_{S'/R'} \\ S \arrow[u, "d"] \arrow[r] & S' \arrow[u, "d'"'] \end{tikzcd}$$

这是因为 $S\to S'\to\Omega_{S'/R'}$ 是一个 R-导数, 于是由 $\Omega_{S/R}$ 泛性质得. 于是 $\Omega_{S/R}\to\Omega_{S'/R'}$ 是 S-模同态. 所以常将其写作包含相同信息的映射 $\Omega_{S/R}\otimes_S S'\to\Omega_{S'/R'}$. 函子性推出对于一族 $\{R_i\to S_i,\varphi_{ij}\}$, 若记 $(R\to S)=\mathrm{colim}_i(R_i\to S_i)$, 则有 $\Omega_{S/R}=\mathrm{colim}_i\,\Omega_{S_i/R_i}$.

性质 2.184. (1) 设 R-代数 R', S, 记 $S'=S\otimes_R R'$, 则存在 S'-模典范同态

$$\Omega_{S'/R'}\cong\Omega_{S/R}\otimes_S S'.$$

换言之**性质 2.183** 中左侧的图表是纤维积（张量积）则右侧的图表也是.

(2) 设 $R\to S\to T$ 是环同态, 则有 T-模的**相对余切正合列**

$$\Omega_{S/R}\otimes_S T\to\Omega_{T/R}\to\Omega_{T/S}\to 0.$$

(3) 设 $R\to S\to T$ 是环同态, 其中 $\pi: S\to T$ 满, 核记作 I, 则有**余法正合列**

$$I/I^2\to\Omega_{S/R}\otimes_S T\to\Omega_{T/R}\to 0.$$

其中第一个映射是自然地取微分 $f\mapsto 1\otimes df$.

(4) 设 B 是 A-代数, $S^{-1}B$ 是 B 的局部化, 则 $S^{-1}\Omega_{B/A}\cong\Omega_{S^{-1}B/A}$.

(5) 设 $T=\otimes_R S_i$ 是一系列 R-代数直积, 则

$$\Omega_{T/R}=\bigoplus_i (T\otimes_{S_i}\Omega_{S_i/R})=\bigoplus_i\left(\left(\bigotimes_{R,j\neq i}S_j\right)\otimes_R\Omega_{S_i/R}\right).$$

证明. 对 (1), $d:S\to\Omega_{S/R}$ 诱导 $d'=d\otimes\mathrm{id}_{R'}:S'\to\Omega_{S/R}\otimes_S S'$. 很容易检查 $(d',\Omega_{S/R}\otimes_S S')$ 满足泛性质. 对 (2), 只需证明等价的对任意 T-模 M 总有下正合列:

$$0\to\mathrm{Hom}_T(\Omega_{T/S},M)\to\mathrm{Hom}_T(\Omega_{T/R},M)\to\mathrm{Hom}_T(\Omega_{S/R}\otimes_S T,M).$$

而张量积泛性质知 $\mathrm{Hom}_T(\Omega_{S/R}\otimes_S T,M)=\mathrm{Hom}_S(\Omega_{S/R},M)$, 再由微分模泛性质化为

$$0\to\mathrm{Der}_S(T,M)\to\mathrm{Der}_R(T,M)\to\mathrm{Der}_R(S,M).$$

最后一步是复合 $S\to T$, 正合列是自然的. (3) 和 (2) 类似, 注意 $I/I^2=I\otimes_S T$ 故转而证明

$$0\to\mathrm{Der}_R(T,M)\to\mathrm{Der}_R(S,M)\to\mathrm{Hom}_T(I/I^2,M)=\mathrm{Hom}_S(I,M).$$

这只需检查 $IM=0$ 当且仅当可以从 $S\to M$ 的导数诱导 $T\to M$ 的导数.
最后 (4) 即 (2) 的特殊情形. 取 (R,S,T) 为 $(A,B,S^{-1}B)$. 只需证明 $\Omega_{S^{-1}B/B}=0$ 以及 $S^{-1}\Omega_{B/A}\to\Omega_{S^{-1}B/A}$ 是单射. 前者计算 $0=d(b)=sd(b/s)$, 后者则利用 $d(b/s)=(sd(b)-bd(s))/s^2$ 知可以把在 $\Omega_{S^{-1}B/A}$ 中消没的结果转移为 $S^{-1}\Omega_{B/A}$ 中者. 也可看成余极限.
而 (5) 检查 $d(\cdots\otimes 1\otimes s_i\otimes 1\otimes\cdots)$ 典范打到 $(\cdots,0,1\otimes ds_i,0,\cdots)$ 是同构. □

微分模的计算常用上面的性质. 对有限表现者, $S=R[X_1,\cdots,X_r]/I, I=(f_1,\cdots,f_s)$, 于是 $S\otimes_R\Omega_{R[X_1,\cdots,X_r]/R}=\bigoplus_i SdX_i$ 是 dX_i 为生成元的自由 S-模. 再由余法正合列, 可写出

$$\Omega_{S/R}=\mathrm{coker}\left(d:I/I^2\to\bigoplus_i SdX_i\right).$$

于是考虑用自由模打满, 设自由的 $e_1,\cdots,e_s$ 打到 $f_1,\cdots,f_s$, 发觉需要计算如下映射的余核, $\bigoplus_j Se_j\to I/I^2\to\bigoplus_i SdX_i$. 于是这由 **Jacobi 矩阵**刻画, 即 $J:=(\partial f_j/\partial X_i)$. 关于此矩阵更加详细的内容将在后文 Jacobi 判别法中提到.
我们声称看待微分模也有合理的几何观点. 设 S 是域 k 上的有限生成代数, 则 $\Omega_{S/k}$ 可以看作仿射簇 $\mathcal{V}(S)$ 的上的余切丛. 平凡地例子是平面 $S=k[X,Y]$ 上就具有 $SdX+SdY$, 这对应光滑流形中 $\mathcal{O}dX+\mathcal{O}dY$, 其中 $\mathcal{O}$ 是平面上的光滑函数环.
相对余切正合列的一种看法是 $f:X\to Y$, 其中 $X=\mathrm{Spec}\,T, Y=\mathrm{Spec}\,S$, 姑且考虑 $R=k$ 是一个域, 这样 $\mathrm{Spec}\,k$ 是一个点. 假设 f 纤维光滑, 这种更好的情况下切空间上理应有

$$0\to T_{X/Y}\to T_{X/Z}\to f^*T_{Y/Z}\to 0.$$

而余法正合列也可类似解释, 设 $j:X\hookrightarrow Y$ 是嵌入子流形, 仍然考虑 Z 是一个点, 则

$$0\to T_X\to j^*T_Y\to N_{X/Y}\to 0.$$

2.11.2 域扩张与微分模

引理 2.185. 设 $R \to S \subset T$ 其中 S, T 是域. 且 T/S 可分代数, 则 $\Omega_{T/R} = T \otimes_S \Omega_{S/R}$.

证明. 因为微分模和张量积都和余极限可交换, 不妨考虑 T/S 有限可分从而可设 $T = S[\alpha] = S[X]/(f)$. 对 $R \to S[X] \to T$ 计算余法正合列得

$$(f)/(f^2) \to T \otimes_{S[X]} \Omega_{S[X]/R} \to \Omega_{T/R} \to 0.$$

注意 $S[X] = R[X] \otimes_R S$ 故可使用**性质 2.184(5)** 得 $\Omega_{S[X]/R} = (S[X] \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus S[X]dX$. 于是正合列中间一项是 $(T \otimes_S \Omega_{S/R}) \oplus TdX$. 然后检查 $(f)/(f^2)$ 中的 $f(X)$ 被打到 $1 \otimes f'(X)dX \in T \otimes_{S[X]} \Omega_{S[X]/R}$ 即直和中的 $(0, f'(X))$, 而可分推出 $\gcd(f, f') = 1$, 于是 $(0, 1)$ 生成整个像. □

定理 2.186. 域扩张 T/S 及一族 $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset T$. 则 $\{dx_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是 $\Omega_{T/S}$ 作为 T-线性空间的一组基当且仅当（按照域的特征进行分类有以下两种情况）
要么 $\operatorname{char} S = 0$, $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是 T/S 一组超越基. 要么 $\operatorname{char} S = p \neq 0$, $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是 T/S 一组 p-基（即 T 作为 ST^p-代数的最小生成元组）. 特别的, 注意特征 p 且 T/S 有限生成可分时, 一组可分超越基（即满足 T 在这组基在 S 生成的纯超越扩张上可分）符合条件.
注意这里 ST^p 是包含 S, T^p 的最小域.

证明. 特征 0 的情形, 记 $S' = S(\{x_\lambda\})$. 假设是超越基, 那么由前引理 $\Omega_{T/S} = T \otimes_S \Omega_{S'/S}$, 并结合 S' 是多项式环 $S[\{x_\lambda\}]$ 的局部化, 计算得 $\{dx_\lambda\}$ 是一组基. 若 $\{dx_\lambda\}$ 是一组基, 注意

$$T \otimes_{S'} \Omega_{S'/S} \to \Omega_{T/S} \to \Omega_{T/S'} \to 0.$$

其中第一个箭头处, $1 \otimes dx_\lambda \mapsto dx_\lambda$. 利用它的像生成整个 $\Omega_{T/S}$ 于是 $\Omega_{T/S'} = 0$. 若 T/S' 不代数, 设 T/S' 的一组超越基 $\{y_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ 则根据已证 $\{dy_\gamma\}$ 是 $\Omega_{T/S'}$ 的超越基而矛盾. 现只需证诸 x_λ 代数无关, 否则对代数相关式取 d 与它们是基矛盾.
特征 $p \neq 0$ 的情形, 对 $x \in T$ 有 $d(x^p) = 0$. 因此 S-导数就是 ST^p-导数. 从而 $\Omega_{T/S} = \Omega_{T/(ST^p)}$, 因此用 ST^p 代替 S 可设 $T^p \subset S$, 此时 p-基是 S 上生成 T 的极小族. 现在若 $\{x_\lambda\}$ 是 p-基, 则 $T = S(\{x_\lambda\})$, 故 $\Omega_{T/S}$ 被 $\{dx_\lambda\}$ 张成. 假设被 x_1 以外者张成, 记 $T' = S(\{x_\lambda\}_{\lambda \neq 1})$, 注意

$$T \otimes_{T'} \Omega_{T'/S} \to \Omega_{T/S} \to \Omega_{T/T'} \to 0.$$

类似特征 0 情形得 $\Omega_{T/T'} = 0$. 但 $x_1^p \in S$ 故 $T = T'[X]/(X^p - x_1^p)$ 计算得 $\Omega_{T/T'} = TdX$ 矛盾. 反设 $\{dx_\lambda\}$ 是 $\Omega_{T/S}$ 的一组基时证明和特征 0 一样, 不过取 T/S' 的 p-基代替超越基. □

推论 2.187. 设 L/K 为有限生成域扩张, 假设超越度为 r, 那么下列命题成立.
(1) $\dim_L \Omega_{L/K} \geq r$ 且取等当且仅当 L/K 可分.
(2) 若 L/K 可分, 则 L/K 的任意生成元族都包含一个可分超越基.

证明. (1) 分别讨论特征 0 和 p, 对后者来说注意 p-基包含一组超越基. (2) 设生成元为 $\{x_\lambda\}$, 取 $\{dx_\lambda\}$ 的一组基即可. □

引理 2.188. 设局部环 $(R, \mathfrak{m}, K)$ 和域 k 满足, R 是 k-代数且 K/k 是可分扩张, 证明存在嵌入 $i: K \to R/\mathfrak{m}^2$ 使得复合 $R/\mathfrak{m}^2 \to R/\mathfrak{m} = K$ 后是 id_K.

证明. 先设 $K = k[\alpha]$, 其中 α 的首一最小多项式 $P \in k[X]$. 现设 $\alpha \in R/\mathfrak{m}$ 在 $R/\mathfrak{m}^2$ 有一个原像 r, 希望取 $m \in \mathfrak{m}$ 使 $P(r+m) = P(r) + P'(r)m \in \mathfrak{m}^2$, 注意可分推出 $P'(r) \notin \mathfrak{m}$ 可逆.
而 α 超越的情形显然, 于是最后用 **Zorn 引理**可将整个 K 嵌入. □

引理 2.189. 环映射 $R \to S \to T$, 其中 $S \to T$ 满, 若存在 R-代数映射 $\tau: T \to S/I^2$ 分裂自然投影 $\pi: S/I^2 \to S/I = T$, 则余法正合列中 $I/I^2 \to T \otimes_S \Omega_{S/R}$ 是分裂的单射.

证明. 考虑映射 $\delta = \mathrm{id}_{S/I^2} - \tau\pi : S/I^2 \to I/I^2$, 注意 $x - \tau\pi(x) \in I$ 不难验证 δ 是 R-导数. 复合上 $S \to S/I^2$, 将 I/I^2 看作 S-模知存在 $\sigma': \Omega_{S/R} \to I/I^2$, 这诱导了 $\sigma: (S/I) \otimes_S \Omega_{S/R} \to I/I^2$, 只需检查 $\sigma d = \mathrm{id}$, 其中 $d: I/I^2 \to T \otimes_S \Omega_{S/R}$. 对 $x \in I/I^2$ 实则有 $\sigma d(x) = \delta(x) = x$. □

推论 2.190. 设 S 是域, T 是有限生成 S-代数的局部化, 则 $\Omega_{T/S} = 0$ 当且仅当 T 是有限个域的直和, 每个都是 S 上的有限可分扩张.

证明. 首先 T 形如那样时结论显然成立. 反过来需检查 T 在每个素理想局部化都是域, 而且局部化后对应直和分量那些域. $\Omega_{T/S} = 0$, 于是对 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} T$ 都有 $\Omega_{T_\mathfrak{p}/S} = \Omega_{T/S} \otimes_T T_\mathfrak{p} = 0$, 故不妨设 $(T, \mathfrak{m})$ 局部环, 需证 T 是 S 的有限可分扩张. 写出 $S \to T \to T/\mathfrak{m}$ 余法正合列

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to (T/\mathfrak{m}) \otimes_T \Omega_{T/S} \to \Omega_{(T/\mathfrak{m})/S} \to 0.$$

结合 $\Omega_{T/S} = 0$ 得 $\Omega_{(T/\mathfrak{m})/S} = 0$, 由**推论 2.187** 不难检查 L/S 有限可分. 最后需证 $\mathfrak{m} = 0$. 由**引理 2.188** 取 $i: L \to T/\mathfrak{m}^2$ 分裂典范的 $\pi: T/\mathfrak{m}^2 \to L$, 对 $S \to T \to T/\mathfrak{m}$ 用**引理 2.189** 推出余法正合列中有分裂单射, 故 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 0$ 从而由 **Nakayama 引理**推出结论. □

2.11.3 Jacobi 判别法

本小节引入一个重要的几何工具, 用于在代数上研究正则性, 光滑性. 叙述如下:

定理 2.191 (Jacobi 判别). 设域 k 上多项式环 $S=k[X_1,\cdots,X_r]$, 理想 $I=(f_1,\cdots,f_s)$, 商 $R=S/I$. 设 $\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}S$ 含 I 素理想, 记 $c:=\operatorname{ht}_{S_\mathfrak{p}}I_\mathfrak{p}$ 即 S 中介于 $I,\mathfrak{p}$ 素理想的最小高度.

(1) *Jacobi* 矩阵 $J=(\partial f_i/\partial X_j)$, 则 $J \bmod \mathfrak{p}$ 的秩不超过 c.

(2) 若 $k(\mathfrak{p})/k$ 可分, 则 $R_\mathfrak{p}$ 是正则局部环当且仅当 $J \bmod \mathfrak{p}$ 的秩为 c.

证明. (1) 设 $\mathfrak{q}\in\operatorname{Spec}S$ 为 I 上高度 c 的 (极小) 素理想, 只需验证 $J \bmod \mathfrak{q}$ 的秩不超过 c. 于是加一些 f_i 不妨设它们生成 $\mathfrak{q}$, 而设 $I=\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$. 自然地

$$\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2\to R\otimes_S\Omega_{k[X_1,\cdots,X_r]/k}\to\Omega_{R/k}\to 0,$$
$$\Longrightarrow \mathfrak{p}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_\mathfrak{p}^2\to R_\mathfrak{p}\otimes_S\Omega_{k[X_1,\cdots,X_r]/k}\to(\Omega_{R/k})_\mathfrak{p}\to 0.$$

注意到 $R_\mathfrak{p}$ 是域, 另外 Jacobi 矩阵映射的余核是 $(\Omega_{R/k})_\mathfrak{p}=\Omega_{R_\mathfrak{p}/k}$, 由**推论 2.187** 得知 $\dim_{R_\mathfrak{p}}\Omega_{R_\mathfrak{p}/k}\geq\operatorname{trdeg}_k(R_\mathfrak{p})=\dim(S/\mathfrak{p})=r-c$, 鉴于 Jacobi 矩阵有 r 列, 故秩不超过 c.

(2) $k(\mathfrak{p})/k$ 可分, 则 $k\to R_\mathfrak{p}\to k(\mathfrak{p})$ 的余法正合列为

$$\mathfrak{p}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_\mathfrak{p}^2\to k(\mathfrak{p})\otimes_{R_\mathfrak{p}}\Omega_{R_\mathfrak{p}/k}\to\Omega_{k(\mathfrak{p})/k}\to 0.$$

用**引理 2.188**, **引理 2.189** 知第一项是分裂单射, 于是作为 $k(\mathfrak{p})$-线性空间

$$\dim_{k(\mathfrak{p})}(\mathfrak{p}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_\mathfrak{p}^2)+\dim_{k(\mathfrak{p})}\Omega_{k(\mathfrak{p})/k}=\dim_{k(\mathfrak{p})}k(\mathfrak{p})\otimes\Omega_{R_\mathfrak{p}/k}.$$

而一侧的事实是 $\dim_{k(\mathfrak{p})}(\mathfrak{p}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_\mathfrak{p}^2)\geq\dim R_\mathfrak{p}$, 且取等当且仅当正则局部环. 另一侧的事实是 $\dim_{k(\mathfrak{p})}\Omega_{k(\mathfrak{p})/k}=\operatorname{trdeg}_k k(\mathfrak{p})=\dim(R/\mathfrak{p})$. 另外 $c+\dim R_\mathfrak{p}+\dim(R/\mathfrak{p})=r$, 放在一起,

$$\dim_{k(\mathfrak{p})}k(\mathfrak{p})\otimes\Omega_{R_\mathfrak{p}/k}\geq r-c.$$

且上式取等当且仅当 $R_\mathfrak{p}$ 是正则局部环. $\Omega_{R/k}$ 是 J 的余核, 因此 $k(\mathfrak{p})\otimes\Omega_{R_\mathfrak{p}/k}$ 应当被看作 $J \bmod \mathfrak{p}$ 的余核, 因此由 (1) 的计算它维数是 $r-c$ 当且仅当 $J \bmod \mathfrak{p}$ 的秩是 c. □

它的一个直接的应用是刻画了完美域上有限型代数的全体奇异点:

推论 2.192. 设 k 完美, $R=k[X_1,\cdots,X_r]/I$ 且 I 每个不可约分支在 $k[X_1,\cdots,X_r]$ 上高度都是 c, 考虑 J_c 是 *Jacobi* 矩阵全体 $c\times c$ 子阵行列式在 R 生成的理想, 则 $\mathcal{V}(J_c)$ 恰是使得局部环 $R_\mathfrak{p}$ 不是正则局部环的 $\mathfrak{p}$ 构成的集合（满足后者条件的点被称为奇异点）.

例 2.193. 例如观察完美域上的不可约代数曲线 $f(X,Y)=0$, 此时 $R=k[X,Y]/(f)$ 是不可约 1 维仿射簇. 它的 *Jacobi* 矩阵只有 $[f'_X,f'_Y]$ 两项, 所以它奇异点集为 $\mathcal{V}_R(f'_X,f'_Y)$, 换言之, 当且仅当在 $k[X,Y]$ 中 $(f,f'_X,f'_Y)=(1)$ 时它处处非奇异.

2.11.4 Liouville 定理及其应用 *

本小节我们来证明数学分析课中很关心的问题: e^{x^2} 和 $\sin x/x$ 没有初等原函数.

定义 2.194. 一个**微分域**, 记作 (K, d_K), 是指一个域 K 带有 $d_K \in \mathrm{Der}_{\mathbb{Z}}(K, K)$. 微分域的**初等单扩张**指微分域 (L, d_L) 使得 $L = K(l)$ 是一个单扩张, $d_L|_K = d_K$ 且下列三者发生其一:
(1) l 在 K 代数, (2) l 在 K 超越且 $l' = k'/k$ 对某 $k \in K^\times$, (3) l 在 K 超越且 $k' = l'/l$ 对某 $k \in K$, 其中 $\bullet'$ 是 $d(\bullet)$ 的简写. 三者分别称为**代数扩张**, **对数型扩张**和**指数型扩张**. (2),(3) 可看作 $l = \ln k, l = e^k$. 微分域的**初等扩张**是指做有限步初等单扩张.
另外定义 $K_C = \mathrm{Ker}\, d_K$ 显然是 K 的子域, 称为**常数域**.

性质 2.195. 特征 0 微分域初等单扩张 L/K, 考虑 $\mathbb{Z} \to K \to L$ 的相对余切正合列

$$\Omega_{K/\mathbb{Z}} \otimes_K L \to \Omega_{L/\mathbb{Z}} \to \Omega_{L/K} \to 0.$$

注意 $\Omega_{L/K}$ 在代数时是 0, 在超越时是 Ldl, 因此代数时 d_L 被 d_K 完全决定, 超越时 d_L 被 d_K 和 $l' \in L$ 完全决定, 从而对初等扩张 L/K, (L, d_L) 被 (K, d_K) 完全决定.

定理 2.196 (Liouville)**.** 特征 0 微分域初等扩张 L/K 满足 $L_C = K_C$. 若 $\alpha \in K \cap \mathrm{Im}\, \delta_L$ 则存在 $c_1, \cdots, c_m \in K_C; \beta_1, \cdots, \beta_m \in K^\times, \gamma \in K$ 使

$$\alpha = \sum_{j=1}^{m} c_j \frac{\beta_j'}{\beta_j} + \gamma'.$$

证明. 写成初等单扩张塔 $K = K_0 \subset \cdots \subset K_N = L$, 我们对 N 归纳. 奠基 $N = 0$ 显然. $N > 1$ 时视 $\alpha \in K_1 = K(l)$ 用归纳假设, 只需证明 $c_i \in (K_1)_C = K_C, \beta_i \in K_1^\times, \gamma \in K_1$ 的 $\sum_{j=1}^m c_j \frac{\beta_j'}{\beta_j} + \gamma'$ 能用 K 中的 β_i, γ 代替, 为此需要分类讨论 K_1/K 是哪种初等单扩张.
(1) 若 K_1/K 代数, 不妨用正规闭包代替可设 K_1/K 是 Galois 扩张, $G := \mathrm{Gal}(K_1/K)$. 注意对 $\sigma \in G, x \in K_1$ 总有 $\sigma(x') = \sigma(x)'$, 这是因为 $\sigma^{-1} d_{K_1} \sigma$ 也是导数, 结合唯一性知. 由此

$$\#G \cdot \alpha = \sum_{\sigma \in G} \left(\sum_{j=1}^{m} \sigma c_j \frac{(\sigma\beta_j)'}{\sigma\beta_j} + (\sigma\gamma)' \right) = \sum_{j=1}^{m} c_j \frac{(\prod_{\sigma \in G} \sigma\beta)'}{\prod_{\sigma \in G} \sigma\beta} + \left(\sum_{\sigma \in G} \sigma\gamma \right)'$$

其中第二个等号是恒等式 $x'/x + y'/y = (xy)'/(xy)$, 结合 $K_1^G = K$ 与特征 0, 归纳完成.
剩下两种情况注意超越性, 诸 $\beta_i \in K(l)^\times$, 再用恒等式 $x'/x + y'/y = (xy)'/(xy)$ 不妨拆开它们而设 $\beta_i \in K[l] \backslash K$ 首一不可约或 $\beta_i \in K^\times$.
(2) 若 K_1/K 是对数型的, $l' = k'/k, k \in K^\times$. 检查对 $p(l) = l^n + k_{n-1} l^{n-1} + \cdots + k_0$, 总有 $p(l)' = (k_{n-1} + nl)' l^{n-1} + \cdots$ 恰是 $n-1$ 次多项式, 否则 $k_{n-1} + nl \in (K_1)_C = K_C$ 推出 $l \in K$ 与超越矛盾. 另一方面 $\gamma \in K(l)$ 写成部分分式后每项形如 $f(l)/p(l)^n$, 其中 $p(l)$ 是首一不可约多

项式, 求导得 $(f(l)'p(l)-np(l)'f(l))/p(l)^{n+1}$, 从而在分母总有不可约多项式的 $n+1\geq 2$ 次项不能与 $\sum_{j=1}^m c_j\frac{\beta_j'}{\beta_j}$ 中 β_j 是多项式的部分 P 消掉, 这表明 $\gamma\in K[l]$, 同时 P 也必须是 0.
现在 $\gamma'\in K$ 类似计算得知它必须至多一次且首项在 K_C, 故 $(k_1l+k_0)'=k_1\frac{k'}{k}+k_0'$. 于是剩下的部分构成了 α 不涉及 K_1 中 β_i,γ 的表达式.
(3) 若 K_1/K 是指数型的, $k'=l'/l, k\in K$. 检查对 $p(l)=l^n+k_{n-1}l^{n-1}+\cdots+k_0$ 不可约, $p(l)'=nk'l^n+\cdots+(k_i'+ik_ik')l^i+\cdots$. 下讨论何时 $p(l)'$ 是 $p(l)$ 的常数倍, 这必须 $nk'k_i=k_i'+ik_ik'$ 对一切 $0\leq i<n$. 若 $k_i\neq 0$, 这等价于 $l^{n-i}/k_i\in K_C$ 矛盾. 因此只有两种可能性, $p(l)=l$ 则 $cl'/l=ck'$, 或者 $p(l)\neq l$ 总有 $p(l)',p(l)$ 互素, 把前者 $(ck)'$ 堆进 γ.
于是用 (2) 一样的方法, 算得 $\gamma\in K[l,l^{-1}]$ 且 $P=0,\gamma'\in K$. 对 $\gamma=\sum_{j\in\mathbb{Z}}k_jl^j$, 计算得 $\gamma'=\sum_j(k_j'+k_jjk')l^j\in K$ 故它等于 k_0', 又得到了不涉及 K_1 的表达式. □

> **推论 2.197.** 函数 $e^{x^2},\sin x/x$ 不存在初等原函数. 准确地说, 不存在 $(\mathbb{C}(x),\frac{\partial}{\partial x})$ 的初等扩张, 包含求导后等于 $e^{x^2},\sin x/x$ 的函数.

证明. 把 $\mathbb{C}(x)$ 的初等扩张嵌入复平面的一个连通开集上的半纯函数域, 因此常数域始终为 $\mathbb{C}$. 于是考虑域 $\mathbb{C}(x,e^{x^2})$ 的 **Liouville 定理**推知 $e^{x^2}=\sum_{j=1}^m c_j\frac{\beta_j'}{\beta_j}+\gamma'$, 其中 $c_i\in\mathbb{C};\gamma,\beta_i\in\mathbb{C}(x)(l)$ 其中 $l=e^{x^2}$. 和定理中 (3) 一样的讨论方法推出只剩下 $\gamma\in\mathbb{C}(x)[l,l^{-1}]$ 使 $\gamma'=l$, 对照系数知只能涉及一次项, 故存在 $f=p/q\in\mathbb{C}(x)$ 使 $(fl)'=l$ 即 $f'+2xf=1$ 即 $q(q-2xp-p')+q'p=0$, 设 $p,q\in\mathbb{C}[x]$ 互素推出 $q\in\mathbb{C}$ 进而 f 是多项式而观察次数推出矛盾.
而对 $\sin x/x$ 则考虑 $l=e^{ix}$, 一样的方法推出只剩下 $\gamma\in\mathbb{C}(x)[l,l^{-1}]$ 使 $\gamma'=\frac{l^2-1}{lx}$, 于是 $(f_1l)'=l/x,(f_{-1}/l)'=-1/(lx)$, $f_1'+if_1=1/x$, 对 f_1 写作部分分式的和可得矛盾. □

2.12 完备化（Completion）

2.12.1 完备化的基本性质

形式幂级数环 $k[\![X_1,\cdots,X_n]\!]$ 其实有一个更自然的看法, 它是环 $R=k[X_1,\cdots,X_n]$ 在极大理想 $\mathfrak{m}=(X_1,\cdots,X_n)$ 处的完备化. 背后是一套庞大的代数工具.

定义 2.198. 设环 R 理想 I, 考虑 $\cdots\to R/I^2\to R/I$ 在范畴 CRing 的极限, 记作 $\widehat{R}:=\lim_n(R/I^n)$, 称为 R 关于 I 的**完备化**. $\widehat{R}$ 中的一个元素被典范的写作一列 $\{f_n\}_n$ 满足 $f_n\in R/I^n$ 且 $f_n\equiv f_{n+1}\bmod I^n$. 同样地可以定义 R-模 M 的**I-进完备化** $\widehat{M}:=\lim_n(M/I^nM)$, 自然地有函子性的典范映射 $M\to\widehat{M},M\otimes_R\widehat{R}\to\widehat{M}$.
若典范映射 $M\to\widehat{M}$ 是同构则称 M 是**I-进完备**的. 而定义 R 是**I-进完备**的即它作为自己的模如此, 或者说典范映射 $R\to\widehat{R}$ 是同构.

在研究完备化的性质前, 我们指出极限保持正合列的一个经典条件.

引理 2.199 (Mittag-Leffler). 环 R, R-模短正合列 $0 \to K_i \to L_i \to M_i \to 0, i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 使诸

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K_{i+1} & \longrightarrow & L_{i+1} & \longrightarrow & M_{i+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & K_i & \longrightarrow & L_i & \longrightarrow & M_i & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

交换. 若对诸 i 存在 $c = c(i)$ 使得 $\mathrm{Im}(K_{c(i)} \to K_i) = \mathrm{Im}(K_j \to K_i)$ 对一切 $j \geq c(i)$（称之 **Mittag-Leffler 条件**）, 则 $0 \to \lim K_i \to \lim L_i \to \lim M_i \to 0$ 正合.

证明. 极限左正合, 故只需检查 $\lim L_i \to \lim M_i$ 满, 对任意 $(m_i) \in \lim M_i$. 对每个 i 取 E_i 为 m_i 在 L_i 中的原像. E_i 显然也有极限结构, 因此只需证 $\lim E_i$ 非空, 只需检查 E_i 也满足 Mittag-Leffler 条件, 结合每个 E_i 非空可证.

对于题述 $c(i)$, 我们声称 $E_j \to E_i$ 与 $E_{c(i)} \to E_i$ 的像相同对 $j \geq c(i)$ 成立. 不妨把 K_i 看作 L_i 子集, 显然 E_j 的像含于 $E_{c(i)}$ 者, 反过来对 $e_{c(i)} \in E_{c(i)}$, 设它在 E_i 像为 e_i, 需找到 $e_j \in E_j$ 使它在 E_i 像为 e_i. 任取 $e'_j \in E_j$, 设它在 E_i 像为 e'_i, 由于它们都是 m_i 原像故 $e_i - e_{i'} \in K_i$, 所以利用 K_i 的 Mittag-Leffler 条件取 $\delta_j \in K_j$ 映到 $e_i - e_{i'} \in K_i$, 则 $e_j = \delta_j + e'_j$ 符合条件. □

命题 2.200. 设 R 是环, I 是理想, $\varphi : M \to N$ 是 R-模同态. 那么关于完备化有: (1) 若 $M/IM \to N/IN$ 满, 则 $\widehat{M} \to \widehat{N}$ 满, (2) 若 $0 \to K \to M \to N \to 0$ 是 R-模短正合列且 N 平坦, 则 $0 \to \widehat{K} \to \widehat{M} \to \widehat{N} \to 0$ 也正合, (3) 若 M 是有限 R-模, 则 $M \otimes_R \widehat{R} \to \widehat{M}$ 满.

证明. 首先是一个类似 **Nakayama 引理**的论述, 虽然沙雕, 但套娃出的结果并不显然. (a) 环 R 的理想 I 和 R-模 M 满足 $I^n = 0, IM = M$ 则 $M = 0$. (b) 保持 $I^n = 0$, 若 $N, N' \subset M$ 是 R-模使 $M = N + IN'$, 则 $M = N + N'$ 故 $I(M/N) = M/N$ 从而 $M = N$. (c) 保持 $I^n = 0$, 若 $M \to N$ 使 $M/IM \to N/IN$ 满, 则 N 由 M 的像和 IN 生成, 故由 (b) 知 $M \to N$ 满.

对 (1), 对 R/I^n 的理想 I/I^n 以及映射 $M/I^nM \to N/I^nN$ 应用上论述 (c) 可知映射满. 现写出短正合列 $0 \to K_n \to M/I^nM \to N/I^nN \to 0$, 由前引理, 为证满射只需验证 K_n 满足 Mittag-Leffler 条件, 只需证明 $K_{n+1} \to K_n$ 满. 根据**蛇引理**, 结合正合列间的箭头是满射, 只需检查 $I^nM/I^{n+1}M \to I^nN/I^{n+1}N$ 是满射, 而这是显然的.

(2) 使用 Mittag-Leffler, 只需检查 $0 \to K/I^nK \to M/I^nM \to N/I^nN \to 0$ 正合, 为此需如下结论: 若 $0 \to M'' \to M' \to M \to 0$ 是 R-模短正合列且 M 平坦, 则任意 R-模 N 有 $M'' \otimes_R N \to M' \otimes_R N$ 是单射, 取自由模 $R^{\oplus N}$ 满射 N, 核记为 K, 对下图表考虑**蛇引理**得:

$$\begin{array}{ccccccc} & & M'' \otimes_R K & \longrightarrow & M' \otimes_R K & \longrightarrow & M \otimes_R K \longrightarrow 0\,. \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & (M'')^{\oplus N} & \longrightarrow & (M')^{\oplus N} & \longrightarrow & M^{\oplus N} \end{array}$$

(3) 则是取 $R^{\oplus n} \to M$ 满, 则 (1) 的条件满足故 $\widehat{R}^{\oplus n} \to \widehat{M}$ 满. □

首先我们指出 I-进完备化后的模并不总是 I-进完备的. 但是好的条件下这是对的:

推论 2.201. 设环 R 的有限生成理想 I, 则对任意 R-模 M, $\widehat{M}$ 是 I-进完备的且 $I^n\widehat{M} = \mathrm{Ker}(\widehat{M} \to M/I^nM) = \widehat{I^nM}$ 对一切正整数 n.

证明. 固定 n, 设 I^n 有 r 个生成元, 由**命题 2.200**, $M^{\oplus r} \to I^nM$ 满射诱导 $\widehat{M}^{\oplus r} \to \widehat{I^nM} = \lim_{m\geq n} I^nM/I^mM = \lim_{m\geq N}\mathrm{Ker}(M/I^mM \to M/I^nM) = \mathrm{Ker}(\widehat{M} \to M/I^nM)$ 满射. 而 $\widehat{M}^{\oplus r} \to \widehat{M}$ 像是 $I^n\widehat{M}$, 因此 $\widehat{M}/I^n\widehat{M} \cong M/I^nM$, 取极限得 $\widehat{\widehat{M}} = \widehat{M}$, 故 $\widehat{M}$ 是 I-进完备的. □

接下来我们研究完备化后的可逆元情况.

命题 2.202. 考虑 R 的 I-进完备化 $\widehat{R}$. 那么 (1) $\widehat{R}$ 映到 R/I 中可逆元的元素是可逆元, (2) $1+I$ 中的元素映到 $\widehat{R}$ 中的可逆元, (3) $1+I\widehat{R}$ 的元素是 $\widehat{R}$ 中的可逆元, (4) 理想 $I\widehat{R}$ 和 $\mathrm{Ker}(\widehat{R} \to R/I)$ 含于 $\mathrm{Jac}(\widehat{R})$.

证明. 对 (1), 设 $x \in \widehat{R}$ 映到 R/I 的可逆元 x_1, 则 x 映到 R/I^n 中的可逆元 x_n ($x_ny_1 \equiv 1 \bmod I \implies x_n^ny_1^n \equiv 1 \bmod I^n$), 因此 $y = (x_n^{-1}) \in \widehat{R}$ 是 $x = (x_n)$ 的逆元. (2) 和 (3) 是 (1) 的立即推论, 而 (4) 注意 $1+J$ 全是可逆元等价于 $J \subset \mathrm{Jac}(\widehat{R})$. □

命题 2.203. 环 R 的两个互相包含的理想 $I \subset J \subset R$, 若 M 是 J-进完备的, I 是有限生成的, 则 M 是 I-进完备的.

证明. 首先需要一个引理, 若 $I = (f_1, \cdots, f_r) \subset R$ 有限生成, 且诸 $M \to \lim M/f_i^nM$ 都是满射, 则 $M \to \lim M/I^nM$ 也是满射. 因为 $I^n \supset (f_1^n, \cdots, f_r^n) \supset I^{rn}$, 所以 $\lim M/I^nM = \lim M/(f_1^n, \cdots, f_r^n)M$. 一个 $\xi \in \lim M/(f_1^n, \cdots, f_r^n)M$ 中的元素可以被写作

$$\xi = \sum_{n\geq 0}\sum_i f_i^n x_{n,i};\ x_{n,i} \in M.$$

若 $M \to \lim M/f_i^nM$ 满射, 取 $x_i \in M$ 映到 $\sum x_{n,i}f_i^n$. 则 $x = \sum_i x_i$ 映到 ξ.
回到原题, 由于 J-进完备, $\bigcap J^nM = 0$, 故 $\bigcap I^nM = 0$ 从而只需证明 $M \to \lim M/I^nM$ 是满射, 由前述引理设 $I = (f)$ 单生成. 设一列 $x_n \in M$ 使 $x_{n+1} - x_n = f^nz_n \in f^nM$, 需证明存在 $x \in M$ 使 $x_n - x \in f^nM$. 因为 $x_{n+1} - x_n \in J^nM$, 且 M 是 J-进完备的, 设 $x \in M$ 使 $x_n - x \in J^nM$, 利用 M 的 J-进完备性不难证明 $x_n - x = f^n(z_n + fz_{n+1} + f^2z_{n+2} + \cdots)$. □

不过有时候检查不同理想完备化时有其他的方法, 一个例子是:

习题 2.204. 若环 R 两理想 I, J 和两正整数 c, d 满足 $I^c \subset J, J^d \subset I$. 则任意 R-模 M 关于 I 和 J 取完备化结果相同. 作为推论, M 是 I-进完备的当且仅当是 J-进完备的. 检查 $M/I^nM \to M/J^{[n/d]}M, M/J^mM \to M/I^{[m/c]}M$ 给出一对互逆映射, 而完备即 $\widehat{M} = M$.

性质 2.205. 环 R 理想 I, M 是 I-进完备 R-模, 设 $K \subset M$ 是 R-子模, 则 **TFAE**:
(1) $K = \bigcap_n (K + I^nM)$, (2) 模 $N = M/K$ 是 I-进完备的.

证明. 由**命题 2.200** 得 $M = \widehat{M} \to \widehat{N}$ 是满射. 因此 $N \to \widehat{N}$ 是满射.
易知 $\operatorname{Ker}(N \to \widehat{N}) = \bigcap (K + I^nM)/K$. □

习题 2.206. 环 R 理想 I, 有限 R-模 M. 若 R 是 I-进完备的, 且 $\bigcap I^nM = 0$, 则 M 是 I-进完备的. 这是**命题 2.200** 的直接应用.

推论 2.207. 环 R 理想 I, R-模 M. 若 R 是 I-进完备的, $\bigcap I^nM = 0$, 且 M/IM 是有限 R/I-模, 则 M 是 I-进完备的有限 R-模.

证明. 设 $x_1, \cdots, x_n \in M$ 使它们在 M/IM 中的像作为 R/I-模生成元组. 记 $M' = Rx_1 + \cdots + Rx_n \subset M$, 由**命题 2.200** 知 $\widehat{M'} \to \widehat{M}$ 满, 且 $\bigcap I^nM' \subset \bigcap I^nM = 0$, 因此由前述练习 M' 是完备的, 从而 $M' \to \widehat{M}$ 是满射. 最后 $\operatorname{Ker}(M \to \widehat{M}) = \bigcap I^nM = 0$, 因此 $M \cong M' \cong \widehat{M}$. □

2.12.2 完备化与各种有限性条件

这一小节关心当一些好的有限性条件 (主要是诺特) 成立时, 完备化会有怎样优秀的表现. 注意, 环同态 $R \to S$, **有限**指 S 作为 R-模有限生成, **有限型**指 S 作为 R-代数有限生成.

命题 2.208. 诺特环 R 理想 I. (1) 有限 R-模的短正合列 $0 \to K \to N \to M \to 0$ 诱导短正合列 $0 \to \widehat{K} \to \widehat{N} \to \widehat{M} \to 0$. (2) 若 M 是有限 R-模, 则 $\widehat{M} = M \otimes_R \hat{R}$.

证明. (1) 对每个 n 有 $0 \to K/(I^nN \cap K) \to N/I^nN \to M/I^nM \to 0$. **Artin–Rees 引理**告诉我们存在 $c > 0$ 使 $I^nN \cap K = I^{n-c}(I^cN \cap K)$ 对一切 $n \geq c$, 故 Mittag-Leffler 条件得到满足, 结合 $I^nK \subset I^nN \cap K \subset I^{n-c}K$, 故 $\widehat{K} = \lim K/(I^nN \cap K)$, 我们得到了所需正合列. (2) 设 $0 \to K \to R^{\oplus t} \to M \to 0$ 是 M 的表现, 考虑如下交换图表

$$\begin{tikzcd}
 & K \otimes_R \hat{R} \arrow[r] \arrow[d] & R^{\oplus t} \otimes_R \hat{R} \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes_R \hat{R} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widehat{K} \arrow[r] & \widehat{R^{\oplus t}} \arrow[r] & \widehat{M} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

第一行正合, 由 (1) 知第二行正合, 由**命题 2.200** 得所有列都是满射而中间列是同构, 至此, **蛇引理**立刻推出我们所需的结论. □

推论 2.209. 设诺特环 R 理想 I, (1) $R \to \widehat{R}$ 平坦, (2) $\widehat{\bullet} : \mathsf{fgMod}_R \to \mathsf{Mod}_R$ 是正合函子.

证明. (1) 根据同调代数习题中**平坦的等价刻画**, 若每个理想 $I \subset R$ 都有 $I \otimes_R M \to R \otimes_R M = M$ 是单射则 M 是平坦 R-模. (2) 是**命题 2.208 (1)** 的重述. □

推论 2.210. 若 $(R, \mathfrak{m})$ 诺特局部, 理想 $I \subset \mathfrak{m}$, $\widehat{R}$ 指对 I 完备化, 则 $R \to \widehat{R}$ 忠实平坦.

证明. 考虑 $R \to \widehat{R} \to R/I \to R/\mathfrak{m}$ 证明了 $\mathfrak{m} \in \operatorname{Im}(\operatorname{Spec} \widehat{R} \to \operatorname{Spec} R)$, 于是结合前一推论得知平坦, 再由**引理 2.95 (4)** 可判定 $R \to \widehat{R}$ 忠实平坦. □

命题 2.211. 诺特环 R 理想 I, 则 $\widehat{R}$ 也是诺特环.

证明. 设 $f_1, \cdots, f_n$ 是 I 生成元, 由**命题 2.200** $R[X_1, \cdots, X_n]$-模满射 $R[X_1, \cdots, X_n] \to R, X_i \mapsto f_i$ 对理想 $(X_1, \cdots, X_n)$ 完备化诱导满射 $R[\![X_1, \cdots, X_n]\!] \to \widehat{R}$. 由 **Hilbert 基定理**得. □

命题 2.212. $(R, \mathfrak{m}) \to (S, \mathfrak{n})$ 是局部环同态 (即 $\mathfrak{m}$ 的像含于 $\mathfrak{n}$), 满足 $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ 都是有限生成理想. 用 $\widehat{R}, \widehat{S}$ 记关于 $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ 的局部化. 假设 $\dim_{R/\mathfrak{m}}(S/\mathfrak{m}S) < +\infty$, 那么 $\widehat{S}$ 也等于 S 的 $\mathfrak{m}$-进完备化, 且 $\widehat{S}$ 是有限 $\widehat{R}$-模.

证明. 条件 $\dim_{R/\mathfrak{m}}(S/\mathfrak{m}S) < +\infty$ 说明 $S/\mathfrak{m}S$ 是一个 Artin 环. 于是 $\mathfrak{n} = \sqrt{\mathfrak{m}S}$, 结合有限生成 $\mathfrak{n}^t \subset \mathfrak{m}S \subset \mathfrak{n}$, 因此由**习题 2.204** 得知关于 $\mathfrak{m}S, \mathfrak{n}$ 完备化一样. 再由 $\mathfrak{m}$ 有限生成, **推论 2.101** 得 $\widehat{R}, \widehat{S}$ 是 $\mathfrak{m}$-进完备的, 于是**推论 2.207** 推出 $\widehat{S}$ 是有限 $\widehat{R}$-模. □

推论 2.213. R 是诺特环, $R \to S$ 是有限环同态, 设 $\mathfrak{p} \subset R$ 是素理想, 记 $\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_m$ 是 S 上满足在 R 原像等于 $\mathfrak{p}$ 的所有素理想 (根据**命题 2.71** 可知只有有限多个), 那么

$$\widehat{R_{\mathfrak{p}}} \otimes_R S = \widehat{S_{\mathfrak{p}}} = \widehat{S_{\mathfrak{q}_1}} \times \cdots \times \widehat{S_{\mathfrak{q}_m}}.$$

所有的局部环都是关于极大理想完备化, $\widehat{S_{\mathfrak{p}}}$ 是关于 $\mathfrak{p}$ 的完备化.

证明. 第一个等式是**命题 2.208**, 注意 $S_{\mathfrak{p}} = S \otimes_R R_{\mathfrak{p}}$. 于是不妨设 $(R, \mathfrak{p})$ 是诺特局部环. 由前述命题, $\mathfrak{q}_i S_{\mathfrak{q}_i}$-进完备化 $\widehat{S_{\mathfrak{q}_i}}$ 等于它的 $\mathfrak{m}$-进完备化, 由**命题 2.71**, 对每个 $n \geq 1$, $S/\mathfrak{m}^n S$ 的素理想都一一对应于 S 的极大理想 $\mathfrak{q}_1, \cdots, \mathfrak{q}_m$, 于是 Artin 环的性质**性质 2.33(3)** 告诉我们 $S/\mathfrak{m}^n S = \prod S_{\mathfrak{q}_i}/\mathfrak{m}^n S_{\mathfrak{q}_i}$, 取完备化后注意**命题 2.208** 得到 $\widehat{R} \otimes_R S = \widehat{S}$. □

虽然与完备化有关的内容很多, 但是需要其他知识作为铺垫, 我们把它们放在后面的节.

2.13 赋值环（Valuation Ring）

2.13.1 定义和基本性质

首先我们用一个不那么直观的方式定义赋值环. 这种意义下域也是赋值环.

定义 2.214. (1) 设 K 是域. 局部环 $A, B \subset K$, 若 $A \subset B$ 且 $\mathfrak{m}_A = \mathfrak{m}_B \cap A$ 则称 B 支配 A. 显然支配是偏序. (2) 若局部整环 A 是 $\operatorname{Frac} A$ 中在支配下极大者, 则称 A 为一个**赋值环**.

首先解决存在性问题.

命题 2.215. 给定域 K 中的局部环 A, 则存在（显然唯一）分式域 K 的赋值环支配 A.

证明. 假设 K 域局部环在支配下全序集 $\{A_i\}$, 考虑 $B = \bigcup A_i$, 它显然是支配全体 A_i 的局部环. 由 **Zorn 引理**只需证若 $A \subset K$ 是分式域非 K 的局部环, 则存在真包含 A 的局部环 $B \subset K$ 支配 A. 为此取 $t \notin \operatorname{Frac} A$, 若 t 在 A 上超越则 $A[t]_{(t)+\mathfrak{m}_A}$ 支配 A; 若 t 在 A 上代数, 设 $a \in A$ 使 at 在 A 上整, 此时 A, ta 生成的子环 $A' \subset K$ 是 A 上整, 根据**命题 2.71(素理想上行)** 存在 A' 的素理想 $\mathfrak{p}$ 使 $\mathfrak{p} \cap A = \mathfrak{m}_A$, 于是 $A'_{\mathfrak{p}}$ 支配 A, 结合 $t \in \operatorname{Frac} A'$ 知 $A \subsetneq A'_{\mathfrak{p}}$. □

然后是一个重要的判定法则, 仅从元素的可逆性上观察, 有如下的命题:

命题 2.216. 设环 $A \subset K$. 则 A 是以 K 为分式域的赋值环当且仅当对 $x \in K^\times$, $x \in A, x^{-1} \in A$ 至少其一成立.

证明. 先看左推右, 设 $x \notin A$, 用 A' 记 A, x 在 K 生成的子环. 因为 A 是赋值环因此 A' 没有 $\mathfrak{m}_A$ 上的素理想, 因为 $\mathfrak{m}_A$ 在 A 极大, A' 任何包含 $A'\mathfrak{m}_A$ 的极大理想交下去都是 $\mathfrak{m}_A$, 故只能 $A'\mathfrak{m}_A = A'$. 记 $1 = \sum t_i x^i, t_i \in \mathfrak{m}_A$, 于是 $(1-t_0)(x^{-1})^d = \sum t_i (x^{-1})^{d-i}$. 这表明 x^{-1} 在 A 上整, 类似前一命题方法可构造更大支配的局部环而与赋值环要求的极大性矛盾.
再看右推左, 不妨设 $A \neq K$, 先证明 A 局部, 若有两个极大理想 $\mathfrak{m}_1 \neq \mathfrak{m}_2$, 设 $x_1 \in \mathfrak{m}_1 \backslash \mathfrak{m}_2, x_2 \in \mathfrak{m}_2 \backslash \mathfrak{m}_1$, 则 $x_1/x_2, x_2/x_1$ 都不在 A 矛盾（实际上这时不存在两个理想互不包含）. 再设有 A' 支配 A, 若 $x \in A'$ 且 $x \notin A$ 则 $x^{-1} \in \mathfrak{m}_A \subset \mathfrak{m}_{A'}$ 故 $1 \in \mathfrak{m}_{A'}$ 矛盾. □

我们整理一些局部环的简单性质, 实际上很多能从前面的证明中看出.

性质 2.217. (1) 设 L/K 是域扩张, $B \subset L$ 是 L 为分式域的赋值环, 则 $A = K \cap B$ 是以 K 为域的赋值环. 若 L/K 是代数扩张且 $B \neq L$ 则 A 不是域. (2) 赋值环商掉素理想或者作任意局部化都还是赋值环. (3) 赋值环都是正规环. (4) 赋值环的任意两个理想互相包含. (5) 域 K 中的环 R, 则 R 在 K 的整闭包 $\overline{R}$ 是满足 $R \subset R' \subset K$ 的赋值环 R' 的交.

证明. (3) 和 (4) 是前一命题的细节, (1) 的第一部分和 (2) 容易验证. 对 (1) 第二部分, 只需证 $A \neq K$, 否则 $A = K \subset B$ 是整扩张, 与**推论 2.72** $\dim A = \dim B$ 矛盾. 对 (5), 赋值环正规因此 $\overline{R}$ 含于每个 R', 反过来若 $x \in K$ 在 A 上不整, 取 $y = x^{-1}$ 则 $x \notin A[y]$ 故 y 不可逆, 设 $A[y]$ 中极大理想 $\mathfrak{m}$ 含 y, 取 R' 是 K 的支配 $A[y]_{\mathfrak{m}}$ 的赋值环, 故 $y \in \mathfrak{m}_{R'}$ 从而 $x \notin R'$. □

命题 2.218 (更多的等价定义). 设 A 是整环, 分式域为 K, 则 **TFAE**:
(1) A 是赋值环, (2) A 的理想在包含下全序, (3) A 的主理想在包含下全序, (4) A 是局部环且 A 的有限生成理想都是主理想.

证明. (1) 推 (2) 已知, (2) 推 (3) 设 $I \not\subset J$, 取 $a \in I \backslash J$, 则对一切 $b \in J$ 有 $a \notin (b)$ 故 $(b) \subset (a) \subset I$ 从而 $J \subset I$. (3) 推 (4) 由理想全序知极大理想唯一从而局部, 而任意 $a, b \in A$ 有 $(a) \subset (b)$ 或 $(b) \subset (a)$ 从而 (a, b) 单生成. 最后是 (4) 推 (1), 对非零 $a, b \in A$, 记 $I = (a, b)$ 是主理想. 于是 $I/\mathfrak{m}_A I$ 是一维 $A/\mathfrak{m}_A$-线性空间, 因此存在 $u, v \in A$ 至少其一可逆使 $ua + vb = xa + yb; x, y \in \mathfrak{m}$. 若 $u \in A^\times$ 则 $u - x \in A^\times$ 从而有 $a/b = (y - v)/(u - x) \in A$, 而 $v \in A^\times$ 推出 $v - y \in A^\times$ 那么 $b/a \in A$, 故 $\operatorname{Frac} A$ 中非零元素与其逆至少其一在 A 从而 A 是赋值环. □

本小节的最后我们引入值群和赋值映射, 以解释赋值环一名字的来源.

定义 2.219. 一个**全序 Abel 群** Γ 是一个带有全序（任两个元素可比较）的满足 $a \leq b \implies a + c \leq b + c$ 的 *Abel* 群. 全序 *Abel* 群间的**态射**指保持序关系的群同态.
引入记号 ∞ 作为最大元, 定义 $a + \infty = \infty, a < \infty$ 对任意 $a \in \Gamma$.

定义 2.220. 设 A 是赋值环, 定义 $\Gamma(A) := \operatorname{Frac}(A)^\times / A^\times$, 称为 A 的**值群**. 定义自然的 $v : \operatorname{Frac}(A) \to \Gamma(A) \cup \{\infty\}, v(0) = 0$ 为**赋值映射**, 对 $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ 定义 $\gamma \geq \gamma'$ 若 $\gamma - \gamma' \in v(A - \{0\})$, 这样 $\Gamma(A)$ 是一个全序的无挠 *Abel* 群. 若 $\Gamma(A) \cong \mathbb{Z}$, 则称 A 为一个**离散赋值环**.
$\Gamma(A) \cup \{\infty\}$ 中的一个**理想**指的是一个子集 I, 满足 $\gamma \geq 0$ 对一切 $\gamma \in I$, 且 $\gamma' \geq \gamma, \gamma \in I$ 推出 $\gamma' \in I$. **素理想**指的是理想 I 满足 $\gamma + \gamma' \in I, \gamma, \gamma' \geq 0$ 推出 γ 或 γ' 在 I 中.
值群中的理想, 按照取赋值包含在值群理想的元素的方式, 一一对应于赋值环的理想, 这种对应关系保持偏序, 且值群的素理想一一对应环的素理想.

定义 2.221. 一般环 A 上的一个**赋值**, 指一个全序 *Abel* 群 Γ 和一个 $v : A \to \Gamma \cup \{\infty\}$ 使
(1) $v(1) = 0, v(0) = \infty$, (2) $v(ab) = v(a) + v(b)$, (3) $v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$.
(4) $\operatorname{Im} v$ 生成整个 Γ. 两个赋值的**等价**指值群的保序同构映射, 将 ∞ 映到 ∞.

2.13.2 离散赋值环（DVR）、Krull–Akizuki 与 Dedekind 环

本小节介绍一系列和一维诺特整环有关的性质. 首先是赋值环最典范例子, 即离散赋值环. 然后是 Krull–Akizuki 理论与 Dedekind 环, 这些内容也是基础数论中的重要工具.

定理 2.222 (DVR 的等价刻画)**.** 关于局部环 R, **TFAE**:
(1) R 是离散赋值环, (2) R 是诺特赋值环, 但不是域, (3) R 是主理想整环, 但不是域, (4) R 是一维正规诺特环, (5) R 是一维正则局部环, (6) R 是诺特的且极大理想单生成.

证明. (1) 推 (2) 容易检查理想升链对应非负整数降链, 总会稳定. (2) 推 (3) 注意赋值环的有限生成理想, 由诺特所有理想都是主理想. (3) 推 (4) **Krull 主理想定理**告诉我们这个环一维, 且主理想整环是唯一分解整环, 因此正规. (4) 推 (5) 注意它的极大理想是唯一素理想, 因此对一切 $a \in \mathfrak{m} - \{0\}$, $\sqrt{(a)} = \mathfrak{m}$ 故由诺特 $\mathfrak{m}^n \subset (a)$ 对某 n. 不妨要求此 n 最小, 取 $b \in \mathfrak{m}^{n-1} \backslash (a)$. 考虑 $t := a/b \in \operatorname{Frac} R$, 首先 $t^{-1}\mathfrak{m} \subset R$, 不难检查 $t^{-1}\mathfrak{m}$ 是 R 的理想. 若它含于 $\mathfrak{m}$ 则由**性质 2.66** 知 t^{-1} 在 R 上整故由正规知 $t^{-1} \in R$ 这样 $b = t^{-1}a \subset (a)$ 与定义矛盾. 故 $R = t^{-1}\mathfrak{m}$ 即 $(t) = \mathfrak{m}$. 从而 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 作为 $R/\mathfrak{m}$-线性空间由 t 的像生成. (5) 推 (6) **推论 2.53** 的具体计算说明极大理想单生成. (6) 推 (1) 设 $\mathfrak{m} = (t)$. 由 **Krull 交定理**得 $\bigcap \mathfrak{m}^n = 0$, 若 $a \neq 0$ 则存在非负整数 $v(a)$ 使 $a \in \mathfrak{m}^{v(a)} \backslash \mathfrak{m}^{v(a)+1}$, 因此 a 等于 $t^{v(a)}$ 乘一个可逆元从而 $(a) = (\pi^k)$, 由诺特知每个理想都有限生成, 形如 (π^n), 不难推出 R 离散赋值. □

定义 2.223. 离散赋值环极大理想的任一生成元称为一**枝花**.

例 2.224. 典范的例子: 我们分类 $\mathbb{Q}$ 中所有赋值环 R. 首先它一定包含 $\mathbb{Z}$, 其次 $\mathbb{Z} \cap \mathfrak{m}_R$ 一定是素理想, 设它为 (p). 说明 $\mathbb{Z}$ 中不是 p 的倍数者都是 R 中的可逆元, 因此 R 至少包含整个 $\mathbb{Z}_{(p)}$. 由于 $\mathbb{Z}$ 唯一分解, 比它更大的环只有 $\mathbb{Q}$, 因此 $R = \mathbb{Z}_{(p)}$ 或 $\mathbb{Q}$. 前者完备化即 $\mathbb{Z}_p$.
设 k 是域, 考虑 $k(T)$ 上在 k 赋值平凡的赋值环 R, 首先它总有 T 或 $1/T$ 的一个, 不妨设有 T, 那么 $k[T] \cap \mathfrak{m}_R$ 是素理想, 同样可说明 R 是某 $k[T]$ 上不可约多项式的素理想的局部化.

引理 2.225. A 是一维诺特整环, 分式域 K, 则对非零元 $a \in A$ 和有限生成 A-模 M 有等式 $\ell_A(M/aM) - \ell_A(M[a]) = n\ell_A(A/a)$ 成立. 其中 $n = \dim_K(M \otimes_A K), M[a] := \operatorname{Ker}(a : M \to M)$.

证明. 先看 $n = 0$, 此时 $\operatorname{Supp}_A(M)$ 只有极大理想, 因此 $\ell_A(M) < +\infty$, 考虑正合列

$$0 \to M[a] \to M \to M \to M/aM \to 0.$$

于是 $\ell_A(M/aM) = \ell_A(M[a])$ 总成立. 现在对于模正合列 $0 \to N \to M \to Q \to 0$ 是有限生成

A-模短正合列, 那么对它乘 a 的图表, 即下列

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, "a"] & M \arrow[r] \arrow[d, "a"] & Q \arrow[r] \arrow[d, "a"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & M \arrow[r] & Q \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

使用**蛇引理**得知命题若对 N, Q 成立就会对 M 成立. 现 $n > 0$, 取 M 的元素 $m_1, \cdots, m_n$ 使在 $M \otimes_A K$ 的像是一组基, 这定义了 $A^n \hookrightarrow M$ 的单射, 且余核 n 为 0. 于是只需对 $M = A^n$ 进而只需对 $M = A$ 检查. 注意 $A/(a)$ 有限长度, 它的素理想都极大从而它是 Artin 环. □

引理 2.226. *A 是一维诺特整环, 分式域 K, 则对非零元 $a \in A$ 和 A-子模 $M \subset V$ 有等式 $\ell_A(M/aM) \leq \dim_K V \cdot \ell_A(A/a)$ 成立, 特别的 $\ell_A(M/aM) < +\infty$. 其中 V 是 K-线性空间.*

证明. 首先 M 有限生成时, 题述条件保证 $M[a] = 0$ 从而直接由前一引理可得. 一般情况用反证, 若 M 使 $\ell_A(M/aM) > n\ell_A(A/a)$, 则 $aM = M_0 \subsetneq \cdots \subsetneq M_\ell = M$ 使 $\ell > n\ell_A(A/a)$. 对 $i = 1, \cdots, \ell$ 取 $m_i \in M_i \backslash M_{i-1}$, 取 M' 为诸 m_i 生成的 M 的子模. 再用 M'_j 记 aM' 与 $m_1, \cdots, m_j$ 生成的子模. 则 $aM' = M'_0 \subsetneq \cdots \subsetneq M'_\ell = M'$, 而 M' 有限生成而矛盾. □

定理 2.227 (Krull–Akizuki)**.** *A 是诺特一维整环, $A \subset B$, B 是整环, 这诱导分式域 $K \subset L \neq B$, 设 $[L : K] < +\infty$. 那么 B 诺特一维. 若给定 A 的极大理想 $\mathfrak{m}$, 考虑 B 的满足 $\mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{m}$ 的素理想 $\mathfrak{n}$, 则 $\mathfrak{n}$ 极大, 符合条件的 $\mathfrak{n}$ 有限多, 且 $[B/\mathfrak{n} : A/\mathfrak{m}] < +\infty$.*

证明. 先证任意 $0 \neq b \in B$, 有 $\ell_A(B/b) < +\infty$. 设 b 在 K 极小多项式 $b^n + c_1 b^{n-1} + \cdots + c_n = 0$ 则 $c_n \neq 0$, 用 $0 \neq a \in A$ 通分诸 c_i 得 $ac_n \in bB$, 注意 ac_n 是 A 中非零元, 由前一引理 $\ell_A(B/ac_nB) < +\infty$ 而 $ac_nB \subset bB$ 故 $\ell_A(B/bB) < +\infty$.
接下来证诺特, 对 B 的非零理想 I 取其中非零元 b 有 $\ell_B(I/bB) \leq \ell_A(I/bB) \leq \ell_A(B/bB) < +\infty$, 因此 I/bB 是有限生成 B-模, 故 I 也是, 因此 B 诺特. 再看一维, 对每个素理想 $\mathfrak{p}$, 取非零 $b \in \mathfrak{p}$ 都有 B/bB 是 Artin 的故 $\mathfrak{p}$ 在 b 上极小, 从而 **PIT** 推出 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq 1$. 最后对 A 的极大理想 $\mathfrak{m}$, 任取 $a \in \mathfrak{m}$, 前述引理知 $\ell_B(B/\mathfrak{n}) \leq \ell_A(B/\mathfrak{n}) \leq \ell_A(B/aB) < +\infty$, 因此 $B/\mathfrak{n}$ 是 Artin 整环而是域, $\mathfrak{n}$ 是 Artin 环 B/aB 的极大理想故有限多, $\dim_{A/\mathfrak{m}}(B/\mathfrak{n}) = \ell_A(B/\mathfrak{n}) < +\infty$. □

推论 2.228. *R 是诺特局部整环, 分式域 $K \neq R$. 设 L/K 是有限生成域扩张, 则存在离散赋值环 V 分式域为 L 且 V 支配 R.*

证明. 若 L/K 超越, 取超越基 $x_1, \cdots, x_r$ 并用 $R[x_1, \cdots, x_r]_{\mathfrak{m}_R + (x_1, \cdots, x_r)}$ 代替 R 可设 L/K 是有限扩张. 接下来由**命题 2.215** 取赋值环 $A \subset K$ 支配 R, 考虑 R 的极大理想 $\mathfrak{m}$ 的一个生成元组 $x_1, \cdots, x_r$. 取 x_i 中在 A 赋值最小的 x_r, 定义 $S = R[x_1/x_r, \cdots, x_{r-1}/x_r] \subset A$. 现在

$\mathfrak{m}S = x_rS \subsetneq S$ 是主理想, 因此取 x_rS 上的一个极小素理想 $\mathfrak{q}$, **PIT** 保证它高度为 1 且显然 $\mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{m}$, 现在用 $S_\mathfrak{q}$ 替代 R 可设 $\dim R = 1$. 于是使用 **Krull–Akizuki**, 设 $S \subset L$ 为 R 在 L 的整闭包, 那么它诺特一维正规. 由**素理想上行**, 存在 $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} S$ 交到 R 是其极大理想, 因此 $V = S_\mathfrak{q}$ 局部诺特一维正规且支配 R, 结合 **DVR 的等价刻画**结论得证. □

定义 2.229. 一个环被称为 **Dedekind 环**指它是诺特一维正规整环.

推论 2.230. 设 A 是 *Dedekind* 环, K 是其分式域, L/K 是有限扩张, 则 A 在 L 中的整闭包 B 也是 *Dedekind* 环. 检查 B 分式域是 L 且 $B \neq L$, 然后直接对 B 使用上述定理.

另外关于 Dedekind 环有经典的性质, 我们现在已经有了讨论所需的一切工具.

定理 2.231 (理想唯一分解)**.** (1) *Dedekind* 环在极大理想处局部化得到离散赋值环.

(2) *Dedekind* 环中非零理想都存在（差置换下）唯一写成有限个素理想乘积的形式.

(3) 在 (2) 的形式下, 一个理想分解中某个素理想出现的次数等于它在该素理想处局部化后的赋值. 作为推论, 理想包含推出分解式的反向包含关系.

(4) 给定非零理想, 总能找到另一个非零理想, 使二者乘积是主理想.

证明. (1) 注意 **DVR 的等价刻画**以及局部化保持正规（习题）. 再证 (2) 的存在性, 对非零 $I \subset R$, 若它素则已经做完, 否则考虑包含它的极大理想 $\mathfrak{p}$, 记 $J = \{x \in R : x\mathfrak{p} \subset I\}$, 我们声称 $J\mathfrak{p} = I$. 只需检查对每个 R 的极大理想 $\mathfrak{m}$ 有 $J_\mathfrak{m}\mathfrak{p}_\mathfrak{m} = I_\mathfrak{m}$. 检查 $J_\mathfrak{m} = \{x \in R_\mathfrak{m} : x\mathfrak{p}_\mathfrak{m} \subset I_\mathfrak{m}\}$（利用 $\mathfrak{p}$ 有限生成）, 而在离散赋值环中, 无论 $\mathfrak{p}$ 是否等于 $\mathfrak{m}$, 这一事实都是易知的.
在 $\mathfrak{p}$ 处局部化保证 $I \subsetneq J$, 现在把 I 对应 J 地过程对 J 做, 这样迭代下去, 由诺特性知有限步后会停止, 必止于一个素理想, 于是分解存在性得知. 然后 (3) 在分解存在性得知后易证, 进而 (2) 的唯一性也得知. 最后 (4) 只需对 $0 \neq x \in I$, 考虑 $I \subset (x)$ 的分解, 然后由 (3) 理想包含推出分解式的反向包含, 这样一来总能从 I 出发补上一些素理想乘积得到主理想. □

虽说存在唯一素理想分解也能反过来证明环是 Dedekind 的, 但这并没有实际意义.

2.13.3 赋值谱（Valuation Spectrum）*

本小节介绍一些工具, 为进制拓扑做准备.

定义 2.232. 设 A 是环, A 的**赋值谱** $\operatorname{Spv} A$ 集合上是 A 全体赋值的等价类, 由全体

$$\operatorname{Spv}(A)\left(\frac{f}{g}\right) = \{[v] \in \operatorname{Spv} A : v(f) \geq v(g) \neq \infty\}$$

作为开集生成的拓扑.

例 2.233. 对 $A=\mathbb{Q}$ 不难证明上面的赋值只有 p-进赋值和平凡赋值. 而开集恰是所有余有限集并上平凡赋值, 因此 $\operatorname{Spv}\mathbb{Q}$ 同胚 $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$. 而对 $A=\mathbb{Z}$, 其上赋值更多些, 因为映成 ∞ 的点是素理想, 可以非零, 因此它比 $\operatorname{Spv}\mathbb{Q}$ 恰好多所有 $\mathbb{F}_p$ 上的平凡赋值诱导者.

定义 2.234. 一个拓扑空间 X 被称为**谱空间**, 指它满足如下的三个条件:
(1) X 拟紧, (2) X 有一个拟紧开集基, 且在有限交下封闭（即全体主开集）, (3) X 是 *Sober* 的（即 X 的每个不可约闭集存在唯一的一般点）.
谱空间 X,Y, 连续映射 $f:X\to Y$ 称为**谱映射**, 指任意拟紧集原像都拟紧.

Hochster 的一个定理告诉我们, 谱空间都是环的谱. 我们虽然不会在这里证明这个结论, 但读者应该自由地用环谱一侧的纯拓扑结果来想象它. 先来研究一些映射.

性质 2.235. 有自然连续映射 $\operatorname{supp}:\operatorname{Spv}A\to\operatorname{Spec}A$, 将一个赋值 v 映到素理想（**支集**）$\operatorname{supp}(v):=v^{-1}(\infty)$. 检查主开集 $\operatorname{Spec}A_f$ 的原像为 $\operatorname{Spv}(A)(0/f)$.

定理 2.236. 对任意环 A, $\operatorname{Spv}A$ 都是谱空间. 诸 $\operatorname{Spv}(A)(f/g)$ 是拟紧开集, $\operatorname{Spv}A$ 上的可构造集恰是全体 $\{v:v(f)\le v(g)\}$ 者生成的 *Bool* 代数.

证明. 核心技术是**习题 9.15**. 我们依照如下的步骤考虑. (1) 注意如下的观察.

$$\{v:v(f)\geq v(g)\}=\operatorname{Spv}(A)\left(\frac{f}{g}\right)\cup\left(\operatorname{Spv}(A)\left(\frac{0}{g}\right)\cup\operatorname{Spv}(A)\left(\frac{0}{f}\right)\right)^c$$
$$\operatorname{Spv}(A)\left(\frac{f}{g}\right)=\{v:v(f)\geq v(g)\}\cap(\{v:v(g)\geq v(0)\})^c.$$

这样 $\operatorname{Spv}(A)(f/g)$ 生成的 Bool 代数（有限交并和补）与 $\{v:v(f)\le v(g)\}$ 生成者一样. 另外不难检查 $\operatorname{Spv}A$ 是 Kolmogorov 的.
(2) 考虑单射 $\rho:\operatorname{Spv}A\to 2^{A\times A}$, 后者为 $A\times A$ 的幂集. 将 $v\mapsto\{(f,g):v(f)\le v(g)\}$, 考虑 $2^{A\times A}$ 上赋予乘积拓扑, 那么根据 **Tychonoff 定理**, 它是紧的. 现在 ρ 的像定义了 A 上的一个二元关系, 记作 $\bullet|\bullet$ (不妨想象为整除), 对一切 $f,g,h\in A$, 我们有
(a) $f|g$ 或 $g|f$ 至少其一成立, (b) $f|g$ 且 $g|h$ 推出 $f|h$, (c) $f|g$ 且 $f|h$ 推出 $f|g+h$, (d) 若 $f|g$ 则 $fh|gh$, 反过来若 $fh|gh$ 且 $0\nmid h$ 则 $f|g$, (e) $0\nmid 1, 1|f, f|0$.
(3) 然后我们检查满足上述五条的 $|$ 总在 ρ 的像中. 实际上定义等价关系 $a\sim a'$ 当且仅当 $a|a'$ 且 $a'|a$ (条件 (a),(b) 确认了它是等价关系), 那么等价类, 除去 0 所在者, 在乘法作为运算下, 将形成一个满足消去律的全序 Abel 幺半群 (条件 (a) 确认全序, 环的乘法交换性和结合性推出 Abel 半群, (e) 确定幺元, (d) 推出消去律), 且满足**定义 2.221**(条件 (e), (d) 和 (c)). 这样 ρ 的像恰是这五条所确认者. 这样 $2^{A\times A}$ 的乘积拓扑诱导了 $\operatorname{Spv}A$ 上的拓扑 τ.

(4) 检查上述五条对给定 f,g,h 都定义了 $2^{A\times A}$ 中的闭集, 那么 τ 使 $\operatorname{Spv} A$ 成为紧空间. 观察 $\{(f,g): v(f)\le v(g)\}$ 生成的 Bool 代数生成的拓扑与 τ 同, 结合 (1) 得 $\tau=(\operatorname{Spv} A)_{\text{cons}}$. 对 $(\operatorname{Spv} A)_{\text{cons}}$, 可构造集族 $\operatorname{Spv}(A)(f/g)$ 使用**习题 9.15** 推出 $\operatorname{Spv}(A)$ 是谱空间. □

命题 2.237. 环同态 $\varphi: A\to B$ 诱导了自然的谱映射 $\operatorname{Spv}(\varphi):\operatorname{Spv} B\to \operatorname{Spv}(A)$, $\operatorname{Spv}, \operatorname{Spec}$ 都是 CRing 到谱空间（在谱映射下）范畴的反变函子. 而自然映射 supp 是上两函子间的自然变换（特别的 $\operatorname{supp}:\operatorname{Spv}(A)\to \operatorname{Spec} A$ 总是谱映射）. 参照**习题 9.14**.

接下来我们考虑赋值谱上的特殊化和一般化. 用 A 记一个环, 回顾若 $\operatorname{Spv} A$ 中两点 v,w 满足 $v\in\overline{\{w\}}$, 则称 v 是 w 的**特殊化**或说 w 是 v 的**一般化**, 此时 $\operatorname{supp} v\supset \operatorname{supp} w$.

观察 $\operatorname{supp}:\operatorname{Spv} A\to \operatorname{Spec} A$ 的纤维. 对于 v, 记 $K(v):=\operatorname{Frac}(A/\operatorname{supp}(v))$,

那么 $\operatorname{supp}^{-1}(\operatorname{supp}(v))=\operatorname{Spv}(K(v))$, 所以我们最先来看域的情形.

性质 2.238. 设 K 是域, v,w 是 K 上的赋值. 则 v 是 w 的特殊化当且仅当赋值环 $A(v)\subset A(w)$. 其中 $A(v):=\{x: v(x)\ge 0\}$, 类似地定义 $A(w)$.

定义 2.239. 全序 *Abel* 群 Γ 的**凸子群**, 指子群 Δ 满足**凸性条件** $\delta\le\gamma\le\delta';\delta,\delta'\in\Delta$ 推出 $\gamma\in\Delta$. 检查赋值环 A 和其分式域 K 之间的所有赋值环一一对应于 A 值群中的凸子群, 子群中者是全体可逆元. 典范的例子是 $K=k(\!(Y)\!)(\!(X)\!)=\operatorname{Frac}(k(\!(Y)\!)[\![X]\!])$, 我们观察两个赋值环 $A_1=k(\!(Y)\!)[\![X]\!], A_2=k[\![Y]\!]+XA_1$. 那么 $A_2\subset A_1\subset K$, 其中 A_2 上按照字典序先观察 X 的最低次项, 然后再观察 Y 的最低次项, 因此值群是 $\Gamma=\mathbb{Z}^2$ 带字典序; 而 A_1 则是 Y 对应的凸子群 $H=\mathbb{Z}$ 对应的赋值环, A_1 的值群则是只有 X 者, 即商群 Γ/H.

定义 2.240. 若 $\operatorname{supp}(v)=\operatorname{supp}(w)$ 且两点具有特殊化（resp. 一般化）的关系, 则称二者的关系为**垂直特殊化 (resp. 垂直一般化)**. 考虑 $v\in\operatorname{Spv} A$ 的全体垂直一般化, 由前述性质, 可刻画为 $A(v)\subset B\subset K(v)$ 的全体赋值环 B, 即 v 的值群 Γ_v 中的凸子群. 于是对凸子群 H, 用 $v_{/H}\in\operatorname{Spv} A$ 记这个垂直一般化. 另一方面 $v\in\operatorname{Spv} A$ 的全体垂直特殊化即全体含于 $A(v)$ 且分式域为 $K(v)$ 的赋值环, 所以同胚于 $\operatorname{Spv}(A(v)/\mathfrak{m}(v))$.

定义 2.241. 对 $v\in\operatorname{Spv} A$, Γ_v 是值群. 记 $c\Gamma_v$ 为 $\operatorname{Im} v\cap\{\gamma\in\Gamma_v:\gamma\le 0\}$ 生成的子群的凸包, 称 $c\Gamma_v$ 为 v 的**特征子群**. 马上来观察为何定义这样一个子群:

若 $H\subset\Gamma_v$ 是子群, 定义 $v_{|H}: A\to H\cup\{\infty\}$ 将 v 赋值不在 H 中的元素映为 ∞. 则它是一个赋值当且仅当 H 是包含 $c\Gamma_v$ 的凸子群. 首先凸性的要求来自于 $v(fg)\in H$ 则 $v(f),v(g)\in H$, 其次包含 $c\Gamma_v$ 是因为若 $v(f)<0$ 且 $v(f)\notin H$ 则 $v(f+1)=\min\{v(f),v(1)\}=v(f)\notin H$ 但是 $v_{|H}(f+1)=\min\{v_{|H}(f),v_{|H}(1)\}=0$ 矛盾. 当且仅当的另一侧容易验证.

在上述等价成立的情况下, 检查 $v_{|H}$ 确实是 v 的一个特殊化, 我们称之为 v 的一个**水平特殊化**. 此时 $\operatorname{supp}(v)\subset\operatorname{supp}(v_{|H})$ 且取等当且仅当 $H=\Gamma_v$.

习题 2.242. 考虑 $v \in \operatorname{Spv} A$, 用 H 记 A 的 v-凸的素理想构成的集合, v-凸素理想指它作为集合是一个 Γ_v 中凸集的完全原像, 用 S 表示 v 全体垂直特殊化的集合. 那么 S, H 都是全序的, 且 $\operatorname{supp} : S \to H$ 是保序的双射.

性质 2.243. 设 w 是 v 的水平特殊化. (1) 若 v' 是 v 的垂直特殊化, 则存在 w 的唯一垂直特殊化 w' 使得 w' 是 v' 的水平特殊化, (2) 若 w' 是 w 的垂直特殊化, 则存在 v 的垂直特殊化 v' 使得 w' 是 v' 的水平特殊化.

$$\begin{tikzcd} v \arrow[r] \arrow[d] & w \arrow[d, dashed] \\ v' \arrow[r, dashed] & \exists! w' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} v \arrow[r] \arrow[d, dashed] & w \arrow[d] \\ \exists v' \arrow[r, dashed] & w' \end{tikzcd} .$$

证明. (1) 唯一性是前述习题, 存在性考虑 H' 是 $\Gamma_{v'}$ 的凸子群, 使 $v = v'_{/H'}$, 记 L 是 $\Gamma_v = \Gamma_{v'}/H'$ 的凸子群, 使 $w = v_{|L}$, 则取 L' 为 $\Gamma_{v'}$ 的含 H' 的凸子群, 使 $L'/H' = L$, 则 $w' = v'_{|L'}$.
给定 A_i 是 K_i 中的赋值环, $(K_1, A_1) \hookrightarrow (K_2, A_2)$ 指 $A_1 \subset A_2$, 那么存在 K_2 中支配 A_1 的, 包含在 A_2 中的赋值环 B 使得 $B \cap K_1 = A_1$, 为此只需使用**命题 2.215** 取局部环为 A_1 的情形, 并在证明时在 Zorn 引理中加上包含在 A_2 的条件即可, 详细的论述留给读者.
(2) 考虑 v 到 w 的水平特殊化对应赋值环扩张 $(K(w), A(w)) \hookrightarrow (A(v)_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}, A(v)/\mathfrak{p})$, 准确地说, $\varphi : A \to A(v)_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$ 诱导对应的赋值映射且 $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{supp}(w)$. 其中 $\mathfrak{p} = \{x \in A(v) : \forall \delta \in L : v(x) > \delta\}, w = v_{|L}$. 那么存在 $A(v)_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$ 中含于 $A(v)/\mathfrak{p}$ 的赋值环 B 使得 $B \cap K(w) = A(w')$. 设 v' 是 A 的使 $\operatorname{supp} v' = \operatorname{supp} v$, 且 $A(v')$ 是 B 在 $A(v)$ 原像的赋值, 则它符合条件. □

推论 2.244. 设 $v \in \operatorname{Spv} A$, $\mathfrak{p}$ 是 A 的素理想使 $\mathfrak{p} \subset \operatorname{supp} v$.
则存在 v 的水平一般化 w 使 $\operatorname{supp} w = \mathfrak{p}$.

证明. 设 R 是 $A/\mathfrak{p}$ 局部化掉 $\operatorname{supp} v$ 对应的素理想, 则它是局部环, 用**命题 2.215** 取 $\operatorname{Frac}(A/\mathfrak{p})$ 的一个赋值环 B 支配 R, 用 w' 记 B 在 A 上对应赋值, 则 $\operatorname{supp} w' = \mathfrak{p}$. 考虑支集 $\mathfrak{p}$ 的平凡赋值 $t_{\mathfrak{p}}$, 则 w' 水平特殊化得到 $t_{\mathfrak{p}}$ 再垂直特殊化得到 v, 由前性质 (2) 知可用 w 填上左下角. □

定理 2.245 (特殊化)**.** 设 $v \in \operatorname{Spv} A$, w 是 v 的特殊化.
(1) w 可从 v 先做某垂直特殊化再做某水平特殊化得到.
(2) w 可从某 w' 做某垂直特殊化得到, 要么 w' 是 v 的水平特殊化, 要么 $c\Gamma_v = 0$ 且 w' 是某个支集包含 $\operatorname{supp}(v_{|0})$ 的平凡赋值.

证明. 先看 (2), 若 $c\Gamma_v = 0$ 且 $v(a) \le 0$ 对一切 $a \notin \operatorname{supp}(w)$, 则 $\operatorname{supp}(v_{|0}) \subset \operatorname{supp}(w)$, 于是 w' 可取作 A 的平凡赋值, 使 $\operatorname{supp}(w') = \operatorname{supp}(w)$. 故可设要么 $c\Gamma_v \neq 0$ 要么 $v(a) > 0$ 对某

$a \notin \mathrm{supp}(w)$. 先澄明两个性质. 第一, $v(x) \geq v(y), w(x) \neq \infty = w(y) \implies v(x) = v(y) \neq \infty$, 因为 $w \in \mathrm{Spv}(A)(y/x)$ 推出 $v \in \mathrm{Spv}(A)(y/x)$. 第二, 在题述两性质下, 若 $y \in \mathrm{supp}(w)$ 且 $v(x) \geq v(y)$, 总有 $x \in \mathrm{supp}(w)$. 若 $x \notin \mathrm{supp}(w)$ 则由性质一 $v(x) = v(y) \neq \infty$. 下面推矛盾:

倘若 $c\Gamma_v \neq 0$ 则存在 $a \in A$ 使 $v(a) < 0$, 则 $v(x) > v(ay), w(x) \neq 0 = w(ay)$, 故性质一推出 $v(x) = v(ay)$ 矛盾. 倘若存在 $a \notin \mathrm{supp}\, w$ 使 $v(a) > 0$, 则对 ax, y 类似操作.

于是由**习题 2.242**, $\mathrm{supp}(w)$ 对应 v 的一个水平特殊化 w', 使 $\mathrm{supp}(w) = \mathrm{supp}(w')$ 只需检查 w 是 w' 的特殊化, 设 $w \in \mathrm{Spv}(A)(f/g)$, 则 $v \in \mathrm{Spv}(A)(f/g)$, 故 $v(f) \geq v(g) \neq \infty$. 由水平特殊化定义得 $w'(f) \geq w'(g)$, 且由 $w(g) \neq \infty$ 和 $\mathrm{supp}(w) = \mathrm{supp}(w')$ 得 $w'(g) \neq \infty$.

再看 (1), 按照 (2) 的两种情况, 如果 v 先水平特殊化又垂直特殊化得到 w, 那么**性质 2.243(2)** 推出欲证. 否则可设 $c\Gamma_v = 0$, 且 w' 是某个支集包含 $\mathrm{supp}(v_{|0})$ 的平凡赋值. 利用**推论 2.244** 取 w 的水平一般化 u 使 $\mathrm{supp}(u) = \mathrm{supp}(v_{|0})$. 于是由 $v_{|0}$ 平凡, u 是 $v_{|0}$ 的垂直特殊化, 故再由**性质 2.243(2)** 存在 v 的垂直特殊化 v' 使得 u 是 v' 的水平特殊化, 这样 w 就是 v' 的水平特殊化. 那么 v' 符合题述条件. □

2.14 同调工具

接下来我们希望用同调代数的看法理解一系列交换代数问题.

2.14.1 正则序列 (Regular Sequence)

我们来定义一种序列用于刻画模中尽可能无关的一些元素, 这项技术在后文将被用来研究局部完全交. 通俗地说, 它类似于微分几何中横截相交的概念, 这暗示了 (一定条件下) 交换顺序仍然保持正则性, 更多有关内容详见后文**完全交 (Complete Intersection)** 一节.

定义 2.246. 环 R 和 R-模 M, 对 $r_1, \cdots, r_n \in R$, 它们被称为一个 M-**正则序列**指

$r_i \notin \mathrm{zdv}_R(M/(r_1, \cdots, r_{i-1})M)$ 对每个 $1 \leq i \leq n$, 其中对 R-模 N,

我们用 $\mathrm{zdv}_R(N) := \{r \in R : \exists\, 0 \neq x \in N, rx = 0\}$ 表示**零因子**构成的集合.

有时定义正则序列也要求 $M/(r_1, \cdots, r_i)M \neq 0$, 很多时候我们关心局部环中 $r_1, \cdots, r_n \in \mathfrak{m}$ 和模有限生成的情形, 这时 **Nakayama 引理**的标准情形保证 $M \neq 0$ 时此非零条件成立. 不这样额外要求的好处是迅速观察出是正则序列被环局部化保持, 因为局部化平坦.

命题 2.247. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是诺特局部环, M 是有限生成 R-模, $r_1, \cdots, r_n \in \mathfrak{m}$ 是 M-正则序列, 则任意置换它们仍然得到 M-正则序列.

证明. 因为 S_n 被全体相邻对换 $(i\quad i+1)$ 生成, 因此只需证明 $n=2$ 情形. 观察

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "r_1"] \arrow[d, "r_2"] & M \arrow[r] \arrow[d, "r_2"] & M/r_1M \arrow[r] \arrow[d, "r_2"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "r_1"] & M \arrow[r] & M/r_1M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}.$$

考虑 $K=\mathrm{Ker}(r_2: M\to M)$, 诺特性知 K 有限生成, 使用**蛇引理**推出 $r_1: K\to K$ 是满射, 还推出 $r_1: M/r_2M\to M/r_2M$ 是单射, **Nakayama 引理**推出 $K=0$. 故 r_2, r_1 也正则. □

习题 2.248. 设 $R\to S$ 是局部环的平坦的局部同态（极大理想映入极大理想）,
设 $x_1,\cdots,x_r\in\mathfrak{m}_R$, 设 M 是 R-模, 则 **TFAE**:
(1) $x_1,\cdots,x_r\in R$ 是 M-正则的, (2) $x_1,\cdots,x_r$ 在 S 的像是 $M\otimes_R S$-正则的.
提示是 $R\to S$ 由**引理 2.95** 得知是忠实平坦同态.

命题 2.249. 设 R-模 M, $f_1,\cdots,f_r\in R$ 和 $e_1,\cdots,e_r\in\mathbb{Z}_+$.
则 $f_1,\cdots,f_r$ 是 M-正则序列当且仅当 $f_1^{e_1},\cdots,f_r^{e_r}$ 是 M-正则序列.

证明. 对 r 归纳, $r=1$ 的情况显然, 对 $r>1$, 在 M/f_1M 上应用归纳假设得知 $f_1,f_2,\cdots,f_r$ 是正则的当且仅当 $f_1,f_2^{e_2},\cdots,f_r^{e_r}$ 正则. 因此只需检查 $f_1^{e_1},f_2,\cdots,f_r$ 正则当且仅当 $f_1,f_2,\cdots,f_r$ 正则. 然后我们对 e_1 归纳, 奠基 $e_1=1$ 平凡. 一般的有 $0\to M/f_1M\to M/f_1^{e_1}M\to M/f_1^{e_1-1}M\to 0$ 正合, 其中第二个箭头是乘 $f_1^{e_1-1}$, 先把这个正合列摆在这.
注意对 R-模正合列, $0\to M_1\to M_2\to M_3\to 0$ 是短正合列, 对一列 $f_1,\cdots,f_r$, 它们关于 M_1,M_3 正则能推出关于 M_2 正则. 只需注意 f_1 乘法在 M_1,M_3 上是单射推出在 M_2 上是, 然后**蛇引理**得到正合列 $0\to M_1/f_1\to M_2/f_1\to M_3/f_1\to 0$, 就把问题转化为 $r-1$ 者. 结合上一段的正合列, 解决了从 $f_1,\cdots,f_r$ 正则推出 $f_1^{e_1},f_2,\cdots,f_r$ 正则的问题.
另一边假设 $f_1^{e_1},f_2,\cdots,f_r$ 正则, 则不难检查 f_2 在 M/f_1M 上乘法是单射, 归纳假设保证 f_2 在 $M/f_1^{e_1-1}M$ 上是单射, 那么蛇引理自然给出正合列 $0\to M/(f_1,f_2)M\to M/(f_1^{e_1},f_2)M\to M/(f_1^{e_1-1},f_2)M\to 0$ 是正合列, 然后对 $M/(f_1^{e},f_2)M$ 一样的技巧捣出 $r>2$ 的情形. □

命题 2.250. 若 R 是环, 理想 I, 模 M, $r_1,\cdots,r_n\in I$ 是 M-正则序列, 则对 $i<n$ 以及任意 R/I-模 N 有 $\mathrm{Ext}_R^i(N,M)=0$.

证明. 归纳, 首先 $n=0$ 平凡, $n>0$ 时短正合列 $0\to M\to M\to M/r_1M$, 其中第二个映射是乘 r_1, 导出长正合列 $\cdots\to\mathrm{Ext}_R^{i-1}(N,M/r_1M)\to\mathrm{Ext}_R^i(N,M)\to\mathrm{Ext}_R^i(N,M)\to\cdots$, 而 $i<n$ 等价于 $i-1<n-1$, 归纳假设保证上第一项是 0, 因此 $r_1:\mathrm{Ext}_R^i(N,M)\to\mathrm{Ext}_R^i(N,M)$ 单, 由于 N 是 R/I 模以及 $r_1\in I$, 故此映射为 0 从而 $\mathrm{Ext}_R^i(N,M)=0$. □

2.14.2 深度（Depth）

接下来我们研究一个模的正则序列的长度上界, 这个量的刻画也需要维数理论和同调知识.

定义 2.251. 环 R 模 M 理想 I, 则定义 M 的I**-深度**

$$\operatorname{depth}_I(M) := \inf\{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : \operatorname{Ext}_R^i(R/I, M) \neq 0\}.$$

当 $(R, \mathfrak{m})$ 是局部环时, 深度都指 $\mathfrak{m}$-深度而省略下标. 局部环的深度指作为自己的模的 $\mathfrak{m}$-深度, 一般环的深度指在各处局部化深度的上确界.
依定义零模的深度是 ∞, 非零模的 0-深度是 0.

首先我们把这个抽象的定义和正则序列联系起来.

引理 2.252. 若 $r \in I \setminus \operatorname{zdv}_R(M)$, 则 $\operatorname{depth}_I(M) = \operatorname{depth}_I(M/rM) + 1$.

证明. 若 $\operatorname{depth}_I(M) = 0$, 则 $\operatorname{Hom}(R/I, M) \neq 0$ 说明 I 中的元素都是 M 的零因子矛盾, 于是 $\operatorname{depth}_I(M) > 0$. 写出短正合列 $0 \to M \to M \to M/rM \to 0$, 第二个箭头乘 r, 导出长正合列

$$\cdots \to \operatorname{Ext}_R^{i-1}(R/I, M) \to \operatorname{Ext}_R^{i-1}(R/I, M/rM) \to \operatorname{Ext}_R^i(R/I, M) \to \operatorname{Ext}_R^i(R/I, M) \to \cdots.$$

因此 $i < \operatorname{depth}_I(M)$ 则 $\operatorname{Ext}_R^{i-1}(R/I, M) = \operatorname{Ext}_R^i(R/I, M) = 0$ 推出 $\operatorname{Ext}_R^{i-1}(R/I, M/rM) = 0$. 若 $i = \operatorname{depth}_I(M)$, 则 $\operatorname{Ext}_R^i(R/I, M) \neq 0$, 由于 $r \in I$ 故 $\operatorname{Ext}_R^i(R/I, M)$ 到自己乘 r 的映射是 0, 则 $\operatorname{Ext}_R^{i-1}(R/I, M/rM)$ 满射一个非零 R-模从而非零. □

> **定理 2.253.** 诺特 R 上的有限生成模 M. 则 $\operatorname{depth}_I(M)$ 是 I 中 M-正则序列的最大长度. I 中任意 M-正则序列都能延续到 $\operatorname{depth}_I(M)$ 长度.

证明. 由前一引理只需证明 $\operatorname{depth}_I(M) > 0$ 可推出 I 中存在 M 的非零因子. 而 $\operatorname{depth}_I(M) > 0$ 即 $\operatorname{Hom}(R/I, M) = 0$, 说明 $\operatorname{Ass}_R(M)$ 中者都不包含 I, 否则 $R/I \to R/\mathfrak{p} \hookrightarrow M$ 非零. **推论 2.144** 告诉我们 $\operatorname{Ass}_R(M)$ 有限, **命题 2.141** 告诉我们 $\operatorname{zdv}_R(M)$ 是结合素理想的并, 因此素理想回避推出 I 中存在 M 的非零因子. □

习题 2.254. 诺特 R 上的有限生成 N, N', N'' 使 $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$, 则

$$(1) \operatorname{depth}_I(N) \geq \min\{\operatorname{depth}_I(N'), \operatorname{depth}_I(N'')\},$$

$$(2) \operatorname{depth}_I(N'') \geq \min\{\operatorname{depth}_I(N), \operatorname{depth}_I(N') - 1\},$$

$$(3) \operatorname{depth}_I(N') \geq \min\{\operatorname{depth}_I(N), \operatorname{depth}_I(N'') + 1\}.$$

提示是写出 Ext 长正合列.

定理 2.255. 诺特局部环 $(R,\mathfrak{m})$ 的有限生成模 M. 则对任意 $\mathfrak{p}\in\operatorname{Ass}(M)$, $\operatorname{depth}(M)\le\dim(R/\mathfrak{p})$, 特别的, 非零有限生成模的深度有限.

证明. 对 $\delta=\operatorname{depth}(M)$ 归纳, 若 $\delta>0$, 由**定理 2.253** 取 $r\in\mathfrak{m}$ 是 M 非零因子, 那么**命题 2.141** 知 $r\notin\mathfrak{p}$, 于是**引理 2.47** 推出 $\dim R/(\mathfrak{p}+(r))=\dim(R/\mathfrak{p})-1$, 取 $\mathfrak{q}$ 是 $\mathfrak{p}+(r)$ 上的极小素理想使 $\dim(R/\mathfrak{q})=\dim(R/\mathfrak{p})-1$, 下面我们证明 $\mathfrak{q}\in\operatorname{Ass}(M/rM)$.
现取 $N\subset M$ 使 $N\cong R/\mathfrak{p}$. 由 **Artin–Rees 引理**, 取 $n\in\mathbb{Z}_+$ 使 $r^nM\cap N\subset rN$, 考虑 N 在 M/r^nM 中的像 $Q\cong N/(r^nM\cap N)$, 于是 N/rN 是 Q 的商模, 而 Q 是 N/r^nN 的商模, 因此 $\operatorname{Supp}(Q)=\operatorname{Supp}(N/rN)=\mathcal{V}(\mathfrak{p}+(r))$, 由于 $\mathfrak{q}$ 的极小性, **推论 2.148** 保证 $\mathfrak{q}\in\operatorname{Ass}(Q)$. 现在由于 $Q\subset M/r^nM$, 故 $\operatorname{Ass}(Q)\subset\operatorname{Ass}(M/r^nM)$, 结合 r 是 M 的非零因子, $0\to M/r^sM\to rM/r^sM\to M/rM\to 0$, 注意 $rM/r^sM\cong M/r^{s-1}M$ 于是 $\operatorname{Ass}(M/r^nM)=\operatorname{Ass}(M/rM)$.
这完成了 $\mathfrak{q}\in\operatorname{Ass}(M/rM)$ 的证明. 进而由 $\operatorname{depth}(M/rM)=\operatorname{depth}(M)-1$ 即可完成归纳. □

还有一些例子, 诺特局部 $(R,\mathfrak{m},k)$, 对 R-模 M 及其 $\mathfrak{m}$-进完备化 $\widehat{M}$ 有 $\operatorname{depth}_R(M)=\operatorname{depth}_{\widehat{R}}(\widehat{M})$, 这是因为 $\operatorname{Ext}^i_{\widehat{R}}(k,\widehat{M})\cong\widehat{R}\otimes_R\operatorname{Ext}^i_R(k,M)$. 而且 M 的正则序列也是 $\widehat{M}$ 的正则序列.
另外还有一些需要更多同调代数技术的结果, 例如:

定理 2.256. 环 R 模 M 理想 I 和 R/I-模 N 和 $0\le i<\operatorname{depth}_I(M)$ 有 $\operatorname{Ext}^i_R(N,M)=0$.

证明. 作 R/I-自由消解 $F_\bullet\to N$. 则有 $\operatorname{Hom}_R(-,M)$ 的超导出谱序列 $E_1^{p,q}=\operatorname{Ext}^q_R(F_p,M)\Rightarrow\operatorname{Ext}^{p+q}_R(N,M)$, 由于诸 F_p 是自由 R/I-模, $q<\operatorname{depth}_I(M)$ 时 $\operatorname{Ext}^q_R(F_p,M)=0$ 即得. □

推论 2.257. 环 R 模 M, 理想 $I,J\subset R$, 若 $I\subset J$ 则 $\operatorname{depth}_I(M)\le\operatorname{depth}_J(M)$, 另外对正整数 n 有 $\operatorname{depth}_{I^n}(M)=\operatorname{depth}_I(M)$. 作为推论, 如果 I,J 有限生成且 $\sqrt{I}=\sqrt{J}$ 则 $\operatorname{depth}_I(M)=\operatorname{depth}_J(M)$.

证明. 如 $I\subset J$, 则 R/J 是 R/I-模, 由**定理 2.256** 立得 $\operatorname{depth}_I(M)\le\operatorname{depth}_J(M)$. 对第二问, 注意到 $\operatorname{depth}_{I^n}(M)\le\operatorname{depth}_I(M)$, 要证明能取等只需构造出 $\operatorname{depth}_I(M)$ 的正则序列, 因为**命题 2.249** 保证 M 的 I 中元素的正则序列每项取 n 次幂后仍是 M-正则序列. □

推论 2.258. 设 $R\to R'$ 是环同态, I 是 R 的理想, 记 $I'=IR'$, 则对 R'-模 M 有 $\operatorname{depth}_I(M)=\operatorname{depth}_{I'}(M)$.

证明. 设 $F_\bullet\to R/I$, $M\to I^\bullet$ 为自由消解和内射消解, 那么双复形 $\operatorname{Hom}_{R'}(F_\bullet\otimes R',I^\bullet)$ (按不同的方向计算 E_2 页) 将带来谱序列 $E_2^{p,q}=\operatorname{Ext}^p_{R'}(\operatorname{Tor}^R_q(R',R/I),M)\Rightarrow\operatorname{Ext}^{p+q}_R(R/I,M)$ 由**定理 2.256** 以及 $\operatorname{Tor}^R_q(R',R/I)$ 是 R/I-模立刻得知 $\operatorname{Ext}^i_R(R/I,M)$ 在 $i<\operatorname{depth}_{I'}(M)$ 时为 0, 在 $i=\operatorname{depth}_{I'}(M)$ 时为 $\operatorname{Ext}^i_{R'}(R'/I',M)\neq 0$, 这即我们欲证的. □

推论 2.259. 诺特环 R 模 M 理想 I 乘集 S, 则 $\mathrm{depth}_I(M) \le \mathrm{depth}_{S^{-1}I}(S^{-1}M)$.

证明. 注意 $S^{-1}I = I(S^{-1}R)$, 于是利用前一推论, 不等式右边是 $\mathrm{depth}_I(S^{-1}M)$. 注意 $S^{-1}M$ 是一些 M 的滤余极限以及诺特环有限生成模出发的 Ext 与滤余极限交换得. □

注 2.260. 注意诺特 R 有限生成 N 都有限表现, 有 $\mathrm{Hom}_R(N,-)$ 和滤余极限交换.

2.14.3 Koszul 复形及其应用

注意, 本小节的张量复形都是指取完张量积得到双复形后再取全复形.

定义 2.261. 对元素 $x \in R$, 定义下链复形 $0 \to R \xrightarrow{x} R \to 0$ 为 x 的 **Koszul 复形**, 其中两个 R 分别在 $1,0$ 维. 记一维的生成元 e_x 则 $e_x \mapsto x$. 对一族 R 中的元素的序列 $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, 记张量积复形 $K(\mathbf{x}) = K(x_1) \otimes \cdots \otimes K(x_n)$ 为 $\mathbf{x}$ 的 **Koszul 复形**. 并用

$$H_q(\mathbf{x}; M) := H_q(K(\mathbf{x}) \otimes_R M),\ \ H^q(\mathbf{x}; M) := H^q(\mathrm{Hom}_R(K(\mathbf{x}), M)).$$

分别记 R-模 M 系数下同调和上同调. 简单算得 $K_p(\mathbf{x})$ 实则是 $\wedge^p R^n$ 即一个 $\binom{n}{p}$ 阶自由 R-模, 我们用 $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$ 简记 $1 \otimes \cdots \otimes e_{x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes e_{x_{i_n}} \otimes \cdots \otimes 1$ $(i_1 < \cdots < i_p)$ 一组基. 而边缘映射 $K_p \to K_{p-1}$ 是 $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \mapsto \sum_k (-1)^{k+1} x_{i_k} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_{i_k}} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$.

习题 2.262. 有一系列立刻的观察.

(1) 首先 $K(\mathbf{x})$ 取 $\wedge : K_p \otimes_R K_q \to K_{p+q}$ 构成微分分次代数, 我们有 $d(a \wedge b) = d(a) \wedge b + (-1)^p a \wedge d(b)$, $a \in K_p$. 这将诱导 $H_p(\mathbf{x}; M) \otimes_R H_q(\mathbf{x}; N) \to H_{p+q}(\mathbf{x}; M \otimes_R N)$.

(2) $\{H_q(\mathbf{x}; -)\}$ 是同调 δ-函子, $\{H^q(\mathbf{x}; -)\}$ 是上同调 δ-函子, 容易计算得 $H_0(\mathbf{x}, M) = M/\mathbf{x}M$ 及 $H^0(\mathbf{x}; M) = \mathrm{Hom}_R(R/\mathbf{x}R, M)$, 这里 $\mathbf{x}$ 作为理想. 另外 $H_p(\mathbf{x}; M) \cong H^{n-p}(\mathbf{x}; M)$.

(3) 我们还有 *Künneth* 公式, 对 $C = C_\bullet$ 的 R-模链复形和 $x \in R$, 有

$$0 \to H_0(x; H_q(C)) \to H_q(K(x) \otimes_R C) \to H_1(x; H_{q-1}(C)) \to 0.$$

考虑 $R, R[-1]$ 指只有一个 R 在 $0,1$ 维的 R-模链复形, 则有 $0 \to R \to K(x) \to R[-1] \to 0$, 与 C 张量积, 然后观察得到的长正合列如下

$$H_{q+1}(C[-1]) \xrightarrow{\partial} H_q(C) \to H_q(K(x) \otimes_R C) \to H_q(C[-1]) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(C).$$

计算得到 $H_{q+1}(C[-1]) \cong H_q(C)$, 而 ∂ 正是乘 x 映射. 立刻得到所需.

推论 2.263 (零调性)**.** 若 $\mathbf{x}$ 是 R-模 M 正则序列, 则 $H_q(\mathbf{x}; M) = 0$ 对 $q \neq 0$, $H_0(\mathbf{x}; M) = M/\mathbf{x}M$. 若 R 是诺特局部 M 有限生成, 则 $\mathbf{x}$ 是 R-模 M 正则序列当且仅当 $H_1(\mathbf{x}; M) = 0$.

证明. 首先 $n = 1$ 时 $x \notin \mathrm{zdv}_R(M)$ 简单计算得. 对一般的 n 设 $x = x_n, \mathbf{y} = (x_1, \cdots, x_{n-1}), C = K(\mathbf{y}) \otimes_R M$, 那么归纳假设得 $q \neq 0$ 时 $H_q(C) = 0$, 那么 $K(x) \otimes H_0(C)$ 形如 $0 \to M/\mathbf{y}M \xrightarrow{x} M/\mathbf{y}M \to 0$. 于是 Künneth 公式立刻推出我们需要的. 只剩后一命题右推左, $n = 1$ 显然, 一般的 n 仍考虑一样的正合列, $H_1(C)/xH_1(C) = 0$ 然后用 **Nakayama 引理**变成归纳假设. □

这样对 R 作为 R-模的一个正则序列 $x_1, \cdots, x_n$, 设 I 是它们生成的理想, 我们将得到 R/I 作为 R-模的一个自由消解

$$0 \to \wedge^n R^n \to \cdots \to \wedge^1 R^n \xrightarrow{x} R \to R/I \to 0.$$

由此可得 $\mathrm{Tor}_p^R(R/I, M) = H_p(\mathbf{x}; M)$, $\mathrm{Ext}_R^p(R/I, M) = H^p(\mathbf{x}; M)$.

习题 2.264. 正则局部环 $(R, \mathfrak{m}, k), n = \dim R$ 设其一个参数系统 $x_1, \cdots, x_n$, 检查这是正则序列, 只需使用**命题 2.175 (切片判别)**, 正则局部环是整环, 所以每次都不是零因子, 则

$$\mathrm{Tor}_p^R(k, k) \cong \mathrm{Ext}_R^p(k, k) \cong k^{\binom{n}{p}}.$$

命题 2.265. 环 R 和理想 $I = (a_1, \cdots, a_n)$ 和 R-模 M, $\mathrm{depth}_I(M)$ 或不超过 n 或取 ∞.

证明. 考虑 $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_n)$ 的 Koszul 复形 $K_\bullet = K(\mathbf{a})$, 它是自由 R-模组成的复形且各阶同调都是 R/I-模, 零阶同调是 R/I. 设 $\mathrm{depth}_I(M) < \infty$, 则超导出谱序列 $E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}_R^p(H_q(K), M), F_2^{p,q} = H_p(\mathrm{Ext}_R^q(K, M)) \Rightarrow \mathbb{E}\mathrm{xt}_R^{p+q}(K_\bullet, M)$, 于是 E_2 的计算结果在 $i < \mathrm{depth}_I(M)$ 时为 0, 在 $i = \mathrm{depth}_I(M)$ 时为 $\mathrm{Ext}_R^i(R/I, M)$. 另一方面 F_2 的计算利用 $K_\bullet$ 自由且集中在 $0, \cdots, n$ 维计算得 $i > n$ 时为 $H^i(\mathrm{Hom}_R(K_\bullet, M)) = 0$. □

2.14.4 Cohen-Macaulay 性

定义 2.266. 设 $(R, \mathfrak{m})$ 是诺特局部环, M 是有限生成 R-模. 若 $M = 0$ 或 $\mathrm{depth}\, M = \dim M$ 则称 M 为 **Cohen–Macaulay 模**, 简称 **CM 模**. 若还成立着 $\dim M = \dim R$ 则称 M 为**极大 Cohen–Macaulay 模**, 简称 **MCM 模**. 诺特环上有限生成模若在每个素理想局部化都是 *Cohen–Macaulay* 模, 则称之 *Cohen–Macaulay* 模. 注意一般环的 *CM* 性良定依赖于 *CM* 在局部化下保持, 后面我们会证明此事. 回忆**定理 2.255**, 对 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ 总有 $\mathrm{depth}\, M \leq \dim(R/\mathfrak{p})$, 由**推论 2.148** $\dim M = \sup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)} \dim(R/\mathfrak{p})$, 因此总有 $\mathrm{depth}\, M \leq \dim M$.

对局部环上的 *CM* 模, $\operatorname{depth} M = \dim(R/\mathfrak{p})$ 必然对每个 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$ 皆成立. 由**推论 2.148**, $\operatorname{Ass}(M)$ 含于支集（一个闭集）且包含支集的极小元, 现在维数告诉我们 $\operatorname{Ass}(M)$ 不能有互相包含关系, 因此对局部环上的 *CM* 模, $\operatorname{Ass}(M)$ 正是支集中的全体极小元.

例 2.267. (1)（非零）*Artin* 模总是 *CM* 的, 因为它的深度和维数都是 0.
(2) 诺特局部 $(R, \mathfrak{m})$ 有限生成 M, 则 $\mathfrak{m}$-进完备化保持 $\dim M = \dim \widehat{M}, \operatorname{depth} M = \operatorname{depth} \widehat{M}$（完备化不改变 *Hilbert–Samuel* 多项式）, 那么 M 是 *CM* R-模当且仅当 $\widehat{M}$ 是 *CM* $\widehat{R}$-模.

定理 2.268 (切片判别). 诺特局部 $(R, \mathfrak{m})$ 有限生成模 M, 记 $d := \dim M$, 对正整数 $c \leq d$, 和 $r_1, \cdots, r_c \in \mathfrak{m}$ 若有 $\dim M/(r_1, \cdots, r_c)M = d - c$ 则 M 是 *CM* 模当且仅当 $r_1, \cdots, r_c$ 是 M-正则序列且 $M/(r_1, \cdots, r_c)M$ 是 *CM* 模.

证明. 如 $r_1, \cdots, r_c$ 是 M-正则序列则 $\operatorname{depth}(M/(r_1, \cdots, r_c)M) = \operatorname{depth} M - c$, 从而左右立刻等价. 对左推右, 用归纳法, 只需证 $c = 1$, 注意 $\dim M/rM = d - 1$ 因此 r 不属于任何结合素理想 (见**定义 2.266** 最后), 所以 r 是非零因子. □

推论 2.269. 诺特局部 $(R, \mathfrak{m})$ 有限生成模 M, **TFAE**: (1) M 是 *MCM* 模, (2) R 的每个参数系统都是 M-正则序列, (3) R 有一个参数系统是 M-正则序列.

证明. (1) 推 (2) 对参数系统用**定理 2.268**; (2) 推 (3) 显然; (3) 推 (1) 注意对参数系统 $r_1, \cdots, r_d$, 有 $\operatorname{depth}(M) = \operatorname{depth} M/(r_1, \cdots, r_d)M + d = d = \dim R \geq \dim M$ 得知. □

推论 2.270. 正则局部环作为自身的模, 是 *MCM* 的. 只需用**习题 2.264** 和上述推论之 (3).

推论 2.271. 诺特局部 $(R, \mathfrak{m})$ 素理想 $\mathfrak{p}$. 若 M 是 *CM* R-模则 $M_{\mathfrak{p}}$ 是 *CM* $R_{\mathfrak{p}}$-模.

证明. 不妨设 $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$ 对 $d = \dim M_{\mathfrak{p}}$ 归纳, 奠基 $d = 0$ 立刻. 如 $d > 0$ 则 $\mathfrak{p}$ 不是 R 的极小素理想, 从而也不是 M 的结合素理想. 于是素理想回避取 $r \in \mathfrak{p}$ 不在 M 的每个结合素理想中, 则 r 是 M 的非零因子, 再对 $M, M_{\mathfrak{p}}$ 各用一次**定理 2.268**. □

命题 2.272 (均维性). 诺特局部 $(R, \mathfrak{m})$ 和 *CM* R-模 M, 若 $\operatorname{Supp} M = \operatorname{Spec} R$ 或者等价地说 $\operatorname{Ass} M$ 恰好是 R 的全体极小素理想, 则 R 每条极长的素理想链都等长.

证明. 假设 $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_d = \mathfrak{m}$ 是一条极长素理想链, 要证 $d = \dim R$. 对 d 归纳, $d = 0$ 显然所以下面看 $d > 0$. 注意 $\mathfrak{p}_0$ 是极小素理想, 故素理想回避取 $r \in \mathfrak{p}_1$ 但不在任何极小素理想中, 于是 $r \notin \operatorname{Ass} M$ 故 r 是 M 非零因子, 这样 M/rM 是 CM R/r-模. 于是 $\overline{\mathfrak{p}_1} \subsetneq \cdots \subsetneq \overline{\mathfrak{p}_d} = \overline{\mathfrak{m}}$ 是 R/r 的极长素理想链, 只需证 $\operatorname{Supp}(M/rM) = \operatorname{Spec}(R/r)$. 这类似**定理 2.255**:

由 r 是非零因子, 故 M/r^nM 有相邻项商同构 M/rM 的滤链故 $\operatorname{Supp}(M/r^nM)=\operatorname{Supp}(M/rM)$. 现 $\mathfrak{q}$ 为 R 中含 r 素理想, 由条件设 $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{q}$, 其中 $\mathfrak{p}\in\operatorname{Ass}M$. 故存在子模 $N\subset M$ 使 $N\cong R/\mathfrak{p}$, 由 **Artin–Rees 引理**知存在正整数 n 使 $r^nM\cap N\subset rN$, 因此 N/rN 是 M/r^nM 的子商, 而 $N/rN\cong R/(\mathfrak{p}+(r))$, 显然 $\mathfrak{q}$ 在其支集中, 因此 $\mathfrak{q}\in\operatorname{Supp}(M/r^nM)=\operatorname{Supp}(M/rM)$. □

引理 2.273. $(R,\mathfrak{m})\to(S,\mathfrak{n})$ 是诺特局部环的局部同态, M 是 *CM* R-模, N 是 R 上平坦的 S-模且 $N/\mathfrak{m}N$ 是 *CM* $S/\mathfrak{m}S$-模. 则 $M\otimes_R N$ 是 *CM* S-模且

$$\dim M\otimes_R N=\dim M+\dim N/\mathfrak{m}N.$$

证明. 首先我们指出 $\operatorname{depth}_{\mathfrak{n}}(M\otimes_R N)=\operatorname{depth}_{\mathfrak{m}}M+\operatorname{depth}_{\mathfrak{n}}(N/\mathfrak{m}N)$. 我们对等号右边归纳. 如果是 0, 说明 M 以 $R/\mathfrak{m}$ 为子模, $N/\mathfrak{m}N$ 以 $S/\mathfrak{n}$ 为子模. 由平坦性, $S/\mathfrak{n}$ 也可嵌入 $M\otimes_R N$ 因此左边也是 0. 然后对 $\operatorname{depth}M>0$ 的情形, 取 M 的非零因子 r 利用平坦性知 r 也是 $M\otimes_R N$ 的非零因子从而可以商 r 从而归纳; 对 $\operatorname{depth}(N/\mathfrak{m}N)>0$ 的情形, 取 $N/\mathfrak{m}N$ 的非零因子 s, 用 **Lazard 判据**转化为 N 是有限生成 R-模的情形, 再利用 **Nakayama 引理**, s 一定是 N 的非零因子且 N/sN 在 R 上平坦, 最后 s 一定是 $M\otimes_R N$ 的非零因子从而归纳.
而另一方面由**命题 2.56** 一样的方法, 得 $\dim(M\otimes_R N)\leq\dim M+\dim N/\mathfrak{m}N$, 这即是模版本的纤维维数公式, 此事结合深度的公式一同推出我们需要的结论. □

习题 2.274. 域 k 上的多项式环是正则的, 换言之对 $A=k[X_1,\cdots,X_n]$ 的每个素理想 $\mathfrak{p}$, 局部化 $A_{\mathfrak{p}}$ 都是正则局部环. 当然正则局部环是 *CM* 的, 所以 A 是 *CM* 的.
类似**注 2.84 诺特正规化**, 先证极大 $\mathfrak{m}$ 一定是 n 元生成的, 对 n 归纳而 $n=1$ 平凡. 对一般的 n, 不妨设 $\mathfrak{m}$ 存在 X_n 的首一多项式, 设 $B=k[X_1,\cdots,X_{n-1}]$ 以及 $\mathfrak{n}=\mathfrak{m}\cap B$, 这样 $B/\mathfrak{n}\to A/\mathfrak{m}$ 是整环整扩张且后者为域故前者也是, 从而在 $(B/\mathfrak{n})[X_n]$ 中考虑即可. 一般的 $\mathfrak{p}$, 找超越基设 $B=k[X_1,\cdots,X_d]\to R/\mathfrak{p}$ 整扩张, 说明 $\mathfrak{p}\cap B=0$ 则 $R_{\mathfrak{p}}$ 是 $(\operatorname{Frac}B)[X_{d+1},\cdots,X_n]$ 中 $\mathfrak{p}$ 的像的局部化, 而整性保证 $\mathfrak{p}$ 的像在其中是极大理想而化归到前者.

> **推论 2.275.** 若一个环的任意两个素理想 $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{q}$ 都满足 $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{q}$ 间的每条极长素理想链都等长, 则称之一个**悬链环**, 若一个环的任意有限型代数都是悬链的, 则称之一个**泛悬链环**. 倘若 A 是诺特环, M 是 *CM* A-模, $\operatorname{Supp}M=\operatorname{Spec}A$, 则 A 是泛悬链环.

证明. 只要证明 $B=A[X_1,\cdots,X_n]$ 是悬链环, 只要证明 $N=M\otimes_A B$ 是 CM B-模, 当然 $\operatorname{Supp}(M\otimes_A B)=\operatorname{Spec}B$ 这样就会化归为**命题 2.272**. 考虑 B 的素理想 $\mathfrak{q}$ 交 A 得到素理想 $\mathfrak{p}$, 这样 $N_{\mathfrak{q}}=M_{\mathfrak{p}}\otimes_{A_{\mathfrak{p}}}B_{\mathfrak{q}}$, 注意 $B_{\mathfrak{q}}$ 是平坦 $A_{\mathfrak{p}}$-模以及 $B_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}}$ 是自身的 CM-模从而可用**引理 2.273**. 最后只需注意 $k(\mathfrak{p})[X_1,\cdots,X_n]$ 在每个素理想处都是 CM 的, 这正是前一习题. □

2.14.5 再探正则局部环 *

在阅读本小节前, 读者需要了解关于同调维数的若干结论, 详情见同调代数章中的各有关节. 我们的核心定理是 Serre 对正则局部环的重要刻画

定理 2.276 (Serre)**.** 对 *Noether* 局部环 $(R,\mathfrak{m},k)$, **TFAE**:

(1) R 正则局部, (2) $\mathrm{gl.dim}(R)=\dim R$, (3) $\mathrm{gl.dim}(R)<+\infty$.

证明. 若 R 是正则局部环, 则结合 $\mathrm{Tor}_p^R(k,k)\cong k^{\binom{\dim R}{p}}$ 与由**极小消解**推出的整体维数公式 $\mathrm{gl.dim}(R)=\inf\{n:\mathrm{Tor}_{n+1}^R(k,k)=0\}$ 可知整体维数为 $\dim R$, 于是现只需证明整体维数有限推出正则局部, 而这并不容易, 为此我们将对 $e=\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ 归纳.

Step 1) 奠基显然, 设 $e>0$ 且命题在小于 e 时成立. 假若 $\mathfrak{m}\in\mathrm{Ass}(R)$, 则存在 $a\in R$ 非零使 $a\mathfrak{m}=0$, 由整体维数有限, 取 k 的极小消解 $0\to F_n\to\cdots\to F_0\to k\to 0$ 使 $F_n\neq 0$, 结合 $F_n\subset\mathfrak{m}F_{n-1}$ 得 $aF_n=0$ 矛盾. 用**素理想回避**取出 $r\in\mathfrak{m}$ 但不在 $\mathfrak{m}^2$ 以及任意结合素理想中. 这样 r 不是零因子, 只要证明 R/r 整体维数有限即可使用**切片判别**和归纳假设证明结论.

Step 2) 考虑 R-模 $\mathfrak{m}$ 的极小消解 $0\to G_n\to\cdots\to G_0\to\mathfrak{m}\to 0$, 利用 r 非零因子, 该消解商 r 后仍正合, 于是 $\mathfrak{m}/r\mathfrak{m}$ 有有限项 R/r-自由消解, 故 $\mathfrak{m}/r\mathfrak{m}$ 作为 R/r-模平坦维数小于无穷.

Step 3) 检查作为 R-模, 取 $r_2,\cdots,r_e\in\mathfrak{m}$ 使得 r 和它们在 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 的像构成其 k-基, 记理想 $I=(r_2,\cdots,r_e)_R$, 模 $\mathfrak{m}^2$ 易知 $I\cap rR\subsetneq rR$, 从而 $I\cap rR\subset r\mathfrak{m}$, 从而有映射

$$\mathfrak{m}/rR=\frac{I+rR}{rR}=\frac{I}{I\cap rR}\to I/r\mathfrak{m}\hookrightarrow\mathfrak{m}/r\mathfrak{m}.$$

于是对 $\mathfrak{m}$ 的生成元 $r,r_2,\cdots,r_e$ 检查, 发现上述映射与自然的商映射 $\mathfrak{m}/r\mathfrak{m}\to\mathfrak{m}/rR$ 复合后为恒同. 从而 $\mathfrak{m}/r\mathfrak{m}\cong(\mathfrak{m}/rR)\oplus k$, 这同时也是作为 R/r-模的直和式, 注意到直和的同调维数等于直和项的上确界, 以及 Step 2) 中的 $\mathfrak{m}/r\mathfrak{m}$ 作为 R/r-模平坦维数小于无穷, 命题得证. □

推论 2.277. 因为局部化不会使整体维数变大, 正则局部环的局部化还是正则局部环.

由此我们定义正则环.

定义 2.278. 一个诺特环被称为**正则**的, 指它在每个素理想处局部化都是正则局部的. 根据我们上面的推论, 正则局部环是正则的, 而检查一个环正则也只需在全体极大理想局部化.

推论 2.279. 如 $R\to S$ 忠实平坦, S 正则则 R 也正则, 且 $\dim R\le\dim S$.

证明. 只需证局部环的局部同态, 只需验证 $\text{tor-dim}\,R\le\text{tor-dim}\,S$, 这是因为对 R-模 M,N, 平坦性给出 $\mathrm{Tor}_i^R(M,N)\otimes_R S=\mathrm{Tor}_i^S(M\otimes_R S,N\otimes_R S)$. 而忠实平坦性保证 $i>\text{tor-dim}\,S$ 时 $\mathrm{Tor}_i^R(M,N)=0$, 由此我们需要的不等式成立. □

2.15 光滑理论

先前我们引入了微分模, 现在是时候享受劳动成果, 利用它们建立代数中的光滑理论了. 本节主要的参考是 Stacks Project [10]. 在定义光滑映射前, 仍需一些准备工作.

2.15.1 朴素余切复形（Naïve Cotangent Complex）

对环同态 $R \to S$, 用 $R[S]$ 指把 S 看作集合, 其中的元素自由生成的 R-代数. 典范态射 $R[S] \to S, [s] \mapsto s$ 是满射, 核是 $[s+s'] - [s] - [s'], [ss'] - [s][s'], [r] - r$ 生成的理想 $I \subset R[S]$, 于是 $R \to R[S] \to S$ 的余法正合列带给我们典范的 $I/I^2 \to \Omega_{R[S]/R} \otimes_{R[S]} S$.
上述情形是表现的特例, 一般地对 R-多项式环 P 和 R-代数间的满射 $\alpha : P \to S$, 记 $I = \operatorname{Ker} \alpha$ 我们仍能定义 $I/I^2 \to \Omega_{P/R} \otimes_P S$.

定义 2.280. 记 $NL_{S/R} = (\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow I/I^2 \xrightarrow{\phi} \Omega_{R[S]/R} \otimes_{R[S]} S)$ 为一个只有第 $0,1$ 项的复形(之所以称之朴素的, 因为更高项被截掉了), 我们用 $H_1(NL_{S/R}), H_0(NL_{S/R})$ 分别表示 $\operatorname{Ker}\phi, \operatorname{Coker}\phi$. 实际上余法正合列告诉我们 $\operatorname{Coker}\phi = \Omega_{S/R}$. 一样地定义 $NL(\alpha)$ 及其 H_1, H_0. 具体地若 $P = R[\{X_i\}_{i\in\mathscr{I}}]$ 先前的节中我们计算过 $I/I^2 \to \bigoplus_{i\in\mathscr{I}} S dX_i$ 将 $f \mapsto df$.

2.15.2 完全交（Complete Intersection）

2.15.3 光滑环同态（Smooth Ring Map）

2.15.4 形式光滑（Formally Smoothness）

2.15.5 Cohen 结构定理

定义 2.281. 若局部环 $(R, \mathfrak{m})$ 满足 R 是 $\mathfrak{m}$-进完备的, 则称 R 为**完备局部环**.

性质 2.282. 若 R 是诺特完备局部环, 则它的任意商环也是诺特完备局部环. 若 $R \to S$ 是有限环同态, 则 S 在 $\mathfrak{m}_R$ 下完备, 是有限多个诺特完备局部环的乘积. 前者是**习题 2.206**, 后者是**命题 2.208**（注意 $S = R \otimes_R S$）和**推论 2.213**.

定义 2.283. 设 $(R,\mathfrak{m})$ 是完备局部环，子环 $\Lambda \subset R$ 若满足 (1) $(\Lambda, \Lambda\cap\mathfrak{m})$ 是完备局部环，(2) $\Lambda/(\Lambda\cap\mathfrak{m}) \to R/\mathfrak{m}$ 是同构，(3) $\Lambda\cap\mathfrak{m} = p\Lambda$，其中 $p = \mathrm{char}(R/\mathfrak{m})$，则称一个**系数环**.
一个 **Cohen 环**指一个完备 DVR，其具有某个素数 p 为一枝花.

注 2.284. 关于这个定义的解释，

2.16 平展（Étale）理论

2.16.1 平展的定义

2.16.2 Hensel 引理、Hensel 环和 Hensel 化（Henselization）

首先我们来看最原始的 Hensel 引理

定理 2.285 (Hensel)**.** 环 R 关于理想 I 完备，设 $f \in R[X]$ 和 $a_0 \in R/I$ 满足 $\overline{f}(a_0) \equiv 0 \bmod I$ 且 $\overline{f'}(a_0) \in (R/I)^{\times}$，则存在唯一的 $a \in R$ 使 $a \equiv a_0 \bmod I$ 且 $f(a) = 0$.

证明. 用 f_n 表示 f 模 I^{n+1}，只需归纳证明存在唯一 $a_n \in R/I^{n+1}$ 使 $f_n(a_n) = 0$ 且 $a_n \equiv a_{n-1} \bmod I^n$. $n = 0$ 是条件，对 $n > 0$ 已有 a_{n-1} 存在唯一，先任取 $b \in R/I^{n+1}$ 使得 $b \equiv a_{n-1} \bmod I^n$ 则 $f_n(b) \in I^n/I^{n+1}$. 现在 a_n 需满足 $a_n \in b + I^n/I^{n+1}$ 且 $f_n(a_n) = 0$，于是取 $a_n = b + c, c \in I^n/I^{n+1}$. 显然 $c^2 = 0$，Taylor 展开有 $f_n(a_n) = f_n(b) + f_n'(b)c$. 由于 $f_n'(b) \equiv f_0'(a_0) \equiv I$ 可逆，于是 $c = -f_n(b)/f_n'(b)$ 是唯一解. $\square$

沿着这个想法，我们引入如下定义：

定义 2.286. 设 $(R,\mathfrak{m},k)$ 是局部环，若对每个首一 $f \in R[T]$ 和像 $\overline{f} \in k[T]$ 的根 $a_0 \in k$ 满足 $\overline{f'}(a_0) \neq 0$，都存在 $a \in R$ 使 $f(a) = 0$ 且 $a_0 = \overline{a} \in k$，则称 R 为 **Hensel 环**. 若 $k = k^s$ 则称 R 为**绝对 Hensel 环**.

Chapter 3

代数几何基础

这一部分的很多内容参考自刘青的代数几何 [5]、Rising Sea[6] 和 52[7], 我们也会大量运用先前所学的交换代数知识, 解决几何中碰到的一些困难并建立起基础的框架（说话方式）. 最近发现 Peter Scholze 的代数几何讲义 [17] 也是值得一看的好文. 至于扶磊的代数几何 [18] 以及需要的同调知识我们放到下一章 **4 同调代数基础**介绍. 阅读时, 读者**须时刻思考这些代数现象到底对应着什么几何直观**. Atiyah 说: 代数是数学家和恶魔做的交易, 恶魔想要你的灵魂: 几何直观, 失去它后你就能拥有这不可思议的代数机器. 但我建议你成为一个游魂. (以撒的结合中游魂可免费进行一次恶魔交易, 他甚至有神圣斗篷.)

3.1 层与局部环化空间

这一节涉及大量定义, 它们是基本且重要的, 初次接触这些概念可能比较头疼.

3.1.1 预层（Presheaves）和层（Sheaves）

定义 3.1. 设 X 是拓扑空间, 一个 X 上的**预层** $\mathcal{F}$ 包含如下的资料:

(1) 对每个开集 $U \subset X$, $\mathcal{F}(U)$ 是一个**交换群**（以后它们常有环结构或模结构）.

(2) 对开集 $V \subset U$, 有一群同态（叫做**限制**）$\mathrm{res}_{U,V} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$.

满足 $\mathrm{res}_{U,U} = \mathrm{id}|_{\mathcal{F}(U)}$. 以及如下的**限制复合条件**, 对开集 $W \subset V \subset U$, 下图表交换.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[d, "\mathrm{res}_{U,V}"'] \arrow[dr, "\mathrm{res}_{U,W}"] & \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\mathrm{res}_{V,W}"'] & \mathcal{F}(W)
\end{tikzcd}$$

定义中的交换群时常会被换成别的对象. 一个元素 $s \in \mathcal{F}(U)$ 也被叫做 U 上的一个**截面**. X 上的截面称**整体截面**, 对 $V \subset U, s \in \mathcal{F}(U)$, 也时常简记 $\mathrm{res}_{U,V}(s) \in \mathcal{F}(V)$ 为 $s|_V$.

注 3.2. 这个定义的一个原型是将 X 取成（光滑）流形，而 $\mathcal{F}(U)$ 则是其上开集 U 上全体（光滑）函数构成的集合，大开集上的光滑函数可限制到小开集上，上述要求都是自然符合的. 实际上我们研究预层和（下面要定义的）层都是为了更好地研究“怎么把东西粘在一起”.

定义 3.3. 一个 $\mathcal{F}(\varnothing)=0$ 的预层若满足如下条件则被称作一个**层**

(1)（**唯一性**）对开集 U 及开覆盖 $\{U_i\}_{i\in\mathscr{I}}$，若 $s,t\in\mathcal{F}(U)$ 满足 $s|_{U_i}=t|_{U_i},\forall i\in\mathscr{I}$ 则 $s=t$.

(2)（**存在性**）对开集 U 及开覆盖 $\{U_i\}_{i\in\mathscr{I}}$，和一族 $s_i\in\mathcal{F}(U_i),i\in\mathscr{I}$ 满足对任意 $i,j\in\mathscr{I}$,

$$s_i|_{U_i\cap U_j}=s_j|_{U_i\cap U_j}.$$

则存在 $s\in\mathcal{F}(U)$ 使得 $s|_{U_i}=s_i$. 上述条件也称**相容性条件**.

注 3.4. 层 $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}(\varnothing)$ 其实总是终对象（由空乘积诱导）. 我们取 $U=\varnothing$ 的空覆盖 $\{U_i\}_{i\in\mathscr{I}},\mathscr{I}=\varnothing$ 则 $\mathcal{F}(\varnothing)=\operatorname{eq}\left(\prod_\varnothing\rightrightarrows\prod_\varnothing\right)$，因此在允许空覆盖空集的意义下可将 $\mathcal{F}(\varnothing)=0$ 从定义中去掉.

例 3.5. X 上的层（resp. 预层）$\mathcal{F}$ 在开子集 U 上的限制，仍是层（resp. 预层），记 $X|_U$.

定义 3.6. 设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的预层.$x\in X$，则 $\mathcal{F}$ 在 x 点处的**茎**定义为归纳极限：

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathcal{F}_x = \operatorname*{colim}_{U:x\in U}\mathcal{F}(U) \\
\mathcal{F}(U) \arrow[urrr] \arrow[r, "\mathrm{res}_{U,V}"'] & \mathcal{F}(V) \arrow[urr] \arrow[r, "\cdots"'] & \cdots \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

换言之，在 x 的任意邻域 U 截面相同的两者被放在了一个等价类里. 这些等价类（称为**芽**）构成交换群（或和 $\mathcal{F}(U)$ 同类型的对象）$\mathcal{F}_x$，我们有 $\mathcal{F}(U)\to\mathcal{F}_x$ 的自然同态 $s\mapsto s_x$. 这一定义是因为需要研究“截面在一点处的值”，但 $\mathcal{F}(U)$ 中者往往不像流形上的函数那么好.

命题 3.7. 层 $\mathcal{F}$ 的一个 $s\in\mathcal{F}(X)$ 被它在每个 $x\in X$ 处的芽所确定.

证明. 若 $s_x=t_x$ 对任意 $x\in X$，则使 $s|_{U_x}=t|_{U_x}$ 的含 x 开集 U_x 们构成 X 的开覆盖. □

定义 3.8. 对 X 上的两个预层 $\mathcal{F},\mathcal{G}$. 它们之间的**态射** $\alpha:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ 包含一族与限制映射可交换的同态 $\alpha(U):\mathcal{F}(U)\to\mathcal{G}(U)$. 即对 $V\subset U$ 我们有下图表交换

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\alpha(U)"] \arrow[d, "\mathrm{res}_{U,V}"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\mathrm{res}_{U,V}"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\alpha(V)"'] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

取余极限诱导了 $\alpha_x:\mathcal{F}_x\to\mathcal{G}_x$. 容易验证两个层之间的态射相同只需在每个 α_x 相同.

拓扑空间 X 上全体预层和全体层在态射下构成的范畴记作 $\mathsf{PSh}(X),\mathsf{Sh}(X)$.

定义 3.9. $\alpha:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ 是 X 上的层态射. 若对每个开 $U\subset X$, $\alpha(U)$ 都是单射则称 α 是**单**的. 若对每个 $x\in X$, α_x 都是满射则称 α 是**满**的. 态射的复合还是态射, 恒同态射也显然地定义. 若态射有逆, 我们称它为**一个同构**. 马上看到它们在茎上的要求符合传统的认知.

> **命题 3.10.** 如果是层态射, 上述**定义 3.9** 中单性（resp. 满性, 同构）的等价刻画为：对每个 $x\in X$, α_x 都是单射（resp. 满射, 同构）. 作为推论, 既单又满的层态射是层同构.

证明. 只证每个 α_x 单射时层单射: $\alpha(U)(s)=0$ 推出 $x\in U$ 皆有 $\alpha_x(s_x)=0$ 即 $s_x=0$ 从而可以粘. 然后对每个 α_x 同构只需证明诸 $\alpha(U)$ 是同构, 对 $t\in\mathcal{G}(U)$, 用一族使得 $\alpha(U_i)(s_i)=t|_{U_i}$ 的开集 U_i 开覆盖 U. 结合 α 单, 推出 s_i,s_j 限制在 $U_i\cap U_j$ 一样, 从而可粘. 细节留给读者. □

定义 3.11. 设 $\mathcal{F}$ 是 X 上的预层, $\mathcal{F}$ 的**层化**包含如下资料 $\theta:\mathcal{F}\to\mathcal{F}^{\mathrm{sh}}$ 是 $\mathcal{F}$ 到层 $\mathcal{F}^{\mathrm{sh}}$ 的一个预层态射, 满足泛性质：对层 $\mathcal{G}$, 态射 $\alpha:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$, 存在唯一态射 $\tilde{\alpha}:\mathcal{F}^{\mathrm{sh}}\to\mathcal{G}$ 使 $\alpha=\tilde{\alpha}\circ\theta$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathcal{F}^{\mathrm{sh}} \arrow[dl, dashed, "\exists!\tilde{\alpha}"] \\
\mathcal{G} &
\end{tikzcd}$$

> **命题 3.12.** 层化存在且在同构的意义下唯一.

证明. 唯一性是泛性质带来的. 存在性：对开 $U\subset X$, $\mathcal{F}^{\mathrm{sh}}(U)$ 取成全部**相容芽**, 而一个相容芽指一族 $(f_p\in\mathcal{F}_p)_{p\in U}$, 使得任意 $p\in U$, 存在 p 的开邻域 $V\subset U$ 和 $s\in\mathcal{F}(V)$, 满足 $s_q=f_q$ 对一切 $q\in V$. 现在 $\theta:\mathcal{F}\to\mathcal{F}^{\mathrm{sh}}$ 是典范的, 验证其是层和泛性质的工作留给读者. □

例 3.13. 给定 *Abel* 群 A. X 上可定义一个**常值预层** $\underline{A}_{\mathrm{pre}}$, 在全体开集上为 A, 限制映射皆为恒同. 但它不是层, 因为空集截面非平凡, 即便空集上换成平凡群也不是层, 例如 X 是两个点的离散拓扑就粘不起来. $\underline{A}_{\mathrm{pre}}$ 的层化称**常值层**, 记 $\underline{A}$, 这个层并不简单, 读者可以思考 $[0,1]$ 在欧氏拓扑下的 $\mathbb{Z}$ 值常值层是什么. 对 $x\in X$ 给定可定义一个**摩天大厦层** x_*A, 即在含 x 的开集 $U\subset X$ 取 A, 不含的取 0 的一个层, $A\to A$ 的限制映射总取 id_A, 检查它是层.
另外类似层化的构造, 假设 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个开集基, 给定一族 $\{\mathcal{F}(B)\}_{B\in\mathcal{B}}$ 和 $\mathrm{res}_{B,B'}$ 只需在 $B=\bigcup_i B_i$ 覆盖的情形检查预层和层条件, 就能（同构下）唯一确定一个 X 上的层 $\mathcal{F}$.

定义 3.14. 对 $\mathcal{F}$ 是 X 上的层, $\mathcal{F}'\hookrightarrow\mathcal{F}$ 的子层. 则**商层** $\mathcal{F}/\mathcal{F}':=\mathcal{Q}^{\mathrm{sh}}$, 其中预层

$$\mathcal{Q}(U):=\mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U).$$

对层态射 $\alpha:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$, **像层** $\operatorname{Im}\alpha$ 和**核层** $\operatorname{Ker}\alpha$ 也类似取像或核再做层化. 不过核取出来就是层, 不层化也得到相同定义. 这里如此定义是为提醒做经典映射操作得者可能只是预层.

命题 3.15. 层映射列 $\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ 正合是指 $\mathrm{Im}(\mathcal{F} \to \mathcal{G}) = \mathrm{Ker}(G \to \mathcal{H})$. 一个层映射列正合当且仅当在每个 $x \in X$ 的茎处有 $\mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x \to \mathcal{H}_x$ 正合.

定义 3.16. $f : X \to Y$ 是拓扑空间连续映射, $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ 分别是 X, Y 上的层, 则 $f_*\mathcal{F}(V) := \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ 定义了 Y 上的层 $f_*\mathcal{F}$, 称之为 $\mathcal{F}$ 的**前推**. 而 $U \mapsto \mathrm{colim}_{V: f(U) \subset V}\, \mathcal{G}(V)$ 作层化, 得到的层 $f^{-1}\mathcal{G}$ 称 $\mathcal{G}$ 的**拉回**. 只需 $(f^{-1}\mathcal{G})_x = \mathcal{G}_{f(x)}$. 前推和拉回都是对拓扑空间函子性的.
另外 f^{-1}, f_* 为一对伴随函子, $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Sh}(X)}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Sh}(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$.
注意 $V \subset Y$ 的嵌入映射 i 带来 $i^{-1}\mathcal{G} = \mathcal{G}|_V$. 设 $*$ 是单点拓扑空间, 显然 $\mathsf{Sh}(*) = \mathsf{AbGrp}$, X 为拓扑空间. $f : X \to *$ 对应的前推 f_* 正是整体截面函子 Γ, 拉回 f^{-1} 正是常值层函子. 设 $i_x : * \to X$ 像为 $x \in X$, 则前推 $(i_x)_*$ 是所谓的**摩天大厦层**, 拉回 $(i_x)^{-1}$ 是取 x 点处茎的函子.

3.1.2 局部环化空间（Locally Ringed Spaces）

定义 3.17. 一个**局部环化空间** $(X, \mathcal{O}_X)$ 包含如下资料: 拓扑空间 X, 及其上的一个环层 $\mathcal{O}_X$（即 $\mathcal{O}_X(U)$ 都是环）, 也称**结构层**. 满足每个 $x \in X$ 处的茎 $\mathcal{O}_{X,x}$ 都是局部环. 记 $\mathfrak{m}_x$ 是 $\mathcal{O}_{X,x}$ 的极大理想, 用 $k(x)$ 记剩余域 $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$.

例 3.18. $\mathbb{C}$ 及其上全纯函数构成局部环化空间, 只检查茎是局部环. 对 $z \in \mathbb{C}$, $\mathcal{O}_{X,z}$ 含在 z 的全纯函数芽, $\mathfrak{m}_z$ 是其中在 z 值为 0 者. 它是唯一极大理想因为值非 0 则局部可逆.

定义 3.19. 局部环化空间的**态射**包含如下资料:

$$(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$$

其中 $f : X \to Y$ 连续, $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ 是层态射, 使得在每个 $x \in X$, $f^\sharp_x : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ 是**局部环同态**. 所谓局部环同态 $\varphi : (R, \mathfrak{m}) \to (\tilde{R}, \tilde{\mathfrak{m}})$ 指 $\varphi(\mathfrak{m}) \subset \tilde{\mathfrak{m}}$ 的环同态.
另外因为局部环化空间态射的复合还是态射, 于是显然可以定义局部环化空间的同构.

定义 3.20. 局部环化空间态射 $(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ 称**开 (resp. 闭) 浸入**是指 f 将 X 嵌入（到像同胚）到 Y 的一个开集（resp. 闭集）, 在每个 $x \in X$, $f^\sharp_x$ 是同构（resp. 满射）.

因为映射被芽决定, 显然开浸入的等价刻画是开集 $V \subset Y$ 使 $(f, f^\sharp)$ 诱导从 $(X, \mathcal{O}_X)$ 到 $(V, \mathcal{O}_Y|_V)$ 的局部环化空间同构. 而一般的闭浸入刻画如下:
设 $\mathcal{J}$ 是 $\mathcal{O}_X$ 的一个理想层（即一个 X 上的层, 任意开集 U 有 $\mathcal{J}(U)$ 是 $\mathcal{O}_X(U)$ 的理想, 对开集 $V \subset U$, $\mathcal{O}_X(U)$ 上的元素左乘作用在 $\mathcal{J}(U)$ 上与 $\mathrm{res}_{U,V}$ 交换）, 记

$$\mathcal{V}(\mathcal{J}) := \{x \in X : \mathcal{J}_x \neq \mathcal{O}_{X,x}\}.$$

引理 3.21. 记嵌入 $j : \mathcal{V}(\mathcal{J}) \hookrightarrow X$, 则 $\mathcal{V}(\mathcal{J})$ 是 X 的闭集. $(\mathcal{V}(\mathcal{J}), j^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}))$ 是一个局部环化空间, 而且它到 X 是闭浸入, 其中 $j^\sharp : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X/\mathcal{J} = j_* j^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J})$.

证明. 对 $x \notin \mathcal{V}(\mathcal{J})$, 存在含 x 的开邻域 U 和 $f \in \mathcal{J}(U)$ 使 $f = 1$, 于是 $U \subset \mathcal{V}(\mathcal{J})^c$ 从而 $\mathcal{V}(\mathcal{J})$ 闭. 另一边对 $x \in \mathcal{V}(\mathcal{J})$, $(j^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}))_x = (\mathcal{O}_X/\mathcal{J})_x = \mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{J}_x$ 是局部环, 且 $j_x^\sharp : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{J}_x$ 是自然满射. □

性质 3.22. $f : Y \hookrightarrow X$ 嵌入则 $f^{-1} f_* \mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_Y$. 因为茎上 $(f^{-1} f_* \mathcal{O}_Y)_y = (f_* \mathcal{O}_Y)_{f(y)} = \mathcal{O}_{Y,y}$.

命题 3.23. 设 $f : Y \to X$ 是局部环化空间闭浸入, 用 Z 记局部环化空间 $\mathcal{V}(\mathcal{J}), \mathcal{J} = \operatorname{Ker} f^\sharp \subset \mathcal{O}_X$ 则 f 是 Y 到 Z 的同构与 $Z \to X$ 的闭浸入的复合.

证明. 首先验证 $\mathcal{V}(\mathcal{J}) = f(Y)$. 对 $x \notin f(Y)$, $(f_* \mathcal{O}_Y)_x = 0$, 这是因为存在 x 的邻域 U 使 $f^{-1}(U) = \varnothing$. 而对 $x = f(y), f^{-1}(x) = \{y\}$, $(f_* \mathcal{O}_Y)_x = \mathcal{O}_{Y,y}$.
现在由正合列 $0 \to \mathcal{J} \to \mathcal{O}_X \to f_* \mathcal{O}_Y \to 0$, 我们得知 $\mathcal{J}_x = \mathcal{O}_{X,x}$ 当且仅当 $x \notin f(Y)$, 于是 $\mathcal{V}(\mathcal{J}) = f(Y)$. 现用 $j : Z \to X$ 记前引理的闭浸入, $g : Y \to Z$ 是 f 诱导的自然同构, 于是 $j_* \mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_X/\mathcal{J} \cong f_* \mathcal{O}_Y$, 故由前性质 $\mathcal{O}_Z = j^{-1} j_* \mathcal{O}_Z \cong j^{-1} f_* \mathcal{O}_Y = j^{-1} j_* g_* \mathcal{O}_Y = g_* \mathcal{O}_Y$. □

3.2 概形（Scheme）的基本知识

正如流形是欧氏空间粘成的, 其上光滑函数构成层; 我们希望把"局部仿射"的对象粘成某种对象, 即所谓概形, 并研究上面的"函数"构成的层, 这里仿射是指像一个环的谱. 所以我们需先研究环及其谱上的结构, 某种程度上这也解释了"环化空间"一词的来源.

3.2.1 定义：什么是概形、概形间的态射

性质 3.24. A 是环, $X = \operatorname{Spec} A$. 回忆**性质 2.16**, 在主开集上定义 $\mathcal{O}_X(X_f) := A_f$, 对 $X_g \subset X_f$ 即 $g \in \sqrt{(f)}$ 设 $g^m = fb, b \in A$, 定义 $\operatorname{res}_{f,g} : A_f \to A_g, a \mapsto a (a \in A)$, $f \mapsto bg^{-m}$. 注意 $X_f = X_g$ 时 $\operatorname{res}_{f,g} = \mathrm{id}$, 这与 m, b 的选取无关, 且不难得到 $\operatorname{res}_{f,h} = \operatorname{res}_{g,h} \circ \operatorname{res}_{f,g}$, 从而一般的 $\operatorname{res}_{f,g}$ 只与 X_f, X_g 有关. 我们完成了良定性检查.

命题 3.25. 上面实则给定了主开集基上的预层条件, 进而由**例 3.13** 我们定义了层 $\mathcal{O}_X$, 显然 $\mathcal{O}_X(X) = A$, 而且对一切 $\mathfrak{p} \in X$, $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \cong A_\mathfrak{p}$ 进而 $(X, \mathcal{O}_X)$ 是局部环化空间.

证明. 验证层公理, 设 X（一般的 X_f 只需研究 A_f）被族 $U_i = X_{f_i}, i \in \mathscr{I}$ 盖住, 由**性质 2.16** 设有限 $F \subset \mathscr{I}$ 使 $\bigcup_{i \in F} U_i = X$ 即 $\sum_{i \in F} (f_i) = (1)$. 对**唯一性**, 设 $s \in A, s|_{U_i} = 0; i \in F$.

换言之 $f_i^m s = 0$, 注意 $X_{f_i} = X_{f_i^m}$, 故 $\sum_{i\in F}(f_i^m) = (1)$ 从而 $s = 0$. 对**存在性**, 设一族 $s_i \in \mathcal{O}_X(U_i); i \in \mathscr{I}$ 相容. 记 $s_i = b_i f_i^{-m}; i \in F$, 相容条件即 $(b_i f_j^m - b_j f_i^m)(f_i f_j)^r = 0; i, j \in F$. 现记 $1 = \sum_{j\in F} a_j f_j^{m+r}; a_j \in A$. 取 $s := \sum_{j\in F} a_j b_j f_j^r \in A$, 则对一切 $i \in F$ 有

$$f_i^{m+r} s = \sum_{j\in F} a_j b_j f_j^r f_i^{m+r} = \sum_{j\in F} a_j b_i f_i^r f_j^{m+r} = b_i f_i^r \implies s|_{U_i} = s_i.$$

而对 $i \in I$, 因为 $U_i = \bigcup_{j\in F} U_i \cap U_j$ 以及 $(s|_{U_i})|_{U_i\cap U_j} = (s|_{U_j})|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j} = s_i|_{U_i\cap U_j}$, 故由唯一性 $s|_{U_i} = s_i$. 最后检查 $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \cong A_\mathfrak{p}$, 相当于 $\operatorname{colim}_{f:f\notin\mathfrak{p}} A_f \cong A_\mathfrak{p}$, 局部化构造保证同构. □

定义 3.26. 同构于 $(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$ 的局部环化空间称**仿射概形**, 无歧义时用 $\operatorname{Spec} A$ 指代之.

例 3.27. 对整环 A 和分式域 K, 则素理想 0 处的茎 $\mathcal{O}_{X,0} = K$. 所有 $\operatorname{res}_{U,X_{f_i}}$ 都是单射, 于是典范的映射 $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,0}$, $\operatorname{res}_{U,V}$ 都是单射.

例 3.28. 容易验证对 $X = \operatorname{Spec} A$, 自然映射 $(X_f, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A_f}) \to (X, \mathcal{O}_X)$ 是开浸入.

定义 3.29. 一个**概形**是局部仿射的局部环化空间 $(X, \mathcal{O}_X)$. 即存在 X 的开覆盖 $\{U_i\}$ 使 $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ 都是仿射概形. 对开集 $U \subset X$, $\mathcal{O}_X(U)$ 中的元素被称为**正则函数**.

习题 3.30. 若 X 是概形, 则任意开集 $U \subset X$, 不难检查 $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ 也是概形. 反过来, 局部环化空间 $(X, \mathcal{O}_X)$, 若存在 X 的开覆盖 $\{U_i\}$ 使 $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ 都是概形则 X 也是概形.
使用**例 3.28**, 我们只需选用一系列主开集作为定义用的仿射概形即可.

定义 3.31. X 是概形, 开集 $U \subset X$, 我们称 $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ 为 X 的一个**开子概形**, 若 U 是还是仿射的, 则称之一个**仿射开集**. 显见仿射开集构成一个开集基.

定义 3.32. 概形间的**态射**即作为局部环化空间的态射, 同构, 开、闭浸入等概念也沿用至此.

命题 3.33. 对环同态 $\varphi : A \to B$, 记 $X = \operatorname{Spec} B, Y = \operatorname{Spec} A$, 回忆**性质 2.17** 知 φ 诱导 $f : X \to Y$ 连续. 实际上存在概形间的态射 $(f, f^\sharp) : X \to Y$ 使 $f^\sharp(Y) = \varphi$.
实际上 A, B 间的所有环同态都是概形 Y, X 间态射诱导的, 只需取整体截面并复现上述构造. 不难检查在茎上是局部环映射. 从而 $\operatorname{Mor}(X, Y) = \operatorname{Mor}_{\mathsf{CRing}}(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_X(X))$.

证明. 对 $g \in A$ 注意到 $f^{-1}(Y_g) = X_{\varphi(g)}$, 而且 φ 诱导的自然 $\mathcal{O}_Y(Y_g) = A_g \to B_{\varphi(g)} = (f_*\mathcal{O}_X)(Y_g)$. 显然这些映射和 res 交换, 因此我们得到 $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ 而且在每个素理想 $\mathfrak{q} \in X$, $f^\sharp_\mathfrak{q}$ 正是典范的 $A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{q})} \to B_\mathfrak{q}$, 从而是局部环同态. 最后 $f^\sharp$ 在 Y 上确实与 φ 同. □

例 3.34. 典范的 $\varphi : A \to A_f$ 诱导**例 3.28** 的开浸入 $X_f \to X$.

例 3.35. 对概形 X, 设仿射开集 U 含 x, 则典范的 $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,x}$ 诱导了 $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \to U$. 与开浸入 $U \to X$ 复合即得 $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \to X$. 容易检查这不依赖 U 的选取.

3.2.2 态射的研究

开浸入较平凡, 都相当于原概形一个开集上的子概形. 接下来考察闭浸入, 典范情形如下:

命题 3.36. 环 A 理想 I, 则由商映射 $\varphi : A \to A/I$ 诱导的概形映射 $i : \mathrm{Spec}(A/I) \to \mathrm{Spec}\, A = X$ 是闭浸入, 像集正是 $\mathcal{V}(I)$. 而且对 $g \in A$ 有 $(\mathrm{Ker}\, i^\sharp)(X_g) = I \otimes_A A_g$.

证明. 只需注意**性质 2.17**, 得知 i 是到 $\mathcal{V}(\mathrm{Ker}\,\varphi)$ 的同胚. 而对 $i^\sharp$, 考虑 $g \in A$ 有 $i^\sharp(X_g) : \mathcal{O}_X(X_g) = A_g \to (A/I)_{\overline{g}} = (i_*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A/I)})(X_g)$ 正是典范满射, 因此 $\mathrm{Ker}\, i^\sharp$ 确如其述. □

一般的, 概形间的闭浸入带给我们如下定义:

定义 3.37. X 的一个**闭子概形** Z, 指在 X 的闭子集 Z 上有概形 $(Z, \mathcal{O}_Z)$ 结构和对应的闭浸入 $(j, j^\sharp) : (Z, \mathcal{O}_Z) \to (X, \mathcal{O}_X)$, 其中 $j : Z \hookrightarrow X$ 是典范的嵌入.

现在**命题 3.36** 的反方向可叙述为：仿射概形的闭子概形都由商掉理想诱导. 这确实是对的, 不过在证明它之前我们需做一些准备. （第一次阅读可跳到**定义 3.42** 而不影响主线）

定义 3.38. X 是概形, $f \in \mathcal{O}_X(X)$. 记 $X_f := \{x \in X : f_x \in \mathcal{O}_{X,x}^\times\}$. 对仿射概形 X, 定义退化为主开集 $X_f = \{\mathfrak{p} \in X : f \in A_\mathfrak{p}^\times\} = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A : f \notin \mathfrak{p}\}$.

定义 3.39. * 概形 X 满足**拟紧拟分离条件**指 X 是有限多个仿射开集 $\{U_i\}_i$ 的并, 且 $U_i \cap U_j$ 也是有限多个仿射开集的并. 在**性质 3.63** 会解释相关性质, 这一性质其实是纯拓扑的, 现在姑且承认仿射概形的闭子概形满足之. 这已经足够完成定理的证明.

命题 3.40 (qcqs 引理)**.** 概形 X, $f \in \mathcal{O}_X(X)$, 则 X_f 是 X 的开子集. 进一步的, 若 X 满足拟紧拟分离条件则限制映射 $\mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(X_f)$ 诱导同构 $\mathcal{O}_X(X)_f \to \mathcal{O}_X(X_f)$.

证明. 对 $x \in X_f$, 存在邻域 U 和 $g \in \mathcal{O}_X(U)$ 使 $f|_U \cdot g = 1$, 显然 $x \in U \subset X_f$. 接下来, 将这些逆 $g \in \mathcal{O}_X(V)$ 粘起来得 $\mathcal{O}_X(X_f)$ 中 $f|_{X_f}$ 的逆, 这定义了同态 $\alpha : \mathcal{O}_X(X)_f \to \mathcal{O}_X(X_f)$. 现在使用 X 的条件设一族有限仿射开覆盖 $\{U_i\}_{i\in F}$, 则 $X_f = \bigcup_{i\in F} V_i$, $V_i = U_i \cap X_f$. 为描述方便, 下面将 X 子集上 f 的限制统称 f. **例 3.34** 诱导一族 $\mathcal{O}_X(U_i)_f = \mathcal{O}_X(V_i)$.
接下来我们将使用层条件, 为此先写出正合列（注意这里的乘积都有限）:

$$0 \longrightarrow O_X(X) \xrightarrow{d_0} \prod_{i\in F} \mathcal{O}_X(U_i) \xrightarrow{d_1} \prod_{i,j\in F} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$$

其中 $d_0 : s \mapsto (s|U_i)_i$, $d_1 : (s_i)_i \mapsto (s_i|_{U_i\cap U_j} - s_j|_{U_i\cap U_j})_{i,j}$. 然后利用局部环的平坦性, 作用 $-\otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_X(X)_f$ 从而得到

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & O_X(X)_f \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & \prod_{i\in F} \mathcal{O}_X(U_i)_f \arrow[r] \arrow[d, equal] & \prod_{i,j\in F} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)_f \arrow[d, "\beta"] \\
0 \arrow[r] & O_X(X_f) \arrow[r] & \prod_{i\in F} \mathcal{O}_X(V_i) \arrow[r] & \prod_{i,j\in F} \mathcal{O}_X(V_i \cap V_j)
\end{tikzcd}$$

因此结合行正合性, 我们得出 α 是单射（$f\circ g$ 是单射则 f,g 单）; 对 $U_i\cap U_j$ 使用类似的方法也能证明 β 是单射. 进而根据**四引理 (定理 4.58)**, 我们得出 α 是满射, 从而 α 是同构. $\square$

> **命题 3.41 (仿射概形的闭子概形).** $X=\operatorname{Spec}A$, $j:Z\to X$ 闭子概形, 则 Z 仿射, 实际上存在唯一的理想 $J\subset A$ 使得 j 诱导自 $A\to A/J$.

证明. Z 是仿射概形的闭子概形, 满足拟紧拟分离条件. 下 $\mathcal{O}_Z(Z)_h$ 用到**命题 3.40**.
利用**命题 3.23** 取 $\mathcal{J}=\operatorname{Ker}j^\sharp$, 记 $J=\mathcal{J}(X)$. 现在 $(Z,\mathcal{O}_Z)$ 概形同构于 $(\mathcal{V}(\mathcal{J}),\mathcal{O}_X/\mathcal{J})$. 设 $g\in A$, h 是 g 在 $\mathcal{O}_Z(Z)$ 中的像, 对正合列 $0\to J\to A\to\mathcal{O}_Z(Z)\to 0$ 取 $-\otimes_A A_g$ 得到

$$0\to J\otimes_A A_g\to A_g=\mathcal{O}_X(X_g)\to\mathcal{O}_Z(Z)_h.$$

又注意 $O_Z(Z)_h=\mathcal{O}_Z(Z_h)=(j_*\mathcal{O}_Z)(X_g)$. 因此 $\mathcal{J}(X_g)=J\otimes_A A_g$. 再记 $i:\operatorname{Spec}(A/J)\to X$ 是**命题 3.36** 构造的典范闭浸入. 现在 $(\operatorname{Ker}i^\sharp)(X_g)=\mathcal{J}(X_g)$ 在每个主开集 X_g, 且不难验证它们典范的同构进而满足各种融贯性. 最后唯一性源于 J 被 $(\operatorname{Ker}j^\sharp)(X)$ 唯一确定. $\square$

最后我们观察几个定义和一些相关结论.

定义 3.42. 概形 S. 一个S-**概形**或S **上的概形**指概形 X 和对应的态射 $\pi:X\to S$（注意方向!）. π 被称为**结构态射**, S 被称为**基概形**, 当 $S=\operatorname{Spec}A$ 时也常说A-**概形**或A **上的概形**. 而两个 S-概形间的**态射**也要求与对应的结构态射相容, 即交换图表:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\pi_X"'] & Y \arrow[dl, "\pi_Y"] \\ S & \end{tikzcd}$$

回忆对仿射概形 X,Y 我们有**命题 3.33**, 即 $\operatorname{Mor}(X,Y)=\operatorname{Mor}_{\mathsf{CRing}}(\mathcal{O}_Y(Y),\mathcal{O}_X(X))$.

> **命题 3.43.** X 是概形, Y 是仿射概形, 仍有典范的 $\operatorname{Mor}(X,Y)=\operatorname{Mor}_{\mathsf{CRing}}(\mathcal{O}_Y(Y),\mathcal{O}_X(X))$. 因此对环 A, A-概形 X 被环同态 $A\to\mathcal{O}_X(X)$ 决定.

证明. 考虑 $X=\bigcup_i U_i$ 其中 U_i 是仿射开集. 利用 X,Y 都仿射的情形得到交换图表:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Mor}(X,Y) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\alpha"'] & \operatorname{Mor}_{\mathsf{CRing}}(\mathcal{O}_Y(Y),\mathcal{O}_X(X)) \arrow[d, "\beta"] \\ \prod_i \operatorname{Mor}(U_i,Y) \arrow[r, "\gamma"] & \prod_i \operatorname{Mor}_{\mathsf{CRing}}(\mathcal{O}_Y(Y),\mathcal{O}_X(U_i)) \end{tikzcd}$$

现在 γ 是同构, 层条件知 α 是单射, 故 ρ 是满射. 另外对 $\varphi \in \mathrm{Mor}_{\mathsf{CRing}}(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_X(X))$, 记 $\varphi_i = \mathrm{res}_{X,U_i} \circ \varphi$, 拉回为 $f_i \in \mathrm{Mor}(U_i, Y)$, 在 $U_i \cap U_j$ 的仿射开子集 V 上观察交换图

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O}_Y(Y) \arrow[dl, "\varphi_i"'] \arrow[d] \arrow[dr, "\varphi_j"] & \\ \mathcal{O}_X(U_i) \arrow[r, "\mathrm{res}_{U_i,V}"'] & \mathcal{O}_X(V) & \mathcal{O}_X(U_j) \arrow[l, "\mathrm{res}_{U_j,V}"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Y & \\ U_i \arrow[ur, "f_1"] & V \arrow[l, "\supset"'] \arrow[u] \arrow[r, "\subset"] & U_j \arrow[ul, "f_2"'] \end{tikzcd}$$

故 $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ 于是粘出 $f \in \mathrm{Mor}(X, Y)$, 进而 β 单射推出 $\rho(f) = \varphi$ 从而 ρ 满. □

定义 3.44. 对 S-概形 X 和 T, 用 $X(T)$ 表示 $T \to X$ 的 S-概形态射构成的集合 $\mathrm{Hom}_S(T, X)$.

例 3.45. 设 X 是域 k 上的概形, 这时 $X(k) = \{x \in X : k(x) = k\}$. 称之 X 的 **(k-) 有理点**. 特别的, 若 Y 是 X 的开子概形或闭子概形时, 总有 $Y(k) = X(k) \cap Y$ 因为剩余域不变.
稍微一般的, 设 $(A, \mathfrak{m})$ 是局部环, X 是概形, 则 X 的 $\mathrm{Spec}\, A$ 点, 即 $\mathrm{Spec}\, A \to X$ 的概形映射一一对应于 $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \to A$ 的局部环同态, 其中 $\mathfrak{p} \in X$ 是 $\mathfrak{m}$ 的像. 拓扑上来看 $\mathfrak{p}$ 的任意开邻域都包含整个 $\mathrm{Spec}\, A$ 的像, 因为 $\mathrm{Spec}\, A$ 的像中的任意单点, 作为集合取闭包都含 $\mathfrak{p}$（即 $\mathfrak{p}$ 是像集中任意点的特殊化, 见**定义 3.59**）, 因此不经过 $\mathfrak{p}$ 的闭集也不会经过 $\mathrm{Spec}\, A$ 的像. 由此可以在任何一个仿射开邻域中研究, 归约到**命题 3.33**.

3.2.3 概形的例子: 准备工作

下两个小节的目的是观察数个概形的例子, 其中比较重要的是射影概形.

例 3.46. 对环 R, 现在我们正式引入仿射概形 $\mathbb{A}_R^n = \mathrm{Spec}\, R[X_1, \cdots, X_n]$. 数相关例如下:
域 k, 记 $A = k[x, y]$. 一个简明例子是 $U = \mathbb{A}_k^2 - \{(x, y)\} = X_x \cup X_y$. 由 UFD, U 上的函数形如 $A_x \cap A_y = A$. 说明移掉原点不会带来更多函数. 实际上 U 并不仿射, 倘若 $U = \mathrm{Spec}\, R$, 取整体截面 $R \cong A$, 但在 U 上可以确切计算交 $\mathcal{V}(x) \cap \mathcal{V}(y) = \varnothing$, 这在 X 不会发生.

下面引入一个引理, 像欧氏空间粘出光滑流形一样, 我们并不预先有流形结构而有坐标卡之间的转移函数, 即一系列欧氏空间之间的映射, 我们依此法来粘概形.

引理 3.47. S 是概形, $\{X_i\}_i$ 是一族 S 上概形. 设 $\{X_{ij}\}_j$ 是一族 X_i 的开子概形（可为空）, $X_{ii} = X_i$, 还有一族 S-概形同构 $f_{ij} : X_{ij} \to X_{ji}$ 满足 $f_{ii} = \mathrm{id}_{X_i}, f_{ij}(X_{ij} \cap X_{ik}) = X_{ji} \cap X_{jk}$, 并且 $X_{ij} \cap X_{ik}$ 上 $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$. 则存在（同构下）唯一的 S-概形 X 使得 S-概形的开浸入 $g_i : X_i \to X$, 使得 X_{ij} 上 $g_i = g_j \circ f_{ij}$ 且 $X = \bigcup_i g_i(X_i)$.

证明. 取 $X = \coprod X_i / \sim$, 其中 $x \sim y, x \in X_i, y \in X_j \iff y = f_{ij}(x)$. 首先拓扑上典范的 $g_i : X_i \hookrightarrow X$ 确是开浸入且 $g_i = g_j f_{ij}$ 于 X_{ij}. 记像 $U_i = g_i(X_i)$, 我们定义 $\mathcal{O}_{U_i} = g_{i*}\mathcal{O}_{X_i}$, 容易检

查 $\mathcal{O}_{U_i}|_{U_i\cap U_j} = \mathcal{O}_{U_j}|_{U_i\cap U_j}$. 现在 $f_{ik} = f_{jk}\circ f_{ij}$ 保证了层条件, 可以把这些 $\mathcal{O}_{U_i}$ 粘贴成 $\mathcal{O}_X$, 类似拓扑基粘出一个层的理由, $(X,\mathcal{O}_X)$ 是 S-概形. 而唯一性也是显然的. □

例 3.48. 两个直线 $\mathbb{A}^1_k$ 可以怎么粘？(1) 双原点直线, $X = \operatorname{Spec} k[t], Y = \operatorname{Spec} k[u]$ 再粘起 $X_t \cong Y_u$, 直接地 $k[t,1/t] \cong k[u,1/u], t\mapsto u$. 它也不是仿射的, 因为整体截面是 $k[x]$ (回忆**例 3.27** 知 $k[u,1/u]$ 从 $k[u]$ 诱导下来的只有 $k[u]$) 但是 $\mathcal{V}(x)$ 有两个点. (2) 另一个例子当然是射影直线, 在上环境取 $t\mapsto 1/u$ 即可. 这一空间记作 $\mathbb{P}^1_k$. 容易发现整体截面上只有 k, 因为在 $x\mapsto 1/x$ 下仍是多项式的只有常多项式, 这也说明其非仿射.

例 3.49 (射影空间)**.** 取 $X_i = \operatorname{Spec} k[T_i^{-1}T_j]_{0\le j\le n}$, $X_{ij} = (X_i)_{T_i^{-1}T_j}$.
于是 $\mathcal{O}_{X_i}(X_{ij}) = k[T_i^{-1}T_j, T_j^{-1}T_i, T_i^{-1}T_k]_{0\le k\le n}$. 其中 $T_i^{-1}T_j, T_j^{-1}T_i$ 不动, 将 $T_i^{-1}T_k$ 映到 $T_j^{-1}T_k$, 故 $X_{ij}\cong X_{ji}$. 这样粘出的空间记 $\mathbb{P}^n_k$. 稍作观察发现一个 $k[T_0^{-1}T_k]_{1\le k\le n}$ 中的多项式, 如果 T_k/T_0 的次数非零, 在 X_{k0} 中看 T_0 会出现在分母, 无法拉回 X_k, 故整体截面只有 k.

3.2.4 射影概形（Projective Scheme）, Proj 构造

下以另法引入射影概形, 先给出数个定义.

定义 3.50. 分次环 $B = \bigoplus_{d\ge 0} B_d$ 称一个**分次 A-代数**, 若 B_0 是一个 A 代数. 对 $f\in B$ 记在 B_d 中分量非零的最大 d 为 $\deg f$. 诸 B_d 中的元素称**齐次**的. 若 B 的理想 I 只由齐次元素生成则称之**齐次**理想, 这等价于 $I = \bigoplus_{d\ge 0}(I\cap B_d)$. 对齐次理想 I, 商 B/I 有自然分次 $(B/I)_d := B_d/(I\cap B_d)$. 记 $\operatorname{Proj} B$ 为全体不包含 $B_+ = \bigoplus_{d>0} B_d$ 的齐次素理想构成的集合.

定义 3.51. 对 B 的齐次理想 I, 用 $\mathcal{V}_+(I)$ 记 $\operatorname{Proj} B$ 中含 I 的素理想. 显然:

$$\bigcap_i \mathcal{V}_+(I_i) = \mathcal{V}_+\left(\sum_i I_i\right), \mathcal{V}_+(I)\cup\mathcal{V}_+(J) = \mathcal{V}_+(I\cap J) = \mathcal{V}_+(IJ), \mathcal{V}_+(B) = \varnothing, \mathcal{V}_+(0) = \operatorname{Proj} B$$

于是 $\mathcal{V}_+(I)$ 为闭集构建了 $\operatorname{Proj} B$ 上的拓扑. 再对 B 的理想 I, 用 $I^h = \bigoplus_{d\ge 0}(I\cap B_d)$ 表示它的**齐次化**. 于是 I 齐次当且仅当 $I = I^h$. 在下面框架中希望用 $(\mathcal{V}_+, \operatorname{Proj})$ “代替” $(\mathcal{V}, \operatorname{Spec})$.

性质 3.52. 设 I, J 是分次 B 的理想, 则下述性质成立: (1) 若 I 素则 I^h 素.
(2) I, J 齐次时 $\mathcal{V}_+(I)\subset\mathcal{V}_+(J) \iff J\cap B_+ \subset\sqrt{I}$.
(3) $\operatorname{Proj} B = \varnothing \iff B_+$ 中都是幂零元.

证明. (1) 设 $ab\in I^h; a,b\notin I^h$. 设齐次分解 $a = \sum_{i=0}^n a_i, b = \sum_{j=0}^m b_j; a_d, b_d\in B_d$. 不断去掉在 I^h 中的项可设最高次 $a_n, b_m\notin I^h$. 因为 $ab\in I^h$ 故 $a_nb_m\in I^h\subset I$ 而与 I 素矛盾. (2) $J\cap B_+\subset\sqrt{I}$ 时 $\mathfrak{p}\in\mathcal{V}_+(\sqrt{I})$ 推出 $JB_+\subset\mathfrak{p}$ 因为 $B_+\not\subset\mathfrak{p}$ 故 $J\subset\mathfrak{p}$. 反过来 $\mathcal{V}_+(I)\subset\mathcal{V}_+(J)$ 时对 $\mathfrak{p}\in\mathcal{V}(I)$ 则

$\mathfrak{p}^h$ 素且 $I \subset \mathfrak{p}^h$. 如果 $\mathfrak{p}^h$ 不含 B_+, 则 $\mathfrak{p}^h \in \mathcal{V}_+(J)$ 从而 $J \cap B_+ \subset \mathfrak{p}^h \subset \mathfrak{p}$. $\mathfrak{p}^h$ 含 B_+ 时此式也成立. (3) $\operatorname{Proj} B = \varnothing$ 等价于 $\mathcal{V}_+(0) \subset \mathcal{V}_+(B_+)$ 从而等价于 $B_+ \subset \sqrt{0}$. □

定义 $X = \operatorname{Proj} B$ 上的主开集, 对齐次 f 记 $X_f = X - \mathcal{V}_+(f)$. 现在 $\varnothing = \mathcal{V}_+(B_+) = \bigcap_i \mathcal{V}_+(f_i)$, f_i 取遍 B_+ 的齐次元素. 这表明 $X = \bigcup_i X_{f_i}$. 再记

$$B_{(f)} := \{af^{-N} \in B_f : N \geq 0,\ a\text{齐次},\ \deg a = N \deg f\}.$$

补充说明: 首先 $B_{(f)}$ 是一个环, 严格来说 deg 对于齐次元素的定义在零处是谬谬的, 但是如果我们认为 0 的 deg 可以是任意的, 那么上述定义就会使 $0 \in B_{(f)}$.

性质 3.53. 对 $f \in B_+$ 是齐次的元素. (1) 存在典范同胚 $\theta : X_f \to \operatorname{Spec} B_{(f)}$.
(2) 若 $X_g \subset X_f$, $\alpha = g^{\deg f} f^{-\deg g} \in B_{(f)}$ 则 $\theta(X_g) = Y_\alpha$, 其中 $Y = \operatorname{Spec} B$.
(3) 在前一条下, 我们有典范同态 $B_{(f)} \to B_{(g)}$, 诱导同构 $(B_{(f)})_\alpha \cong B_{(g)}$.

证明. 同时看 (1),(2), 集合上 $X \subset Y$, 对 $f = f_0 + \cdots + f_d \in B$, 则 $Y_f \cap X = \bigcup_{i=0}^d X_{f_i}$ 从而 X 上拓扑诱导自 Y. 设 $\theta : X_f \to \operatorname{Spec} B_{(f)}$ 为典范的 $Y_f = \operatorname{Spec} B_f \to \operatorname{Spec} B_{(f)}$ 在 X_f 上的限制, 它连续. 先证它满, 注意 B_f 是 $B_{(f)}$-分次代数, 对 $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B_{(f)}$ 由这分次可以验证 $\sqrt{\mathfrak{q}B_f}$ 是 B_f 的齐次素理想. 现设 $\rho : B \to B_f$ 为局部化, 记 $\mathfrak{p} = \rho^{-1}(\sqrt{\mathfrak{q}B_f})$, 可证它是 B 中齐次的素理想且在 X_f 中. 最后只需证 $\theta(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$ 而得满射, 而这也是 B_f 分次的推论.
再证单, 设 $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in X_f$ 使 $(\mathfrak{p}B_f) \cap B_{(f)} = (\mathfrak{p}'B_f) \cap B_{(f)}$. 于是不难验证对齐次 $b \in \mathfrak{p}$, $b^{\deg f} f^{-degb} \in (pB_f) \cap B_{(f)} \subset \mathfrak{p}'B_f$ 从而 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$, 同理另一边也包含故 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$.
现在 θ 已经是连续双射. 现在只需注意 $\theta(X_g) = Y_\alpha$ 这样 θ 是开映射从而是同胚.
(3) 由**性质 3.52(2)**, 取 $n \geq 1, b \in B$ 使 $g^n = fb$, 通过取 b 的 $n \deg g - \deg f$ 次的部分可设 b 齐次, 得到同态 $B_{(f)} \to B_{(g)}$ 为 $f^{-1} \mapsto bg^{-n}$, 经过有点繁琐的验证可知良定且符合条件. □

命题 3.54. A 是环, B 是分次 A-代数. 则 $X = \operatorname{Proj} B$ 有唯一的 A-概形结构能使一切齐次的 $f \in B_+$, 开 X_f 仿射且同构于 $\operatorname{Spec} B_{(f)}$.

证明. 对 $f \in B_+$, X_f 是拓扑基. 我们令 $\mathcal{O}_X(X_f) := B_{(f)}$, 由**性质 3.53(3)**, 注意 $B_{(f)}$ 典范同构 $B_{(f')}$ 当且仅当 $X_f = X_{f'}$, 而且包含关系 $X_g \subset X_f$ 下有典范的 $\mathcal{O}_X(X_f) \to \mathcal{O}_X(X_g)$, 从而得到预层结构. 最后容易检查**引理 3.47** 的条件, 因为 $X_f \cap X_g = X_{fg}$, 从而得到 A-概形结构. □

例 3.55. 环 A, 取 $B = A[T_0, \cdots, T_n]$ 标准分次. 则 $B_{(T_i)} = A[T_i^{-1}T_j]_{0 \leq j \leq n}$, 易证 $\operatorname{Proj} B \cong \mathbb{P}_A^n$.
回忆**命题 2.173** 中的记号, 设 V 是 k 的 $n+1$ 维线性空间, 记 $V^\vee$ 为其对偶, $\operatorname{Sym} V^\vee$ 是对称张量代数当然也同构 $n+1$ 个变量的多项式环. 于是记 $\mathbb{P}V := \operatorname{Proj} \operatorname{Sym} V^\vee$, 一个具体好处是 k 代数闭时, $\mathbb{P}V$ 的**闭点（单点集是闭集）**典范对应 V 的一维子空间.

命题 3.56. 设 I 是 $R := A[T_0, \cdots, T_n]$ 中的齐次理想, $B := R/I$ 依**定义 3.50** 它有自然分次, 则 $\operatorname{Proj} B$ 同构于 $\mathbb{P}_A^n$ 的一个闭子概形, 嵌到 $\mathcal{V}_+(I)$.

证明. 记商 $\varphi : R \to B$, 显然 $\varphi(R_d) = B_d, \varphi(R_+) = B_+$. 这诱导 $f : X = \operatorname{Proj} B \hookrightarrow \operatorname{Proj} R = Y$, 容易验证像正是 $\mathcal{V}_+(I)$. 对诸 $h \in R_+$, $f^{-1}(Y_h) = X_{\varphi(h)}$, $f|_{Y_h}$ 同自然的 $R_{(h)} \to B_{(\varphi(h))}$. □

定义 3.57. 环 A 上的有限生成（注意这个条件）分次环 B 对应的 $\operatorname{Proj} B$ 称一个**射影 A-概形**, 而它的任意拟紧的开子概形称为**拟射影 A-概形**.

最讨论 Proj 构造间的态射. 设 $\varphi : C \to B$ 是分次环间的态射, 要求存在 $r \geq 1$ 使得 $\varphi(C_d) \subset B_{rd}$, 设 M 是 $\varphi(C_+)B$ 为 B 的齐次理想, 那么 φ 诱导 $f : X := \operatorname{Proj} B \backslash \mathcal{V}_+(M) \to \operatorname{Proj} C =: Y$, 对齐次 $h \in C_+$, $f^{-1}(Y_h) = X_{\varphi(h)}$, 而且 f 限制在 $X_{\varphi(h)}$ 上的映射由仿射的 $C_{(h)} \to B_{(\varphi(h))}$ 诱导.

3.3 概形初步性质

3.3.1 纯拓扑（Topological）的性质

回忆拓扑上有闭点（单点集是闭集）、拟紧（开集的任意开覆盖存在有限子覆盖）、不可约（不是两个真闭子集的并）等概念. Noether 的概念在概形上是另一个意思, 放到后面讨论.
对一个拓扑空间 X, 用 X^0 表示全体闭点构成的子拓扑空间. 现在对概形 X, 用 $i : X_0 \hookrightarrow X$ 记典范的嵌入, 则 $(X^0, i^{-1}\mathcal{O}_X)$ 是一个局部环化空间. 实际上常研究 X^0, 它常在 X 稠密.

习题 3.58. 一个交换代数习题是, 域 k *(无需代数闭)* 上有限生成代数 A 都是 *Jacobson* 环, $X = \operatorname{Spec} A$ 的闭点在任何一个闭子集上稠密, $x \in X$ 是闭点当且仅当剩余域 $k(x)$ 是 k 的有限扩张, 一个推论是域上的代数簇闭点都稠密. 更一般的结论在**习题 9.3(Jacobson 环)** 中.

定义 3.59. 一个拓扑空间的**一般点**指它的闭包是一个不可约分支, 若拓扑空间中 $x, y \in X$ 使 $y \in \overline{\{x\}}$ 则称 y 是 x 的**特殊化**, x 是 y 的**一般化**. 概形的这些概念依其拓扑空间定义.

习题 3.60. 这里陈列关于拟紧和不可约的一些简单事实.
(1) 对仿射概形来说, 开子集拟紧也等价于可写成有限个主开集的并. 而一般的概形拟紧当且仅当它是有限个仿射开子概形的并. (2) 一般的拓扑空间, 不可约集的闭包仍不可约, 而且 **Zorn 引理**结合不可约集上升链的并仍不可约, 保证存在一些两两没有包含关系的极大不可约集. 极大保证它们取闭包等于自身从而都是闭的, 称之**不可约分支**, 这与**定理 2.22** 协调. 另外拓扑空间的不可约分解交到开子集上得到子集拓扑的不可约分解. (3) 对仿射概形来说, 素理想 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ 则后者是前者的一般化, 一般点则对应极小素理想（没有 *Noether* 则不一定有限个）. 于是概形

的不可约分支 Z 交到某仿射开集 U 上非空，则是某 x 的闭包，于是 X 中 $Z=\overline{\{x\}}\cup(U^c\cap Z)$ 从而 $Z=\overline{\{x\}}$. 而且概形是 T_0 的，这等价于不存在 $x\neq y$ 使得 X 中 $\overline{\{x\}}=\overline{\{y\}}$. (4) $\mathbb{A}_k^n,\mathbb{P}_k^n$ 是拟紧、不可约的拓扑空间.

习题 3.61. 拟紧概形中（实际上 T_0 拟紧拓扑空间）的每个不可约闭集都有闭点，进而每个闭集都有闭点. 技巧是使用 **Zorn 引理**讨论极小闭集，拟紧保证非空，T_0 保证只有一点.

定义 3.62. 一个拓扑空间称**拟分离**的是指它的任两个拟紧开集的交是拟紧的. 注意此处是任意，这看似比在**定义 3.39** 所述者要求严格，另外在后文介绍态射时也会重新提到它.

神秘的是，虽然拟分离的定义是纯拓扑的，但我们在证明如下性质时将用到概形的一些独特好处，然而证明的技巧本身是较为拓扑的，我们绕开了即将在**仿射沟通技术**中介绍的工具.

性质 3.63. 这里的拟分离采取**定义 3.62** 定义.

(1) 仿射概形拟分离. (2) 一个概形拟紧且拟分离等价于是有限多个仿射开集 $\{U_i\}_i$ 的并，且诸 $U_i\cap U_j$ 也是拟紧的. （即**定义 3.39** 者）(3) 有拟紧拓扑基的拟分离拓扑空间 X，其闭子空间 Z 亦拟分离. （推论：仿射概形闭子概形是拟紧拟分离的，拟紧闭遗传留给读者）

证明. (1) 仿射概形中两拟紧开集交 $(\bigcup_{i=1}^m X_{f_i})\cap(\bigcup_{j=1}^n X_{g_j})=\bigcup_{i=1}^m\bigcup_{j=1}^n X_{f_ig_j}$ 也拟紧. (2) 只需证此定义推**定义 3.62**，我们首先指出 U 拟紧则 $U\cap U_1$ 拟紧. 将诸 $U\cap U_j$ 写成 U_j 主开集的并 $\bigcup_k W_{jk}$. 现在 $U=\bigcup_j U\cap U_j=\bigcup_{j,k}W_{jk}$. 因为 U 拟紧，故设有限个 W_{jk} 盖住 U，记下标 j 者对应有限多的 k 构成集合 F_j. 现在我们写出

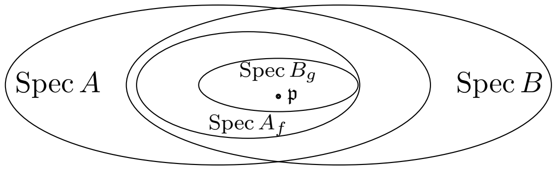
$$U=\bigcup_j\bigcup_{k\in F_j}W_{jk}\implies U\cap U_1=\bigcup_j\bigcup_{k\in F_j}W_{jk}\cap U_1=\bigcup_j\bigcup_{k\in F_j}W_{jk}\cap(U_1\cap U_j)=\bigcup_j\bigcup_{k\in F_j}\bigcup_l W_{jk}\cap V_{jl}.$$

注意到 $U_1\cap U_j$ 都拟紧，因此将上式的 $(U_1\cap U_j)$ 换成 U_j 中有限个主开集的并 $\bigcup_l V_{jl}$. 注意 $W_{jk}\cap V_{jl}$ 是 U_j 中两个主开集的交，因此是主开集进而也拟紧. 于是 $U\cap U_1$ 是有限个拟紧集的并从而拟紧. 现在设 U,V 拟紧，于是 $U\cap U_1,V\cap U_1$ 拟紧，结合 U_1 仿射故 (1) 知它拟分离，从而 $(U\cap U_1)\cap(V\cap U_1)$ 拟紧，同理诸 $(U\cap V)\cap U_i$ 拟紧，故 $U\cap V$ 拟紧.

(3) 我们声称 Z 的开子集拟紧当且仅当可写成 X 的拟紧开集与 Z 的交. 一方面对 X 的拟紧开集 U，$U\cap Z$ 的任意开覆盖，可以用 U 中一些的拟紧开集基交 Z 来替代原先的开覆盖，然后再取全体 $U-Z$ 的拟紧开集基，于是利用 U 拟紧，得到 $U\cap Z$ 的有限子覆盖. 另一方面 Z 的拟紧开集 $V\cap Z$，其中 V 是 X 中开集，取 V 的全体拟紧开集基盖住 $V\cap Z$，只需用到其中有限多就能盖住，这有限多拟紧开集并起来记作 U，则 $U\cap Z=V\cap Z$ 且 U 拟紧. □

3.3.2 仿射沟通技术（Affine Communication Technique）

命题 3.64. 设 $\operatorname{Spec} A, \operatorname{Spec} B$ 是概形 X 的两个仿射开子概形. 则 $\operatorname{Spec} A \cap \operatorname{Spec} B$ 是一系列同时在 $\operatorname{Spec} A, \operatorname{Spec} B$ 中都是主开集者的并.



证明. 如图对 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \cap \operatorname{Spec} B$, 取 $f \in A$ 使 $\operatorname{Spec} A_f$ 含 $\mathfrak{p}$ 且含于 $\operatorname{Spec} A \cap \operatorname{Spec} B$, 再取 $g \in B$ 使 $\operatorname{Spec} B_g$ 含 $\mathfrak{p}$ 且含于 $\operatorname{Spec} A_f$. 设 $\operatorname{Spec} B$ 的截面 g 限制到 $\operatorname{Spec} A_f$ 上成为 g'. 注意**定义 3.38** 的技术, $\operatorname{Spec} B_g = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A_f : g' \notin \mathfrak{q}\} = \operatorname{Spec}(A_f)_{g'}$.
设 $g' = g''/f^n, g'' \in A$ 于是 $\operatorname{Spec} B_g = \operatorname{Spec}(A_f)_{g'} = \operatorname{Spec} A_{fg''}$ 故得证. □

推论 3.65 (仿射沟通引理)**.** 若 $\mathcal{P}$ 是概形 X 的某些仿射开子集满足的性质. 满足
(1) 若 $\operatorname{Spec} A \subset X$ 满足 $\mathcal{P}$, 则任意 $f \in A$, $\operatorname{Spec} A_f$ 也满足 $\mathcal{P}$.
(2) 若 $(f_1, \cdots, f_n) = A$, 诸 $\operatorname{Spec} A_{f_k} \subset X$ 满足 $\mathcal{P}$, 则 $\operatorname{Spec} A \subset X$ 也满足 $\mathcal{P}$.
若 X 有一个满足 $\mathcal{P}$ 的仿射开覆盖 $\bigcup_{i \in \mathscr{I}} \operatorname{Spec} A_i$, 则 X 的任意仿射开集满足 $\mathcal{P}$.

证明. 任取 X 的仿射开集 $\operatorname{Spec} A$ 因为诸 $\operatorname{Spec} A_i \cap \operatorname{Spec} A$ 可以用同时是二者的主开集盖住, 于是由 (1) $\operatorname{Spec} A$ 是一族满足 $\mathcal{P}$ 的主开集的并, 再由拟紧和 (2), A 也满足 $\mathcal{P}$. □

定义 3.66. 把同时满足**推论 3.65 要求 (1),(2)** 的性质 $\mathcal{P}$ 称为**仿射局部**的.

3.3.3 Noether 性、有限型（Type）、有限表现（Presented）、代数簇（Variety）

定义 3.67. 概形 X 若被一族（不必有限）仿射开子集 $\{\operatorname{Spec} A_i\}_{i \in \mathscr{I}}$ 覆盖, 且诸 A_i 是 *Noether* 环, 则称 X **局部 Noether** 的. 若概形局部 *Noether* 且拟紧, 则称之 **Noether** 的. 显然 *Noether* 等价于局部 *Noether* 条件中一族改为有限. 设 X 是 A-概形, 若 X 被一族 A-仿射开子概形 $\{\operatorname{Spec} B_i\}_{i \in \mathscr{I}}$ 覆盖, 且 B_i 都是 A 上有限生成 (resp. 有限表现) 代数. 则称 X 是**A-局部有限型 (resp. 有限表现)** 的, 若 X 还拟紧则称之**A-有限型 (resp. 有限表现)** 的. A 是 *Noether* 环则 A-局部有限型推出局部 *Noether* 性和 A-局部有限表现.

注 3.68. 注意关于各种 *Noether* 性的一些事实. 由**命题 2.20** 我们知道 A 是 *Noether* 环推出 $\operatorname{Spec} A$ 是 *Noether* 拓扑空间, 但反之不真, 域 k, 记 $A = k[X_1, X_2, \cdots]/(X_1^2, X_2^2, \cdots)$ 则其有唯一素理想 $\mathfrak{p} = (X_1, X_2, \cdots)$ 从而谱上仅一点但 $\mathfrak{p}$ 不有限生成. *Noether* 概形作为拓扑空间是 *Noether* 的, 因为它是有限个 *Noether* 拓扑空间的并. 另一方面 *Noether* 概形的截面也不一定是 *Noether* 环, 但举反例困难.

命题 3.69. 概形 X 局部 *Noether* 当且仅当它的任意仿射开子集 $U = \operatorname{Spec} A$, A 都是 *Noether* 环. 特别的, 仿射概形 $X = \operatorname{Spec} A$ 是 *Noether* 概形当且仅当 A 是 *Noether* 环.
B-概形 X 局部有限型当且仅当它的任意仿射开子集都是 B-有限生成代数的谱.
B-概形 X 局部有限表现当且仅当它的任意仿射开子集都是 B-有限表现代数的谱.

证明. 只证明**定义 3.67** 推此. 根据**仿射沟通引理**, 只需证明环的 Noether 性是仿射局部的, 结合 Noether 环的局部化是 Noether 的, 现设 $(f_1, \cdots, f_n) = A$, $\varphi_i : A \to A_{f_i}$ 是局部化, I 是 A 的理想. 我们声称有如下的等式

$$I = \bigcap_{i=1}^{n} \varphi_i^{-1}(\varphi_i(I)A_{f_i}).$$

这是因为 $\operatorname{Spec} A$ 是一个层, 这条等式其实是 I 中元素对 $\bigcup_i \operatorname{Spec} A_{f_i}$ 的层条件. 现在 $I_1 \subset I_2 \subset \cdots$ 是 A 的理想升链, 那么当诸 A_{f_i} 都是 Noether 环时, $\{\varphi_i(I_k)A_{f_i}\}_k$ 最终会稳定. 于是 I_k 升链是有限个最终会稳定的升链的交, 从而会稳定.
根据**仿射沟通引理**, 设 $(f_1, \cdots, f_n) = A$, $\varphi_i : A \to A_{f_i}$ 是局部化. 假设 A_{f_i} 在 B 上被有限集 $\{r_{ij}/f_i^{k_j}\}_j$ 生成, 而 $1 = \sum c_i f_i$. 我们声称 A 在 B 上被 $\{f_i\}_i \cup \{c_i\} \cup \{r_{ij}\}_{i,j}$ 生成. 这参考**命题 3.25** 验证仿射概形层公理存在性的部分, 只需注意 $1 = \sum a_i f_i^{n_i}$ 可令 a_i 是 c_i, f_i 的多项式.
同样的, 还需处理若 A_{f_i} 在 B 上都有限表现则 A 在 B 上有限表现. 首先拿多项式环 P 打满 A, 核 I, 假设 P 中 $g_1, \cdots, g_n$ 打到 A 中 $f_1, \cdots, f_n$, 因为 $P_{g_i} \to A_{f_i}$ 满射以及 A_{f_i} 有限表现, 由有限表现的内蕴性 (**习题 9.6**) 所以核 I_{g_i} 是有限生成理想, 设它们由 I 中的 r_{ij} 生成. 注意到 $I + (g_1, \cdots, g_n) = (1)$, 设 $h + \sum c_i g_i = 1$, 类似**命题 3.25** 检查 I 由 $\{h\} \cup \{r_{ij}\}_{i,j}$ 生成. □

性质 3.70. (1) 局部 *Noether* 的概形是拟分离的. (2) *Noether* 概形有有限个连通分支, 每个连通分支由有限个不可约分支构成. (3) *Noether* 概形的开和闭子概形和 $\mathcal{O}_{X,x}$ 都 *Noether*.

证明. (1) 注意到 Noether 环的拓扑空间是 Noether 的, 因此其中的任意开子集都是拟紧的. (2) 注意到从全集依次去掉连通分支, 这一过程在有限步骤内稳定, 不可约分支见**定理 2.22**. (3) 首先通过与构成 X 的有限个仿射开集相交讨论只需设 X 是仿射的 Noether 概形, 对 $Z \subset X$ 开, $Z = X - \mathcal{V}(I)$. I 有限生成, 故 Z 是有限个主开集（对应的环 Noether）的并, 从而 Z 诺特. 而对 $Z \subset X$ 闭, 则由刻画**命题 3.41** 知. 最后 $\mathcal{O}_{X,x}$ 是 Noether 环局部化. □

定义 3.71. k 是域, k 上的**仿射代数簇**指 k 上有限生成代数的仿射概形. k 上的**代数簇**指 k-有限型的概形, k 上的**射影簇**指射影概形. **簇态射**, **子簇**指概形态射和子概形.

代数簇都是 Noether 概形, 读者不难验证代数簇的开子簇、闭子簇都是代数簇. 只需交到构成代数簇的那些 k 上有限生成代数的仿射概形上去, 仿射的情形则显然.

3.3.4 既约（Reduced）性、整（Integral）性

定义 3.72. 称一个环 A **既约**指 0 是其唯一幂零元, 一个概形 X **既约**指每个 $\mathcal{O}_{X,x}$ 既约.

命题 3.73. (1) X 既约当且仅当每个开 U 有 $\mathcal{O}_X(U)$ 既约. (2) 如果 X 有一族既约环构成的仿射开覆盖, 则 X 既约. (3) 存在唯一闭子概形 $i: X_{\text{red}} \to X$ 使拓扑空间上相同且 X_{red} 是既约概形, 称之 X 的**既约化**. 进一步对拟紧的 X, $\operatorname{Ker} i^\sharp(X)$ 是 $\mathcal{O}_X(X)$ 的幂零根. (4) 对既约概形 Y, 一切概形间态射 $f: Y \to X$ 可唯一分解为 $Y \to X_{\text{red}}$ 复合典范的 $X_{\text{red}} \to X$. (5) X 的闭子集 Z 都有唯一典范的既约化结构继承自 X.

证明. 我们取 $\mathcal{O}_X$ 上的理想层 $\mathcal{N}(U) := \{s \in \mathcal{O}_X(U) : \forall x \in U, s_x \in \operatorname{Nil}(\mathcal{O}_{X,x})\}$, X 既约当且仅当 $\mathcal{N} = 0$. 对 (1)(2), 直白地用定义验证既约环的局部化还既约, 因此有一族既约仿射开覆盖推出 $\mathcal{N} = 0$. 反过来假设 $\mathcal{N} = 0$, 对 $\mathcal{O}_X(U)$ 的幂零元, 其各点芽都幂零从而为 0, 由芽唯一确定截面可得. 对 (3)(4), 我们声称 $(X, \mathcal{O}_X/\mathcal{N})$ 就是既约化. 其概形结构的确定只依赖仿射的情形, $X = \operatorname{Spec} A, N := \operatorname{Nil} A$, 则由**命题 3.36** 知 $i : \operatorname{Spec}(A/N) \to \operatorname{Spec} A$ 是闭浸入, 且对 $g \in A$, $(\operatorname{Ker} i^\sharp)(X_g) = N \otimes_A A_g = \operatorname{Nil}(A_g) = \mathcal{N}(X_g)$ 从而 $\operatorname{Ker} i^\sharp = \mathcal{N}$, 一般情形只需与仿射开集相交. 最后由**命题 3.23** 可得 (4), (3) 的唯一性也是 (4) 的推论. 对 (5), 设闭 $Z \subset X$, 设 U 是 X 的仿射开集, 则 $(Z \cap U, \mathcal{O}_{Z\cap U}) = (\mathcal{V}(I), \mathcal{O}_X(U)/I)$ 被 $\mathcal{O}_X(U)$ 的理想 I 决定, 若 $(Z, \mathcal{O}_Z)$ 既约, 则由 (1) 有 $I = \sqrt{I}$, 因为根理想 I 和 $\mathcal{V}(I)$ 的一一对应关系, 唯一性得到保证. 而用 X 的仿射开覆盖 $\bigcup_i U_i$, 诸 I_i 取作根理想, 唯一性结合 (3) 的存在性, 这些局部粘出子概形. □

推论 3.74. X 既约, 开集 U, 则 $\mathcal{O}_X(U)$ 上的函数完全由茎处的值决定. U 仿射时由素理想的交为 0 得, 一般情况限制到仿射开子集. 这也是既约的另一等价刻画.

推论 3.74 上进一步, 我们解释为什么**定义 3.29** 中把 $\mathcal{O}_X(U)$ 中者称为正则函数. 设 X 是域 k 上的代数簇, 由**习题 3.58** 知每个闭点处剩余域都是 k 的代数扩张, 取定 k 的代数闭包 k^a 以及每个闭点处的嵌入 $k(x) \hookrightarrow k^a$. 用 $\operatorname{Map}(X^0, k^a)$ 表示全体 $X^0 \to k^a$ 集合上的映射, $\mathcal{F}_X$ 记层 $U \mapsto \operatorname{Map}(U^0, k^a)$. 于是有 $\mathcal{O}_X \to \mathcal{F}_X$ 的自然层同态, 将 $f \in \mathcal{O}_X(U)$ 打到在 $x \in U^0$ 上取值 $f_x \in k(x) \subset k^a$ 的函数. 那么有下面的命题, 或许也是有的书要求代数簇既约的原因:

命题 3.75. 代数簇 X 既约当且仅当上面定义的 $\mathcal{O}_X \to \mathcal{F}_X$ 是层单射.

证明. 若 X 既约, $f \in \mathcal{O}_X(U)$. 若 $f_x = 0$ 对每个 $x \in U^0$, 则对 U 的一个 (定义簇的) 仿射开子集 V 和闭点 $x \in V$ 有 $f_x = 0$. 换言之 $f \in \mathcal{O}_X(V)$ 位于每个极大理想的交, 然而**习题 3.58** 告诉我们极大理想的交等于素理想的交, 而既约得知交是 0. 另一边若 X 不既约, 则存在一个仿射 U 和 $f \in \mathcal{O}_X(U)$ 非零且幂零, 从而 $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{F}_X(U)$ 不单而矛盾. □

定义 3.76. 若 $\mathcal{O}_{X,x}$ 是整环则称X **在** x **整**. 而称一个概形**整**, 指它既约且不可约.

命题 3.77. 设 X 是一个概形. (1) $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_{X,x}$ 的不可约分支一一对应 X 过 x 的不可约分支. 故 $\mathcal{O}_{X,x}$ 是整环当且仅当 0 是其素理想, 即 X 在 x 处既约且过 x 只有一个不可约分支. 故整概形在每个点都整. (2) X 整当且仅当对每个开 $U \subset X$ 都有 $\mathcal{O}_X(U)$ 是整环. (3) 设整概形 X 唯一的一般点 ξ. 对仿射开 V, $\mathcal{O}_X(V) \to \mathcal{O}_{X,\xi}$ 诱导同构 $\operatorname{Frac}\mathcal{O}_X(V) \cong \mathcal{O}_{X,\xi}$. 而且对一切开集 U 和 $x \in U$, 典范映射 $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,x}$ 和 $\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X,\xi}$ 都是单射. 作为立即的推论, 此时所有限制映射都是单射. 因为它们穿过 $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,\xi}$. (4) 若视 $\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_{X,x}$ 皆为 $\mathcal{O}_{X,\xi}$ 子环, 则 $\mathcal{O}_X(U) = \bigcap_{x\in U}\mathcal{O}_{X,x}$.

证明. 回忆**习题 3.60**, 以及 $x \in \overline{\{y\}}$ 则含 x 的开集都含 y 的事实, 对 (1) 用 $x \in X$ 的仿射开邻域代替 X, 则命题成为环谱上的显然事实. 再看 (2), X 不可约则它的任意开集不可约. 所以只需证明 $\mathcal{O}_X(X)$ 整. 若其中 $fg = 0$, 则对仿射开 $W \subset X$ 内有 $\mathcal{V}(f|_W) \cup \mathcal{V}(g|_W) = W$, 由 X 既约和**命题 3.73(1)** 知 $f|_W$ 或 $g|_W$ 至少其一含于 $\operatorname{Nil}\mathcal{O}_X(W) = 0$, 不妨前者符合这要求. 于是现在固定 W, 因为不可约空间的开集都稠密, 对任意仿射开 U, 由仿射沟通**命题 3.64** 知开集 $W \cap U \subset \mathcal{V}(f|_U)$. 结合不可约空间的开集都稠密, $\mathcal{V}(f|_U) = U$ 即 $f|_U = 0$ 故 $f = 0$.
反设 $\mathcal{O}_X(U)$ 都是整环, 显然 X 约化, 若 X 有两个一般点 ξ_1, ξ_2, 取仿射 U_i 含 X_i. 现在 $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ 否则 ξ_1, ξ_2 将都是其一般点. 于是 $\mathcal{O}_X(U_1 \cup U_2) = \mathcal{O}_X(U_1) \oplus \mathcal{O}_X(U_2)$ ($U_1 \cup U_2$ 的截面被 U_1, U_2 者的相容截面确定, 因为不交所以相容条件平凡), 这与整性矛盾.
接下来看 (3), 由**例 3.27**, 结合 $\{\xi\}$ 也是 V 的一般点以及 $\mathcal{O}_{X,\xi} = \mathcal{O}_{V,\xi}$ 知. 若 $f \in \mathcal{O}_X(U)$ 使 $f_x = 0$ 则可取 x 的仿射开邻域 W 使 $f|_W = 0$, 于是对 U 的仿射开子集 V 类似 (2) 论证 $f|_V = 0$ 从而 $f = 0$. 而 $\mathcal{O}_{X,x} \hookrightarrow \mathcal{O}_{X,\xi}$ 源于每个仿射 V 有 $\mathcal{O}_X(V) \hookrightarrow \mathcal{O}_{X,\xi}$ 而后取归纳极限.
最后对 (4), 因为层的截面在每个点处的芽确定, 而相交的部分恰好是全体相容芽. □

于是为了便利, 以后对整概形 X, 记 $K(X) := \mathcal{O}_{X,\xi}$ 称 X 的 **(有理) 函数域**. 而 $K(X)$ 中的元素也被称为 X 上的**有理函数**. 若 $f \in \mathcal{O}_{X,x} \subset \mathcal{O}_{X,\xi}$ 则称 f 在 x 点**正则**.

例 3.78. $\mathbb{A}_k^n, \mathbb{P}_k^n$ 都整, 二者有理函数域都是 $k(X_1, \cdots, X_n)$. 而 $X = \operatorname{Spec} k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ 不既约, $Y = \operatorname{Spec} k[\varepsilon]/(\varepsilon)$ 也是一个点, 但感觉上 X 应比 Y 有更复杂的结构, 这是切空间的模型.

习题 3.79. 设概形 X 只有有限个不可约分支 $\{Z_i\}_{i=1}^n$, 考虑图 G 以 $\{Z_i\}_i$ 为顶点, 若 $Z_i \cap Z_j$ 非空则连边. 证明 X 作为拓扑空间连通当且仅当 G 是连通图. 另外检查 X 整当且仅当 X 连通且在每个点 $x \in X$ 整. 对前者设 G 连通, 考虑两个不交真闭子集对一般点的覆盖, 由连通, 存在 $\overline{\{\xi_i\}} \cap \overline{\{\xi_j\}}$ 非空且 ξ_i, ξ_j 二者分别位于两个无交闭集而矛盾; G 不连通则各分支的一般点闭包的并构成不交闭集. 对后者, X 整则 G 是单点集而连通; 反过来若一点在两个不可约分支内, 则**命题 3.77(1)** 表明其局部环不止一个不可约分支.

3.3.5 维数（Dimension）

回忆环的 Krull 维数指它的素理想严格链的长度上界, 而环谱上看素理想通过取单点闭包对应不可约闭子空间. 于是拓扑空间的维数定义作非空不可约闭子空间严格链的长度上界.

命题 3.80. 对拓扑空间 X 中一点 x 我们记 $\dim_x X := \inf\{\dim U : U \text{是含 } x \text{ 的开集}\}$. 称为 X 在 x 处的**局部维数**, 则 $\dim X = \sup\{\dim_x X : x \in X\}$. 换言之, 维数是一个局部概念. 一个显然的推论是若有开覆盖 $X = \bigcup_{i\in\mathscr{I}} U_i$ 则 $\dim X = \sup\{\dim U_i : i \in \mathscr{I}\}$.

证明. 给定 X 的一个不可约闭子空间严格链 $Z_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_n$, 任取 $x \in Z_0$ 则对 x 的任意开邻域 U, $\{Z_i \cap U\}$ 是 U 的一个不可约闭子空间链. 它严格, 若 $Z_i \cap U = Z_{i+1} \cap U$, 则 $Z_i \cup (U^c \cap Z_{i+1}) = Z_{i+1}$ 与不可约矛盾. 另一边对子空间 $Y \subset X$ 总有 $\dim Y \leq \dim X$. □

于是概形的维数, 视作拓扑空间的维数, 等于仿射开集维数的上界. 而环的维数在交换代数的章已经研究得非常透彻了. 下面考虑的是一些概形或者代数簇上的维数结论.

命题 3.81. 设 X 是域 k 上的整代数簇, 则对 X 的任意非空开子簇 U 有下列等式成立: $\dim U = \dim X = \operatorname{trdeg}_k K(X)$.

证明. 设 ξ 是一般点, 则 $K(U) = \mathcal{O}_{U,\xi} = \mathcal{O}_{X,\xi} = K(X)$, 于是归约到仿射, 见**定理 2.34**. □

推论 3.82. 设 B 是 k 上有限多个变元的多项式环商掉一些齐次多项式生成的理想. 它带有多项式次数的典范分次, 则 $\dim \operatorname{Spec} B = \dim \operatorname{Proj} B + 1$.

证明. 取 B 的极小素理想 $\mathfrak{p}$, 则由**性质 3.52(1)** 知 $\mathfrak{p}^h$ 是不会比它大的素理想, 从而 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^h$, 故它齐次, 商去后现在只需研究 B 是整环的情形. 任取 $f \in B_+$ 是 B_1（齐一次）中的一个非零元, 于是**性质 3.53** 推出 $B_{(f)}$ 代数的同态 $B_{(f)}[T, T^{-1}] \to B_f, T \mapsto f^{-1}$ 是拓扑空间上的同胚, 说明二者维数相同. 由**推论 2.60**, Noether 环 R 有 $\dim R[x] = \dim R + 1$, 得知 $\dim B_f = \dim B_{(f)}[T, T^{-1}] = \dim B_{(f)} + 1$. 现在 B 是整环故 $\operatorname{Spec} B, \operatorname{Proj} B$ 都是整代数簇, 由**命题 3.81** 得知二者维数都等于开子集上的维数, 由此等式得证. □

例 3.83. 考虑 $X = \operatorname{Proj} B, B = k[x,y,z,w]/(xz - y^2, yz - xw, z^2 - yw)$ 则 $\dim X = 1$, 因为 $K(X) = k(y/z)$ （想想 $x/y = y/z = z/w$）. 由此得知 $\dim B = 2$.

命题 3.84. 设 X 是 k 上不可约代数簇, x 是一个闭点, 则 $\dim \mathcal{O}_{X,x} = \dim X$.

证明. 只需在定义 X 用的仿射开集上考虑, 注意**命题 2.86** 推出整环 $R = k[X_1, \cdots, X_n]/I$ 上的理想链总能加细到 $\dim R$ 长, 由此可知每个极大理想的高度都顶到 $\dim X$. □

定义 3.85. 设 k 是域, 若 k 上的代数簇 X 的不可约分支都是 1 维的, 则称 X 是 k 上的**代数曲线**. 若都是 2 维的, 则称**代数曲面**.

3.4 概形态射的基本性质与例子

3.4.1 有理（Rational）映射和双有理（Birational）映射

联想有理多项式函数, 有理映射就是所谓定义在几乎处处的映射.

定义 3.86. 概形 X,Y 间的**有理映射** $\pi : X \dashrightarrow Y$ 是指从一个 X 的稠开子概形映到 Y 的概形映射. 两个有理映射 $\alpha : U \to Y, \beta : V \to Y$ 称**等价的**是指存在一个稠开 $Z \subset U \cap V$ 满足 $\alpha|_Z = \beta|_Z$. 而作为基概形 S 上的有理映射, 我们也自然要求 $\alpha : U \to Y$ 是 S-概形态射.
若 $U \to Y$ 的像在 Y 稠密, 则称该有理映射是**支配的**. 易从拓扑上发现这个定义和代表元的选取无关. 设 $\pi : X \dashrightarrow Y$ 是两不可约（保证开集都稠密）概形间支配的有理映射, $\rho : Y \dashrightarrow Z$ 是一般的有理映射, 则可定义复合的有理映射 $\rho \circ \pi : X \dashrightarrow Z$, 它支配当且仅当 ρ 支配.
而对两个整概形间的**双有理映射**指一个支配有理映射 $\pi : X \dashrightarrow Y$, 使在一般点上诱导分式域的同构 $\pi^\sharp : K(Y) \xrightarrow{\sim} K(X)$. 但有的书上这样定义双有理, 这里姑且称**双有理 * 映射**: 如果存在支配有理 $\pi : X \dashrightarrow Y, \psi : Y \dashrightarrow X$ 满足 $\psi \circ \pi, \pi \circ \psi$ 都是有理映射且分别和 $\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_Y$ 等价.

习题 3.87. (1) 两不可约概形间的有理映射支配当且仅当它把一般点打到一般点.
(2) 检查整概形间的支配有理映射 $X \dashrightarrow Y$ 诱导函子性的 $K(Y) \to K(X)$.
(3) 检查 $\mathbb{P}^n_A \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}_A, [x_0, \cdots, x_n] \mapsto [x_0, \cdots, x_{n-1}]$ 是有理映射并计算函数域映射.

关于双有理 * 映射, 它显然比双有理映射更强, 另外有这样的结果:

习题 3.88. 不可约 X,Y 间存在双有理 * 映射等价于存在 X,Y 中非空开子概形 $U \cong V$.
只看左推右. 由定义寻稠开 $X_1 \subset X, Y_1 \subset Y$ 和 $F : X_1 \to Y, G : Y_1 \to X$, 依定义 $G \circ F$ 等价于 id_X, 即考虑 $X_2 := F^{-1}(Y_1)$ 然后它有最大的 (取符合这条件的并) 非空开子集 X_0 使得 $G \circ F = \mathrm{id}|_{X_0}$, 同理 Y_2, Y_0. 归纳地令 $X_{n+1} := F^{-1}(Y_n) \subset X_n, Y_{n+1} := G^{-1}(X_n) \subset Y_n$, 最后 $U := \bigcap_n X_n, V := \bigcap_n Y_n$. 现在读者检查 $X_0 = U, Y_0 = V$ (X_0, Y_0 分别含于每个 X_n, Y_n, 另外 $X_n - U, Y_n - V$ 中者复合两次后映不到自己而不在 X_0, Y_0), 此时 F, G 在 U, V 间同构.

> **命题 3.89.** 设 X 是整 k-概形, Y 是有限型整 k-概形. 假设有固定基域 k 的域态射 (自然就是域嵌入) $\phi^\sharp : K(Y) \hookrightarrow K(X)$, 则存在支配的 k-有理映射 $\phi : X \dashrightarrow Y$ 诱导 $\phi^\sharp$.
> 以 k-整代数簇作为对象, 支配 k-有理映射作为态射的范畴, 和 k 的有限生成扩域的对偶范

畴等价. 由此推出 k-整代数簇间双有理映射和双有理 *映射间是一回事

证明. 将 X,Y 换成仿射开子集 $\operatorname{Spec} A, \operatorname{Spec} B$ 不改变任何事情, 设 $B = k[X_1,\cdots,X_n]/I$. 于是 $\phi^\sharp$ 诱导嵌入 $f : B \hookrightarrow K(A)$, 记 $f(X_i) = f_i/g_i; f_i, g_i \in A$, 令 $g := \prod_i g_i$. 于是 f 诱导 $B \hookrightarrow A_g$, 从而 $\phi : \operatorname{Spec} A_g \to \operatorname{Spec} B$ 诱导 $\phi^\sharp$. 因为 $B \hookrightarrow A_g$ 下 (0) 理想的逆还是 (0) 于是 ϕ 将 X 的一般点打到 Y 的一般点进而由**习题 3.87(1)** 得知 ϕ 支配.

范畴等价的事实需观察三方面. 首先**习题 3.87(2)** 从有理映射到域映射, 和这里从域映射到有理映射是互逆的. 只需检查域映射对应同构下唯一的有理映射, 对两个有理映射, 取像与原像的公共的仿射开邻域而成为显然情形. 其次函子性容易检查. 最后每个 k 的有限生成扩域存在对应的簇, 设 $K = k(x_1,\cdots,x_n)$, 取 $R = k[X_1,\cdots,X_n] \to K, X_i \mapsto x_i$, 则核是素理想 $\mathfrak{p}$ (思考几何意义), 这构造了 k-代数簇 $\operatorname{Spec}(R/\mathfrak{p})$. □

3.4.2 群概形（Group Schemes）*

(0) 我们有一个很自然的出发点, **命题 3.43** 声称概形态射 $X \to \mathbb{G}_{\mathrm{a}} := \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ 被环同态 $\mathbb{Z}[t] \to \mathcal{O}_X(X)$ 决定. 简单考察 t 的像, 可以说被态射被 X 的一个整体截面确定. 如果读者已经熟悉同调代数, 会觉得接下来的叙述很自然: 考虑 $\mathsf{Sch} \to \mathsf{Set}$ 的两个反变函子 $X \mapsto \operatorname{Mor}_{\mathsf{Sch}}(X, \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}})$ 以及 $X \mapsto \mathcal{O}_X(X)$, 它们是自然同构的. 言外之意是, 取整体截面函子是可表的.

另外还可以考察 $X \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}} := \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[t,t^{-1}]$, 对应函子是取整体截面中的可逆者. 以后我们说$A$ **上的乘法群**或者 A 上的 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 指 $\operatorname{Spec} A[t,t^{-1}]$. 这些例子是很重要的.

(1) 用可表函子的记号, 可以得到类似 $h_{X\times Y} \cong h_X \times h_Y$, 左右边都是在对应范畴中取的积对象, 概形中积对象的讨论我们推到下一节, 但是读者很容易发现 $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{A}^2_{\mathbb{Z}}$ 符合泛性质, 而在函子上也相当于任取两个整体截面中的函数构成的对子.

(2) **群概形**, 是指概形中的群对象. 在一个有终对象 Z (概形范畴为 $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$) 和有限乘积的范畴 $\mathcal{C}$ 中讨论的群对象包含如下的资料: 一个 $X \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$ 以及三个态射:

$$(1)\ m : X \times X \to X;\ (2)\ i : X \to X;\ (3)\ e : Z \to X.$$

我们称之乘法, 幺元, 逆元. 它们须满足如下的数个条件:

$$(1)\ \begin{array}{ccc} X\times X\times X & \xrightarrow{(m,\mathrm{id})} & X\times X. \\ {\scriptstyle (\mathrm{id},m)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m} \\ X\times X & \xrightarrow[m]{} & X \end{array}$$

$$(2.1)\ (X \xrightarrow{\cong} Z\times X \xrightarrow{e\times\mathrm{id}} X\times X \xrightarrow{m} X) = \mathrm{id};$$

$$(2.2)\ (X \xrightarrow{\cong} X\times Z \xrightarrow{\mathrm{id}\times e} X\times X \xrightarrow{m} X) = \mathrm{id}.$$

$$(3.1)\ (X \xrightarrow{(i,\mathrm{id})} X\times X \xrightarrow{m} X) = (X \longrightarrow Z \xrightarrow{e} X);$$

$$(3.2)\ (X \xrightarrow{(\mathrm{id},i)} X\times X \xrightarrow{m} X) = (X \longrightarrow Z \xrightarrow{e} X).$$

即所谓结合律, 幺元性质和逆元性质. 这完全对应于群的定义. 读者不难验证 Set 里的群对象是真正的群. 于是重要的观察是 $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 都是 Sch 里的群对象. 前者的 m, i, e 是 t 打到加法 $x+y$, 取相反数 $x \mapsto -x$, 取 0; 后者是打到乘法, 取乘法逆, 取 1.

(3) 接下来观察若 G 是某 $\mathcal{C}$ 的群对象, 则对一切 $X \in \mathcal{C}$ 在 $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, G)$ 上有自然的群结构, 而且在拉回下保持, 这样 $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(-, G)$ 是 $\mathcal{C} \to$ Grp 的反变函子. 读者容易检查取 Sch 中 $G = \mathbb{G}_{\mathrm{a}}, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 分别得到整体截面在加法下, 乘法可逆元在乘法下构成的群.

(4) 换一个角度看待 (2) 和 (3), 如何自然得到它们? 我们希望可表反变的 $G : \mathcal{C} \to \mathsf{Set}, G \cong h_Y$ 可写成反变的 $F : \mathcal{C} \to \mathsf{Grp}$ 与遗忘函子 $\mathsf{Grp} \to \mathsf{Set}$ 的复合. 检查 $F(X), X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 上的群运算 $m : F(X) \times F(X) \to F(X)$; $i, e : F(X) \to F(X)$ 遗忘到集合上, 然后由**定理 4.18 Yoneda 引理**即可唯一确定了 Y 的 m, i, e. 且 $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ 上的运算与 $F(X)$ 上同.

(5) 群概形**同态** $f : G \to H$ 是一个概形态射, 满足 m, i, e 的图表交换. 读者验证 Set 中同态确实是群同态. 抽象地说, f 沿 **Yoneda 引理**得到的 $h_f : h_G \to h_H$ 是 Sch $\to$ Grp 的函子同态.

(6) 稍不平凡的例子: 记 $\mathrm{GL}_n := \mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}[X_{11}, \cdots, X_{1n}, \cdots, X_{n1}, \cdots, X_{nn}, \det(X_{ij})^{-1}]$, 那么定义了整体截面上取出一个 $n \times n$ 的可逆矩阵的函子. 显然的 m, i 就是矩阵乘法和取逆, 行列式积性在此用上. 另外验证两个群同态, $-^k : \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$, $k \in \mathbb{Z}$ 以及 $\det : \mathrm{GL}_n \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$.

至此我们明白了最基本的代数群理论, 关于代数群的更多内容后文再谈.

3.4.3 概形性质诱导概形态射的性质: 羊毛出在羊身上

定义 3.90. 设 $\mathcal{P}$ 是对概形提的一个性质. 称概形态射 $\pi : X \to Y$ **满足性质** $\mathcal{P}$ 指对任意仿射开 $U \subset Y$, 有 X 的开子概形 $\pi^{-1}(U)$ 满足 $\mathcal{P}$. 称性质 $\mathcal{P}$ 是**目标上仿射局部的**, 指的是只要存在 Y 上一族仿射开覆盖 $\{U_i\}_{i \in \mathscr{I}}$ 使 $\pi^{-1}(U_i) \subset X$ 皆满足 $\mathcal{P}$, 就有 π 满足性质 $\mathcal{P}$. 根据**仿射沟通引理**, 我们只需验证 (1) $\mathcal{P}$ 能从 $\pi^{-1}(\mathrm{Spec}\, A)$ 传递到主开集 $\pi^{-1}(\mathrm{Spec}\, A_f)$ 上, 以及 (2) 主开集覆盖 $\bigcup \mathrm{Spec}\, A_f = \mathrm{Spec}\, A$, 从 $\pi^{-1}(\mathrm{Spec}\, A_f)$ 满足 $\mathcal{P}$, 推出 $\pi^{-1}(\mathrm{Spec}\, A)$ 满足性质 $\mathcal{P}$.

注 3.91. 利用**定义 3.38**, $X := \pi^{-1}(\mathrm{Spec}\, A)$ 则 $\pi^{-1}(\mathrm{Spec}\, A_f) = \{x \in X : f_{\pi^\sharp x} \in \mathcal{O}_{X,x}^\times\} = X_{\pi^\sharp f}$. 这很有用, 尤其是对 $\mathrm{Spec}\, B \subset X$, $\pi^{-1}(\mathrm{Spec}\, A_f) \cap \mathrm{Spec}\, B = \mathrm{Spec}\, B_{\pi^\sharp f|_{\mathrm{Spec}\, B}}$ 是其主开集.

始终记得**命题 3.43**, 即打到仿射概形的态射由整体截面的环同态决定.

引理 3.92. 若概形 X 的开子概形 $A, B, A \cap B$ 都拟紧拟分离, 则 $A \cup B$ 拟紧拟分离.

证明. 由 A, B 是拟紧的, 任取其有限仿射开覆盖 $\bigcup U_i, \bigcup V_j$. 根据**性质 3.63(2)**, 只需证它们任意两个交都拟紧, 现在由于 A, B 拟分离, 故 $U_i \cap U_k, V_j \cap V_l$ 都拟紧, 而 $U_i \cap V_j \subset A \cap B$ 故利用 $A \cap B$ 拟紧拟分离, $U_i \cap V_j = (U_i \cap (A \cap B)) \cap (V_j \cap (A \cap B))$ 也拟紧. 引理得证. □

性质 3.93. 关乎态射的拟紧和拟分离. (1) 两个拟紧态射的复合拟紧. (2) 两个拟紧拟分离态射的复合拟紧拟分离. (3) 从 *Noether* 概形打出的态射都拟紧. (4) 从拟分离概形打出的态射都拟分离. 注意到局部 *Noether* 概形拟分离, 于是 (3) 成为拟紧拟分离.
(5) 拟紧性是目标上仿射局部的. (6) 拟分离性是目标上仿射局部的.

证明. (1) 显然. (2) 仿射开集第一次原像是 qcqs, 说明是有限个开仿射的并, 任意若干者的交也是有限个仿射的并. 再取一次原像, 说明是有限个 qcqs 的并, 任意若干者的交也是 qcqs(qs 开遗传) 的, 于是使用**引理 3.91** 即得. (3) 因为 Noether 概形的开子集都拟紧. (4) 拟分离概形的任意开子集都拟分离. (5) 因为拟紧的并拟紧, 只需验证 $X := \pi^{-1}(\operatorname{Spec} A)$ 拟紧则 $\pi^{-1}(\operatorname{Spec} A_f)$ 拟紧, 设 X 的一个有限仿射开覆盖 $\bigcup \operatorname{Spec} B_i$, 于是 $\pi^{-1}(\operatorname{Spec} A_f) \cap \operatorname{Spec} B_i$ 都是其中一个主开集而拟紧, 于是 $\pi^{-1}(\operatorname{Spec} A_f)$ 是有限个拟紧集的并. (6) 和 (5) 技巧类似, 因为开遗传这次只需验证 $\pi^{-1}(\operatorname{Spec} A_{f_i})$ 拟分离则它们的并 $X := \pi^{-1}(\operatorname{Spec} A)$ 拟分离, 对 X 中两个拟紧开集, 将它们写成位于 $\pi^{-1}(\operatorname{Spec} A_{f_i})$ 中的仿射开集的并. 设 $U = \operatorname{Spec} R \subset \pi^{-1}(\operatorname{Spec} A_{f_i}), V = \operatorname{Spec} S \subset \pi^{-1}(\operatorname{Spec} A_{f_j})$, 利用 $U \cap V = U \cap V \cap X_{\pi^\sharp f_i} = U \cap V_{(\pi^\sharp f_i)|_V}$ 是拟分离的 $\pi^{-1}(\operatorname{Spec} A_{f_i})$ 中两个仿射开集的交从而拟紧. □

接下来介绍所谓仿射态射, 即仿射的原像仿射. 一个重要结果是:

命题 3.94. 态射的仿射性是目标上仿射局部的.

证明. 因为仿射概形的主开集仿射, 设 $\pi : X \to Y = \operatorname{Spec} B, B = (f_1, \cdots, f_n)$, 现只需检查 $X_{\pi^\sharp f_i} = \operatorname{Spec} A_i$ 时 X 仿射. 设 $A := \mathcal{O}_X(X)$, 我们希望证明 $X = \operatorname{Spec} A$, 为此, 考虑概形态射 $\alpha : X \to \operatorname{Spec} A$ 由整体截面上取恒等的环映射诱导而来. 于是有交换图表

$$\begin{tikzcd} \bigcup_i X_{\pi^\sharp f_i} = X \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \operatorname{Spec} A. \arrow[dl, "\beta"] \\ & \bigcup_i Y_{f_i} = \operatorname{Spec} B & \end{tikzcd}$$

这样 $\beta^{-1} Y_{f_i} = \operatorname{Spec} A_{\beta^\sharp f_i}, \pi^{-1} Y_{s_i} = X_{\pi^\sharp f_i} = \operatorname{Spec} A_i$. 利用**性质 3.93(5)(6)** 知 X 是拟紧拟分离的, 故由 **qcqs 引理 (命题 3.40)**, 限制映射 $A \to A_i$ 沿 α 诱导环同构 $A_{\beta^\sharp f_i} \cong \mathcal{O}_X(X_{\pi^\sharp f_i}) = A_i$. 因此 α 诱导同构 $\operatorname{Spec} A_i \to \operatorname{Spec} A_{\beta^\sharp f_i}$, 它们覆盖整个 $X, \operatorname{Spec} A$, 于是 α 是概形同构. □

推论 3.95. 设 Z 是仿射概形 $X := \operatorname{Spec} A$ 中一个闭集, 而且存在一个 X 的开子概形覆盖 $\bigcup V_i$, 使得 $Z \cap V_i$ 被某个 $\mathcal{O}_X(V_i)$ 中的元素确定, 则 $X - Z$ 仿射 (但不一定形如 $\operatorname{Spec} A_f$).

证明. 考虑开浸入 $U := X - Z \hookrightarrow X$. 用 V_i 的一系列仿射开子集覆盖 V_i, 这样可设诸 $V_i \cong \operatorname{Spec} A_i$ 仿射, 设 $Z \cap V_i = \mathcal{V}(f_i), f_i \in A_i$. 于是 $U \cap V_i \hookrightarrow V_i \subset X$ 满足仿射 A_i 的原像 $(A_i)_{f_i}$ 仿射, 然后利用目标上仿射局部, U 是 X 的原像而仿射. □

接下来是四个有限性条件, 当然只要目标概形是局部 Noether 的, B 则是 Noether 环而无需区分有限表现和有限型.

性质 3.96. 关乎四个有限性条件. (1) 局部有限型, 局部有限表现在目标上仿射局部. (2) 开浸入、闭浸入都局部有限型, 开浸入局部有限表现. (3) 局部有限型, 局部有限表现在复合下保持. (4) 打到局部 *Noether* 概形的开浸入有限型. (5) $\pi : X \to Y$ 是局部有限型态射, Y 是局部 *Noether* 的推出 X 也是. (6) 对局部有限表现态射, 仿射开集 $\operatorname{Spec} B$ 原像中的任意仿射子概形 $\operatorname{Spec} A$ 都有 A 是有限表现 B-代数. 即所谓, 局部有限表现是源上仿射局部的.

证明. 由**命题 3.69**, 局部有限型和局部有限表现都是仿射局部性质; 另外 B 在 A, C 在 B 都是有限生成 (resp. 有限表现) 代数, 则 C 在 A 亦然; 且这两性质在同时局部化下保持.
(6) 立刻, 而 (1) 注意在两环上同时局部化, 以及利用局部化一个元素是有限表现的以及复合保持性质, **定义 3.90** 两条易证. (3) 是复合保证的. (5) 是 **Hilbert 基定理**. (2) 闭浸入仿射局部是商掉理想, 开浸入在开子概形上选用主开集, 归约到局部化一个元素有限表现, (4) 注意局部 Noether 环的仿射开集都是 Noether 环谱从而是 Noether 拓扑空间, 开子集拟紧. □

3.4.4 可构造集（Constructable Sets）、Chevalley 定理和态射的像 *

定义 3.97. 拓扑空间 X 中的**可构造集**是 X 的一个最小的子集族, 包含全体拟紧开集, 且满足对取补和有限交封闭. 若 X 是 *Noether* 拓扑空间则全体开集都拟紧.

可构造集这一名字的来源可以这样解释, 考虑 Noether 环的谱为例, 开集都是有限个主开集的并. 因此对一个可构造集, 总可以描述为有限长的由“包含 (resp. 不包含) 某个元素”, “合取 (resp. 析取)”这样的句子构成的命题确定出的素理想集.

定理 3.98 (Chevalley)**.** $\pi : X \to Y$ 是两个 *Noether* 概形间的有限型态射. 则 X 中任意可构造集在 π 下的像都是 Y 中的可构造集. 特别的 $\pi(X)$ 是可构造集.

证明. 逐步归约解决问题.
(1) 一个集合可构造当且仅当它和一个有限开覆盖中的任意者的交如此, 考虑 Y 的一个仿射开覆盖 $\bigcup V_j$, 再取 X 的一些仿射开覆盖 $\bigcup U_i$, 使每个 U_i 含于某 $\pi^{-1}V_j$. 至此设 $X = \operatorname{Spec} A, Y = \operatorname{Spec} B$ 仿射. 通过**命题 3.73** 既约化, $X \to Y_{\text{red}} \to Y$ 可设 B 既约.
(2) 接下来声称只要证明像集是可构造的就能得到一般的. 因为环谱上的可构造集总能写成若干 $S = D(f) \cap \mathcal{V}(I)$ (称局部闭集) 的并, 于是商 I 局部化 f 后谱集变成 S, 转化为研究像.
(3) 现在使用**广泛自由引理 (习题 9.5)**, 可设 $f \in B$ 使得 A_f 是自由 B_f-模. 现根据自由推出平坦以及**平坦素理想下行 (定理 2.93)**, Y_f 的素理想下行可以拉回 X_f 上. 换言之像集中含 y, 且 y

是 x 的特殊化则像集含 x, 这样就包含 Y_f 中整个 y 所在的不可约分支. 根据 Noether 性不可约分支有限, 就得到 $\pi(X_f)$ 是 Y_f 中的闭集. 说明 $\pi(X)\cap Y_f$ 可构造, 如果 $\pi(X)$ 不含于 Y_f, 问题将归约到一个严格更小的闭集 $\mathcal{V}(f)$ 上, 可将 A,B 商掉理想 Af,Bf.

(4) 于是根据 Noether 条件, 这样只需操作有限次, 从而完成了像集的构造. □

推论 3.99. *考虑 k-代数簇间的态射 $\pi:X\to Y$, 证明 $\pi(X)=Y$ 当且仅当 $\pi(X^0)=Y^0$.*

证明. 只需证明仿射的情形. 若 $\pi(X)=Y$ 说明每个极大理想都被某素理想打到, 取包含该素理想的极大理想即可. 反过来, 由**习题 3.58** 知 Y^0 稠密, 由 **Chevalley 定理 (定理 3.98)**, 因为像是可构造集, 容易证明每个 $y\in Y^0$ 都存在一个开邻域 Y_f 使 $\pi(X)\cap Y_f$ 是 Y_f 中的闭集, 由稠密性, $Y_f\subset\pi(X)$, 这样 $\pi(X)$ 包含 y 的任意一般化. □

关于映射的像集, 还有重要的结果是消去理论主定理. 注意不需要 A 是 Noether 环.

定理 3.100 (消去理论主定理)**.** *典范映射 $\pi:\mathbb{P}^n_A\to\operatorname{Spec}A$ 将闭集映到闭集.*

证明. 设 $Z\subset\mathbb{P}^n_A$ 闭, 由定义它是 $\{f_i\}_{i\in\mathscr{I}}\in A[X_0,\cdots,X_n]$ 这样一系列齐次多项式确定者. 现考虑 $\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}A$, 记 $k:=k(\mathfrak{p})$, 则 $\mathfrak{p}\in\pi(Z)$ 当且仅当概形 $\operatorname{Proj}k[X_0,\cdots,X_n]$ 中有包含 $\{f_i\}_i$ 的公共“零点”, 希望证明这样的 $\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}A$ 形成闭集.

等价的, 即 $k[X_0,\cdots,X_n]$ 中 $\mathcal{V}(\{f_i\}_{i\in\mathscr{I}})\not\subset\mathcal{V}(X_0,\cdots,X_n)$, 理想上描述为 $(X_0,\cdots,X_n)\not\subset\sqrt{(f_i)_i}$, 等价为不存在 N 使 $S_N\subset(f_i)_i$, 其中 S_N 是全体齐 N 次多项式. 也就是对每个 N, $S_N\not\subset\bigoplus_i\subset f_iS_{N-\deg f_i}$, 或者说 k-线性映射 $\bigoplus_i S_{N-\deg f_i}\to S_N$ 不满. 而这个条件从 f_i 系数上看, 等价为全体 $\dim S_N\times\dim S_N$ 的主子式行列式为 0. 因此在 A 上看等价为 $\mathfrak{p}\in\mathcal{V}(\{a_j\}_{j\in\mathscr{J}})$, 这些 a_j 只与 f_i 们有关. 从而 $\pi(Z)$ 是闭集. □

一个应用, 设 $A=k[a,b,c\cdots,i]$. 考虑 $\mathbb{P}^2_A$ 中由 $ax+by+cz=dx+ey+fz=gx+hy+iz=0$ 确定的闭集, 换言之我们希望三条射影直线的交非平凡, 打到 A 上我们得知对这些系数 $a,\cdots,i$ 的要求是它们必须落在某个 Zariski 闭集中, 而真实情况是, 我们明白就是行列式为 0 的条件. 而 $A=k[a_0,\cdots,a_m,b_0,\cdots,b_n]$ 考虑 $\sum a_ix^{m-i}y^i=\sum b_jx^{n-j}y^j=0$ 者就得到结式为 0 的条件.

3.5 纤维积（Fibered Product）和基变换（Base Change）

3.5.1 纤维积的存在性和基本性质

接下来考虑一个代数几何中很重要的构造, 类比于欧氏空间有 $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^{m+n}$, 我们希望在代数中也有 $\mathbb{A}^m_R\times_R\mathbb{A}^n_R=\mathbb{A}^{m+n}_R$. 这诱使我们考虑张量积的构造进而推广到一般情形.

定理 3.101 (存在性)**.** 考虑 X, Y 是 S-概形, 则在概形构成的范畴 Sch 中拉回 $X \to S \leftarrow Y$ 存在 (则由泛性质立刻唯一) , 记作 $X \times_S Y$, 称为X, Y **在** S **上的纤维积**. 特别的, 若 X, Y, S 仿射则有典范的 $X \times_S Y \cong \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_X(X) \otimes_{\mathcal{O}_S(S)} \mathcal{O}_Y(Y))$. $X \times_{\operatorname{Spec} A} Y$ 也常被写为 $X \times_A Y$. 若 B 是 A-代数, X 是 A-概形, $X \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} B$ 也常被写为 X_B.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dashed, "{(f,g)}"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& X \times_S Y \arrow[r, "p"'] \arrow[d, "q"] & X \arrow[d] \\
& Y \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

证明. (1) 首先来看 $S = \operatorname{Spec} A, X = \operatorname{Spec} B, Y = \operatorname{Spec} C$ 的情形, 则 $W = \operatorname{Spec} B \otimes_A C$ 打到 X, Y 的映射自然是 $B \to B \otimes_A C, C \to B \otimes_A C$, 因为打到仿射概形的映射由整体截面的环同态函子性地决定, 因此纤维积的泛性质正对应了 A-代数张量积的泛性质.

(2) 然后是一重要的特殊情形, 若概形 X, Y, S 的 $X \times_S Y$ 存在, 则对开 $U \subset X$ 有 $U \times_S Y = p^{-1}(U)$. 原因是 Z 打到 $X \times_S Y$ 使图表交换且 $f : Z \to X$ 的像落于 U 的映射穿过 $p^{-1}(U)$.

(3) 现在看稍一般的, 若只有 X 不仿射, 取 $\{X_i\}_i$ 是 X 的仿射开覆盖. 由 (1) 已经得到 $X_i \times_S Y$, 对任意指标 i, j 考虑 $X_i \cap X_j$ 在 $p_i : X_i \times_S Y \to X_i, p_j : X_j \times_S Y \to X_j$ 下的原像. 由 (2) 知它们都同构于 $(X_i \cap X_j) \times_S Y$, 从而可定义自然的 $f_{ij} : p_i^{-1}(X_i \cap X_j) \cong p_j^{-1}(X_i \cap X_j)$, 由 $p_i^{-1}(X_i \cap X_j \cap X_k) \cong p_j^{-1}(X_i \cap X_j \cap X_k) \cong p_k^{-1}(X_i \cap X_j \cap X_k)$ 得到 $f_{ik} = f_{jk} f_{ij}$ 成立, 于是利用**引理 3.47** 粘出一个 $X \times_S Y$, 不难用映射的可粘性检查泛性质成立.

(4) 然后再放松条件设 X, Y 都不仿射而可对 Y 也如上操作.

(5) 最后是一般情况, 设 $\{S_i\}_i$ 盖住 S, 记 $X \to S, Y \to S$ 下 S_i 的原像为 X_i, Y_i. 一个 S_i-概形自然是一个 S-概形, 故 $X_i \times_{S_i} Y_i \cong X_i \times_S Y_i$, 用相同的方法可粘出 $X \times_S Y$. □

习题 3.102. 设 X, Y 是 S-概形, 那么从泛性质上很容易（最好画出交换图）验证这些命题:

(1) Z 是 S-概形, $X \times_S S \cong X$, $X \times_S Y \cong Y \times_S X$, $(X \times_S Y) \times_S Z \cong X \times_S (Y \times_S Z)$.

(2) Z 是 Y-概形, 则自然的 $(X \times_S Y) \times_Y Z \cong X \times_S Z$.

(3) 开浸入 $U \to X, V \to Y$ 诱导 $U \times_S V \cong p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V) \subset X \times_S Y$.

(4) S-概形态射 $X \to X', Y \to Y'$ 诱导 $X \times_S Y \to X' \times_S Y'$ 使两个纤维积图表间交换.

例 3.103. 一些简单的例子和观点.

(1) 从可表函子的角度看待纤维积. 考虑反变 $h_X : \mathsf{Sch} \to \mathsf{Set}, Y \mapsto \operatorname{Mor}_{\mathsf{Sch}}(Y, X)$. 那么对 S-概形 X, Y, 集合意义下的拉回 $h_X \times_{h_S} h_Y$ 总可表, 它是 $h_{X \times_S Y}$.

(2) 最简单的概形莫过于 $\operatorname{Spec} k$, k 是一个域. 那么对于 *Galois* 扩张 K/k 有 $\operatorname{Spec}(K\otimes_k K)$ 同构于 $\#\operatorname{Gal}(K/k)$ 个 $\operatorname{Spec} k$ 的无交并. 有趣的是, 例如考虑代数闭包 $\mathbb{Q}^a/\mathbb{Q}$, 则 $\operatorname{Gal}(\mathbb{Q}^a/\mathbb{Q})$ 上的投射有限拓扑和 $\operatorname{Spec}(\mathbb{Q}^a\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}^a)$ 的 *Zariski* 拓扑相融贯.

(3) 如果 A 是 B-代数, 则 $A\otimes_B B[t]\cong A[t]$. 若 I 是 B 中的理想, 则 I^e 是 A 中对应的扩理想, $A/I^e\cong A\otimes_B(B/I)$. 由此及**习题 3.102(2)** 计算有限生成 R-代数作为 R-概形的纤维积:

$$\frac{R[X_1,\cdots,X_n]}{(f_1,\cdots,f_r)}\otimes_R\frac{R[Y_1,\cdots,Y_m]}{(g_1,\cdots,g_s)}\cong\frac{R[X_1,\cdots,X_n,Y_1,\cdots,Y_m]}{(f_1,\cdots,f_r,g_1,\cdots,g_s)}.$$

(4) A 是 B-代数, 设 $S\subset B$ 是乘集, 则有局部化 $S^{-1}A\cong A\otimes_B(S^{-1}B)$.

(5) 设 A 是环, B 是分次 A-代数, C 是 A-代数, 则 $E=B\otimes_A C$ 有继承自 B 的自然分次, 那么有 $\operatorname{Proj}(B\otimes_A C)\cong(\operatorname{Proj} B)\times_A C$. 回忆Proj **构造**中的记号, 首先 $\varphi: B\to E, b\mapsto b\otimes 1$ 诱导了 $(B_+)^e=E_+$ 于是得到 A-态射 $g: Y=\operatorname{Proj} E\to\operatorname{Proj} B=X$, 类似的有 $\operatorname{Proj} E\to\operatorname{Spec} C$, 所以得到了 $h:\operatorname{Proj} E\to\operatorname{Proj} B\times_A C$. 对 $f\in B_+$ 有 $h^{-1}(X_f\times_A C)=g^{-1}(X_f)=Y_{\varphi(f)}$. 因此为验证 h 是同构只需验证 $\psi: B_{(f)}\otimes_A C\to E_{(\varphi(f))}$ 是环同构, 这是简单的交换代数.

(6) 对概形 S, 记 $\mathbb{P}^n_S:=\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}\times_{\mathbb{Z}} S$, 由 (5) 知这在 S 仿射的情形和现有定义一致.

(7) 设 $f: X\to Y$ 是概形态射, 对 $y\in Y$, 记 $X_y:=X\times_Y\operatorname{Spec} k(y)$, 称 f 在 y 点的**纤维**. 我们指出 $p: X_y=X\times_Y\operatorname{Spec} k(y)\to X$ 诱导了 X_y 到 $f^{-1}(y)$ 的同胚, 这也解释了纤维积一词的来源. 回忆**命题 2.57**, **性质 2.64**, **定理 2.93** 的证明最后段, 再思考几何直观.

证明如下, 考虑 V 是 y 的仿射开邻域而 $X_y=(X\times_Y V)\times_V\operatorname{Spec} k(y)=f^{-1}(V)_y$ 从而可设 Y 仿射, 而后对 X 的开集 U, $p^{-1}(U)=U\times_Y\operatorname{Spec} k(y)$ 而可设 X 仿射, 化为**命题 2.57**.

(8) 最后解释所谓基变换的来源. 设 X 是 k-概形, K/k 是域扩张, 则 $X_K=X\times_k K$ 是一个 K-概形, 称 X **基变换**到 K. 对两个 k-概形间的态射 $f: X\to Y$, 由**习题 3.102(4)** 有自然的 K-概形态射 $f_K: X_K\to Y_K$. 而所谓**下降**理论就是研究 X_K, f_K 的哪些性质能回到 X, f 去.

后文中基变换也指代一般的纤维积而非仅指代域扩张. 虽然纤维积 $X\times_S Y$ 关于 X,Y 对称, 但从语言的角度, “基变换”强调其中一者是新的基概形而另一者是被换基底的“主体对象”.

3.5.2 基变换保持的性质

定义 3.104. 若关于态射的性质 $\mathcal{P}$ 满足, 对某符合 $\mathcal{P}$ 的概形态射 $Y\to Z$, 任意 $\psi: X\to Z$ 拉回后有 $X\times_Z Y\to X$ 也符合性质 $\mathcal{P}$, 则称 $\mathcal{P}$ **被基变换保持**.

在讨论被基变换保持的性质前, 我们再引入三个和纤维关系较大的性质.

定义 3.105. 概形态射 $\pi: X\to Y$. π 称为**有限**的指它是仿射的且对应的 $\pi^{-1}(\operatorname{Spec} B)=\operatorname{Spec} A$ 满足 A 作为 B-模有限生成. π 称为**整**的指它是仿射的且对应的 $\pi^{-1}(\operatorname{Spec} B)=\operatorname{Spec} A$ 满足 A 在 B 上整. π 称为**拟有限**的指它是有限型的, 且对任意 $y\in Y$, $\pi^{-1}(y)$ 是有限集.

性质 3.106. (1) 有限, 整, 拟有限是目标上仿射局部的. (2) 有限, 整, 拟有限性在复合下保持. (3) 有限的态射纤维有限, 即对任意 $y \in Y$, $\pi^{-1}(y)$ 是有限集. 从而有限推出拟有限. (4) 若 $X \to \operatorname{Spec} k$ 拟有限, 则 X 上有离散拓扑, 且每个点处的剩余域都是 k 的有限扩张.

证明. (1) 先看有限, 设 M_{f_i} 作为 R_{f_i}-模由 M 中 $\{m_{ij}\}_j$ 生成. 则 M 作为 R-模由全体 $\{m_{ij}\}_{i,j}$ 生成. 整性则是对 $a \in A$ 研究 $B[a]$ 作为 B-模有限. 拟有限是显然的. (2) 显然, 留给读者. (3) 即**素理想上行 (命题 2.71)**. (4) 则是**零维有限生成 k-代数 (性质 2.36)** 推论. □

性质 3.107. 如下一系列态射性质被基变换保持: 拟紧, 拟紧拟分离, 仿射, 局部有限型, 有限型, 局部有限表现, 有限表现, 整, 有限, 拟有限, 开浸入, 闭浸入, 拓扑满.

证明. 对于 S 的仿射开覆盖 S_i, 它在 X, Y 的原像记作 X_i, Y_i. 对开 $U \subset X_i$ 有 $p^{-1}(U) = U \times_S Y = U \times_{S_i} (S_i \times_S Y) = U \times_{S_i} Y_i$. 因此对概形性质 $\mathcal{P}$, 只要它在仿射基变换下保持, 而且对应的态射性质在目标上仿射局部, 那么它对应的态射性质被基变换保持.

首先拟紧, 拟紧拟分离, 仿射归约到仿射的纤维积还是仿射的. 局部有限型, 局部有限表现, 有限, 整是在相同的生成元和表现上直接换掉基环得到的. 拟有限需注意 $Y \to S$ 纤维有限, 则对 $\operatorname{Spec} k(x) \to X \to S \leftarrow Y, x \in X$ 用**习题 3.102(2)** 计算纤维积. 而 $Y \to S$ 是开浸入则 $X \times_S Y$ 是 $X \to S$ 下 $Y \subset S$ 的原像. 而闭浸入是局部检查的, 对 $Y \to S$ 是闭浸入则只需在 X, S 仿射的情形下考察, 由**命题 3.41** 不妨设 $Y \to S$ 是 $\operatorname{Spec}(B/I) \to \operatorname{Spec} B$, 记 $X = \operatorname{Spec} A$ 则从**例 3.103(3)** 得到 $X \times_S Y \to X$ 成为 $\operatorname{Spec}(A/I^e) \to \operatorname{Spec} A$. 最后拓扑满容易转化为检查对两个包含 k 的域 E, F 总有 $E \otimes_k F$ 不是零环, 这样它的谱非空. □

命题 3.108 (平坦基变换)**.** 环 $A \to B$ 平坦同态, X 是拟紧拟分离 A-概形, 则有典范同构

$$\mathcal{O}_X(X) \otimes_A B \to \mathcal{O}_{X_B}(X_B).$$

证明. 设 $\{X_i\}_i, \{(X_i)_B\}_i$ 是 X, X_B 的有限仿射开覆盖. 则利用层条件和平坦性, 有正合列

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(X) \otimes_A B \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & \bigoplus_i \mathcal{O}_X(X_i) \otimes_A B \arrow[r] \arrow[d, equal] & \bigoplus_{i,j} \mathcal{O}_X(X_i \cap X_j) \otimes_A B. \arrow[d, "\beta"] \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{X_B}(X_B) \arrow[r] & \bigoplus_i \mathcal{O}_{X_B}((X_i)_B) \arrow[r] & \bigoplus_{i,j} \mathcal{O}_{X_B}((X_i)_B \cap (X_j)_B)
\end{tikzcd}$$

和 **qcqs 引理 (命题 3.40)** 相同的道理, 正合性推出 α 单, 同样道理拟分离性保证 β 单, 再用**四引理 (定理 4.58)** 推出 α 满, 因此 α 是同构. □

这个结论我们姑且置于此处, 以后应该还会见到一个上同调版本.

3.5.3 几何那啥啥性质 *

本小节中, 我们研习的对象总是一个域 k 上的概形在基域扩张 K/k 下的表现.

定义 3.109. $\mathcal{P}$ 是一个描述概形的性质. 若 k-概形 X 满足 $\mathcal{P}$, 且对任意扩域 K/k, X_K 仍满足 $\mathcal{P}$, 则称 X 满足所谓 **"几何 $\mathcal{P}$"** 性质. 本小节介绍几何既约, 几何不可约和几何连通.

注 3.110. 在本讲义中不会出现"几何点"的相关描述. 一般来说, 它指一个 $\operatorname{Spec} K$-点, 满足域 K/k 代数闭, 但有的书要求是可分闭, 这造成了一些困扰.

首先我们即将证明这样一系列的等价:

- X_K 既约, (R1) 对任意 K, (R2) 对代数闭包 $K = k^a$, (R3) 对完美闭包 $K = k^p$.
- X_K 不可约, (I1) 对任意 K, (I2) 对代数闭包 $K = k^a$, (I3) 对可分闭包 $K = k^s$.
- X_K 连通, (C1) 对任意 K, (C2) 对代数闭包 $K = k^a$, (C3) 对可分闭包 $K = k^s$.

比较明显的是 (1) 推 (2). 对于 (2) 推 (3), 一方面从线性空间角度, 对 k-代数 R 和任意域扩张 K/k 有 $R \subset R \otimes_k K$ 是子代数从而保持幂零性, 另一方面不连通者 (resp. 可约者), 基变换到 K 仍不连通 (resp. 可约), 注意域扩张不会导致非空集基变换成空集. 因此研究 (3) 推 (1).
在证明原定理前, 我们先进行一些准备工作.

引理 3.111. 设 $A = B[Y_1, \cdots, Y_n]/(f_1, \cdots, f_r)$ 是有限表现 B-代数, 则 $\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} B$ 的像在 $\operatorname{Spec} B$ 中是有限个形如 $D(f) \cap \mathcal{V}(g_1, \cdots, g_m)$ 者的并.

证明. 考虑 $f_1, \cdots, f_r$ 中出现的全体 B 中系数 $x_1, \cdots, x_N$, 考虑纤维积图表

$$\begin{tikzcd} X' = \operatorname{Spec} B[Y_1, \cdots, Y_n]/(f_1, \cdots, f_r) \arrow[r] \arrow[d] & X = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_N, Y_1, \cdots, Y_n]/(f_1, \cdots, f_r). \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} B \arrow[r] & \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_N] \end{tikzcd}$$

注意到右边符合**定理 3.98(Chevalley 定理)** 的条件, 因此右边的像集是可构造的, 即有限个形如 $D(f) \cap \mathcal{V}(g_1, \cdots, g_m)$ 者的并. 接下来将 X 限制在 $D(f)$ 的原像考虑, 满射像 $D(f) \cap \mathcal{V}(g_1, \cdots, g_m)$ 再自然嵌入 $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_N]$. 利用基变换保持拓扑满拉回左边, 得知 $D(f)$ 在 X' 的原像打到 $\operatorname{Spec} B$ 满射 $\operatorname{Spec} B$ 中的 $D(f) \cap \mathcal{V}(g_1, \cdots, g_m)$. 最后让 f 变化. □

习题 3.112. 环同态 $f : R \to S$, 且 $\operatorname{Spec} S$ 在 $\operatorname{Spec} R$ 中的像 T 在特殊化下封闭, 则 T 是闭集. 考虑 $R \to R/\operatorname{Ker} f \to S$ 不妨设是单同态, 则 T 中包含全体极小素理想. 实际上设 $\mathfrak{p}$ 是 R 的极小素理想, 此时 $R_{\mathfrak{p}}$ 有唯一素理想, 由于局部化的正合性和 $R_{\mathfrak{p}} \to S_{\mathfrak{p}}$ 是单射从而后者非 0. 因此 T 在特殊化下封闭推出 T 中包含全体素理想.
一般的, 若 $f : X \to S$ 是概形的拟紧映射, 则 $\operatorname{Im} f$ 在特殊化下封闭当且仅当它闭.

命题 3.113. A, B 是有限生成 k-代数，则（显然的）满射 $\operatorname{Spec} A \times_k \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} B$ 是开映射. 实际上去掉有限生成后的命题仍成立. 作为推论，设 X 是 k-概形，则 $X \to \operatorname{Spec} k$ 是泛开的，即在任意基变换下保持是开映射，这归约到仿射后由去掉有限生成的命题推出.

证明. 注意 $S = A \otimes_k B$ 是自由 B-模，对 $g \in S$, S_g 是平坦 S-模，因此 $B \to S, S \to S_g$ 满足**定理 2.93(平坦素理想下行)**. 由**定理 3.98(Chevalley 定理)** 得知 $\operatorname{Spec} S_g$ 的像 $E \subset \operatorname{Spec} B$ 是可构造集. 而且由 $B \to S_g$ 满足素理想下行知若 $x \in \operatorname{Spec} B$ 是 $y \in E$ 的一般化则 $x \in E$. 那么 E 的补集在特殊化下封闭，且也是有限个形如 $D(f) \cap \mathcal{V}(I)$ 者的并，故 E 也是环同态 $B \to \bigoplus (B_f/I)$ 在谱的像，由**习题 3.112** 得知 E 的补集是闭集，故 E 是开集.

首先 B 的有限生成条件可以去掉，因为只用到了可表现的条件从而可用**引理 3.111** 代替 Chevalley 定理，而后只需检查对 $f \in A' \otimes_k B$, A' 是有限生成 k-代数，有 $\operatorname{Spec}((A \otimes_k B)_f) \to \operatorname{Spec}((A' \otimes_k B)_f) \to \operatorname{Spec} B$ 的像与 $\operatorname{Spec}((A' \otimes_k B)_f) \to \operatorname{Spec} B$ 的像相同. 设 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B$ 在后者的像中，则 $(A' \otimes_k B)_f \otimes_B k(\mathfrak{p}) = (A' \otimes_k k(\mathfrak{p}))_f$ 不是零环. 这等价于 $A' \otimes_k k(\mathfrak{p})$ 不是零环而且 f 在其中不是幂零元，结合 $A' \otimes_k k(\mathfrak{p}) \hookrightarrow A \otimes_k k(\mathfrak{p})$ 是单射，这两条性质在 A' 换成 A 时仍成立，从而 $\mathfrak{p}$ 也在前者的像中，结论得证. □

推论 3.114. 设 $\operatorname{char} k = p$ 域扩张 E/k 是纯不可分的（即每个 $\alpha \in E$ 都有 $\alpha^{p^n} \in k$ 对某个 n）. 则对任意的 k-概形 X，总有 $\phi : X_E \to X$ 是同胚.

证明. 对 $x \in X$ 考虑纤维 $(X_E)_x$ 都是 $k(x) \to \operatorname{Spec} k \leftarrow \operatorname{Spec} E$ 的纤维积. 而 $k(x) \otimes_k E$ 仅一个素理想 (试写出非幂零元的逆)，从而 ϕ 是连续双射，而且由**命题 3.113** 知是开映射. □

命题 3.115. 设可分闭 $k = k^s$, A 是 k-代数且 $\operatorname{Spec} A$ 连通，则 $\operatorname{Spec} A$ 几何连通.

证明. 任意域扩张 K/k 需证 $\operatorname{Spec} A \otimes_k K$ 连通，类似 (C2) 推 (C3) 的理由可设 $K = K^a$ 代数闭. 现在注意 k^a/k 纯不可分，我们选定 $k^a \hookrightarrow K$ 的嵌入，有相接的纤维积图表

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} A \otimes_k K \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec} A \otimes_k k^a \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \operatorname{Spec} A. \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} K \arrow[r] & \operatorname{Spec} k^a \arrow[r] & \operatorname{Spec} k \end{tikzcd}$$

推论 3.114 保证 f 是同胚从而用 k^a 替代 k 而设 $k = k^a$. 倘若 $\operatorname{Spec} A \otimes_k K$ 不连通，则将两个不交开集上取 $0, 1$ 的函数用层条件拼到 $A \otimes_k K$ 中知存在非 $0, 1$ 的 $e = e^2$. 考虑 e 涉及有限个元素; 用有限生成 k-代数替代 A, 取 $B \subset K$ 是有限生成 k-整环，使得 $\operatorname{Spec} A, \operatorname{Spec} B$ 连通但 $\operatorname{Spec} A \otimes_k B$ 不连通 (注意到非 $0, 1$ 的幂等元 e 的存在性也反过来推出环谱不连通).

现**命题 3.113** 推出满射 $\phi:\operatorname{Spec}A\otimes_k B\to\operatorname{Spec}B$ 是开映射, $\operatorname{Spec}A\otimes_k B$ 的两不交开集被 ϕ 打到的两开集交是非空开 U. 由**习题 3.58** 取 U 中的闭点 $\mathfrak{m}$ 有 $k(\mathfrak{m})=k=k^a$, 于是 $\phi^{-1}(\mathfrak{m})\cong\operatorname{Spec}A$, $\operatorname{Spec}A\otimes_k B$ 的两个不交开集诱导了 $\operatorname{Spec}A$ 两个不交开集而矛盾. □

推论 3.116. 若 X 是几何连通 k-概形, 则 $\phi: X\times_k Y\to Y$ 诱导了连通分支的双射. 作为推论, 如果 $k=k^s$ 可分闭, Y 是连通 k-概形, 则它几何连通.

证明. 关于前者, 由**命题 3.113** 知 ϕ 是满的开映射. 由于 X 几何连通, 故 ϕ 的纤维在 X 连通, 所以 Y 中连通集在 ϕ 的原像也连通 (否则若是两个不交开集的并, 这二者 ϕ 下的像相交, 考虑交集中点的纤维而推出矛盾). 结合连续映射把连通集映射成连通集得此对应.
关于后者, 对任意域扩张 K/k, 由**命题 3.115**, 取几何连通的 $X=\operatorname{Spec}K$ 即由前者得. □

习题 3.117. 用同样的方法, 我们处理不可约性.

- 设可分闭 $k=k^s$, A 是 k-代数且 $\operatorname{Spec}A$ 不可约, 则 $\operatorname{Spec}A$ 几何不可约.

类似**命题 3.115**, 将原先关于 e 存在性的部分换成使 xy 幂零但 x,y 皆不幂零者的存在性, 这也等价于 $D(x),D(y)$ 两个非平凡开集交为空, 请读者完成剩下的细节.

- 若 X 是几何不可约 k-概形, 则 $\phi: X\times_k Y\to Y$ 诱导了不可约分支的双射. 作为推论, 如果 $k=k^s$ 可分闭, Y 是不可约 k-概形, 则它几何不可约.
- 几何不可约 k-概形 X 与不可约 k-概形 Y 的纤维积 $X\times_k Y$ 不可约, 几何连通 k-概形 X 与连通 k-概形 Y 的纤维积 $X\times_k Y$ 连通.

接下来到既约性, 注意与连通性和不可约性不同, 它是一个局部性质, 故只需研究仿射情形.

引理 3.118. 若 k 是完美域 (即 $\operatorname{char}k=0$ 或 $\operatorname{char}k=p$ 且 k 对开 p 次方封闭), 则 k 的有限生成扩张 E 总能找到中间域 $F=k(X_1,\cdots,X_n)$ 使 E/F 有限可分且 F/k 纯超越.

证明. 回忆**命题 2.27**. 取超越基, 特征 0 时已经得证. 对特征 p 者, 假设 E/k 的生成元被分成三类, 当前 $Y_1,\cdots,Y_n$ 是超越基,$Z_1,\cdots,Z_m$ 在 $k(Y_1,\cdots,Y_n)$ 上可分, $X_1,\cdots,X_r$ 在 $k(Y_1,\cdots,Y_n)$ 上不可分. 考虑 X_1 的极小多项式对应的 $k[X,Y_1,\cdots,Y_n]$ 中的不可约多项式, 记作 f. 那么 f 可看作一个 X^p 的多项式. 倘若这多项式中涉及的 $Y_1,\cdots,Y_n$ 的项, 次数都是 p 的倍数, 结合 k 能开任意 p 次方, 我们能将这多项式写成 $f=g^p$ 而与不可约矛盾. 不妨设 f 中涉及的 Y_1 有非 p 次方的幂次项. 则 $k(X,Y_1,\cdots,Y_n)$ 在 $k(X,Y_2,\cdots,Y_n)$ 上可分. 而 Z_i 在 $k(Y_1,\cdots,Y_n)$ 上可分, 进而在 $k(X,Y_1,\cdots,Y_n)$ 上可分, 因此由有限可分扩张的可复合性 Z_i 在 $k(X,Y_2,\cdots,Y_n)$ 上可分. 现在 $X,Y_2,\cdots,Y_n$ 是超越基, 其上不可分者至少去掉了 X_1. 重复这一步骤, 可去掉全体不可分者而求得所需的超越基. □

命题 3.119. 设 B 是几何既约 k-代数, A 是既约 k-代数, 则 $A \otimes_k B$ 既约.

证明. 若 $A \otimes_k B$ 不既约, 取非零幂零 $x \in A' \otimes_k B$, 其中 A' 有限生成. 设 $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$ 是 A' 的极小素理想, $A' \hookrightarrow \prod_{i=1}^n (A'/\mathfrak{p}_i) \hookrightarrow \prod_{i=1}^n k(\mathfrak{p}_i)$, 这与几何既约推出 $k(\mathfrak{p}_i) \otimes_k B$ 既约矛盾. □

命题 3.120. 设完美域 $k = k^p$, A 是既约 k-代数, 则 A 几何既约.

证明. 只需证 A 有限生成, E/k 有限生成的情况. 由**引理 3.118** 只需研究单扩张, 要么添超越元, 显然 $A \otimes_k k[t]$ 既约而且局部化保持既约性; 要么添可分代数元, 此时 $A \otimes_k k[t]/(p(t))$ 对某可分的 p, 和**命题 3.119** 类似, 将 A 嵌入 $\prod k(\mathfrak{p}_i)$ 而变成显然成立的域的情形. □

定理 3.121 (几何那啥啥性质的总结)**.** 检查几何既约只需基变换到完美闭包, 检查几何不可约和几何连通只需基变换到可分闭包. 完美域下两个既约概形乘积仍既约, 可分闭域下两个不可约概形的乘积仍不可约, 两个连通概形的乘积仍连通.

证明. 见**推论 3.116**, **习题 3.117**, **命题 3.119**, **命题 3.120**. □

对 E, F 是 k 的两扩域, 而且包含在公共的含 k 域 Ω 中, E, F 在 k **线性不交**指 E, F 在 k 一组基的张量积在 k 仍无关, 等价的说法是 $E \otimes_k F \to EF$ 是单射, EF 是包含 E, F 的最小扩域. 这也等价于 $E \otimes_k F$ 是整环. (详情见**习题 9.10**, 那里有关于线性不交的各种讨论.)
但是下题中两种情形是与 Ω 的选择无关的, 因为 k^s, k^a 在 k 上正规, 各种嵌入下唯一.

推论 3.122. 设 X 是 k 上的整概形, 函数域 $K(X)$, 则:

(1) X 是几何整的当且仅当 $K(X)$ 和 k^a 在 k 线性不交, 此时 $K(X_{k^a}) = K(X) \otimes_k k^a$.

(2) X 是几何不可约的当且仅当 $K(X) \cap k^s = k$.

证明. (1) 若已知线性不交, 则 $K(X) \otimes_k k^a$ 是整环, 则对于 X 的两个仿射开子集 U, V, 显然它们在 X_{k^a} 中的原像是 $K(X) \otimes_k k^a$ 子环的谱从而整, 而且 $U \cap V$ 非空推出它们在 X_{k^a} 中的交非空, 不难检查这样 X_{k^a} 既约而且其中任意两个非空开集（只需考察含于 U_{k^a}, V_{k^a}）有交. 反过来若 X_{k^a} 整则显然线性不交, 因为 k^a/k 代数, 故 $K(X_{k^a}) = \mathrm{Frac}(K(X) \otimes_k k^a) = K(X) \otimes_k k^a$.
(2) 若 X 几何不可约, 则注意到 $k^s \otimes_k k^p = k^a$ 从而 $\operatorname{Spec} k^s$ 几何既约, 因此由**命题 3.119** 知 X_{k^s} 是整概形, 类似 (1) 有 $K(X_{k^s}) = K(X) \otimes_k k_s$ 是域, 记 $K := K(X) \cap k_s$, 现在一个域包含 $K \otimes_k K$ 从而必须 $K = k$. 反过来 $K = k$, 需要检查 $K(X) \otimes_k k^s$ 是整环, 为此只需检查 $K(X) \otimes_k K'$ 是整环对任意有限可分 K'/k. 熟知单生成故记 $K' = k[T]/(P(T))$ 其中 $P \in k[T]$ 不可约, $K(X) \otimes_k K' = K(X)[T]/(P(T))$, 若 $K(X)[T]$ 中 P 有一个首一真因子 Q, 则 $Q \in k^s[T] \cap K(X)[T] = k[T]$, 由 P 不可约推出矛盾. □

推论 3.123. 设 X 是整 k-代数簇, 则 X 几何既约当且仅当 $K(X)$ 是某个纯超越扩张 L/k 的有限可分扩张. 例如这里记 $L := k(T_1, \cdots, T_d)$.

证明. 若 $K(X)$ 是那样的域, 由单生成设 $K(X) = L[S]/(P)$, $P \in L[S]$ 不可约. $K(X) \otimes_k k^a = k^a(T_1, \cdots, T_d)/(P)$, 由于 P 可分性仍保持所以 $K(X) \otimes_k k^p$ 既约. 反设 X 几何既约, 基变换到完美闭包不改变拓扑从而 X_{k^p} 是整概形, 于是由**引理 3.118** 可得 $K(X_{k^p})$ 是 k^p 那样得到的. 假设在 $L \otimes_k k^p$ 上代数的元素 x 在 L 不可分, 设它在 L 极小多项式为 $f(S^p) = g(S)^p$ 对某 $g \in (L \otimes_k k^p)[S]$, 这导致 $(L \otimes_k k^p)[S]/(f(S^p)) \subset K(X_{k^p})$ 不既约而矛盾. □

3.5.4 简单应用 *: Segre 嵌入, 有理点, Frobenius

注意到 A-概形的闭浸入 $X_1 \hookrightarrow X_2, Y_1 \hookrightarrow Y_2$ 由**性质 3.107** 知诱导了闭浸入 $X_1 \times_A Y_1 \hookrightarrow X_2 \times_A Y_2$, 取 $X_2 = \mathbb{P}^m_A, Y_2 = \mathbb{P}^n_A$, 结合闭浸入在复合下保持, 自然考虑

例 3.124 (Segre 嵌入). 考虑 $\mathbb{P}^m_A \times_A \mathbb{P}^n_A \to \mathbb{P}^{mn+m+n}_A$ 按下法定义:

$$([x_0, \cdots, x_m], [y_0, \cdots, y_n]) \mapsto [x_0 y_0, \cdots, x_i y_j, \cdots, x_m y_n].$$

它是闭浸入, 由此得知射影 A-概形的纤维积还是射影 A-概形. 为证明闭浸入只需在目标上取仿射局部研究, 观察开集 $z_{ij} \neq 0$, 它的原像是两个开集 $x_i \neq 0$ 和 $y_j \neq 0$ 相交. 对应的环映射是 $z_{ab/ij} \mapsto x_{a/i} y_{b/j}$, 它是环满射只需注意 $z_{aj/ij} \mapsto x_{a/i} \cdot 1, z_{ib/ij} \mapsto 1 \cdot y_{b/j}$. 实际上像为 $\operatorname{rank}(z_{ij}) = 1$ 切出. 也可以写 $\mathbb{P}V \times \mathbb{P}W \to \mathbb{P}(V \otimes W)$ 为

$$\operatorname{Sym}(V^\vee \otimes W^\vee) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (\operatorname{Sym}^n V^\vee) \otimes (\operatorname{Sym}^n W^\vee).$$

这种构造也适用于一般的两个分次环的 Proj 构造.

接下来观察几个和有理点相关的定理.

性质 3.125. 设 X 是 k-概形, K/k 是域扩张, 那么成立着下面的性质.
(1) 有典范双射 $X(K) \to X_K(K)$. (2) $X(K)$ 中的元素和 (x, f) 的对子典范同构, 其中 $x \in X$ 而 $f : k(x) \to K$ 是 k-代数同态. (3) 对任意扩域 K'/K, 有自然的 $X(K) \subset X(K')$. (4) 若 $X = \operatorname{Spec} k[T_1, \cdots, T_n]/I$, 则 $X(K)$ 典范双射

$$\{(t_1, \cdots, t_n) \in K^n : P(t_1, \cdots, t_n) = 0, \forall P \in I\}.$$

(5) 若 $X = \operatorname{Proj} k[T_0, \cdots, T_n]/I$, 则 $X(K)$ 典范双射

$$\{[t_0, \cdots, t_n] \in \mathbb{P}(K^{n+1}) : P(t_0, \cdots, t_n) = 0, \forall P \in I\}.$$

证明. (1) 是 X_K 纤维积的泛性质, (2) 是**例 3.45** 的重述, (3) 是考虑复合 $\operatorname{Spec} K' \to \operatorname{Spec} K \to X$. (4) 和 (5) 通过 (1) 可设 $K = k$, 从而 $k \to k(\mathfrak{p}) \to k$ 是同构而观察 T_i 在 k 的像立刻得知 $\mathfrak{p} = (T_1 - t_1, \cdots, T_n - t_n)$, 射影的情况则在仿射局部探查. □

一个重要情形是 K/k 为 Galois 扩张 (这里只要求正规可分代数扩张), 这样 $G := \operatorname{Gal}(K/k)$ 在 $\operatorname{Spec} K$ 上自同构作用, 从而由 id_X 诱导 X_K 上的自同构作用, 在 $X(K)$ 上, $\sigma \in G$ 也自然将 $(t_1, \cdots, t_n)$ 映到 $(\sigma t_1, \cdots, \sigma t_n)$.

命题 3.126. 设 X 是 k-概形, K/k 为 *Galois* 扩张, 记 $G := \operatorname{Gal}(K/k)$. 则 $X(K)$ 在 G 作用下的轨道可典范单射入 X, 另有典范的 $X(K)^G = X(k)$.

证明. 由**性质 3.125(2)**, 存在典范映射 $\rho : X(K) \to X$, 于是对 $x \in X$, 由于 K/k 是正规扩张, 故任意嵌入 $k(x) \hookrightarrow K$ 都能延拓为 K 的自同构, 从而 G 在 $\rho^{-1}(x)$ 上可迁作用. 这表明轨道可以嵌入 X, 而且 $K^G = k$ 告诉我们轨道只有一个元素的只能是 $k(x) = k$ 者. □

命题 3.127. 几何既约的 k-代数簇 X 一定存在 k^s-有理点.

证明. 用 X_{k^s} 代替 X 可设 $k = k^s$, 而后取不可约分支, 交一个仿射开子集从而可设 X 是仿射整代数簇, 由**推论 3.123** 得 $K(X)$ 是 $k(T_1, \cdots, T_d)$ 的有限可分扩张, 设是其上添加 f 单生成的. 记 $A = k[T_1, \cdots, T_d], B = \mathcal{O}_X(X)$ 以及 $P(S) \in k(T_1, \cdots, T_d)[S]$ 是 f 的极小多项式. 合理局部化 B, 不妨设 $A[f] \subset B$, 从而 $\operatorname{Frac} B = (\operatorname{Frac} A)[f]$. 由 B 有限生成可设 $g \in A$ 使 $B \subset A_g[f]$ 且 $P(S) \in A_g[S]$. 这样 $B_g = A_g[f] = A_g[S]/(P)$.
由于 P 可分, $h := \operatorname{Res}(P, P') \in A_g$ 非零. 显然可分闭域是无限域于是存在 $t \in k^d$ 使 $g(t), h(t)$ 非零, 设 $y \in \operatorname{Spec} A_g$ 对应该点, 于是 $k(y) = k$ 且 $B_g \otimes_{A_g} k(y) = k[S]/(P)$. 于是 $h \neq 0$ 保证 $B_g \otimes_{A_g} k(y)$ 是一些 k 的 (非零) 直和, 因此 $\operatorname{Spec} B_g \to \operatorname{Spec} A_g$ 的 y 原像就是一些 k-点. □

然后我们研究 Frobenius, 为此固定一个素数 p, 如无特殊声明, 本小节接下来的概形都是 $\mathbb{F}_p$ 上的. 等价的说法是, $\mathcal{O}_X(U)$ 都是特征 p 的环.

定义 3.128. $\mathbb{F}_p$-概形 X, $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(U)$ 的映射 $a \mapsto a^p$ 诱导概形态射 $F_X : X \to X$ 被称为 X 的**绝对 Frobenius**. 实际上对 X 的任意仿射局部 $\operatorname{Spec} A$, $A \to A$ 的 $a \mapsto a^p$ 素理想的原像显然还是自己, 于是局部上确如上述定义, 而且显然可粘. 另外任意 $\mathbb{F}_p$ 概形态射 $f : X \to Y$ 有

$f\circ F_X=F_Y\circ f$ 可交换, 即下面左侧的交换图表. 这也算是绝对一词的来源.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F_X"'] & Y \arrow[d, "F_Y"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "F_{X/S}"] \arrow[drr, bend left, "F_X"] \arrow[ddr, bend right, "\pi"'] & & \\
& X^{(p)}=X\times_S S \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[d, "q"] & X \arrow[d, "\pi"] \\
& S \arrow[r, "F_S"'] & S
\end{tikzcd}$$

另外, 对 S-概形 X, 按上面右侧的交换图表定义**相对 Frobenius** 映射 $F_{X/S}:X\to X^{(p)}$.

> **性质 3.129.** (1) $F_{X/S}:X\to X^{(p)}$ 和投影 $\varphi:X^{(p)}\to X$ 是同胚.
>
> (2) $F_{X/S}$ 具有函子性, 设 U 是 X 的开子集, 则 $U^{(p)}$ 是 $X^{(p)}$ 的开子集且 $F_{U/S}=F_{X/S}|_U$.
>
> (3) 若 $S=\operatorname{Spec}A, X=\operatorname{Spec}B$, $X^{(p)}=\operatorname{Spec}(B\otimes_A A)$, 其中第二个分量按 $a\mapsto a^p$ 成为 A-代数. 此时 $F_{X/S}$ 即 $B\otimes_A A\to B$ 的 $b\otimes a\mapsto ab^p$.

证明. 检查 $F_{X/S}\circ\varphi=F_{X^{(p)}},\varphi\circ F_{X/S}=F_X$ 从而得到了 (1), 详见下图表. (2)(3) 显然.

$$\begin{tikzcd}
X^{(p)} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[ddd, "q"'] \arrow[drr, dashed, "F_{X^{(p)}}"'] & X \arrow[dr, dashed, "F_{X/S}"] \arrow[drr, bend left, "F_X"] \arrow[ddd, "\pi"'] & & \\
& & X^{(p)} \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[dd, "q"] & X \arrow[dd, "\pi"] \\
& & & \\
S \arrow[r, "F_S"] \arrow[rr, bend right, "F_S"'] & S \arrow[rr, bend right, "F_S"'] & S \arrow[r, "F_S"] & S
\end{tikzcd}$$

一个小注意是, 在 $B\otimes_A A$ 中 $a\otimes 1=1\otimes a^p$. □

> **性质 3.130.** (1) 若 $S=\operatorname{Spec}A$ 是 $\mathbb{F}_p$-仿射概形, 设 $X=\operatorname{Spec}A[T_1,\cdots,T_n]/I$. 则 $X^{(p)}=\operatorname{Spec}A[T_1,\cdots,T_n]/I^{(p)}$, 其中 $I^{(p)}$ 由 $\sum a_\alpha^p T^\alpha$ 生成, 其中 $\alpha\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^n,\sum a_\alpha T^\alpha\in I$. 而相对 *Frobenius* $F_{X/S}$ 是 $T_i\mapsto T_i^p$ 诱导的. 这提供了一些具体的计算帮助.
>
> 特别的, $A=\mathbb{F}_p$ 时, 下面几个性质成立. (2) $X^{(p)}=X, F_X=F_{X/\operatorname{Spec}k}$.
>
> (3) 设 $\overline{F}_X:X(k^a)\to X(k^a)$ 为 F_X 诱导的映射. 若 $X=\mathcal{V}(I)$ 是 $\operatorname{Spec}k[T_1,\cdots,T_n]$ 的闭子簇, 则 $\overline{F}_X(t_1,\cdots,t_n)=(t_1^p,\cdots,t_n^p)$ 依**性质 3.125(4)**. (4) $X(k)$ 可被看作 $\overline{F}_X$ 的不动点.
>
> 只需注意 $\mathbb{F}_p$ 上的绝对 *Frobenius* 平凡.

> **推论 3.131.** 设 X 是特征 p 的域 k 上的几何既约整 d 维代数簇, 则 $X^{(p)}$ 是整而且 $F_{X/\operatorname{Spec}k}$ 诱导了 $K(X)/K(X^p)$ 是 p^d 次域扩张, 它是 $K(X^{(p)})$ 与 $k\cdot K(X)^p$ 的同构.

证明. 拓扑知 $X^{(p)}$ 同胚 X 而不可约, 而几何既约推出 $X^{(p)}$ 既约. 检查 $K(X^{(p)})=K(X)\otimes_k k$, 第二个分量上 p 次幂, 于是它的像在 $K(X)$ 中由相对 Frob 计算得正是 $k\cdot K(X)^p$. 因为 $K(X)$

是 $k(T_1,\cdots,T_d)$ 的域有限扩张, 于是看作线性空间基变换, $K(X)\otimes_k k$ 也是 $k(T_1,\cdots,T_d)\otimes_k k$ 相同次数的域扩张. 从而由 $[k(T_1,\cdots,T_d):k(T_1^p,\cdots,T_d^p)]=p^d$ 得. □

3.6 更多的态射性质

3.6.1 分离（Separated）态射

定义 3.132. 概形态射 $\pi:X\to Y$, $\delta_\pi:X\to X\times_Y X$ 称 π 诱导的**对角线映射**. 若 δ_π 是闭浸入, 则称 π 是**分离**的. 对环 A, A-概形 X 称为分离的指 $X\to\operatorname{Spec}A$ 分离.

有时候对域上代数簇的定义除了有限型, 还会加上既约和分离两条.

> **命题 3.133.** 仿射概形的态射诱导的对角线映射 δ_π 总是闭浸入, 一般概形态射 $\pi:X\to Y$ 诱导的对角线映射 δ_π 总是局部闭浸入, 用 Δ_π 记上述局部闭子概形.

证明. $A\otimes_B A\to A, a_1\otimes a_2\mapsto a_1a_2$ 是环满射, 得知 $\operatorname{Spec}A\to\operatorname{Spec}A\times_{\operatorname{Spec}B}\operatorname{Spec}A$ 是闭浸入. 对一般概形的情形, 像定义纤维积时那样, 用仿射开 V_i 盖住 Y, U_{ij} 盖住 X 使 $\pi:U_{ij}\to V_i$. 显然 $U_{ij}\times_{V_i}U_{ij}$ 是 $X\times_Y X$ 中的仿射开集, 而且对角线被它们覆盖（实际上由泛性质 $\delta_\pi^{-1}(U_{ij}\times_{V_i}U_{ij})=U_{ij}$）, 结合仿射情形可得 $U_{ij}\to U_{ij}\times_{V_i}U_{ij}$ 是闭浸入. □

习题 3.134. 设 U,V 是 A-概形 X 中的开集, 则 $\Delta_{X\to\operatorname{Spec}A}\cap(U\times_A V)\cong U\cap V$. 或写作抽象的 $(X\times_X X)\times_{(X\times_A X)}(U\times_A V)\cong U\times_X V$.

> **命题 3.135.** 环 A, X 是 A-概形, **TFAE**:
> (1) X 分离, (2) 对全体仿射开 $U,V\subset X$, $U\cap V$ 都仿射, 且典范 $\mathcal{O}_X(U)\otimes_A\mathcal{O}_X(V)\to\mathcal{O}_X(U\cap V)$ 是满射, (3) 存在 X 的仿射开覆盖 U_i 使任意 U_i,U_j, (2) 所述性质满足.

证明. 由前述习题, 典范 $\mathcal{O}_X(U)\otimes_A\mathcal{O}_X(V)\to\mathcal{O}_X(U\cap V)$ 对应 $\delta|_{U\cap V}:\delta^{-1}(U\times_A V)\to U\times_A V$. (1) 推 (2) 注意 $\delta|_{U\cap V}$ 也是闭浸入, 且打到仿射者, 故由**命题 3.41** 可知. (2) 推 (3) 显然. (3) 推 (1) 注意 $U_i\times_A U_j$ 覆盖 $X\times_A X$ 可知 $X\to X\times_A X$ 的像是闭的, 此纯拓扑性质推出分离. □

注 3.136. 由此容易看出 $\pi:X\to Y$ 分离当且仅当对 Y 一个开覆盖 U_i, $\pi^{-1}(U_i)\to U_i$ 分离对所有 i 成立. 即分离是在目标上局部检查的.

例 3.137. 环 A, A-概形 $\mathbb{P}_A^n$ 分离, 因为定义它所用的 $n+1$ 个标准开集符合上述命题的 (3). 而在**例 3.48** 中定义的双原点直线不分离, 因为 $k[t]\otimes_k k[t]\to k[t,t^{-1}]$ 不是满射.

命题 3.138. (1) 概形的单态射是分离态射. 开浸入和闭浸入是单态射, 进而都分离, (2) 两个分离态射的复合仍分离, (3) 分离态射在基变换下保持, (4) 若 $X \to Z, Y \to Z$ 分离则 $X \times_Z Y \to Z$ 分离, (5) 若 $f: X \to Y, g: Y \to Z$ 满足 $g \circ f$ 分离, 则 f 分离, (6) 若 Y 是分离 Z-概形, 则对一切 Y-概形 X_1, X_2 有 $X_1 \times_Y X_2 \to X_1 \times_Z X_2$ 是闭浸入.

证明. (1) 检查一个有纤维积的范畴中 $X \to Y$ 是单态射, 则依定义 $X \times_Y X$ 到构成它的两个 X 的投影 p_1, p_2 相等, 记作 p. 这样 $p \circ \delta = \mathrm{id}_X$ 已知而由纤维积泛性质 $\delta \circ p = \mathrm{id}_{X \times_Y X}$, 于是 δ 是同构. 而开浸入和闭浸入是单态射只需局部检查.

(2) $\delta_{X \to Z}$ 是 $\delta_{X \to Y} = (X \to X \times_Y Y \times_Y X)$ 与

$$\mathrm{id}_X \times \delta_{Y \to Z} \times \mathrm{id}_X : X \times_Y Y \times_Y X \to X \times_Y (Y \times_Z Y) \times_Y X = X \times_Z X$$

的复合, 结合**性质 3.107** 可知闭浸入在基变换下保持以及复合下的保持可得.

(3) 设 $Y' \to Y$, $X' = X \times_Y Y'$ 则 $\delta_{X' \to Y'} = \delta_{X \to Y} \times \mathrm{id}_{Y'}$.

(4) $X \times_Z Y \to Z$ 可分解为 $X \times_Z Y \to Y \to Z$ 于是由 (2), (3) 得.

(5) 比较 fancy 的方法是考虑一族态射 $\mathcal{P}$ 在基变换和复合下保持,

那么 $(X \to Y \to Z), \delta_{Y \to Z} \in \mathcal{P}$ 推出 $(X \to Y) \in \mathcal{P}$. 考虑

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & X \times_Z Y \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "\delta_{Y \to Z}"'] & Y \times_Z Y \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} X \times_Z Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r, "\tau"'] & Z \end{tikzcd}.$$

由 $\delta_{Y \to Z}, (X \to Z) \in \mathcal{P}$ 基变换得 $\alpha, \beta \in \mathcal{P}$, 复合得 $(X \to Y) = \beta \circ \alpha \in \mathcal{P}$.

(6) 和 (2) 的方法一样, 将 $X_1 \times_Y X_2$ 写成 $X_1 \times_Y Y \times_Y X_2$, 细节留作习题. □

注 3.139. 上述 (5) 的一大好处是, 对环 A, A-概形 X 分离当且仅当作为 $\mathbb{Z}$-概形分离, 所以分离性不依赖于基环的选取.

定义 3.140. 概形态射 $\pi: X \to Y$ **拟分离**指对角映射 δ_π 拟紧, 等价地, Y 中任意仿射开集 V, $\pi^{-1}(V)$ 中任意两个拟紧开集 U_1, U_2 的交拟紧. 回顾我们原先定义一个概形 X 拟分离为任两个仿射开集的交仍拟紧, 这等价于 $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ 拟分离. 不难检查分离的态射都是拟分离的, 回忆并检查现在定义下**性质 3.93** 的性质.

注 3.141. **性质 3.93(2)** 中检查了 *qcqs* 映射的复合仍然 *qcqs*. 拟紧复合仍然拟紧很容易, 而拟分离的复合封闭则检查**命题 3.138(2)** 的证明中闭浸入换成拟紧映射仍过得去.

接下来看几个应用.

习题 3.142. 假设 $\pi,\pi':X\to Y$ 是两个 Z-概形映射, 现合理地定义 π,π' 相同的区域, 是

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[d, "\delta_{Y\to Z}"] \\ X \arrow[r, "(\pi,\pi')"'] & Y\times_Z Y \end{tikzcd}$$

纤维积图表定义的 V. 它满足的泛性质是若 $\mu:W\to X$ 满足 $\pi\mu=\pi'\mu$, 那么 μ 穿过 $i:V\to X$, 即可以写成 $W\to V\to X$. 一般的 δ 是局部闭浸入所以 i 也是, 而 $Y\to Z$ 若分离, 则 δ 是闭浸入从而 i 也是.

定理 3.143 (既约到分离). 两个 S-概形 X 和 Z, 其中 X 既约, $Z\to S$ 分离, 若 S-态射 $\pi,\pi':X\to Z$ 限制在一个开集 $U\subset X$ 上相同, 则 $\pi=\pi'$.

证明. 设 V 是按照**习题 3.142** 定义的 X 的闭子概形, 故 V 包含稠开集推出 V 拓扑上是整个 X, 因此仿射局部地看 $X=\operatorname{Spec}A, V=\operatorname{Spec}(A/I)$, 则 $I\subset \operatorname{Nil}(A)=0$ 故 $V=X$. 故 $(f_1,f_2):X\to Y\times_S Y$ 穿过 $\delta_{Y\to S}$, 结合 $(Y\to Y\times_S Y\to Y)=\mathrm{id}_Y$ 故 $f_1=f_2$. □

而分离性的赋值判别法将和别的赋值判别法一起, 放到下一小节来讲.

3.6.2 紧合（Proper）态射

定义 3.144. 态射 $f:X\to Y$ 若将 X 的闭集都映成 Y 的闭集, 则称 f 是**闭映射**或称 f 为**闭**的. 若 f 在任意基变换 $Y'\to Y$ 下, $X\times_Y Y'\to Y'$ 都是闭的, 则称 f 是**泛闭 (万有闭)** 的.
概形态射 $f:X\to Y$ 若有限型, 分离且泛闭, 则称之**紧合**的. 不难检查紧合是目标上局部检查的. 注意**性质 3.96**, **注 3.136**, 纤维积的构造以及闭是目标上局部的. 换言之 f 紧合当且仅当对 Y 的某个开覆盖 $Y=\bigcup U_i$, f 的限制 $f^{-1}(U_i)\to U_i$ 紧合.
有时候域上紧合的代数簇也称为**完备**的, 本文不会采用此术语.

性质 3.145. (1) 闭浸入紧合, (2) 紧合态射的复合紧合, (3) 紧合在基变换下保持, (4) 若 $X\to Z, Y\to Z$ 紧合则 $X\times_Z Y\to Z$ 紧合, (5) 若 $X\to Y\to Z$ 复合后紧合且 $Y\to Z$ 分离则 $X\to Y$ 紧合, (6) 若 $f:X\to Y$ 是拓扑上满的 S-概形态射, Y 在 S 分离且有限型, X 在 S 紧合, 则 Y 在 S 紧合.

证明. 对 (1), (2), (3), 注意**性质 3.96**, **性质 3.107**, **性质 3.138**. 对于 (4), (5), 我们提出一个类似**命题 3.138(5)** 证明过程中用到的命题如下:
$\mathcal{P}$ 是一族概形态射, 包含闭浸入, 且在复合和基变换下封闭. 那么 $(X\to Z),(Y\to Z)\in\mathcal{P}$ 推出 $(X\times_Z Y\to Z)\in\mathcal{P}$; 另外 $(X\to Y\to Z)\in\mathcal{P}$ 和 $Y\to Z$ 分离推出 $(X\to Y)\in\mathcal{P}$. 前者证明和**命题 3.138(4)** 相仿, 后者只需使用**命题 3.138(6)**, 再类似**命题 3.138(5)** 操作.

最后对 (6), 回忆**性质 3.107** 对任何态射 $T \to S$ 总有 $f_T : X_T \to Y_T$ 拓扑满, 结合 $X_T \to Y_T \to T$ 闭, 易证 $Y_T \to T$ 也是闭的, 而有限型和分离已经给出. □

紧合性往往能给出不错的有限性, 下面若干命题都是紧合性经典的推论.

命题 3.146 (仿射加泛闭等价于整). 设 $f : X \to S$ 是概形态射, 那么 f 是整态射当且仅当它仿射且泛闭.

证明. 不妨考虑 $f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$. 若 f 整, 因基变换保持整, 只需证整映射闭, 正是**性质 2.78**. 另一方面, 设 f 泛闭. 不妨设 $A \hookrightarrow B$ 单, 需证 $b \in B$ 在 A 上整. 观察图表

$$\begin{tikzcd} A[X] \arrow[r] \arrow[d] & B[X] \arrow[d] \\ A[1/b] \arrow[r] & B_b \end{tikzcd}.$$

注意泛闭推出 $\mathbb{A}^1_B \to \mathbb{A}^1_A$ 是闭映射, 竖直箭头是环满射, 因此用**命题 3.138** 或**命题 3.145** 的消去操作证明 $\operatorname{Spec} B_b \to \operatorname{Spec} A[1/b]$ 是闭映射. 现在 $A[1/b] \hookrightarrow B_b$ 还是环上的单射, 那么 $\operatorname{Spec} B_b$ 在 $\operatorname{Spec} A[1/b]$ 中的像包含 $\operatorname{Spec} A[1/b]$ 的全体极小素理想. 将这映射写成复合

$$\operatorname{Spec} B[1/b] \to \operatorname{Spec} A[b, 1/b] \to \operatorname{Spec} A[1/b].$$

这样闭映射推出复合是满射, 而 $\operatorname{Spec} A[b, 1/b] \to \operatorname{Spec} A[1/b]$ 是局部化掉 $1/b$ 所以是开浸入, 而且是满射, 所以是同构. 那么 $b \in A[1/b]$, 于是得到 b 在 A 上整. □

作为推论, 立刻看出仿射加紧合推出有限. 当然反过来也成立, 有限态射是仿射的从而分离, 而我们也明白了整性推出泛闭.

命题 3.147. 设 X 是环 A 上的紧合概形, 则 $\mathcal{O}_X(X)$ 在 A 上整.

证明. 由**命题 3.73(3)** 用既约化替代不妨设 X 既约. 设 $h \in \mathcal{O}_X(X)$, 考虑态射 $\varphi : A[T] \to \mathcal{O}_X(X)$ 定义为 $T \mapsto h$, 这诱导了 $f : X \to \operatorname{Spec} A[T]$ 为 A-概形态射. 由**性质 3.145(5)** 知 f 紧合, 设 $f(X) = \mathcal{V}(I)$, 其中理想 $I \subset A[T]$ 为根理想. 那么 f 穿过 $X \to \operatorname{Spec}(A[T]/I)$, 由**性质 3.145(6)** 得 $\operatorname{Spec}(A[T]/I)$ 在 $\operatorname{Spec} A$ 上紧合, 于是先前命题告诉我们 $A[T]/I$ 在 A 上整. □

推论 3.148. 设 X 是域 k 上的既约紧合代数簇, 那么 $\dim_k \mathcal{O}_X(X) < +\infty$.

证明. 设 $X_1, \cdots, X_m$ 是 X 的不可约分支, 则 $\mathcal{O}_X(X) \to \bigoplus_i \mathcal{O}_{X_i}(X_i)$ 是单射, 因为可以考虑一个开覆盖 $\{U_i\} \cup \{U_j\}$, 使 U_i 只包含诸一般点中 X_i 那个, U_j 把前者没盖住的地方盖了. 这样利用整性和**命题 3.77** 得 $\mathcal{O}_{X_i}(X_i) \hookrightarrow \mathcal{O}_X(U)$ 是嵌入, 结合 $\mathcal{O}_X(X) \hookrightarrow \bigoplus_i \mathcal{O}_X(U_i) \oplus \bigoplus_j \mathcal{O}_X(U_j)$ 是单射可知, 故可设 X 整. 由前一命题 $\mathcal{O}_X(X)$ 是域 k 上整扩张得的整环, 从而是域. 由**习题 3.58** 任取闭点 $x \in X$, $k(x)/k$ 是有限扩张, 因此自然的 $\mathcal{O}_X(X) \hookrightarrow k(x)$ 是单射. □

习题 3.149. 若 X 是既约紧合 k-代数簇, Y 是仿射 k-代数簇, 设 $f: X \to Y$ 是 k-概形态射, 那么 $f(X)$ 是 Y 中有限多个闭点的并. 提示是 $X \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(X) \to Y$ 和**推论 3.148**.

注 3.150. 实际上一般的对 k 换成诺特环 A, 甚至去掉既约条件, 仍然有 $\mathcal{O}_X(X)$ 在 A 上整, 不过这是凝聚层的一个结论, 我们将在那时候作更详细的介绍.

习题 3.151. 设 X 是域 k 上既约连通紧合代数簇, 则 $\mathcal{O}_X(X)$ 是域, 且是 k 的有限扩张. 若更强地, 知道 X 几何连通 (resp. 几何连通且几何既约), 那么 $\mathcal{O}_X(X)$ 在 k 上纯不可分, (resp.$\mathcal{O}_X(X) = k$). 检查 X 连通当且仅当 $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(X)$ 连通, 即 $F = \mathcal{O}_X(X)$ 没有 $0, 1$ 以外的幂等元. 再注意到, $F_K = \mathcal{O}_X(X) \otimes_k K = \mathcal{O}_{X_K}(X_K)$, 取 $K = k^s, k^a$.
若 X 几何连通, 则 X_{k^s} 还既约, 故 F_{k^s} 是域, 它包含 $(F \cap k^s) \otimes_k (F \cap k^s)$ 因此 $F \cap k^s = k$. 若在此基础上 X 几何既约, 则 F_{k^a} 是域, 且在 k^a 上有限, 因此只能是 k^a, 从而 $F = k$.

依前一小节做过的约定, 现在我们来介绍赋值判别法, 一大好处是证明射影推出紧合.

定义 3.152. 概形态射 $f: X \to Y$, 赋值环 R, $K = \operatorname{Frac} R$, 所谓**赋值判别法图表**指,

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} K \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ \operatorname{Spec} R \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\leq 1"'] & Y \end{tikzcd}$$

这样的一个交换方块, 而我们说 f 满足**赋值判别法的存在性 (resp. 唯一性)**, 指对任意赋值环 A, 使图表交换的虚线箭头存在 (resp. 至多只有一个).
不难检查满足赋值判别法存在性和唯一性都在基变换下保持.

命题 3.153. $f: X \to Y$ 概形拟紧态射, 则其泛闭当且仅当满足赋值判别法存在性.

证明. 首先若 f 泛闭, 沿 $\operatorname{Spec} R \to Y$ 基变换 f, 从而可设 $Y = \operatorname{Spec} R$. 记 $\operatorname{Spec} K = \{\eta\}$, η 在 X 中像的闭包记作 Z, 因为复合闭浸入 $Z \hookrightarrow X$ 不改变泛闭, 故不妨设 $X = Z$, 现在:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} K = \{\eta\} \arrow[rr] \arrow[dr] & & X . \arrow[dl, "f"] \\ & \operatorname{Spec} R & \end{tikzcd}$$

X 不可约, η 的像是 X 的一般点, f 是闭映射, 要找截面, 即 $\operatorname{Spec} R \to X$ 使图表交换. 从分式域上, 图表为 $K \to K(X) \to K$ 于是 $K(X) = K$, 于是图表总将一般点打到一般点, 由于 f 闭, 故 $f(X) = \operatorname{Spec} R$, 于是取闭点 $y \in \operatorname{Spec} R$, 原像 $x \in f^{-1}(y)$. 这样 $f_x : R \to \mathcal{O}_{X,x}$ 是局部环同态, 由于在分式域上诱导同构, 故作为 K 子环 $R \subset \mathcal{O}_{X,x} \subset K$, 那么由赋值环支配下极大可知 $R = \mathcal{O}_{X,x}$. 于是 $\mathcal{O}_{X,x}$ 到 R 同构映射诱导 $\operatorname{Spec} R \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \subset X$.

反设赋值判别法存在性成立. 因为基变换下保持, 故只需证 f 是闭映射. 由**习题 3.112**(注意映射拟紧故能归约到仿射), 设 $Z \subset X$ 是闭子概形, 只需证 $f(Z)$ 在特殊化下封闭. 设 $z \in Z$ 映到 $y \in Y$, 设 y 特殊化得到 y', 需证明 z 特殊化得到 z' 使 z' 映到 y'. 现有环同态 $\mathcal{O}_{Y,y'} \to k(y) \to k(z)$, 设分式域 $k(z)$ 中的赋值环 R 使 $\mathcal{O}_{Y,y'} \to R$ 穿过 $\mathcal{O}_{Y,y'} \to k(z)$.
赋值判别法中取赋值环 R 分式域 $k(z)$, 现在 $\operatorname{Spec} k(z) \to X$ 打到 z, $\operatorname{Spec} R$ 一般点打到 y, $\operatorname{Spec} R$ 闭点打到 y', 根据 R 的构造, 也能将 $\operatorname{Spec} R$ 一般点打到 z, 闭点的像取作 z' 即可. □

推论 3.154 (赋值判别法)**.** (1) 设 $f : X \to Y$ 是概形的拟分离态射, 则它分离当且仅当满足赋值判别法的唯一性. (2) 设 $f : X \to Y$ 是概形的有限型拟分离态射, 则其紧合当且仅当满足赋值判别法的存在唯一性.

证明. (1) f 满足赋值判别法的唯一性当且仅当拟紧的 $\delta_f : X \to X \times_Y X$ 满足赋值判别法的存在性, 当且仅当对角线 Δ_f 闭. 而 (2) 是 (1) 和前一命题的推论. □

推论 3.155. $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ 是紧合态射.

证明. 由定义, $\operatorname{Spec} K \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$ 的信息等价于一个齐次坐标 $[a_0, \cdots, a_n]$, 诸 a_i 不全为 0 且都在 K 中. 而 $\operatorname{Spec} R \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$ 也类似, 只不过 $a_i \in R$. 则那么利用 R 的赋值把全体 a_i 除掉赋值最小的, 得到全体元素在 R 中者, 这就给出了唯一使得赋值判别法成立的那个映射. □

这样一来, 注意射影簇总是闭浸入复合一个 $\mathbb{P}^n_A \to \operatorname{Spec} A$, 因此结合基变换和复合保持紧合, 射影簇在基环上总是紧合的. 实际上检查 $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ 泛闭可以用消去理论主定理**定理 3.100** 来刻画. 不过赋值判别法其实是一个看起来复杂但用起来常常有效的好东西.

3.6.3 Abel 簇 *

定义 3.156. 域 k 上的 **Abel 簇**指一个几何整的, 紧合 k-群概形.

实际上能证明 Abel 簇都是射影的, 但是这得到我们学会除子理论后再讨论.
熟悉李群的同学会发现, 若 $k = \mathbb{C}$, 其上的 Abel 簇的解析化将变成紧复李群, 必形如某种环面, 即 $\mathbb{C}^n/\Lambda$, 其中 $\Lambda \subset \mathbb{C}^n$ 是秩 $2n$ 的完备格. 而我们马上来证明, 如上定义的 Abel 簇总是交换群概形. 这得益于如下的刚性引理:

引理 3.157 (刚性引理)**.** k-代数簇 X, Y, Z, 满足 X 紧合且几何整, 某 k-点 $\mathfrak{p} \in X$ 给定, Y 整, Z 分离, 记投影 $\mathrm{pr} : X \times_k Y \to Y$. 若对态射 $\alpha : X \times_k Y \to Z$, 存在 $\mathfrak{q} \in Y$ 使 $\alpha(X \times \{\mathfrak{q}\}) = \mathfrak{r} \in Z$ 取常值. 则: (1) 存在态射 $\psi : Y \to Z$ 使 $\alpha = \psi \circ \mathrm{pr}$. (2) 若 α 在 $\{\mathfrak{p}\} \times Y$ 也取常值, 则 α 在 $X \times_k Y$ 上取常值 $\mathfrak{r}$.

证明. 考虑定义 $\beta : X \times_k Y \to Z$ 为 $\beta(x, y) = \alpha(\mathfrak{p}, y)$, 准确地说, 考虑 $\sigma_{\mathfrak{p}} : Y \to X \times_k Y$ 的映射由 $Y \to X$ 打到 $\mathfrak{p} \in X$, $\mathrm{id}_Y : Y \to Y$ 确定, 然后取 $\beta = \alpha \circ \sigma_{\mathfrak{p}} \circ \mathrm{pr}$. 如果我们能证明 $\beta = \alpha$, 那么取 $\psi = \alpha \circ \sigma_{\mathfrak{p}}$ 则 (1) 得证, 而 (2) 也是立刻的.

现在**习题 3.117**, **命题 3.119** 表明几何整概形与整概形的积是整的, 即 $X \times_k Y$ 整, 而 Z 分离, 因此既约到分离定理**定理 3.143** 及不可约性表明只需证明 $\alpha = \beta$ 限制在 $X \times_k Y$ 的任意非空开集上成立即可. 设 $\mathfrak{r} \in U \subset Z$ 是仿射开邻域. 则 $\alpha^{-1}(Z \backslash U)$ 是 $X \times_k Y$ 的闭子集. 由于 pr 是紧合态射, 故 $\mathrm{pr}(\alpha^{-1}(Z \backslash U))$ 闭, 其补集开且含 $\mathfrak{q}$ 从而非空, 取 $\mathfrak{q} \in V \subset Y \backslash \mathrm{pr}(\alpha^{-1}(Z \backslash U))$. 我们声称 $\alpha = \beta$ 在 $\mathrm{pr}^{-1}(V) = X \times_k V$ 上成立, 它含 $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ 故非空.

$$
\begin{tikzcd}
 & & Z, \\
X \times \{\mathfrak{q}\} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[urr, bend left, "\text{const.}"] & X \times Y \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[d, shift right, "\mathrm{pr}"'] & \\
\operatorname{Spec} \mathfrak{q} \arrow[r] & Y \arrow[u, shift right, "\sigma_{\mathfrak{p}}"'] \arrow[uur, bend right, "\psi"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & & Z. \\
X_{k^a} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[urr, shift left, "\alpha_{k^a}"] \arrow[urr, shift right, "\beta_{k^a}"'] & X \times V \arrow[ur, "\alpha|_{X \times V}"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}"] & \\
\operatorname{Spec} k^a \arrow[r, "\gamma"'] & V &
\end{tikzcd}
$$

考虑上述右侧的图表, 对任意闭点 $\gamma : \operatorname{Spec} k^a \to V$, 于是 X_{k^a} 整, 从而**习题 3.151** 告诉我们 $\mathcal{O}_{X_{k^a}}(X_{k^a}) = k^a$, 另外 $\mathrm{pr}^{-1}(V) \subset \alpha^{-1}(U)$, 由于 U 仿射, 故**习题 3.149** 证明了 $\alpha_{k^a}, \beta_{k^a}$ 相等. 现在所有的几何纤维 $X_{K^a} \to X \times_k V$ 穿过 α, β 由**习题 3.142** 定义出相等的区域, 结合 V 的 $\operatorname{Spec} k^a$ 点稠密, 故相等的区域必是整个. 至此 $\alpha = \beta$ 成立. □

推论 3.158. *设 k-Abel 簇 A 和 k-群概形 G. 则任意 k-态射 $\phi : A \to G$ 总能写成先进行一个 $A \to G$ 的群同态再进行一个 G 上 k-点的左乘的复合.*

作为推论考虑取逆 $i_A : A \to A$, 可证明 i_A 是群同态进而 A 交换.

证明. 设 e_A, e_G 分别为 A, G 的幺元 (都是 k-点), 那么 $\phi(e_A)$ 映到一个 G 上的 k-点, 于是取 $\phi(e_A)^{-1}$ 左乘可设 $\phi(e_A) = e_G$. 现在考虑 $\alpha : A \times A \to G$ 为 $\alpha(x, y) = \phi(xy)\phi(x)^{-1}\phi(y)^{-1}$, 则 α 在 $\{e_A\} \times A, A \times \{e_a\}$ 上都是常值, 于是**刚性引理**推出 $\alpha = e_G$ 故 $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$. □

注 3.159. 上述证明中涉及群元素的过程应当被翻译回纯概形的映射描述, 留给读者.

3.7 概形的局部研究

3.7.1 正规（Normal）概形与正规化（Normalization）

定义 3.160. 概形 X 在 $x \in X$ 处**正规**指 $\mathcal{O}_{X,x}$ 是正规环. 概形 X 称为**正规**的当且仅当它在全体 $x \in X$ 处都正规而且不可约. 因此正规概形都是整概形.

一个 1 维的正规局部诺特概形被称为 **Dedekind 概形**.

命题 3.161. X 是不可约概形, 则 X 正规等价于对每个开 $U \subset X$ 有 $\mathcal{O}_X(U)$ 是正规环. 若 X 还拟紧, 则上述二者还等价于 X 在全体闭点处正规. 回忆**命题 2.70**.

证明. 一方面局部化保持正规, 另一方面若 X 正规, 每个点处正规, 设 $f \in \operatorname{Frac}(\mathcal{O}_X(U))$ 在 $\mathcal{O}_X(U)$ 上整, 对每个仿射开 $V \subset U$, $A := \mathcal{O}_X(V)$ 并视 $f \in K(X) = \operatorname{Frac} A$ 在 A 上整 (限制映射是嵌入). 但 $I_f := \operatorname{Ann}_A((fA + A)/A) = \{b \in A : bf \in A\}$ 不包含在任意素理想中故 $I = A$, 于是 $f \in \mathcal{O}_X(V)$ 对任意仿射 $V \subset U$ 拼出 $f \in \mathcal{O}_X(U)$. 若 X 拟紧, 则任意 $x \in X$, 由**习题 3.61** 知 $\overline{\{x\}}$ 中存在闭点 y, 故 $\mathcal{O}_{X,x}$ 可由 $\mathcal{O}_{X,y}$ 局部化来. □

习题 3.162. 若 m 是无平方因子的正整数, 则 $X = \operatorname{Proj} \mathbb{Z}[S_0, S_1, S_2]/(S_2^2 - mS_1S_0)$ 正规.

引理 3.163. 若 A 正规诺特且维数不小于 1, 则 $A = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A, \operatorname{ht} \mathfrak{p} = 1} A_{\mathfrak{p}}$.

证明. 用 A' 记右式, 反设 $A \subsetneq A'$ 来推矛盾, 对每个 $f \in A' \backslash A$, 定义 $I_f := \{a \in A : af \in A\}$. 诺特得知存在 g 使得 $\mathfrak{q} := I_g$ 在全体 $\{I_f : f \in A' \backslash A\}$ 中包含关系下极大, 不难检查它是素理想. 现在观察 $g\mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}$ 是局部环 $A_{\mathfrak{q}}$ 的理想, 要么它是 $A_{\mathfrak{q}}$, 要么它包含在 $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}$.
对前者, $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}} = g^{-1}A_{\mathfrak{q}}$, 故 $\operatorname{ht} \mathfrak{q} = 1$, 依 $g \in A'$ 推出 $g \in A_{\mathfrak{q}}$. 而对后者, 由诺特 $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}$ 是有限生成 $A_{\mathfrak{q}}$-模, 故 g 在 $A_{\mathfrak{q}}$ 上整故由正规 $g \in A_{\mathfrak{q}}$. 现设 $s \in A \backslash \mathfrak{q}$ 使 $gs \in A$ 故 $s \in I_g = \mathfrak{q}$ 矛盾. □

定理 3.164 (代数 Hartogs 定理)**.** 设 X 是正规局部诺特概形. F 是 X 的闭子集, 且余维数至少为 2 (即对每个 F 的不可约分支 Z_0, 还能找到不可约 Z_1, Z_2 使 $Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq Z_2$) . 那么限制映射 $\mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(X \backslash F)$ 是同构. 说明 $X \backslash F$ 上的函数能唯一延拓为整个 X 上的.

正规和延拓的关系非常奇妙, 除了上述定理, 我们再来介绍一个.

习题 3.165. 设 X, Y 是 S-概形, S 局部诺特, 其中 $Y \to S$ 有限型. 给定点 $x \in X$, 和 S-概形态射 $f_x : \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \to Y$. 证明存在 X 中含 x 的开集 U 和 S-概形态射 $f : U \to Y$ 延拓 f_x.
不妨设 $S = \operatorname{Spec} A$ 诺特, $Y = \operatorname{Spec} B$, $X = \operatorname{Spec} B'$. 设 $x = \mathfrak{p} \in X$. 现 $B = \frac{A[X_1, \cdots, X_n]}{(f_1, \cdots, f_m)}$, 设诸 $X_i \mapsto \frac{r_i}{s_i} \in B'_{\mathfrak{p}}, f_j(\frac{r_1}{s_1}, \cdots, \frac{r_n}{s_n})t_j = 0$, 其中 $s_i, t_j \notin \mathfrak{p}$, 则令 $U = B'_{s_1 \cdots s_n t_1 \cdots t_m}$.

命题 3.166. 设 $Y \to S$ 紧合, S 局部诺特. X 是有限型正规 S-概形. 对非空开集 $U \subset X$, S-概形态射 $f : U \to Y$ 总能延拓为 $V \to Y$, V 是 X 含 U 和全体余一维点的一个开集.
作为推论若 X 一维 (此时 X *Dedekind*) , 则 V 总等于 X. 即 f 总能延拓到整个 X 上.

证明. 设 $\xi \in U$ 是 X 一般点, f 诱导 $f_\xi : \operatorname{Spec} K(X) \to Y$. 设 $x \in X$ 余一维, 则由**定理 2.222** 得知 $\mathcal{O}_{X,x}$ 是 DVR, 于是**紧合的赋值判别法**得 f_ξ 可延拓为 $f_x : \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \to Y$. 由于 Y 是 S-有限型的, 因此由前述习题 f_x 延拓到 x 的某开邻域 U_x 上, 得到 $g : U_x \to Y$.

现设 $g(x)$ 有仿射开邻域 W. 将 f,g 限制在非空（X 整）开集 $U'=f^{-1}(W)\cap g^{-1}(W)$ 上看, 注意 $f|_{U'},g|_{U'}$ 诱导 $\mathcal{O}_Y(W)\to\mathcal{O}_X(U')\subset K(X)$ 相同的映射, 因此由 W 仿射 $f|_{U'}=g|_{U'}$. 现在**既约到分离定理**推出 f,g 在 $U\cap U_x$ 上一致, 故 f 被延拓到 $U\cup U_x$ 上; **既约到分离定理**也推出 f 到不同的 $U\cup U_y$ 的延拓在交叠区域都一致, 故 f 可延拓到 $V=U\cup\bigcup_x U_x$ 上. □

接下来介绍正规化.

定义 3.167. 整概形 X 的**正规化**指一个正规概形 X' 和支配态射 $\pi:X'\to X$. 满足对每个正规 Y 和支配态射 $f:Y\to X$ 都有唯一 $g:Y\to X'$ 使 $f=\pi\circ g$, 即如下交换图表

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "g"'] & X . \\ X' \arrow[ur, "\pi"'] & \end{tikzcd}$$

正规化若存在, 则由泛性质其作为 X-概形唯一.

命题 3.168. 整概形总存在正规化, 且 $f:Y\to X$ 是正规化等价于 Y 正规, f 双有理且整.

证明. (1) 首先检查对整环 A, 其作为环的正规化 $A\hookrightarrow\tilde{A}$ 诱导 $\operatorname{Spec}\tilde{A}\to\operatorname{Spec}A$ 作为概形正规化. 设正规 Y 和支配 $\pi:Y\to\operatorname{Spec}A$. 则 $A\hookrightarrow\mathcal{O}_Y(Y)$ 是整环嵌入正规环, 故穿过 $\tilde{A}$.
(2) 检查对一般的整概形, 利用**仿射沟通引理**, 结合 (1) 中仿射局部的正规化是典范的, 因此由**引理 3.47** 可以粘起. 读者检查这样构造的正规化满足定义中要求的泛性质.
(3) 构造表明正规化显然满足三者, 反过来若满足三者, 在仿射局部上 $A\hookrightarrow B$ 是整环嵌入正规环的整态射, 诱导分式域同构, 从而是正规化, 满足定义要求的泛性质这点与 (2) 同理. □

定义 3.169. 在**命题 3.168** 基础上, 设 $L/K(X)$ 是域的有限扩张, 定义 X 在 L 中的正规化为一个整态射 $\pi:X'\to X$ 满足 X' 正规, 且 π 在一般点上是 $\operatorname{Spec}L\to X$. 这里我们不大好观察泛性质, 不过按照每个仿射局部在 L 取整闭包粘起来仍是正确的构造, 亦可检查唯一性.

引理 3.170. (1) 正规诺特概形 X, $L/K(X)$ 有限可分, (2) 域 k, $X=\mathbb{A}_k^n$, $L/K(X)$ 有限. 上述二者中任一成立都能推出则 X 在 L 正规化 $X'\to X$ 是有限态射. 这是**引理 2.96** 的重述.

命题 3.171. 设 X 是整 k-代数簇. 设 $L/K(X)$ 是有限扩张, 则 X 在 L 正规化 $X'\to X$ 是有限态射, 特别的 X' 是正规 k-代数簇. 另外 X 中的正规点构成 X 中的开集. 这是**命题 2.97** 的重述. 为证明全体正规点构成开集, 只需对维数归纳, 注意**命题 2.97** 能得到在一个开集上正规, 故可将问题化归到该开集补的不可约分支上.

命题 3.172. 设 k 是域. (1) 对任意超越度 1 的有限生成域扩张 K/k, 存在（同构下）唯一的 k-正规紧合曲线 X 使得 $K(X)=K$. (2) 对任意 k-正规紧合曲线 X,Y 间的支配映射和 k 上超越度 1 的有限生成扩域 K 间的 k-映射是范畴同构. (3) 在 (2) 中 $\varphi: K(Y)\to K(X)$ 诱导的 $X\to Y$ 是 Y 在 $K(X)$ 中的正规化.

证明. 先证 (1) 的存在性, 设 $K=k(x_1,\cdots,x_n)$, 取 $k[X_1,\cdots,X_n]\to K, X_i\mapsto x_i$, 则核是素理想, 将其齐次化有射影从而紧合, 再取正规化是有限态射, 即得到正规紧合曲线. 而 (2) 是**既约到分离定理**, **命题 3.89** 和**命题 3.166** 的立即推论. (2) 立刻推出 (1) 的唯一性. 最后 (3) 设 $Y'\to Y$ 是 Y 在 $K(X)$ 正规化, 则 φ 穿过 $K(Y)\to K(Y')=K(X)$, 从而由 (2) 得. □

注 3.173. 后面我们会证明域上正规紧合曲线都是射影的.

3.7.2 正则（Regular）概形

定义 3.174. 概形 X 和 $x\in X$, 考虑 $\mathfrak{m}_x$ 为 $\mathcal{O}_{X,x}$ 的极大理想, 剩余域 $k(x)=\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$. $T_{X,x}:=(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^\vee$ 是一个 $k(x)$-线性空间, 我们称之 X 在 x 处的 **(Zariski) 切空间**. 而在记号上 $T_{X,x}^\vee:=\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$, 称 X 在 x 的 **(Zariski) 余切空间**. 概形局部诺特时, $\dim\mathcal{O}_{X,x}\le\dim_{k(x)}T_{X,x}<+\infty$, 这会避免无限维线性空间双重对偶不是自己的记号问题.
设 $f:X\to Y$ 为概形态射, $x\mapsto f(x)=:y$, 则局部环同态 $f_x^\sharp:\mathcal{O}_{Y,y}\to\mathcal{O}_{X,x}$ 诱导 $k(x)$-线性的 $T_{f,x}:T_{X,x}\to T_{Y,y}\otimes_{k(y)}k(x)$. 称之 f 在 x 的**切映射**. 若还有概形映射 $Y\to Z$ 不难检查 $T_{g\circ f,x}=(T_{g,y}\otimes\mathrm{id}_{k(x)})\circ T_{f,x}$. 这些与微分流形上的定义既有些相似又有些区别.

注 3.175.

3.7.3 平坦（Flat）、光滑（Smooth）和平展（Étale）态射

3.7.4 Zariski 主定理 *

3.8 凝聚层（Coherent Sheaf）和拟凝聚层（Quasicoherent Sheaf）

这一节我们介绍环上的模在概形论中的推广. 几何上它们是向量丛的推广.

3.8.1 定义与基本性质

定义 3.176. 环化空间 $(X,\mathcal{O}_X)$, 则一个$\mathcal{O}_X$**-模层**或简称一个$\mathcal{O}_X$**-模**指一个 X 上的层 $\mathcal{F}$, 满足每个开集 U 都有 $\mathcal{F}(U)$ 都是 $\mathcal{O}_X(U)$-模, 且作用满足相容性: 对两个开集 $V\subset U$ 和 $a\in\mathcal{O}_X(U), f\in$

$\mathcal{F}(U)$ 有 $(a\cdot f)|_V = a|_V \cdot f|_V$. $\mathcal{O}_X$-模间的态射也典范地定义.
对两个 $\mathcal{O}_X$-模 $\mathcal{F},\mathcal{G}$ 定义 $\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{G}$ 为 $U\mapsto \mathcal{F}(U)\otimes_{\mathcal{O}_X(U)}\mathcal{G}(U)$ 的层化, 利用余极限与张量积可交换得知 $(\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{G})_x = \mathcal{F}_x\otimes_{\mathcal{O}_{X,x}}\mathcal{G}_x$. 而 $\mathcal{O}_X$-模的直和, 映射核与余核都按照层上的来, 很容易构造. 故全体 $\mathcal{O}_X$-模的范畴 $\mathsf{Mod}(\mathcal{O}_X)$ 是 *Abel* 范畴. 进一步它是 $\mathsf{Ab}(X)$ 的 *Abel* 子范畴, 同样构造检查余完备, 滤余极限显然正合, 而生成元为 $\mathcal{O}_X$, 故它 **AB5**.

但 $\mathsf{Mod}(\mathcal{O}_X)$-模太大了, 其包含很多作用糟糕的. 为避免之, 我们引入一些概念.

定义 3.177. 环化空间 $(X,\mathcal{O}_X)$ 上的 $\mathcal{O}_X$-模 $\mathcal{F}$ 与 $x\in X$ 若满足典范的 $\mathcal{F}(X)\otimes_{\mathcal{O}_X(X)}\mathcal{O}_{X,x}\to\mathcal{F}_x$ 满, 则称 $\mathcal{F}$ **在** x **由整体截面生成**, 若 $\mathcal{F}$ 在每个 $x\in X$ 都如此则称 $\mathcal{F}$ **由整体截面生成**. 对 $S\subset\mathcal{F}(X)$, 若每个 $x\in X$ 都有 $\{s_x\}_{s\in S}$ 是 $\mathcal{F}_x$ 的一个 $\mathcal{O}_{X,x}$-模生成元组, 则称 $\mathcal{F}$ **由** S **生成**.

引理 3.178. $\mathcal{O}_X$-模 $\mathcal{F}$ 被整体截面生成当且仅当存在某指标集 $\mathscr{I}$ 与 $\mathcal{O}_X$-模满态射 $\mathcal{O}_X^{\oplus\mathscr{I}}\to\mathcal{F}$. 若 $\mathcal{F}$ 被 $S\subset\mathcal{F}(X)$ 生成则指标集 $\mathscr{I}$ 可选为 S.

证明. 若满态射存在, 因为 $\mathcal{O}_X^{\oplus\mathscr{I}}$ 由整体截面生成得 $\mathcal{F}$ 亦然. 反过来 $\mathcal{F}$ 若由 S 生成, 自然将 s 对应分量的环幺元 1_s 打到 $s\in\mathcal{F}(X)$, 在开 U 上 $\sum f_s\cdot 1_s|_U\mapsto\sum f_s\cdot s|_U$ 即可. □

定义 3.179. 若 $\mathcal{O}_X$-模 $\mathcal{F}$ 满足对每个 $x\in X$ 存在开邻域 U, 指标集 $\mathscr{I},\mathscr{J}$ 和一个限制在开集 U 上的层正合列 $\mathcal{O}_X^{\oplus\mathscr{J}}|_U\to\mathcal{O}_X^{\oplus\mathscr{I}}|_U\to\mathcal{F}|_U\to 0$, 则称 $\mathcal{F}$ 是**拟凝聚**的. 显然 $\mathcal{O}_X$ 拟凝聚.
X 上的全体凝聚层在作为 $\mathcal{O}_X$-模的态射下构成的范畴记为 QCoh_X.

我们先看仿射的情形, 马上就能明白拟凝聚层这一概念为何就是模的几何推广.

性质 3.180. 对于 $X=\operatorname{Spec}A$. 给定 A-模 M 则可定义 $\widetilde{M}$ 为一个 $\mathcal{O}_X$-模, 在主开集 X_f 上取 M_f, 那么如在**命题 3.25** 中检查得知它确实是一个层. (1) $\widetilde{M}$ 拟凝聚, $\widetilde{M}(X)=M,\widetilde{M}_{\mathfrak{p}}=M_{\mathfrak{p}}$. (2) 对一族 A-模 M_i 有 $(\bigoplus M_i)^\sim\cong\bigoplus\widetilde{M_i}$. (3) A-模列 $L\to M\to N$ 正合当且仅当诱导的 $\widetilde{L}\to\widetilde{M}\to\widetilde{N}$ 正合. (4) 有典范同构 $(M\otimes_A N)^\sim\cong\widetilde{M}\otimes_{\mathcal{O}_X}\widetilde{N}$.

证明. (1) 的后两句话显然, (2) 显然, (3) 模正合当且仅当在每个素理想局部正合, (1) 的拟凝聚性来自 (3) 和模的自由消解, (4) 设 $L=M\otimes_A N$ 则 $\widetilde{L}(X_f)=(M\otimes_A N)\otimes_A A_f=\widetilde{M}(X_f)\otimes_{\mathcal{O}_X(X_f)}\widetilde{N}(X_f)=(\widetilde{M}\otimes_{\mathcal{O}_X}\widetilde{N})(X_f)$. 主开集拓扑基上粘出层 $\widetilde{L}\cong\widetilde{M}\otimes_{\mathcal{O}_X}\widetilde{N}$. □

习题 3.181 (qcqs 引理)**.** 仿照**命题 3.40**, 证明若 X 是 *qcqs* 概形, 其上的拟凝聚层 $\mathcal{F}$ 和 $f\in\mathcal{O}_X(X)$, 有典范同构 $\mathcal{F}(X)_f\to\mathcal{F}(X_f)$.

定理 3.182. 概形 X, $\mathcal{O}_X$-模 $\mathcal{F}$ 拟凝聚等价于每个仿射开 $U\subset X$ 有 $\mathcal{F}(U)^\sim\cong\mathcal{F}|_U$.

证明. 若 $\mathcal{F}$ 拟凝聚则对 $f \in \mathcal{O}_X(U)$ 用 **qcqs 引理**可证 $\mathcal{F}(U)_f \cong \mathcal{F}(U_f)$, 反过来 $\mathcal{F}|_U \cong \mathcal{F}(U)^\sim$ 拟凝聚而一个模的拟凝聚性是局部检查的, 于是 $\mathcal{F}$ 拟凝聚. □

定义 3.183. 环化空间 X, $\mathcal{O}_X$-模 $\mathcal{F}$ 被称为 **(局部) 有限生成**的指对每个 $x \in X$ 存在开邻域 U 和满态射 $\mathcal{O}_X^{\oplus n}|_U \to \mathcal{F}|_U \to 0$. $\mathcal{F}$ 被称为**凝聚**的指有限生成的基础上, 对每个开 $U \subset X$ 和 $\mathcal{O}_X^{\oplus n}|_U \to \mathcal{F}|_U$ 的核总是有限生成的. 这是类似有限表现的概念. 凝聚层的范畴记作 Coh_X.
若每个 $x \in X$ 都存在开邻域 U 和正合的 $\mathcal{O}_X^{\oplus m}|_U \to \mathcal{O}_X^{\oplus n}|_U \to \mathcal{F}|_U \to 0$, 这时我们称 $\mathcal{F}$ 为 **(局部) 有限表现**的. 而我们要强调的是, 会出现一个结构层自身 $\mathcal{O}_X$ 作为 $\mathcal{O}_X$-模不凝聚的情况, 这导致了两个定义方法不等价. 例如 R 取成 0 点处 C^∞ 函数的芽构成的环, 这时候甚至（局部）有限表现者都不构成一个 *Abel* 范畴, 映射的核不一定保持（局部）有限表现.

引理 3.184. 拟凝聚 $\mathcal{O}_X$-模 $\mathcal{F}$, 凝聚推出有限生成推出对每个仿射开集 $U \subset X$, $\mathcal{F}(U)$ 都是有限生成 $\mathcal{O}_X(U)$-模, 若 X 局部诺特, 则上述三者等价.

证明. 先看第二个推出, 原理是有限生成是仿射局部的, 和**命题 3.69** 类似可证若 $\bigcup_{i=1}^n X_{f_i} = X$ 且 M_{f_i} 的一组生成元是 $m_{ij}/f_i^{a_{ij}}$ 则 $\{m_{ij}\}_{i,j}$ 是 M 一组生成元. 最后假设局部诺特, 若 $\mathcal{O}_X^{\oplus n}|_U \to \mathcal{F}|_U$, 核的有限生成性只需取 U 的仿射开集研究. □

性质 3.185. 概形 X, $\mathcal{O}_X$-模有如下性质: (1) 拟凝聚层的任意直和都拟凝聚, 有限生成的有限直和仍有限生成. (2) 拟凝聚 $\mathcal{F},\mathcal{G}$ 的张量积拟凝聚, 对仿射 $U \subset X$, $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})(U) = \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$, 若 $\mathcal{F},\mathcal{G}$ 还有限生成则 $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ 也有限生成. (3) 拟凝聚层范畴的核与余核, 任意扩张都存在, 且余完备. (4) 局部诺特条件下, 凝聚层范畴的扩张存在, 核和余核存在. (5) QCoh_X 是 *Grothendieck Abel* 范畴, 局部诺特条件下 Coh_X 是 *Abel* 范畴.

证明. (1)(2) 显然. (3) 和 (4) 用模的构造, 检查对仿射 U, $(\operatorname{colim} \mathcal{F}_i)(U) := \operatorname{colim} \mathcal{F}_i(U)$ 定义的 $\mathcal{O}_X$-模层（张量积与余极限交换）符合泛性质且 $(\operatorname{colim} \mathcal{F}_i)(U)^\sim \cong (\operatorname{colim} \mathcal{F}_i)|_U$. (5) 立刻. □

性质 3.186. 概形 X 上的闭子概形 Z, 设 $i : Z \to X$ 闭浸入. 则 $\operatorname{Ker} i^\sharp$ 是 X 上的拟凝聚层, 且 $Z \mapsto \operatorname{Ker} i^\sharp$ 是 X 的闭子概形与 $\mathcal{O}_X$ 的拟凝聚子层的一一对应, 和我们在**命题 3.23** 中阐述的一致. 实际上, 若 Z 是闭子概形则不难检查 $\operatorname{Ker} i^\sharp$ 是理想层, 反过来给定一个拟凝聚的 $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$, 则取 $i : \mathcal{V}(\mathcal{J}) \to X$, 我们需要检查 $(\mathcal{V}(\mathcal{J}), j^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}))$ 是个概形, 而根据仿射局部 $\mathcal{V}(\mathcal{J}) \cap \operatorname{Spec} A \cong \operatorname{Spec}(A/J)$ 对某理想 J 可知.

定义 3.187. 设 $f : X \to Y$ 是环化空间态射, 则 $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ 诱导 $f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$, 设 $\mathcal{G}$ 为 $\mathcal{O}_Y$-模, 记 $f^*\mathcal{G} := f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$. 它是 $\mathcal{O}_X$-模, 称之 $\mathcal{G}$ **沿 f 的拉回层**. 显然 $f^*\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X$.

关于拉回层和推出层, 我们指出一些性质.

性质 3.188. 设 $f: X \to Y$ 是概形态射.

(1) $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{O}_Y$-模, 则对 $x \in X$, $(f^*\mathcal{G})_x \cong \mathcal{G}_{f(x)} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,f(x)}} \mathcal{O}_{X,x}$.

(2) $\mathcal{G}$ 是 Y 上拟凝聚层, 设 X 上仿射开集 U 的像 $f(U)$ 落入 Y 中仿射开集 V, 则有 $f^*\mathcal{G}|_U \cong (\mathcal{G}(V) \otimes_{\mathcal{O}_Y(V)} \mathcal{O}_X(U))^\sim$. 故 $f^*\mathcal{G}$ 拟凝聚, 且 $\mathcal{G}$ 有限生成推出 $f^*\mathcal{G}$ 亦然.

(3) $\mathcal{F}$ 是 X 上拟凝聚层, 若 f 是 *qcqs* 的, 则 $f_*\mathcal{F}$ 拟凝聚.

(4) f 有限, 若 $\mathcal{F}$ 有限生成且拟凝聚则 $f_*\mathcal{F}$ 亦然.

证明. (1) 是直接的, (2) 可看作 $U \to V$ 而设二者仿射, 此时直接计算得到. (3) 局部观察可设 Y 是仿射, 则对 $g \in \mathcal{O}_Y(Y)$, 设它在 $\mathcal{O}_X(X)$ 像为 g' 那么

$$f_*\mathcal{F}(Y_g) = \mathcal{F}(f^{-1}Y_g) = \mathcal{F}(X_{g'}) \cong \mathcal{F}(X)_{g'} = \mathcal{F}(X) \otimes_{\mathcal{O}_Y(Y)} \mathcal{O}_Y(Y_g).$$

这表明 $f_*\mathcal{F} \cong \mathcal{F}(X)^\sim$ 于 Y. (4) 仍设 Y 仿射, 结合 f 仿射可知 qcqs, 再由 $f_*\mathcal{F} = \mathcal{F}(X)^\sim$ 和 X 在 Y 上有限可知 $\mathcal{F}(X)$ 是有限生成 $\mathcal{O}_X(X)$-模进而是有限生成 $\mathcal{O}_Y(Y)$-模. □

紧接着我们讨论一个重要的构造: Internal Hom. 对环化空间 $(X, \mathcal{O}_X)$, 设 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ 是 $\mathcal{O}_X$-模, 则依照 $U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ 显然定义了一个层, 因为层态射是可以靠局部粘接得到的. 另外对 $f \in \mathcal{O}_X(U)$ 我们可以定义 $f\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ 为 φ 多作用一个左乘 f. 我们把这样定义的这个 $\mathcal{O}_X$-模记作 $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

性质 3.189. 关于环化空间的 *Internal Hom*, 以下性质成立:

(0) 有显然的同构 $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}) \cong \mathcal{F}$ 和 $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) \cong \mathcal{F}$.

(1) 有一个典范的赋值映射 $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \mathcal{G}$.

(2) 对每个 $x \in X$, 有一个典范态射 $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x)$, 一般来说不一定是同构. 但如果 $\mathcal{F}$（局部）有限表现, 类似**引理 2.149** 的方法可知是同构.

(3) 环化空间态射 $f: (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$. $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ 为 $\mathcal{O}_Y$-模, 则有典范 $f^*\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{F}, f^*\mathcal{G})$. 若还有 f 平坦且 $\mathcal{F}$ 有限表现, 则其是同构. 只需注意 $f^*\mathcal{F}$ 有限表现.

(4) 有典范同构 $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}, \mathcal{H}) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{H}))$.

(5) 给定 $\mathcal{O}_X$-模 $\mathcal{G}$, $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ 是反变的左正合函子, 而 $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ 则是协变的左正合函子. 若 $\mathcal{F}$ 有限表现, 则滤余极限与 $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{F})$ 可交换.

(6) 若 $\mathcal{F}$ 有限表现, 则 $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ 局部上形如某个 $\mathcal{G}^{\oplus m} \to \mathcal{G}^{\oplus n}$ 的核. 特别的 $\mathcal{F}$ 有限表现, $\mathcal{G}$ 拟凝聚推出 $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ 拟凝聚, $\mathcal{G}$ 凝聚推出 $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ 凝聚.

3.8.2 几何观点和一些例子

这节先是引入一些概念, 详细的性质和讨论会放在后文, 然后观察射影簇上的拟凝聚层.

定义 3.190. 概形 X 上一个**局部平凡层**, 指一个 $\mathcal{O}_X$-模 $\mathcal{F}$, 满足存在 X 的一个开覆盖 $\bigcup_j U_j$ 和一系列指标集 $\mathscr{J}_i$ 使得 $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}^{\oplus \mathscr{J}_i}$, 若所有指标集都为 n 元集, 其中 n 是一个非负整数, 则称 $\mathcal{F}$ 是秩 n 的. 显然局部平凡层总是拟凝聚的, 如诸指标集都是有限集, 则它是凝聚的. 秩 1 的局部平凡层被称为**可逆层**. 另一方面, 一个秩 n 局部平凡层, 给定开覆盖 $\bigcup_j U_j$ 后也可以用一系列满足满足类似**引理 3.47** 条件的转换映射 $T_{ij} \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}(U_i \cap U_j))$ 来刻画.

几何上说我们应该把这些对象都想象成 X 上的向量丛.

习题 3.191. (1) 若 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ 是 X 上秩 m, n 的局部自由层, 则 $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ 和是秩 mn 的局部自由层. $\mathcal{F}^\vee := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ 则是秩 m 的局部自由层, 称之 $\mathcal{F}$ 的**对偶层**, 不难检查在双对偶下有层同构 $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}^{\vee\vee}$. 注意 $\mathcal{F}, \mathcal{F}^\vee$ 不一定同构是因为无法典范同构 $\mathcal{O}^n$ 及其对偶. (2) 若 $\mathcal{F}$ 是可逆层, 则 $\mathcal{F} \otimes \mathcal{F}^\vee \cong \mathcal{O}_X$. (3) 若 $\mathcal{E}$ 是局部自由层, 则对 $\mathcal{O}_X$-模 $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ 则有 $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G} \otimes \mathcal{E}) \cong \mathcal{H}om(\mathcal{F} \otimes \mathcal{E}^\vee, \mathcal{G})$. 且 $- \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$ 是 $\mathcal{O}_X$-模到自身的正合函子.

接下来我们立刻引入一个重要的群.

定义 3.192. 概形 X 上的可逆层在同构类下, 以张量积为乘法, 对偶为逆构成一个交换群, 称 X 的 **Picard 群**, 记作 $\operatorname{Pic} X$. 概形态射 $\pi : X \to Y$ 诱导 $\operatorname{Pic} Y \to \operatorname{Pic} X$, 由此观之取 *Picard* 群实则是函子 $\operatorname{Pic} : \mathsf{Sch} \to \mathsf{AbGrp}$.

注 3.193. 对于接触适当代数数论者, 可观察一具体案例, 对 $K/\mathbb{Q}$ 是有限扩张, 整数环 $R = \mathcal{O}_K$ 的理想类群 $\mathrm{Cl}(\mathcal{O}_K) \cong \mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K)$, 解释是注意环是 *Dedekind* 的, 于是 $\mathcal{O}_K$ 的线丛对应一个分式理想, 而且两个分式理想对应的线丛同构当且仅当它们差一个主理想.
只需注意这样的模 M 在 0 处局部化必同构于分式域 $\operatorname{Frac} R$. 说明 M 是 $\operatorname{Frac} R$ 的一个有限生成子 R-模, 通过通分得知存在 $r \in R$ 使 rM 由 R 中元素生成, 故它一定是分式理想. 而对 *Dedekind* 环, 分式理想都是可逆的, 即存在非零分式理想 J 使 $MJ = R$. 假设 $\sum_{i=1}^n m_i j_i = 1, m_i \in M, j_i \in J$ 则存在映射 $M \to R^n$ 为 $m \mapsto (mj_i)_i$ 和 $R^n \to M$ 为 $(r_i) \mapsto \sum_{i=1}^n r_i m_i$, 从而分式理想都是有限生成投射的且秩一. 当然在诸素理想局部化也易看出.

关于 Picard 群的细节会在后面除子时介绍. 接下来看具体例子, 射影概形上的拟凝聚层:

3.8.3 上同调理论初步

阅读本节前, 读者请先完成**同调代数**部分**层的上同调**一节的阅读.

引理 3.194. 设仿射 $X = \operatorname{Spec} A$, 拟凝聚 $\mathcal{O}_X$-模 $\mathcal{F}$, 则对任意一个有限个主开集构成的覆盖 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{\mathscr{I}}, U_i = X_{g_i}$ 和正整数 $p > 0$ 有 $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$.

证明. 由仿射知 $\mathcal{F} = \mathcal{F}(X)^{\sim}$. 设 $f \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ 使 $df = 0$, 需找 $f' \in C^{p-1}$ 使 $df' = f$. 为此利用覆盖的有限性, 我们可以随意通分, 取正整数 r 使

$$f_{i_0,\cdots,i_p} = \frac{x_{i_0,\cdots,i_p}}{(g_{i_0}\cdots g_{i_p})^r},\ x_{i_0,\cdots,i_p} \in \mathcal{F}(X).$$

对 $i \in I, (df)_{i,i_0,\cdots,i_p} = 0$ 于是我们把这条件写作

$$\left.\left(\frac{x_{i_0,\cdots,i_p}}{(g_{i_0}\cdots g_{i_p})^r} + \sum_{k=0}^{p}(-1)^{k+1}\frac{g_{i_k}^r x_{i,i_0,\cdots,\hat{i_k},\cdots,i_p}}{(g_i g_{i_0}\cdots g_{i_p})^r}\right)\right|_{U_{i,i_0,\cdots,i_p}} = 0.$$

于是取 $l \geq 1$ 使得我们把限制在主开集, 即局部化的事情转化为等式

$$\frac{g_i^{l+r} x_{i_0,\cdots,i_p}}{(g_{i_0}\cdots g_{i_p})^r} = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k \frac{g_i^l g_{i_k}^r x_{i,i_0,\cdots,\hat{i_k},\cdots,i_p}}{(g_{i_0}\cdots g_{i_p})^r}.$$

由于 $\mathcal{U}$ 是覆盖, 设 $1 = \sum_{i\in\mathscr{I}} h_i g_i^{r+l}, h_i \in A$, 再令

$$f'_{i_0,\cdots,i_{p-1}} := \sum_{i\in\mathscr{I}} h_i g_i^l \frac{x_{i,i_0,\cdots,i_{p-1}}}{(g_{i_0}\cdots g_{i_{p-1}})^r} \in \mathcal{F}(U_{i_0,\cdots,i_{p-1}}).$$

上面定义的 f' 的导数计算如下:

$$(df')_{i_0,\cdots,i_p} = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k \sum_{i\in\mathscr{I}} h_i \frac{g_i^l g_{i_k}^r x_{i,i_0,\cdots,\hat{i_k},\cdots,i_p}}{(g_{i_0}\cdots g_{i_p})^r} = \sum_{i\in\mathscr{I}} h_i g_i^{r+l} f_{i_0,\cdots,i_p} = f_{i_0,\cdots,i_p}.$$

于是 $df' = f$. □

然后是层的上同调部分的重要结论.

定理 3.195. 仿射 X 及拟凝聚 $\mathcal{O}_X$-模 $\mathcal{F}$, 对任意 $p \geq 1$ 有 $\check{H}^p(X, \mathcal{F}) = H^p(X, \mathcal{F}) = 0$.

定理 3.196. 概形 X 上拟凝聚层 $\mathcal{F}$. 对 X 的满足任意有限交仍仿射的开覆盖 $\mathcal{U}$,

$$\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^p(X, \mathcal{F})$$

对任意 $p \geq 0$ 都是同构, 且皆同构于 $H^p(X, \mathcal{F})$.

此时也能用这个开覆盖正确地计算上同调长正合列. 例如

命题 3.197. 仿射概形 X 上的拟凝聚 $\mathcal{O}_X$-模短正合列 $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$, 则有正合的

$$0 \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X) \to \mathcal{H}(X) \to 0.$$

3.9 除子（Divisor）和代数曲线（Algebraic Curve）

Chapter 4

同调代数

我们本质希望将同调方法引入交换代数和代数几何, 以解决在先前知识框架下无法完整叙述的内容. 这些同调代数内容更像工具, 故在前文中引用本章结论也是不足为奇的.

4.1 准备工作: 范畴论拾遗、Abel 范畴

随学习深入, 抽象怪话的使用会增加. 当不使用抽象语言便难以描述清楚事物时, 引入它们便是必须之举. 读者应在阅读本章前了解**基础**范畴论知识, 如泛性质、(余) 极限、伴随函子等. 范畴术语 "小" 指涉及的对象或态射构成集合, 虽然我们不会谈及许多集合论细节, 但仍会给出命题与证明的正确叙述. 我们参考 Stacks Project[10], 香蕉空间 [15] 和 Freyd 的书 [20].

4.1.1 加性范畴 (Additive Category)、Abel 范畴: 定义和基本性质

定义 4.1. 范畴 $\mathcal{C}$ 称为**加性**的指它满足以下三个条件:

(1) 对任意 $a, b \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(a,b)$ 是 *Abel* 群, 且复合映射双线性:

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(b,c) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(a,b) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(a,c), \ (f,g) \mapsto f \circ g.$$

(2) 范畴 $\mathcal{C}$ 有一个零对象 0, $a \to 0 \to b$ 称零映射.

(3) 两个对象的积对象 $a \times b$ 存在. 进而归纳地, 有限个元素的积对象存在.

两个加性范畴 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 间的函子 F 称为**加性的**, 指对任意 $a, b, c \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$: F 诱导态射 *Abel* 群间的群同态, 即 $F : \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(a,b) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(Fa, Fb)$ 是群同态; 且有交换图

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(b,c) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(a,b) \arrow[r] \arrow[d, "F\times F"'] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(a,c) \arrow[d, "F"] \\
\mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(Fb,Fc) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(Fa,Fb) \arrow[r] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(Fa,Fc)
\end{tikzcd},$$

换言之复合映射与取 F 是交换的.

性质 4.2. 加性范畴 $\mathcal{C}$ 中, 如下的事实成立.
(1) 零映射 $a \to 0 \to b$ 是 $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(a,b)$ 的零元. (2) 积对象也是余积对象, 以后记 $a \oplus b$.

证明. (1) 双线性性检查零映射 + 零映射 = 零映射. (2) 首先构造 i, j 为 a, b 到 $a \times b$ 的嵌入:

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, dashed, "i"] \arrow[drr, bend left, "0"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] & & \\
& a \times b \arrow[r, "q"'] \arrow[d, "p"] & b \\
& a &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
b \arrow[dr, dashed, "j"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}_b"] \arrow[ddr, bend right, "0"'] & & \\
& a \times b \arrow[r, "q"'] \arrow[d, "p"] & b \\
& a &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c & & \\
& a \times b \arrow[ul, dashed, "f"'] & b \arrow[l, "j"] \arrow[ull, bend right, "s"'] \\
& a \arrow[u, "i"'] \arrow[uul, bend left, "r"] &
\end{tikzcd}
$$

注意到 $f : a \times b \to a \times b$ 若满足 $pf = p, qf = q$ 则 $f = \mathrm{id}_{a\times b}$. 这是积的泛性质, 于是双线性性检查得 $ip + jq = \mathrm{id}_{a\times b}$. 最后我们说明 $i : a \to a \times b, j : b \to a \times b$ 是余积图表, 给定 $r : a \to c, s : b \to c$ 注意 $fi = r, fj = s$ 当且仅当 $f = rp + sq$. □

加性范畴间的加性函子总将零对象映为零对象, 积对象映为积对象. x 是零对象的特征是 $\mathrm{id}_x = 0$, c 是 a, b 积对象的特征是上面的 i, j, p, q 满足的等式.

定义 4.3. 含 0 对象的范畴 $\mathcal{C}$ 中, 若映射 $f : a \to b$ 有相关的如下拉回（resp. 推出）:

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[dr, dashed, "\exists!"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& \operatorname{Ker} f \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & 0 \arrow[d] \\
& a \arrow[r, "f"'] & b
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& & c \\
0 \arrow[r] \arrow[urr, bend left] & \operatorname{Coker} f \arrow[ur, dashed, "\exists!"] & \\
a \arrow[u] \arrow[r, "f"'] & b \arrow[u, "p"'] \arrow[uur, bend right] &
\end{tikzcd}
$$

则分别称 $(\operatorname{Ker} f, i)$ 为 $f : a \to b$ 的**核**, （resp. $(\operatorname{Coker} f, p)$ 为 $f : a \to b$ 的**余核**）.
而 f 的**像** $\operatorname{Im} f$ 定义为 f 余核的核, **余像** $\operatorname{Coim} f$ 定义为 f 核的余核.

定义 4.4. 一个 **Abel 范畴**是指满足如下两个条件的加性范畴:
(1) 所有的映射都有核与余核.
(2) 所有的单态射都是其余核的核, 满态射都是其核的余核.

例 4.5. $\mathsf{AbGrp}, \mathsf{Mod}_R, {}_R\mathsf{Mod}$ 都是 *Abel* 范畴, 不难验证第二条.

命题 4.6. 加性范畴的对偶范畴也是加性的, *Abel* 范畴的对偶范畴也是 *Abel* 范畴.

命题 4.7. (1) 加性范畴中态射单当且仅当核存在且为 0, 态射满当且仅当余核存在且为 0. 核是单射, 余核是满射. (2) *Abel* 范畴中态射是同构当且仅当它既单又满. (3) 加性范畴中, 任何映射 $f : a \to b$ 可典范分解为 $a \to \operatorname{Coim} f \to \operatorname{Im} f \to b$. (4) *Abel* 范畴中像等于余像.

证明. (1) 对映射作差验证定义. (2) 设 $f : a \to b$ 既单又满, 则 f 满推出 $\operatorname{Coker} f = 0$. f 单推出 f 是 $b \to 0 = \operatorname{Coker} f$ 的核, 显然 $\mathrm{id}_b : b \to b$ 穿过 $b \to 0$ 的核, 因此存在 $g : b \to a$ 使 $fg = \mathrm{id}_b$. 同理 f 有另一边的逆, 从而 f 是同构. 反过来同构既单又满在一般范畴也对.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} f \arrow[r, "i"] \arrow[d, "0"'] & a \arrow[r, "f"] \arrow[d] & b \arrow[r, "p"] & \operatorname{Coker} f \\
\operatorname{Coker} i \arrow[r, equal] & \operatorname{Coim} f \arrow[r, dashed] \arrow[ur, dashed] & \operatorname{Im} f \arrow[u, hook] \arrow[r, equal] & \operatorname{Ker} p \arrow[u, "0"']
\end{tikzcd}$$

(3) 考虑 $\operatorname{Ker} f \to a \to b$ 是零映射, 因此有典范映射 $\operatorname{Coim} f = \operatorname{Coker} \operatorname{Ker} f \to b$, 又考虑 $a \to b \to \operatorname{Coker} f$ 是零映射, 结合 $a \to \operatorname{Coim} f$ 是满射得 $\operatorname{Coim} f \to b \to \operatorname{Coker} f$ 是零映射. 从而有典范映射 $\operatorname{Coim} f \to \operatorname{Im} f$. (4) 我们声称 (3) 的构造中 $\operatorname{Coim} f \to b$ 的映射总是单射. 若这已经得证, 则 $\operatorname{Coim} f \to \operatorname{Im} f$ 是单射, 同理 $a \to \operatorname{Im} f$ 是满射, 因此 $\operatorname{Coim} f \to \operatorname{Im} f$ 是满射, 最后由 (2) 知像等于余像. 为此我们声称余像具有的泛性质按照如下最左边一幅图给出:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] \arrow[ddr, "p"'] & & b \\
& \operatorname{Coim} f \arrow[ur] & \\
& c \arrow[u, dashed] \arrow[uur] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} p \arrow[d] \arrow[dr, hook] \arrow[drrr, "0"] & & & \\
\operatorname{Ker} f \arrow[r, hook] & a \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] \arrow[ddr, "p"'] & & b \\
& & \operatorname{Coim} f \arrow[ur] & \\
& & c \arrow[u, dashed] \arrow[uur] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] \arrow[ddr] \arrow[dddr] & & b \\
& d \arrow[ur] & \\
& \operatorname{Coim} f \arrow[u] \arrow[uur] & \\
& c \arrow[u, dashed] \arrow[uuur] &
\end{tikzcd}$$

若 $p : a \to c$ 满射, 使得 f 分解为 $a \to c \to b$, 则存在唯一 $c \to \operatorname{Coim} f$ 使图表交换. 首先 $\operatorname{Ker} p \to a \to c \to b$ 是零映射, 因此有 $\operatorname{Ker} p \to \operatorname{Ker} f$. 因为 p 是满射所以 $p : a \to c$ 也是 $\operatorname{Ker} p \to a$ 的余核, 所以 $a \to \operatorname{Coim} f$ 可唯一分解为 p 复合某 $c \to \operatorname{Coim} f$. 结合 p 满可证明 $c \to \operatorname{Coim} f \to b$ 的三角形可交换, 泛性质得证. 现在对 $\operatorname{Coim} f \to b$ 作 (3) 所述的像和余像分解, 设余像为 d, 有满 $\operatorname{Coim} f \to d$, 由于满射的复合还是满射, 因此 $a \to d$ 满, 这样就得到 $d \to \operatorname{Coim} f$, 容易检查 $d \to \operatorname{Coim} f \to d$ 和 $\operatorname{Coim} f \to d \to \operatorname{Coim} f$ 是恒同, 因此 $\operatorname{Coim} f = d$, 而这推出 $\operatorname{Coim} f \to b$ 是单射 ($a \to b$ 余像等于 a 说明是单射). □

定义 Abel 范畴也能用【任意映射的上述 (3) 分解 $\operatorname{Coim} f \to \operatorname{Im} f$ 都同构】代替**定义 4.4(2)**.

推论 4.8. *Abel* 范畴中的任意 $f: a \to b$ 可唯一分解为 $a \to \operatorname{Im} f$ 满和 $\operatorname{Im} f \to b$ 单的复合.

推论 4.9. *Abel* 范畴中 $a \to b \to c$, 则下列三条等价:
(1) $\operatorname{Im}(a \to b) = \operatorname{Ker}(b \to c)$ (2) $\operatorname{Coker}(a \to b) = \operatorname{Coim}(b \to c)$
(3) $a \to b \to c$ 与 $\operatorname{Ker}(b \to c) = k \to b \to f = \operatorname{Coker}(a \to b)$ 是零映射.

证明. (1) 推 (3) 显然 $a \to b \to c$ 是零映射, 另外顺水推舟得到

$$(k \to b) = \operatorname{Ker}(b \to c) = \operatorname{Im}(a \to b) = \operatorname{Ker}\operatorname{Coker}(a \to b) = \operatorname{Ker}(b \to f).$$

(3) 推 (1) 由定义 $\operatorname{Ker}(b \to f) = \operatorname{Im}(a \to b)$ 因此 $k \to b$ 可分解为 $k \to \operatorname{Im}(a \to b) \to b$. 另一边 $a \to b \to c$ 是零映射结合**推论 4.8** $a \to \operatorname{Im}(a \to b)$ 是满射, 得知 $\operatorname{Im}(a \to b) \to b \to c$ 是零映射从而可将 $\operatorname{Im}(a \to b) \to b$ 分解为 $\operatorname{Im}(a \to b) \to k \to b$. (2)(3) 互推是对偶的. □

定义 4.10. *Abel* 范畴中 $a \to b \to c$ 满足 $\operatorname{Im}(a \to b) = \operatorname{Ker}(b \to c)$ 则称在 b 处**正合**. 一般的, 一列首尾相接的映射若除了两端的元素（亦可能有的端无限延申）中间的项都正合则称之**正合列**, 特别的, 形如 $0 \to a \to b \to c \to 0$ 的正合列称**短正合列**.

习题 4.11. *Abel* 范畴中 (1) $f: a \to b$ 是单态射当且仅当 $0 \to a \to b$ 正合, 是满态射当且仅当 $a \to b \to 0$ 正合. (2) $0 \to a \to b \to c$ 正合, 则 $a \to b$ 是 $b \to c$ 的核. $a \to b \to c \to 0$ 正合则 $b \to c$ 是 $a \to b$ 的余核. (3) 典范的映射 $0 \to a \to a \oplus b \to b \to 0$ 构成正合列.

习题 4.12. *Abel* 范畴中给定一个图表如下（不一定交换）.

$$\begin{tikzcd} p \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & a \arrow[d, "r"] \\ b \arrow[r, "s"'] & c \end{tikzcd}$$

其自然对应一列映射 $0 \to p \to a \oplus b \to c \to 0$, 中间两个映射分别是 $(f, g), (r, -s)^{\mathrm{T}}$.
则 $p \to a \oplus b \to c$ 是零映射当且仅当图表交换, 前四项正合当且仅当 p 是拉回, 后四项正合当且仅当 c 是推出. 因此 $0 \to p \to a \oplus b \to c \to 0$ 正合当且仅当同时是拉回和推出.

推论 4.13. *Abel* 范畴中任意的拉回和推出对象都存在, 构造为在上习题中取核与余核.

命题 4.14. 设 $a \to c \leftarrow b$ 的拉回为 p.
(1) 设 $0 \to k \to p \to b$ 正合, 则 $0 \to k \to a \to c$ 正合, 特别的 $p \to b$ 单则 $a \to c$ 单.
(2) 设 $0 \to a \to c \to f$ 正合, 则 $0 \to p \to b \to f$ 正合, 特别的 $a \to c$ 单则 $b \to f$ 单.

证明. (1) 假设 $x \to a$ 使 $x \to a \to c$ 是零映射, 则取零映射 $x \to b$ 拉回得 $x \to p$, 由核的泛性质得 $x \to k$. 这表明 $k \to p \to a$ 符合 $a \to c$ 的核的泛性质.

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, dashed] \arrow[drrr, bend left, "0"] \arrow[ddrr, bend right] & & & \\
0 \arrow[r] & k \arrow[r] \arrow[d, equal] & p \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & k \arrow[r] & a \arrow[r] & c
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x \arrow[dr, dashed] \arrow[drr] \arrow[drrr, bend left, "0"] \arrow[ddr, bend right] & & & \\
0 \arrow[r] & p \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[r] \arrow[d] & f \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & a \arrow[r] & c \arrow[r] & f
\end{tikzcd}
$$

(2) 只证 $p \to b$ 是 $b \to f$ 的核, 对 $x \to b$ 使 $x \to b \to c \to f$ 是零映射, 则由于 $a \to c$ 是 $c \to f$ 的核, 存在 $x \to a$ 使得图表交换, 因此拉回得 $x \to p$. 从而 $\mathrm{Ker}(b \to f)$ 的泛性质得证. □

推论 4.15. 设 $a \to c \leftarrow b$ 的拉回为 p, $a \to c$ 满则有 $p \to b$ 满.

证明. 只需在对偶范畴中验证 $a \leftarrow d \to b$ 的推出为 e, $a \leftarrow d$ 单则有 $e \leftarrow b$ 单. 注意 $d \to a \oplus b$ 单（复合 $p : a \oplus b \to a$ 并通过双线性性验证泛性质）, 从而 $0 \to d \to a \oplus b \to e \to 0$ 正合, 由**习题 4.12** 这也是 $a \to e \leftarrow b$ 的拉回图表, 使用**命题 4.14** 即得所需结论. □

4.1.2 Yoneda 嵌入、Yoneda 引理

人的本质是一切社会关系的总和. ——马克思

定义 4.16. 设 $\mathcal{C}$ 是局部小范畴, $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set})$ 为 $\mathcal{C}$ 到 Set 的所有反变函子为对象, 自然变换为态射构成的函子范畴, 称 $\mathcal{C}$ 上取值集合的**预层范畴**, 态射为预层映射.

当然 $\mathcal{C}$ 取拓扑空间开集在包含下的范畴, Set 换成 AbGrp, 解包这些概念即成为**定义 3.1**.

定义 4.17. 如下的函子被称为 **Yoneda 嵌入**:

$$y : \mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set}),\ c \mapsto \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(-, c).$$

常记 $h_c = y(c) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(-, c) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$, 称为**被 c 表出**的函子（或预层）. 易检查函子性.

定理 4.18 (Yoneda 引理)**.** 设 $\mathcal{C}$ 是局部小范畴. 对任意 $X \in \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set})$, 有自然同构

$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set})}(h_c, X) \cong X(c).$$

换言之预层 X 在 c 的取值对应于从 h_c 到 X 的预层态射.

证明. 假设有自然变换 $\eta : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(-, c) = h_c \Rightarrow X$, 则对任意态射 $f \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(b, c)$ 有交换图:

$$\begin{tikzcd} c & c \arrow[l] \arrow[dl] \\ b \arrow[u, "f"] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(c, c) \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[d, "\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(f,c)"'] & X(c) \arrow[d, "X(f)"] \\ \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(b, c) \arrow[r, "\eta_b"'] & X(b) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{id}_c \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \xi \arrow[d, mapsto] \\ f \arrow[r, mapsto] & X(f)(\xi) \end{tikzcd}$$

于是 $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(c, c)$ 中的 id_c 映到 $X(c)$ 中的 ξ. 不难检查, 自然变换 η 被 ξ 完全决定. □

注 4.19. 用 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 代替 $\mathcal{C}$ 得到协变函子的 *Yoneda* 嵌入

$$y : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathsf{Set}), \ c \mapsto h^c = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(c, -).$$

以及 *Yoneda* 引理对应成为: 对 $X \in \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathsf{Set})$, 有

$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathsf{Set})}(h^c, X) \cong X(c).$$

另外, 当 $\mathcal{C}$ 是加性范畴时, 对应的 $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(c, -)$ 都是 *Abel* 群, 将 Set 皆改作 AbGrp 并无影响.

> **推论 4.20.** 设 $\mathcal{C}$ 是局部小范畴, 则 *Yoneda* 嵌入 $y : \mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set})$ 是满忠实的.
> 作为推论, $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set})$ 中有同构 $h_c \cong h_d$, 当且仅当 $c \cong d$ 在 $\mathcal{C}$ 成立.

证明. 在 **Yoneda 引理** 取 $X = h_d$, $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set})}(h_c, h_d) \cong \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(c, d)$. □

4.1.3 (AB5) 条件与 Grothendieck Abel 范畴

我们来对 Abel 范畴提一些条件, 很容易发现它们都是自然的, 实际上我们生活中的大多数 Abel 范畴都会满足这些条件. 另外证明中我们涉及的集合论问题, 都不展开细说.

定义 4.21. 一个 *Abel* 范畴 $\mathcal{A}$, 对象 $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 使 $\mathrm{Mor}(P, -) : \mathcal{A} \to \mathsf{AbGrp}$ 正合, 则称 P 为**投射**的. 类似的, 定义**内射**对象为指使 $\mathrm{Mor}(-, P)$ 正合者. $\mathcal{A}$ 中的**投射生成元**指满足 $\mathrm{Mor}(P, -)$ 是正合忠实函子的对象 $P \in \mathcal{A}$. **内射余生成元**是对偶范畴中的投射生成元.
实际上任意 $P \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, $\mathrm{Mor}(P, -), \mathrm{Mor}(-, P)$ 总左正合. 故投射等价于满射 $B \to C$ 诱导 $\mathrm{Mor}(P, B) \to \mathrm{Mor}(P, C)$ 满射, 内射等价于单射 $A \to B$ 诱导 $\mathrm{Mor}(B, P) \to \mathrm{Mor}(A, P)$ 满射.

定义 4.22. 若 *Abel* 范畴 $\mathcal{A}$ 满足 **(AB5)**, 即余完备 (即小的余极限存在)、滤余极限正合; 且存在**生成元**, 即 $g \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 使 $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(g, -)$ 忠实, 则称之 **Grothendieck (Abel) 范畴**.

习题 4.23. 环 R 上的模范畴 Mod_R, 特别的 AbGrp, 都是 *Grothendieck Abel* 范畴. R 是生成元, 再在 Mod_R 中构造极限和余极限 (通过取自由模商一些关系), 由构造检查滤余极限正合.
读者检查 **AB5** 的 *Abel* 范畴中滤余极限与有限极限 (例如 Ker, 而一般的都可以实现为取 Ker 和有限直和的有限组合) 交换.

引理 4.24. *如 Abel 范畴 $\mathcal{C}$ 有生成元 g, 则对任意 $c \in \mathcal{C}$, c 的所有子对象构成集合.*

证明. 由于 $g \in \mathcal{C}$ 是生成元, 所以对 $a \hookrightarrow c$, $b \hookrightarrow c$, 只要 $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(g,a), \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(g,b)$ 在 $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(g,c)$ 像相同就有 $a \cong b$. 所以 c 的子对象类能嵌入 $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(g,c)$ 的幂集, 由**替换公理**得证. □

命题 4.25 (Baer 判别法)**.** *如 $\mathcal{A}$ 为 Grothendieck Abel 范畴, g 为其生成元, 则只要 $I \in \mathcal{A}$ 满足对 g 的任意子对象 h, 任意 $\varphi\colon h \to I$ 都能延拓至 $g \to I$, 就有 I 内射.*

证明. 要证明对 $a \in \mathcal{A}$ 及其子对象 b, 任意 $\varphi\colon b \to I$ 都能延拓至 $a \to I$. 为此考虑

$$S := \{(c,\psi) \mid b \subseteq c \subseteq a,\ \psi\colon c \to I,\ \psi|_b = \varphi\},$$

并取偏序 $(c,\psi) \le (c',\psi')$ 指 $c \subseteq c'$ 且 $\psi'|_c = \psi$. 由**引理 4.24** 知 S 构成偏序集, $(b,\varphi) \in S$ 故非空. 由 (AB5), S 中每条链并起来仍在 S, 所以由 **Zorn 引理**, S 有极大元 (c,ψ), 只需证 $c = a$. 用反证法. 如 $c \subsetneqq a$, 则由于 g 是生成元, 存在 $f\colon g \to a$ 不穿过 c.

取 $h = \mathrm{Ker}(g \to a \to a/c) = f^{-1}(c) \subsetneqq g$, 由条件 $\psi \circ f\colon h \to I$ 延拓为 $g \to I$. 这和 $\psi\colon c \to I$ 合起来给出 $\psi'\colon c' = c \sqcup_h g \to I$, 其中 $c \sqcup_h g$ 是 $c \leftarrow h \to g$ 的推出. 但 c 含入 a 的映射与 f 合起来又给出 $c' \hookrightarrow a$, 由**命题 4.14** $c \to c'$ 满当且仅当 $h \to g$ 满, 得 $c \subsetneqq c' \subseteq a$ 矛盾. □

定义 4.26. 一个 *Abel* 范畴**(有)足够内射**, 是指它的任意对象都能嵌入一个内射对象. 类似的, 一个 *Abel* 范畴**(有)足够投射**, 是指它的任意对象都能被一个投射对象满射.

定义 4.27. 一个基数 κ 是**正则基数**, 指任意少于 κ 个势小于 κ 的集合的并, 其势小于 κ. 或者等价的, 不存在极限序数 $\beta < \alpha$ 和严格增 $\{\alpha_\xi : \xi < \beta\}$ 使 $\sup\{\alpha_\xi : \xi < \beta\} = \alpha$

由 Baer 判别法能得到 Grothendieck Abel 范畴最重要的性质, 这由 Grothendieck 证明:

定理 4.28. *设 $\mathcal{A}$ 是 Grothendieck Abel 范畴, 则 $\mathcal{A}$ 有足够内射.*

证明. 设生成元 g. 由**引理 4.24**, g 所有子对象构成集合. 取正则基数 κ 大于该集合的势. 下对 $a \in \mathcal{A}$, 我们找内射对象 I 与单射 $a \to I$. 令 $a_0 = a$, 并对序数 i 归纳定义 a_i 如下: 当 i 为极限序数时为余极限 $a_i = \mathrm{colim}_{j<i} a_j$, 当 $i = j+1$ 为后继序数时为推出 $a_i = a_j \sqcup_{\bigoplus_{(h,\varphi)} h} \bigoplus_{(h,\varphi)} g$, 其中下标取遍集合 $\{(h,\varphi) \mid h \subseteq g,\ \varphi\colon h \to a_j\}$, 映射 $\bigoplus_{(h,\varphi)} h \to a_j$ 由每个 φ 合起来得到. 显然对每个序数 i 都有自然的映射 $a \to a_i$. 以下证明取 $I = a_\kappa$ 即为所求.

显然诸 $a_i \to a_{i+1}$ 都单. 由 (AB5) 得 $a \to I$ 也单. 由 **Baer 判别法**, 取 $h \subseteq g$ 及 $\varphi\colon h \to I$, 需构造延拓. 对每个序数 $i \le \kappa$, 视 a_i 为 I 的子对象, 记 $h_i = \varphi^{-1}(a_i)$, 则 $\{h_i\}_{i<\kappa}$ 是 h 的子对象族, 关于 i 递增. 由于 h 的子对象个数小于等于 g 的子对象个数从而小于 κ, 此递增族在 i 足够大时稳定, 即存在 $k < \kappa$, 对所有 $i \ge k$, $h_i = h_k$. 再由 (AB5) $\bigcup_{i<\kappa} h_i = \varphi^{-1}\left(\bigcup_{i<\kappa} a_i\right) = \varphi^{-1}(I) = h$, 故 $h = h_k$, 从而 φ 实则是 h 到 a_k 的映射. 那么由 a_{k+1} 的构造, φ 可延拓为 $g \to a_{k+1}$. 这样就证明了任意的 $\varphi\colon h \to I$ 都可延拓到 $g \to I$. □

推论 4.29. *Grothendieck Abel 范畴都有内射余生成元.*

证明. 取生成元 g. 令 $a=\bigoplus_{h\subseteq g} g/h$, 由**定理 4.28** 取 $a\hookrightarrow I$, I 内射, 下证 I 是余生成元, 即函子 $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(-,I)$ 忠实. 由于这正合, 要证它忠实, 只需证它把非零对象打到非零对象. 取非零的 $b\in\mathcal{A}$. 则由于 g 是生成元, 存在非零映射 $g\to b$, 即存在 $h\subsetneqq g$ 使得 $g/h\hookrightarrow b$. 由 I 的构造, 存在 $g/h\to I$ 的非零映射, 于是由内射即知存在 $b\to I$ 的非零映射. □

注 4.30. 因为正合, 所以保护核与余核, 所以将像映到像. 结合已经证明的非零对象映到非零对象, 这得出只有零映射使函子作用后映射的像是零对象, 因此得到函子的忠实性.

后文 **Freyd–Mitchell 嵌入定理**中我们只需要 Grothendieck Abel 范畴有内射余生成元且完备, 不过在具体的情形, 极限可以直接构造出来, 因此本节下面的内容在初次阅读时可略过.

定义 4.31. 给一个小的指标范畴 $\mathcal{J}$ 与范畴 $\mathcal{C}$, 我们用 $\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ 表示**函子范畴**, 元素是 $\mathcal{J}\to\mathcal{C}$ 的函子, 态射是自然变换. **对角函子**是 $\mathcal{C}\to\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ 的函子, 将 $a\in\mathcal{C}$ 打到常图表 Δ_a, 也就是一个 $\mathcal{J}$ 对象都打到 a, 态射都打到 id_a 的函子.

定义 4.32. 下面数个概念涉及的 κ 都是正则序数.

- 一个**κ-滤**的余极限, 说的是指标图表中小于 κ 个对象都能打到一个共同对象, 从一个对象出发的小于 κ 个箭头都能再打到一个对象使复合后相同. ω-滤即一般的滤.
- 一个**κ-紧**的对象指一个 $c\in\mathcal{C}$ 使 $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(c,-)$ 与 κ-滤的余极限交换.
- 一个范畴是**κ-可达**的指它存在所有 κ-滤的余极限, 而且存在一个 κ-紧的对象构成的集合, 使得用这些对象的 κ-滤余极限能生成所有对象.
- 一个范畴是**可表现**的指存在 κ 使其 κ-可达, 而且余完备.

命题 4.33. *Grothendieck Abel 范畴都是可表现范畴. 从而它们都完备 (即小的极限存在).*

证明. 设 $\mathcal{A}$ 生成元 g. 依定义 $\mathcal{A}$ 余完备, 故只需证存在小的满子范畴 $\mathcal{A}_0$ 使得 $\mathcal{A}$ 中每个对象都是一些 $\mathcal{A}_0$ 中的对象的余极限. 事实上取 $\mathcal{A}_0$ 为 g^n 的商对象, n 取遍自然数, 生成的子范畴, 即足. 由于 $\mathcal{A}$ 中每个对象的所有子对象都构成集合, 故商对象亦然. 又由可数个集合的并仍是集合, 即得 $\mathcal{A}_0$ 小. 由构造以及 g 是生成元易得对每个 $a\in\mathcal{A}$ 都有 $a=\mathrm{colim}_{\mathcal{A}_0\ni a_0\subseteq a}\, a_0$. □

注 4.34. 最后由于 (AB5) $\mathrm{colim}\, a_0\hookrightarrow a$ 是嵌入, 其次保证是整个 a 只需要 $\mathcal{A}_0$ 包含 g 的所有商, 而添加 g 的幂次是为保证滤过, 其原理类似于模都是有限生成子模的滤余极限. 为证 $\mathrm{colim}\, a_0=a$, 考虑 $g\to a$ 的任意映射, 考虑像分解, 得如下交换图表:

$$\begin{tikzcd}
g \arrow[r, two heads] & \mathrm{Im}(g\to a) \arrow[dl, dashed] \arrow[d, hook] \\
\mathrm{colim}\, a_0 \arrow[r] & a
\end{tikzcd}$$

于是 $g \to a$ 的每个映射都穿过 $\operatorname{colim} a_0$, 从而二者相同.

接下来为了证明完备, 我们可以将对一个图表取极限看作 $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{I}}$ 对角函子的右伴随, 然后使用伴随函子定理的右伴随版本**定理 4.36**. 读者不难验证对角函子保持余极限.

定义 4.35. 对范畴 $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$, 函子 $P:\mathcal{A}\to\mathcal{C}$, $Q:\mathcal{B}\to\mathcal{C}$, **逗号范畴** (P,Q) 中的对象形如三元组 $(a,h,b), a\in\mathcal{A}, b\in\mathcal{B}, h\in\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(Pa,Qb)$. 而态射形如二元组 $(f,g):(a,h,b)\to(a',h',b')$, 其中 $f\in\operatorname{Mor}_{\mathcal{A}}(a,a'), g\in\operatorname{Mor}_{\mathcal{B}}(b,b')$ 满足自然的图表交换:

$$\begin{tikzcd} Pa \arrow[r, "h"] \arrow[d, "Pf"'] & Qb \arrow[d, "Qg"] \\ Pa' \arrow[r, "h'"'] & Qb' \end{tikzcd} .$$

> **定理 4.36** (右伴随)**.** 可表现范畴 $\mathcal{C}$ 到范畴 $\mathcal{D}$ 的函子有右伴随当且仅当保持余极限.

证明. 有右伴随保持余极限是容易的, 反过来保持余极限下证有伴随. 设正则基数 κ 使 $\mathcal{C}$ 由 κ-紧的子集 $\mathcal{C}^{\kappa}$ 生成, 定义函子 $G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$（读者检查如下定义的函子性）为

$$Gd := \operatorname*{colim}_{(x,g)\in\mathcal{E}} x,$$

其中 $\mathcal{E}=\{(x,g): x\in\mathcal{C}^{\kappa}, g: Fx\to d\}$ 为逗号范畴 $(F,\bullet\to d)$. 由于 $\mathcal{C}$ 由 $\mathcal{C}^{\kappa}$ 生成, 且 F 保持余极限, 只需证对 $c\in\mathcal{C}^{\kappa}$, $\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(c,Gd)=\operatorname{Mor}_{\mathcal{D}}(Fc,d)$. 因为 $\mathcal{E}$ 是 κ 滤的, 故

$$\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(c,Gd) = \operatorname*{colim}_{(x,g)\in\mathcal{E}} \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(c,x) = \operatorname{Mor}_{\mathcal{D}}(Fc,d).$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "F"] & Fx \arrow[dr, "g"] & \\ c \arrow[u, "f"] \arrow[r, "F"'] \arrow[loop left, "\mathrm{id}_c"] & Fc \arrow[u, "Ff"] \arrow[r, "\operatorname{colim}"'] & d \end{tikzcd}$$

最后一个等号因为 $(x,g)\in\mathcal{E}$ 上的 $f\in\operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(c,x)$ 都是 $(c,g\circ Ff)$ 上的 id_c 沿 f 的像. □

4.1.4 景（Sites）、景上的预层和层、层化（Sheafification）

我们首先将覆盖和层的概念推广到更加一般的情形.

定义 4.37. 一个范畴 $\mathcal{C}$ 上的**景**是一个二元组 $(\mathcal{C},\operatorname{Cov}(\mathcal{C}))$, 后者是一个类, 元素形如

$$\{U_i\to U\}_{i\in\mathscr{I}},\ U_i,U\in\operatorname{Ob}(\mathcal{C}).$$

其中 $\mathscr{I}$ 是集合. $\operatorname{Cov}(\mathcal{C})$ 满足以下三条件, 称**恒同**, **加细**和**纤维积**:

(1) 若 $V\to U$ 是 $\mathcal{C}$ 中的同构, 则 $\{V\to U\}\in\operatorname{Cov}(\mathcal{C})$.

(2) 若 $\{U_i \to U\}_{i\in\mathscr{I}}, \{U_{ij} \to U_i\}_{j\in\mathscr{J}_i} \in \mathrm{Cov}(\mathcal{C})$, 则 $\{U_{ij} \to U\}_{i\in\mathscr{I}, j\in\mathscr{J}_i} \in \mathrm{Cov}(\mathcal{C})$.

(3) 对 $\{U_i \to U\}_{i\in\mathscr{I}} \in \mathrm{Cov}(\mathcal{C})$ 和任意 $V \to U$, $U_i \times_U V$ 存在且 $\{U_i \times_U V \to V\}_{i\in\mathscr{I}} \in \mathrm{Cov}(\mathcal{C})$.

景上的**预层**是指其作为范畴的预层, 而一个景上的**层**是指一个预层 $\mathcal{F}$ 满足:

对任意 $\{U_i \to U\}_{i\in\mathscr{I}} \in \mathrm{Cov}(\mathcal{C})$, 若一族 $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ 对一切 $i, j \in \mathscr{I}$ 都有 $s_i|_{U_i\times_U U_j} = s_j|_{U_i\times_U U_j}$, 则存在唯一 $s \in \mathcal{F}(U)$ 使 $s|_{U_i} = s_i$. 一个景 $\mathcal{C}$ 上的 *Abel* 群层记 $\mathsf{Sh}(\mathcal{C})$ 或 $\mathsf{Sh}_{\mathsf{Ab}}(\mathcal{C})$.

换言之, 我们用 Cov 抽象地记录一些被刻意规定的"覆盖"关系. 并且将对应的层条件改为检查这些"覆盖"下的"粘接", 交集则对应为纤维积, 这条件也能像**定义 3.3** 一样拆成两条.

例 4.38. 考虑 *Abel* 范畴 $\mathcal{C}$ 中这样定义 $\mathrm{Cov}(\mathcal{C}) := \{\{V \to U \text{ 是满射}\}\}_{U,V\in\mathcal{C}}$, 可检查是景: 同构显然满, 满射的复合也满, 纤维积一则由**推论 4.15** 保证.

接下来我们研究一个景上预层的层化, 其实是在研究 0 阶的 Čech 上同调群, 这是很不平凡的.

定义 4.39. 对景 $\mathcal{C}$ 上的预层 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{U} = \{U_i \to U\}_{i\in\mathscr{I}} \in \mathrm{Cov}(\mathcal{C})$, 记

$$H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \left\{ (s_i)_{i\in\mathscr{I}} \in \prod_{i\in\mathscr{I}} \mathcal{F}(U_i) : s_i|_{U_i\times_U U_j} = s_j|_{U_i\times_U U_j}, \forall i, j \in \mathscr{I} \right\}.$$

我们有典范的 $\mathcal{F}(U) \to H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. 同时对**覆盖间的态射** $\alpha : \mathcal{U}_{\mathscr{I}} \to \mathcal{V}_{\mathscr{J}}$, 即一个指标集间的映射 $\alpha : \mathscr{I} \to \mathscr{J}$, 使左下的图表交换, 而这自然导出中间的交换图进而导出右边者:

$$\begin{tikzcd} U_i \arrow[r] \arrow[d] & V_{\alpha(i)} \arrow[d] \\ U \arrow[r] & V \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} & U_i \arrow[rr] & & V_{\alpha(i)} \\ U_i \times_U U_j \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr] & & V_{\alpha(i)} \times_V V_{\alpha(j)} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & U_j \arrow[rr] & & V_{\alpha(j)} \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}(V) \arrow[d] \\ H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \arrow[r] & H^0(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \end{tikzcd}.$$

预层 $\mathcal{F}$ 是层当且仅当对一切 $\mathcal{U} \in \mathrm{Cov}(\mathcal{C})$, $\mathcal{F}(U) \to H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ 的自然映射是同构.

习题 4.40. 在 $\mathsf{PSh}(\mathcal{C})$ 极限和余极限只需在诸截面上取 AbGrp 对应者.

特别的, 因为 AbGrp 的极限和滤余极限存在, 故 $\mathsf{PSh}(\mathcal{C})$ 的极限和滤余极限存在.

定义 4.41. 再用 $\mathcal{J}_U$ 记 U 的所有覆盖为对象, 覆盖的加细为态射构成的范畴. 由于 $U \mapsto H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ 是 $\mathcal{J}_U$ 上的反变函子, 定义

$$\mathcal{F}^+(U) := \operatorname*{colim}_{\mathcal{J}_U^{\mathrm{op}}} H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

习题 4.42. 对任意覆盖 $\{U_i \to U\}_{i\in\mathscr{I}}, \{V_j \to U\}_{j\in\mathscr{J}}$, $\{U_i \times_U V_j \to U\}_{i\in\mathscr{I}, j\in\mathscr{J}}$ 是公共的细分, 因此上余极限是滤的. 作为推论 $\mathcal{F}^+$ 存在.

命题 4.43. 我们有 $\{\mathcal{F}^+(U)\}_U$ 上自然的预层结构, 还有预层间自然的态射 $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$, 而且 $-^+ : \mathsf{PSh}(\mathcal{C}) \to \mathsf{PSh}(\mathcal{C})$ 是一个函子, 亦即我们有如下交换图表:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[rr, bend left] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H} \arrow[d] \\
\mathcal{F}^+ \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & \mathcal{G}^+ \arrow[r] & \mathcal{H}^+
\end{tikzcd}.$$

证明. 我们将证明分成以下步骤:

- 对 $V \to U$ 于 $\mathcal{C}$, 由景定义有 $\mathcal{J}_U \to \mathcal{J}_V$ 的自然函子 $\{U_i \to U\} \mapsto \{U_i \times_U V \to V\}$. 于是得函子性的 $H^0(\{U_i \to U\}, \mathcal{F}) \to H^0(\{U_i \times_U V \to V\}, \mathcal{F})$, 准确地说 $H^0(-, \mathcal{F}) : \mathcal{J}_U^{\mathrm{op}} \to \mathsf{AbGrp}$ 经由 $V \to U$ 成为 $H^0(-, \mathcal{F}) : \mathcal{J}_V^{\mathrm{op}} \to \mathsf{AbGrp}$, 由余极限定义得函子性的、典范的 $\mathcal{F}^+(U) \to \mathcal{F}^+(V)$:

$$(s_i) \in H^0(\{U_i \to U\}, \mathcal{F}) \mapsto (s_i|_{V \times_U U_i}) \in H^0(\{U_i \times_U V \to V\}, \mathcal{F}).$$

- 上面从 $V \to U$ 具体构造了 $\mathcal{F}^+(U) \to \mathcal{F}^+(V)$, 而且检查了预层结构. 为了检查 $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ 是预层态射, 注意到对 $W \to V \to U$ 和 $\{U_i \to U\}$ 有典范的 $W \times_U U_i \cong W \times_V (V \times_U U_i)$. 而且对 $(s_i) \in H^0(\{U_i \to U\}, \mathcal{F})$, $s_i|_{W \times_U U_i}$ 自然对应到 $(s_i|_{V \times_U U_i})|_{W \times_V (V \times_U U_i)}$.
- 最后函子性的交换图表只需在每个截面上检查, 没有实质困难. □

引理 4.44. 设 $f, g : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ 是两个覆盖间的态射.
若对应 $U \to V$ 相同, 则其诱导相同的 $H^0(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \to H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

证明. 记 $\{U_i \to U\}_{i \in \mathscr{I}}; \{V_j \to V\}_{j \in \mathscr{J}}; f, g : U \to V; \alpha, \beta : \mathscr{I} \to \mathscr{J}$, 考虑交换图表:

$$\begin{tikzcd}
 & V_{\alpha(i)} \arrow[dr] & \\
U_i \arrow[ur, "f_i"] \arrow[r] \arrow[dr, "g_i"'] & U \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & V \\
 & V_{\beta(i)} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & & V_{\alpha(i)} \arrow[dr] & \\
U_i \arrow[urr, bend left, "f_i"] \arrow[r, "\varphi"] \arrow[drr, bend right, "g_i"'] & V_{\alpha(i)} \times_V V_{\beta(i)} \arrow[ur, "p_f"'] \arrow[dr, "p_g"] & & V \\
 & & V_{\beta(i)} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

于是对 $(s_j)_j \in H^0(\mathcal{V}, \mathcal{F})$, 考察对任意 $i \in \mathscr{I}$ 总有

$$(f^* s)_i = f_i^*(s_{\alpha(i)}) = \varphi^* p_f^*(s_{\alpha(i)}) = \varphi^* p_g^*(s_{\beta(i)}) = g_i^*(s_{\beta(i)}) = (g^* s)_i.$$

最中间的恒等式由 $H^0(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ 的定义保证, 引理得证. □

引理 4.45. 映射 $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ 满足对一切 $U \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 和 $s \in \mathcal{F}^+(U)$,
存在覆盖 $\{U_i \to U\}_i$ 满足对任意 i, $s|_{U_i}$ 都在像 $\theta(\mathcal{F}(U_i))$ 中.

证明. 假设 s 从 $(s_i) \in H^0(\{U_i \to U\}, \mathcal{F})$ 得到, 由**引理 4.44** 考虑 $\{U_i \to U_i\} \to \{U_i \to U\}_i$ 是两个覆盖间的态射来计算拉回, 显然 $\theta(s_i) = s|_{U_i}$. □

定义 4.46. 景 $\mathcal{C}$ 上的预层 $\mathcal{F}$ 称**分离的**, 指对一切覆盖 $\{U_i \to U\}_i$ 有 $\mathcal{F}(U) \to \prod_i \mathcal{F}(U_i)$ 单.

命题 4.47. (1) $\mathcal{F}^+$ 分离. (2) 若 $\mathcal{F}$ 分离则 $\mathcal{F}^+$ 是层且 $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ 作为预层映射是单的（显然这等价于在每个截面都是单的）. (3) 若 $\mathcal{F}$ 是层, 则 $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ 是同构.

证明. (1) 考虑 $s, s' \in \mathcal{F}^+(U)$ 与覆盖 $\{U_i \to U\}_i$ 使 $s|_{U_i} = s'|_{U_i}$ 对一切 i. **引理 4.45** 保证对 s, s' 有符合引理结论的覆盖 $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$. 现由**习题 4.42** 找 $\{U_i \to U\}_i, \mathcal{U}, \mathcal{U}'$ 的公共细分 $\{W_j \to U\}$, 于是存在 $s_j, s'_j \in \mathcal{F}(W_j)$ 使 $\theta(s_j) = s|_{W_j} = s'|_{W_j} = \theta(s'_j)$, 再由**引理 4.45** 知 s_j, s'_j 又在 W_j 的某细分的每个截面上相等, 由此 s, s' 在某 $H^0(\{W_{jk} \to U\}, \mathcal{F})$ 中的像相同, $s = s'$.
(2) $\mathcal{F}$ 分离时, 显然 $\mathcal{F}(U) \hookrightarrow H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ 继而 $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}^+$ 也是单射, 同时对任意细分 $\mathcal{U} \to \mathcal{U}'$, $H^0(\mathcal{U}', \mathcal{F}) \hookrightarrow H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ 是单射. 现在对覆盖 $\{U_i \to U\}_i$ 以及 (s_i) 为 $\mathcal{F}^+(U_i)$ 中一族满足层条件 $s_i|_{U_i \times_U U_j} = s_j|_{U_i \times_U U_j}$ 者. 由**引理 4.45** 取 $\{U_{ij} \to U_i\}$ 使 $s_i|_{U_{ij}}$ 是（唯一的）$s_{ij} \in \mathcal{F}(U_{ij})$ 者的像, 层条件说明 $s_{ij}, s_{i'j'}$ 限制在 $U_{ij} \times_U U_{i'j'}$ 相同, 因此 $(s_{ij}) \in H^0(\{U_{ij} \to U\}, \mathcal{F})$ 对应某（唯一的）$s \in \mathcal{F}^+(U)$, 容易检查 $s|_{U_i} = s_i$. 于是在任意 U 截面上是单射.
(3) 注意到层条件等价于对任意 $\mathcal{U}$, $\mathcal{F} \to H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ 是同构. □

定义 4.48. 景 $\mathcal{C}$ 上的预层 $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^\# = \mathcal{F}^{\mathrm{sh}} = \mathcal{F}^{++}$ 的自然映射称 $\mathcal{F}$ 的**层化**.

推论 4.49. $\mathcal{F}^{\mathrm{sh}}$ 是层, 层化是 $\mathsf{PSh} \to \mathsf{Sh}$ 的函子, 且具有如下泛性质: 对预层 $\mathcal{F}$ 和层 $\mathcal{G}$, 任意预层态射 $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 都唯一穿过 $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^{\mathrm{sh}}$. 层化是嵌入 $i : \mathsf{Sh} \to \mathsf{PSh}$ 的左伴随.

证明. **命题 4.47(1)(2)** 保证 $\mathcal{F}^{\mathrm{sh}}$ 是层, **命题 4.43** 知 $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ 是函子结合 Sh 是 PSh 的满子范畴保证作用两次还是函子, 最后泛性质由左下的交换图表保证:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}^+ \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}^{++} \arrow[d] \\ \mathcal{G} \arrow[r] & \mathcal{G}^+ \arrow[r] & \mathcal{G}^{++} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}^{\mathrm{sh}} \arrow[dl, dashed, "\exists!"] \\ \mathcal{G} & \end{tikzcd} \qquad \mathrm{Mor}_{\mathsf{PSh}(\mathcal{C})}(\mathcal{F}, i\mathcal{G}) = \mathrm{Mor}_{\mathsf{Sh}(\mathcal{C})}(\mathcal{F}^{\mathrm{sh}}, \mathcal{G}).$$

其中**命题 4.47(3)** 保证了 $\mathcal{G} = \mathcal{G}^{++}$, 而泛性质直接推出左伴随者, 结论得证. □

习题 4.50. 在 $\mathsf{Sh}(\mathcal{C})$ 极限存在且等于在景上预层范畴中的极限. 而 $\mathsf{Sh}(\mathcal{C})$ 余极限等于预层范畴中余极限的层化, 滤余极限存在. 前者注意层忘却成预层是右伴随保持极限, 后者注意层化是左伴随保持余极限. 这体现了用伴随函子观察问题的好处.

命题 4.51. 层化 $-^{\mathrm{sh}} : \mathsf{PSh}(\mathcal{C}) \to \mathsf{Sh}(\mathcal{C})$, $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^{\mathrm{sh}}$ 是正合函子.

证明. **推论 4.49** 知左伴随进而右正合, 要证左正合, 注意 AbGrp 中滤余极限和有限极限交换, 故 $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^{+}$ 和 $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^{\mathrm{sh}}$ 与有限极限交换. 注意取 Ker 是有限极限, 因此层化保单射. □

引理 4.52. $\mathcal{C}$ 是景, $\mathcal{F}$ 是其上预层, 记 $\theta^2 : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^{\mathrm{sh}}$ 是层化. 对一切 $U \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 和 $s \in \mathcal{F}^{\mathrm{sh}}(U)$, 存在覆盖 $\{U_i \to U\}_i$ 使得对一切 i 有 $s|_{U_i} = \theta^2(s_i)$ 而且对任意 i, j 存在覆盖 $\{U_{ijk} \to U_i \times_U U_j\}$ 使 s_i, s_j 的拉回在每个 U_{ijk} 上相同.

证明. 由**引理 4.45** 方法和层的性质立得. □

推论 4.53. 对小范畴的景 $\mathcal{C}$, $\mathsf{Sh}(\mathcal{C})$ 是 *Grothendieck Abel* 范畴.

证明. 由**习题 4.50** 只需说明滤余极限正合且存在生成元. 前者是因为滤余极限正合在 AbGrp 上成立而且预层范畴的余极限是逐截面构造的, 结合层化正合而得. 最后生成元的构造, 考察对每个 $U \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 并定义预层 $\mathcal{F}_U$ 在 U 的子对象上取 $\mathbb{Z}$, 其余地方取 0, $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ 的限制映射取成恒同. 现在记 $\mathcal{G} = \left(\bigoplus_{U \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathcal{F}_U^{\mathrm{sh}}\right)^{\mathrm{sh}}$. 下证明 $\mathcal{G}$ 是生成元. 我们计算

$$\mathrm{Mor}_{\mathsf{Sh}(\mathcal{C})}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) = \mathrm{Mor}_{\mathsf{PSh}(\mathcal{C})}\left(\bigoplus_{U \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathcal{F}_U^{\mathrm{sh}}, \mathcal{H}\right) = \prod_{U \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathrm{Mor}_{\mathsf{PSh}(\mathcal{C})}(\mathcal{F}_U, \mathcal{H}) \cong \prod_{U \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathcal{H}(U).$$

这表明它把非零对象打到非零对象, 结论得证. □

现在我们确认景上的预层、层和层化与在 **3.1 层与局部环化空间**中定义者“感觉”相似. 实际上将景取成拓扑上开子集在包含下的范畴, 覆盖为开覆盖, 纤维积变成交即与原定义等价.

4.1.5 Freyd–Mitchell 嵌入定理

为说明可在 Abel 范畴追图时真实地使用元素, 本小节的目的是证明如下定理:

定理 4.54 (Freyd–Mitchell)**.** $\mathcal{A}$ 是一个 *Abel* 小范畴, 则存在环 **(这里含幺但不一定交换)** R 和一个正合的、满忠实的函子 $i : \mathcal{A} \to \mathsf{Mod}_R$ 使得 $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(M, N) \cong \mathrm{Hom}_R(iM, iN)$.

引理 4.55. 设余完备且有投射生成元的 *Abel* 范畴 $\mathcal{A}$ 有一个满 *Abel* 子范畴 $\mathcal{C}$, 且 $\mathcal{C}$ 是小范畴, 则 $\mathcal{C}$ 可满忠实、正合地嵌入某环 R 的模范畴 Mod_R 中.

证明. 设 $\mathcal{A}$ 的投射生成元 Q, 由余完备, 我们能取 $P = \bigoplus_{c \in \mathcal{C}} Q^{\oplus \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(Q,c)}$, 则 P 也是投射生成元且有满射 $\gamma : P \to \bigoplus_{c \in \mathcal{C}} c$, 这是因为 $G : Q^{\oplus \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(Q,c)} \to c$ 是满射: 对 $f_1, f_2 : c \to d$, $f_1 G = f_2 G$ 等价于对一切 $g : Q \to c$ 有 $f_1 g = f_2 g$, 由于忠实性 $f_1 \circ - = f_2 \circ - : \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(Q, c) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(Q, d)$

保证 $f_1 = f_2$ 而得证. 记 $R = \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(P)$, 对 $a \in \mathcal{A}$, R 复合右作用在 $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(P, a)$ 上而得到 R-模作用, 下面需要证明正合的 $H = \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(P, -) : \mathcal{C} \to \mathsf{Mod}_R$ 是满忠实的.
首先由于 $\gamma_c : P \to c$ 对每个 $c \in \mathcal{C}$ 是满射, 故 $0 \neq f : c \to d$ 推出 $0 \neq H(f)(\gamma_c) = f\gamma_c$, 因此 H 忠实. 为证明 H 满, 需对 $\varphi : Hc \to Hd$ 找到 $f : c \to d$ 使 $Hf = \varphi$. 只需证明 $\varphi(\gamma_c) \in Hd$ 是某个 $f \circ \gamma_c$, 而由 P 投射, 一般的 $h \in Hc$ 都来自某个 $P \to P$ 复合 γ_c.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(P,c) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(P,d) \arrow[d, equal] \\ Hc \arrow[r, dashed, "\exists Hf"] & Hd \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P \arrow[r, "h"] \arrow[dr, dashed, "\exists"'] & c \arrow[r, dashed, "\exists f"] & d \\ & P \arrow[u, "\gamma_c"] \arrow[ur, "\varphi(\gamma_c)"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\,\gamma_c \arrow[r] \arrow[dr, "0"'] & P \arrow[r, "\gamma_c"] \arrow[d, "\varphi(\gamma_c)"] & c \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\exists f"] & 0 \\ & & d & & \end{tikzcd}$$

现在考虑 R 的右理想 $I = \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(P, \mathrm{Ker}\,\gamma_c)$, 那么 $\gamma_c I = 0$, 由于 φ 是同态故 $\varphi(\gamma_c)I = 0$. 利用 P 是生成元, 方才的 $P \to \mathrm{Ker}\,\gamma_c \hookrightarrow P \to d$ 是零映射推出 $\mathrm{Ker}\,\gamma_c \hookrightarrow P \to d$ 是零映射, 从而由 Coker 的万有性质得出 f 的存在性, 结论得证. □

F–M 的证明. 首先我们知道 $\mathrm{Cov}(\mathcal{C}) := \{\{V \to U \text{ 是满射}\}_{U,V\in\mathcal{C}}$ 是景, 注意被 c 表出的 $h_c = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(-, c)$ 左正合, 这表明 $V \to U \to 0$ 被映到 $0 \to h_c(U) \to h_c(V)$, 因此预层 h_c 是层. 现在对应的 Yoneda 嵌入 $h : \mathcal{C} \to \mathsf{Sh}(\mathcal{C})$ 是满忠实的, 我们检查 h 正合. 首先 h 左正合, 因为对每个 $U \in \mathcal{C}$, $0 \to a \to b \to c$ 正合推出 $0 \to h_a(U) \to h_b(U) \to h_c(U)$ 正合, 因此核层等于像层. 为了检查 h 右正合, 只需对正合 $c \to d \to 0$ 验证 $h_c \to h_d \to 0$ 正合, 由**引理 4.52** 也就对任意 $U \in \mathcal{C}, f \in h_d(U)$ 证明存在 $V \to U$ 的满射使 f 拉回 V 后来自 $h_c(V) \to h_d(V)$. 这只需取 $V = c \times_d U$, 于是 f 来自 g. 我们将 $\mathcal{C}$ 满忠实、正合地嵌入了 $\mathsf{Sh}(\mathcal{C})$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & a \arrow[r] & b \arrow[r] & c \\ 0 \arrow[r] & h_a(U) \arrow[r] & h_b(U) \arrow[r] & h_c(U) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} c \times_d U = V \arrow[r, two heads] \arrow[d, "g"] & U \arrow[d, "f"] \\ c \arrow[r, two heads] & d \end{tikzcd}$$

由**推论 4.53** 知 $\mathsf{Sh}(\mathcal{C})$ 是 Grothendieck Abel 范畴, 它完备, 且有内射余生成元, **引理 4.55** 需要的条件正是余完备且有投射生成元, 取对偶从而嵌入 ${}_R\mathsf{Mod}$, 定理证明完成. □

4.1.6 应用: 只是为了不想用映射而是用元素在 Abel 范畴中追图

我们已经声明过证明 Freyd–Mitchell 正是为了在追图时放心大胆地用元素, 尽管经过前面一番讨论和证明, 读者 (大概?) 习惯了在一般的范畴语境下思考问题, 用一般的语言讨论问题而不是使用元素偷懒. 尽管如此, 使用元素追图证明下面这几个经典的同调代数习题时还是有独到的优势. 所以本小节的模都指某不交换含幺环 R 的左模.

定理 4.56 (蛇引理). 模正合列 $A \to B \to C \to 0$ 与 $0 \to A' \to B' \to C'$ 使左图表交换, 则有右图表交换且 $\operatorname{Ker} a \to \operatorname{Ker} b \to \operatorname{Ker} c \to \operatorname{Coker} a \to \operatorname{Coker} b \to \operatorname{Coker} c$ 正合.

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "c"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"'] & B' \arrow[r, "g'"'] & C'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Ker} a \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker} b \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker} c \arrow[d] \arrow[ddddll, rounded corners, "\delta"] & \\
 & A \arrow[r, "f"] \arrow[dd, "a"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[dd, "b"] & C \arrow[r] \arrow[dd, "c"] & 0 \\
 & & & & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"'] \arrow[d] & B' \arrow[r, "g'"'] \arrow[d] & C' \arrow[d] & \\
 & \operatorname{Coker} a \arrow[r] & \operatorname{Coker} b \arrow[r] & \operatorname{Coker} c &
\end{tikzcd}$$

其中**边缘映射** $\delta : \operatorname{Ker} c \to \operatorname{Coker} a$ 这样定义, 对 $z \in \operatorname{Ker} c \subset C$ 设 $z = g(y), y \in B$, 因 $c(z) = cg(y) = g'b(y) = 0$, 故 $b(y) = f'(x'), x' \in A'$, 令 $\delta(z)$ 为 x' 在 $\operatorname{Coker} a$ 的像.

证明. 首先图表的交换性由 $\operatorname{Ker} b, \operatorname{Ker} c, \operatorname{Coker} a, \operatorname{Coker} b$ 的泛性质带来. 边缘映射良定, 只需考虑 $0 \in C$, 需证 $\delta(0)$ 只能定义作 0, 而后利用线性. 设 $0 = g(y)$, 由正合有 $y = f(x)$, 再由 $f'(x') = bf(x) = f'(a(x))$ 与 f' 单得 $x' = a(x)$ 从而在 $\operatorname{Coker} a$ 的像只能为 0. 我们检查 $\operatorname{Ker} b, \operatorname{Ker} c$ 的正合性, 其余二者类似. 前者缘于其间映射由 f, g 诱导, 且 $y \in \operatorname{Ker} b$ 使 $g(y) = 0$ 则 $y = f(x)$, 故 $b(y) = bf(x) = f'a(x) = 0$ 得 $a(x) = 0$. 后者先注意 $z = g(y), y \in \operatorname{Ker} b$ 在边缘映射定义时可令 $x' = 0$ 从而 $\delta(z) = 0$, 反过来 $\delta(z) = 0$ 说明定义时取的 $x' = a(x)$, 故 $f'(x') = f'a(x) = bf(x) = b(y)$ 从而 $y - f(x) \in \operatorname{Ker} b$ 故 $z = g(y - f(x))$. 结论得证. □

注 4.57. 在关乎边缘映射 δ 具体构造的场景, 需说明 δ 的构造是典范的, 即与嵌入的 R-模选取无关, 注意如下交换图, 左半边基本就是按元素定义边缘映射:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[d, "b"'] & B \times_C \operatorname{Ker}(c) \arrow[l] \arrow[r, two heads] & \operatorname{Ker}(c) \arrow[d, dashed, "\delta"] \\
B' \arrow[r] & \operatorname{Coker}(a) \coprod_A B & \operatorname{Coker}(a) \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

由像的泛性质, 满性和单性, 见**命题 4.7** 过程, 使图表交换的 δ 唯一且正如我们的构造.

另外蛇引理是函子性的, 换言之两个蛇引理图表间六个元素到另六个元素的一族相容映射, 将诱导蛇引理结论中六项正合列间的相容映射（含边缘映射）, 且具有函子性.

定理 4.58 (四引理)**.** 假设 $A\to B\to C\to D$ 和 $A'\to B'\to C'\to D'$ 正合且下图交换:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & D \arrow[d, "\delta"'] \\ A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \end{tikzcd}.$$

(1) 若 α,γ 满, δ 单则 β 满. (2) 若 β,δ 单, α 满则 γ 单.

证明. 只证 (1), 注意 α 满 δ 单故可以用 $\mathrm{Im}(A'\to B')$ 代替 A', 用 $\mathrm{Im}(C\to D)$ 代替 D. 注意:

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Ker}(C\to D) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & D \arrow[r] \arrow[d, "\delta"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(C'\to D') \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' & \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & \mathrm{Ker}(C\to D) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde\beta"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & \mathrm{Ker}(C'\to D') & \end{tikzcd}.$$

读者不难检查两个图表行正合而且交换, 于是分别用**蛇引理**, 左图 δ 单和 γ 满告诉我们 $\tilde\beta$ 满, 右图 α 和 $\tilde\beta$ 满告诉我们 β 满, 结论得证. □

推论 4.59 (五引理)**.** 如下交换图表中, 两行都是正合列.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & D \arrow[r] \arrow[d, "\delta"'] & E \arrow[d, "\epsilon"'] \\ A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E' \end{tikzcd}$$

而且 β,δ 是同构, α 满, ϵ 单. 则 γ 是同构.

4.2 基础知识: 长正合列、导出函子 (Derived Functors)

4.2.1 δ 函子和长正合列 (Long Exact Sequence)

定义 4.60. 一个同调 (resp. 上同调)δ-函子指两个 *Abel* 范畴 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 间的一族加性协变函子 $\{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ (resp.$\{T^n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$), 补充定义 $n<0$ 时 T_n, T^n 为 0. 满足对 $\mathcal{A}$ 中任意正合列 $0\to A\to B\to C\to 0$, 存在一族 $\delta_n : T_n(C)\to T_{n-1}(A)$ (resp.$\delta^n : T^n(C)\to T^{n+1}(A)$). 满足:

(1) $$\cdots \longrightarrow T_{n+1}(C) \xrightarrow{\delta} T_n(A) \longrightarrow T_n(B) \longrightarrow T_n(C) \xrightarrow{\delta} T_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots,$$

resp. $$\cdots \longrightarrow T^{n-1}(C) \xrightarrow{\delta} T^n(A) \longrightarrow T^n(B) \longrightarrow T^n(C) \xrightarrow{\delta} T^{n+1}(A) \longrightarrow \cdots,$$

为长正合列. 特别的, 立刻看出 T_0 (resp.T^0) 是右 (resp. 左) 正合函子.

(2) 对两个正合列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 和 $0 \to A' \to B' \to C' \to 0$ 间的映射, 即

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0, \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

有交换图表

$$\begin{tikzcd} T_n(C) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & T_{n-1}(A) \arrow[d] \\ T_n(C') \arrow[r, "\delta"'] & T_{n-1}(A') \end{tikzcd} , \qquad \text{resp. } \begin{tikzcd} T^n(C) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & T^{n+1}(A) \arrow[d] \\ T^n(C') \arrow[r, "\delta"'] & T^{n+1}(A') \end{tikzcd} .$$

我们把 δ-函子的信息简记为 $(T_n, \delta_n) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ (resp.$(T^n, \delta^n) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$).
类似的, 对反变函子则是自然将 (1) 中长正合列中的箭头反过来定义的.

这个看似复杂的定义实则来自于从短正合列推出长正合列的普遍观察.

例 4.61. 取同调群 $H_\bullet = \{H_n = \mathrm{Ker}(A_n \to A_{n-1}) / \mathrm{Im}(A_{n+1} \to A_n)\}$ 为范畴态射 $\mathsf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ 自然的同调 δ-函子. 其中 $\mathsf{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{A})$ 指 $\mathcal{A}$ 中的降链复形 $\cdots \to A_2 \to A_1 \to A_0$ 为对象, 链映射为态射的 *Abel* 范畴（读者检查）. 对 $0 \to A_\bullet \to B_\bullet \to C_\bullet \to 0$, 对图表

$$\begin{tikzcd} & A_i / \mathrm{Im}(A_{i+1} \to A_i) \arrow[r] \arrow[d] & B_i / \mathrm{Im}(B_{i+1} \to B_i) \arrow[r] \arrow[d] & C_i / \mathrm{Im}(C_{i+1} \to C_i) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(A_{i-1} \to A_{i-2}) \arrow[r] & \mathrm{Ker}(B_{i-1} \to B_{i-2}) \arrow[r] & \mathrm{Ker}(C_{i-1} \to C_{i-2}) & \end{tikzcd}$$

使用蛇引理, 定义 δ-函子为边缘态射, 立得所需的长正合列 (1), 而函子性 (2) 来自蛇引理的函子性. 类似取上同调群 $H^\bullet$ 也是上同调 δ-函子.

定义 4.62. 对两个上同调 δ-函子 $(F^n, \delta_F), (G^n, \delta_G) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, 它们间的**态射**指一族自然变换 $t^n : F^n \to G^n, n \geq 0$ 使得对任意 $\mathcal{A}$ 中短正合列 $0 \to A \to B \to C \to 0$, 有交换图表

$$\begin{tikzcd} F^n(C) \arrow[r, "\delta_F"] \arrow[d, "t^n"'] & F^{n+1}(A) \arrow[d, "t^{n+1}"] \\ G^n(C) \arrow[r, "\delta_G"'] & G^{n+1}(A) \end{tikzcd} .$$

类似的也能定义同调 δ-函子间的态射. 若 δ-函子 $F = (F^n, \delta_F) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 满足, 对任意 δ-函子 $G = (G^n, \delta_G) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 和自然变换 $t : F^0 \to G^0$ 都存在唯一的 δ-函子态射 $\{t^n\}_{n \geq 0} : F \to G$ 使 $t = t^0$, 则称 F 为一个**万有 δ-函子**. 显然万有 δ-函子若存在则在 δ-函子的同构下唯一.
若 δ-函子 $F = (F^n, \delta_F) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 满足下列性质：对每个 $n > 0$ 和任意 $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, 存在单射 $u = u(A, n) : A \hookrightarrow B$ 使 $F^n u = 0$, 则称 F 为**可擦除的**.

引理 4.63. 可擦除的 δ-函子都是万有 δ-函子.

证明. 按定义中设的 G, t, 我们归纳地构造 t^n. 对 $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, 取嵌入 $u : A \hookrightarrow B$ 使 $F^{n+1}u = 0$. 令 $C = \operatorname{Coker} u$, 则 $0 \to A \to B \to C \to 0$, 作用 δ 函子得到的长正合列推出 $F^{n+1}(A) = \operatorname{Coker}(F^nB \to F^nC)$. 定义自然变换 $t_A^{n+1} : F^{n+1}(A) \to G^{n+1}(A)$ 是使下图交换的唯一态射:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Coker}(F^n(B) \to F^n(C)) \arrow[r, "t^n"] \arrow[d, "\delta_F"', "\cong"] & \operatorname{Coker}(G^n(B) \to G^n(C)) \arrow[d, "\delta_G"] \\
F^{n+1}(A) \arrow[r, "t_A^{n+1}"'] & G^{n+1}(A)
\end{tikzcd}$$

不难检查这一构造满足题意. □

推论 4.64. 例 4.61 中取同调和上同调的 δ-函子都是万有 δ-函子.

证明. 以同调为例, 只需证可擦除, 即对任意链复形, 单射入给定第 n 项处正合的链复形, 只需在链群的第 $n+1$ 项直和一个前一映射的核即可. □

4.2.2 链同伦（Chain Homotopy）

定义 4.65. 对 *Abel* 范畴 $\mathcal{A}$, $C_\bullet, D_\bullet \in \mathrm{Ch}(\mathcal{A})$ 和 $f, g : C_\bullet \to D_\bullet$, 一个**链同伦** $\psi : f \Rightarrow g$ 指一族 $\psi = \{(\psi_n : C_n \to D_{n+1})\}_n$ 使 $f_n - g_n = d_D \circ \psi_n + \psi_{n-1} \circ d_C$, 即（不交换的）图表

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_C"] \arrow[dl] \arrow[d, shift right, "f_{n+1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "d_C"] \arrow[dl, "\psi_n"'] \arrow[d, shift right, "f_n"'] \arrow[d, shift left, "g_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, "\psi_{n-1}"'] \arrow[d, shift right, "f_{n-1}"'] \arrow[d, shift left, "g_{n-1}"] & \cdots \arrow[dl] \\
\cdots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r, "d_D"'] & D_n \arrow[r, "d_D"'] & D_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

定义链同伦的一大目的是

命题 4.66. 依上定义记号, 若 f, g 链同伦, 则 f, g 诱导相同的同调群映射

$$f_* = g_* : H_\bullet(C) \to H_\bullet(D).$$

证明. $c \in \operatorname{Ker}(C_n \to C_{n-1})$ 则 $(f_n - g_n)(c) = d_D \circ \psi_n(c) + \psi_{n-1} \circ d_C(c) \in \operatorname{Im}(D_{n+1} \to D_n)$. □

定义 4.67. 对 *Abel* 范畴 $\mathcal{A}$, $C_\bullet, D_\bullet \in \mathrm{Ch}(\mathcal{A})$, $f : C_\bullet \to D_\bullet, g : D_\bullet \to C_\bullet$ 使得 $g \circ f$ 与 $\mathrm{id}_{C_\bullet}$ 链同伦, $f \circ g$ 与 $\mathrm{id}_{D_\bullet}$ 链同伦, 则称 f, g 构成 $C_\bullet, D_\bullet$ 间的**同伦等价**. 此时 $H_\bullet(C) \cong H_\bullet(D)$.

习题 4.68. (1) 设 $f, f' : C_\bullet \to D_\bullet, g, g' : D_\bullet \to E_\bullet$ 满足 $\varphi : f \Rightarrow f', \psi : g \Rightarrow g'$, 检查 $g \circ \varphi + \psi \circ f' : g \circ f \Rightarrow g' \circ f'$. (2) 链同伦和同伦等价都是等价关系.

接下来我们解释链同伦应该有一种更加正确的看法, 真正和拓扑中的同伦联系起来. 以 Abel 群为例, 首先我们考虑一个 "区间链复形" $I_\bullet = \left[\cdots \to 0 \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{(\mathrm{id},-\mathrm{id})} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\right]$. 对学过无穷范畴的同学, 考虑 $I_\bullet = N_\bullet(C(\Delta[1]))$, 而对初学者来说, 建议将第 1 和第 0 维的 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ 想象成一个区间和两个端点, 而映射就是自然的边缘映射.

定义 4.69. *Abel* 范畴 $\mathcal{A}$ 上的**双复形**指双下标的一系列 $\{C_{p,q} \in \mathcal{A}\}_{p,q\in\mathbb{Z}}$ 和一系列链映射 $d_h : C_{p,q} \to C_{p-1,q}, d_v : C_{p,q} \to C_{p,q-1}$, 满足 $d_h^2 = 0, d_v^2 = 0, d_h d_v + d_v d_h = 0$. 这些资料记 $C_{\bullet\bullet}$.
双复形 $C_{\bullet\bullet}$ 的**全复形**定义为 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(C)_n := \bigoplus_{p+q=n} C_{p,q}, \mathrm{Tot}^{\Pi}(C)_n := \prod_{p+q=n} C_{p,q}$, 边缘映射都是将 $c \in C_{p,q}$ 打到 $d_h(c) + d_v(c) \in C_{p-1,q} \oplus C_{p,q-1}$. 这样 $d^2 = 0$.
对复形 $C_\bullet, D_\bullet \in \mathrm{Ch}(\mathsf{Mod}_R)$, 定义它们的**张量积** $(C \otimes D)_{\bullet\bullet}$ 为双复形 $\{C_p \otimes D_q\}_{p,q}$, 而水平和竖直的链映射为 $d \otimes 1$ 和 $(-1)^p \otimes d$, 不难检查方格可交换.

这样一来, 链同伦 $\psi : f \Rightarrow g$ 等价于下面左侧的交换图表 (中间竖直的箭头存在)

$$\begin{tikzcd} C_\bullet \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{Tot}^{\oplus}(I \otimes C)_\bullet \arrow[d, "(f,g,\psi)"] & C_\bullet \arrow[l, "j"'] \arrow[dl, "g"] \\ & D_\bullet & \end{tikzcd} . \qquad \begin{tikzcd} C_{n+1} \oplus C_{n+1} \oplus C_n \arrow[r, "(f_{n+1},g_{n+1},\psi_n)"] \arrow[d, "d"] & D_{n+1} \arrow[d, "d_D"] \\ C_n \oplus C_n \oplus C_{n-1} \arrow[r, "(f_n,g_n,\psi_{n-1})"'] & D_n \end{tikzcd} .$$

展开所有定义, 实际上得到上面右侧的交换图表.
其中 d 将 (x, y, z) 打到 $(d_C x + z, d_C y - z, (-1)^n d_C z)$. 于是 (f, g, ψ) 是链映射在 x, y 分量得到 f, g 是链复形的条件, 在 z 分量得到 $d_D \circ \psi_n = f_n - g_n + (-1)^n \psi_{n-1} \circ d_C$.

4.2.3 投射消解（Projective Resolutions）和内射消解（Injective Resolutions）

定义 4.70. 若 $M \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ 是 *Abel* 范畴中一个对象, M 的一个**投射消解**指一个正合列

$$\cdots \xrightarrow{d} P_2 \xrightarrow{d} P_1 \xrightarrow{d} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0 .$$

满足全体 P_i 都投射. 类似的, 定义 M 的一个**内射消解**指一个正合列

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\epsilon} I^0 \xrightarrow{d} I^1 \xrightarrow{d} I^2 \xrightarrow{d} \cdots .$$

满足全体 I^i 都内射. 上述二者简记为 $P_\bullet \xrightarrow{\epsilon} M, M \xrightarrow{\epsilon} I^\bullet$.

回忆我们已经在**定义 4.26** 中定义了足够投射和足够内射. 那么这些对象很多的时候我们就能对一个一般的对象作投射和内射消解. 一个好的 Abel 范畴应该是这样的.

命题 4.71. 环 R 上的模范畴 Mod_R 总有足够投射和足够内射.

证明. 足够内射是**习题 4.23**, **定理 4.28**, 模范畴都满足 (AB5); 足够投射在于自由模 $R^{\oplus \mathscr{I}}$ 都是投射的, 构造一个自由模到某对象的满射容易. □

定理 4.72. 有足够投射 (resp. 内射) 的 *Abel* 范畴中任意对象都存在投射 (resp. 内射) 消解.

证明. 观察如下的图表给出了 M 的一个投射消解:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[dr] & & 0 & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & & & . \\
 & M_3 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & M_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & \\
\cdots \arrow[ur] \arrow[rr, "d"] & & P_3 \arrow[rr, "d"] \arrow[dr] & & P_2 \arrow[rr, "d"] \arrow[ur] & & P_1 \arrow[rr, "d"] \arrow[dr] & & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] & M \arrow[r] & 0 \\
 & & & M_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & M_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
 & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

取投射 P_0 打满 M, $P_0 \to M$ 核记为 M_0, 取投射 P_1 打满 M_0, $P_1 \to M_0$ 核记为 M_1, 取投射 P_2 打满 M_1, 一直下去. 诱导的 $d : P_{n+1} \to P_n$ 正合. 内射消解类似. □

定理 4.73 (比较定理). 设 $P_\bullet \xrightarrow{\epsilon} M$ 是诸 P_n 都投射的链复形, $Q_\bullet \xrightarrow{\eta} N \to 0$ 是正合列 (当然常见的情形是二者都是投射消解), 那么对任意 $f' : M \to N$ 存在链映射 $f_\bullet : (P_\bullet \to M) \to (Q_\bullet \to N)$ 限制在 $M \to N$ 上是 f'. 而且 f 在链同伦下唯一.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, dashed] & M \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & 0 \, . \\
\cdots \arrow[r] & Q_2 \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r, "\eta"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

类似的, 内射的情形也有比较定理, 只需在对偶范畴中观察.

证明. 对 n 归纳地证明 f_n 的存在性, 记 $f_{-1} = f'$. 假设 $i \leq n$ 的 f_i 已构建,

$$\begin{tikzcd}
P_{n+1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, dashed, "\exists"'] & Z_n(P) = \mathrm{Ker}(P_n \to P_{n-1}) \arrow[d, "f_n'"] & \\
Q_{n+1} \arrow[r, "d"'] & Z_n(Q) = \mathrm{Ker}(Q_n \to Q_{n-1}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} , \qquad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z_n(P) \arrow[r] \arrow[d, "f_n'"] & P_n \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f_n"] & P_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\
0 \arrow[r] & Z_n(Q) \arrow[r] & Q_n \arrow[r, "d"'] & Q_{n-1}
\end{tikzcd} .$$

如上图, 因为 $f_{n-1} \circ d = d \circ f_n$ 故 f_n 诱导 f_n', 然后 P_{n+1} 投射和正合性, 即 Q_{n+1} 满射 $Z_n(Q) = \mathrm{Im}(Q_{n+1} \to Q_n)$ 说明存在 $P_{n+1} \to Q_{n+1}$ 使得图表交换.

再看链同伦下唯一, 假设有链映射 $f_\bullet, g_\bullet$, 记 $h = f - g$. 链同伦归纳地构造 $s_n : P_n \to Q_{n+1}$ 如下. $h_{-1} = 0$ 故只需令奠基 $s_{-1} = 0 : M \to Q_0$. 假设 $i < n$ 的 s_i 已构建, 现需验证 $h_n - s_{n-1} \circ d$

的像含于 $Z_n(Q)$ 这样 P_n 投射就能构造出 s_n 使 $d\circ s_n = h_n - s_{n-1}\circ d$. 利用正合性只需检查 $d\circ(h_n - s_{n-1}\circ d) = h_{n-1}\circ d - (h_{n-1} - s_{n-2}\circ d)\circ d = 0$. □

习题 4.74 (马鞋引理). 正合列 $0\to A' \xrightarrow{i_A} A \xrightarrow{\pi_A} A'' \to 0$ 和投射消解 $P'_\bullet \xrightarrow{\epsilon'} A', P''_\bullet \xrightarrow{\epsilon''} A''$, 记 $P_n = P'_n \oplus P''_n$, 则存在投射消解 $P_\bullet \to A$ 使 $0 \to P'_\bullet \xrightarrow{i} P_\bullet \xrightarrow{\pi} P''_\bullet \to 0$ 为链映射, 且 $i_n : P'_n \to P_n, \pi_n : P_n \to P''_n$ 为自然嵌入和投影. 即下左图

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & P'_2 \arrow[r] \arrow[d, "i_2"'] & P'_1 \arrow[r] \arrow[d, "i_1"'] & P'_0 \arrow[r, "\epsilon'"] \arrow[d, "i_0"'] & A' \arrow[r] \arrow[d, "i_A"'] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "\pi_2"'] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "\pi_1"'] & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "\pi_0"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "\pi_A"'] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P''_2 \arrow[r] \arrow[d] & P''_1 \arrow[r] \arrow[d] & P''_0 \arrow[r, "\epsilon''"] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd},
\qquad
\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}\epsilon' \arrow[r] \arrow[d] & P'_0 \arrow[r, "\epsilon'"] \arrow[d] & A' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}\epsilon \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}\epsilon'' \arrow[r] \arrow[d] & P''_0 \arrow[r, "\epsilon''"] \arrow[d] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}.$$

首先构造出左边图表右两列. 可以构造 $P''_0 \to A$ 穿过 ϵ'' 于是得到 $P_0 \to A$ 使图表交换, 取出核得到右图, 归纳进行这一过程得到整个链. 类似也有内射版本, 留给读者.

4.2.4 左导出函子（Left Derived Functors）和右（Right）导出函子

定义 4.75. 对 *Abel* 范畴 $\mathcal{A},\mathcal{B}$.

设 $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是右正合函子, 若 $\mathcal{A}$ 有足够投射, 定义 F 的**左导出函子** $L_iF (i\geq 0)$ 如下: 对 $A\in\operatorname{Ob}\mathcal{A}$, 任取投射消解 $P_\bullet\to A$, 定义 $L_iF(A) := H_i(F(P_\bullet))$, 即 $L_iF(A)$ 是 $\cdots\to F(P_1)\to F(P_0)\to 0$ 在 $F(P_i)$ 处的同调群, 因 F 右正合, 有自然 $L_0F(A)\cong F(A)$.

设 $G:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 是左正合函子, 若 $\mathcal{A}$ 有足够内射, 定义 G 的**右导出函子** $R^iG (i\geq 0)$ 如下: 对 $A\in\operatorname{Ob}\mathcal{A}$, 任取内射消解 $A\to I^\bullet$, 定义 $R^iG(A) := H^i(G(I^\bullet))$, 即 $R^iG(A)$ 是 $0\to G(I^0)\to G(I^1)\to\cdots$ 在 $G(I^i)$ 处的上同调群, 因 G 左正合, 有自然 $R^0G(A)\cong G(A)$.

如果函子反变, 那么右正合函子需要做内射消解, 左正合函子需要做投射消解, 因为希望得到 $L_0F\cong F, R^0G\cong G$. 而所谓的左右正合, 指的是将正合列最后变成左正合还是右正合的.

比较定理和**命题 4.66** 保证 L_iF, R^iG 是良定的函子. 为证明是加性的, 只需检查比较定理中从对象态射构造消解链态射的方式具有加性.

> **定理 4.76.** 定义情景下, $L_\bullet F$(resp.$R^\bullet G$) 总是万有 (resp. 上) 同调 δ-函子.

证明. 我们以左导出为例, 右导出类似. (1) 首先证明是同调 δ-函子. 对正合列 $0\to A'\to A\to A''\to 0$ 和 $P'_\bullet\to A', P''_\bullet\to A''$, 用**马鞋引理**得到 $0\to P'_\bullet\to P'_\bullet\oplus P''_\bullet\to P''_\bullet\to 0$, 作用 F 仍然得

到直和, 故保护正合, 从而由**例 4.61** 取同调是 δ-函子得长正合列, 而其函子性也来源于取同调群和边缘映射的函子性. (2) 其次检查是万有的, 由**引理 4.63** 只需检查可擦除性, 而注意投射对象 P 的导出函子 $L_iFP = 0(i > 0)$, 这是因为它有平凡消解 $\cdots 0 \to 0 \to P \to P \to 0$. 再观察到任意对象都能被投射对象打满, 故结论得证. □

性质 4.77. 定义情景下, (1) 若 $U : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ 是正合函子, 则 $U(L_iF) \cong L_i(UF)$. (2) 若 $0 \to M \to P \to A \to 0$ 正合, 满足 $L_iFP = 0$ 对 $i \geq 1$, 或者我们称这样的 P 是 F-零调的. 则 $L_{i+1}FA \cong L_iFM$ 对 $i \geq 1$, 且 $L_1FA \cong \mathrm{Ker}(FM \to FP)$. 类似的对正合列 $0 \to M \to P_m \to P_{m-1} \to \cdots \to P_0 \to A \to 0$, 其中 P_i 皆 F-零调, 能推出 $L_{i+m+1}FA \cong L_iFM$ 对 $i \geq 1$ 和 $L_{m+1}FA \cong \mathrm{Ker}(FM \to FP_m)$. 证明只需写出诸短正合列对应的长正合列.

接下来我们定义一些经典的导出函子.

定义 4.78. 对 R-模 M, 定义左正合函子 $G = \mathrm{Hom}_R(-, M)$ 的右导出 $\mathrm{Ext}^\bullet_R(-, M) := R^\bullet G$. 定义右正合函子 $F = - \otimes_R M$ 的左导出 $\mathrm{Tor}^R_\bullet(-, M) := L_\bullet F$.

拓扑空间 X, 单点 $*$, 整体截面函子 $\Gamma : \mathsf{Sh}(X) \to \mathsf{Sh}(*) = \mathsf{AbGrp}$ 是常值层函子的右伴随, 故 Γ 左正合, 它有右导出 $H^i(X, -) := R^i\Gamma$. 称之为 X 的**层上同调**函子.

整体截面左正合也源于取层态射的核无需再层化.

习题 4.79. 遗忘函子 $F : \mathsf{Sh}(X) \to \mathsf{PSh}(X)$ 左正合, $R^iF\mathcal{F}$ 是预层 $U \mapsto H^i(U, \mathcal{F}|_U)$. 只需观察 $|_U : \mathsf{PSh}(X) \to \mathsf{Sh}$ 将 $\mathcal{F} \to \mathcal{F}(U)$ 正合, 结合前述性质有 $(|_U)(R^iF) \cong R^i((|_U) \circ F)$.

另外, 对连续映射 $f : X \to Y$, 检查 $f^{-1} : \mathsf{Sh}(Y) \to \mathsf{Sh}(X)$ 总是正合函子. 回忆正合性等价于在每点的茎上都正合, 而注意到 $(f^{-1}\mathcal{G})_x = \mathcal{G}_{f(x)}$.

4.2.5 平衡（Balancing）Tor 和 Ext

Hom 和 $\otimes$ 有两个输入, 下面的问题是自然的: R-模 M, N, 对 $\mathrm{Hom}_R(-, N)$ 右导出后代入 M 即 $\mathrm{Ext}_R(M, N)$, 但是我们也可以对 $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ 右导出后代入 N, 不妨记作 $\mathrm{ext}_R(M, N)$, 它们一样吗? 另外对 $- \otimes_R N$ 左导出后代入 M 即 $\mathrm{Tor}_R(M, N)$, 也可以对 $M \otimes_R -$ 左导出后代入 N 即 $\mathrm{Tor}_R(N, M)$, 它们一样吗? 本小节证明它们真的是典范一样的, 这种操作称为**平衡**.

回忆对两个链复形我们在**定义 4.69** 定义了它们的张量积双复形及全复形. 对 R-模 M, N, 考虑投射消解 $P_\bullet \xrightarrow{\epsilon} M, Q_\bullet \xrightarrow{\eta} N$. 观察如下一些复形 (摆在比较好理解的位置):

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & . \\
M \otimes Q_2 \arrow[d] & P_0 \otimes Q_2 \arrow[d] & P_1 \otimes Q_2 \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \arrow[d] \\
M \otimes Q_1 \arrow[d] & P_0 \otimes Q_1 \arrow[d] & P_1 \otimes Q_1 \arrow[l] \arrow[d] & P_2 \otimes Q_1 \arrow[l] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
M \otimes Q_0 & P_0 \otimes Q_0 & P_1 \otimes Q_0 \arrow[l] & P_2 \otimes Q_0 \arrow[l] & \cdots \arrow[l] \\
& P_0 \otimes N & P_1 \otimes N \arrow[l] & P_2 \otimes N \arrow[l] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

右上角的部分是双复形 $(P \otimes Q)_{\bullet\bullet}$, 左上角的部分看作只有第 0 列有东西的双复形 $(M \otimes Q)_{\bullet\bullet}$, 这样 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(M \otimes Q)_\bullet = M \otimes Q_\bullet$. 我们希望证明 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(P \otimes Q)_\bullet$ 的同调群与 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(M \otimes Q)_\bullet$ 的同调群相同. 这样在竖直方向再操作一次, 就得到 Tor 的平衡, 即 $\mathrm{Tor}_R^i(M, N) = \mathrm{Tor}_R^i(N, M)$.

定义 4.80. 对两个链复形间的映射 $f : B_\bullet \to C_\bullet$. 我们定义 f 的**映射锥** $\mathrm{cone}(f)_\bullet$ 为一个链复形, 满足 $\mathrm{cone}(f)_n = B_{n-1} \oplus C_n$, 边缘映射 $d(b, c) = (-d(b), d(c) - f(b))$ 对 $b \in B_{n-1}, c \in C_n$.

类似链同伦, 拓扑锥也有一个解释, 拓扑上 $f : X \to Y$ 将 $(X \times I) \sqcup Y$ 中的 $(x, 1) \sim f(x)$ 商掉, $(x, 0)$ 缩成一点得到映射锥, 而在链映射的版本中:

$$0 \longrightarrow B_\bullet \oplus B_\bullet \longrightarrow \mathrm{Tot}^{\oplus}(I \otimes B)_\bullet \oplus C_\bullet \longrightarrow \mathrm{cone}(f)_\bullet \longrightarrow 0 .$$

其中 $(b, b') \in B_n \oplus B_n$ 打到 $(b, b', 0, f(b')) \in B_n \oplus B_n \oplus B_{n-1} \oplus C_n$ 而 (b, b', b'', c) 被打到 $(b'', c - f(b')) \in B_{n-1} \oplus C_n$. 于是 $\mathrm{cone}(f)$ 上的边缘映射由 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(I \otimes B)_\bullet \oplus C_\bullet$ 者诱导得到.

重点是, 这将带来正合列 $0 \to C \to \mathrm{cone}(f) \to B[-1] \to 0$, 其中 $B[-1]$ 表示将链 B 整体右移一格, 即 $B[-1]_n = B_{n-1}$, 且将边缘映射全换成负的. 它将诱导长正合列

$$\cdots \longrightarrow H_n(c) \longrightarrow H_n(\mathrm{cone}(f)) \longrightarrow H_{n-1}(B) \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(C) \longrightarrow H_{n-1}(\mathrm{cone}(f)) \longrightarrow \cdots .$$

奇妙之处就在于计算得到边缘映射 $H_{n-1}(B) \to H_{n-1}(C)$ 正是 f_*, 这样一来, 如果 f 的映射锥是零调的 (即具有平凡的同调群), 我们就能证明 $B_\bullet$ 和 $C_\bullet$ 具有相同同调群.

带着这个想法回到原问题, 通过计算不难检查 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(P \otimes Q)_\bullet \to \mathrm{Tot}^{\oplus}(M \otimes Q)_\bullet$ 的映射锥是 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(C)_\bullet$, 其中 $C_{\bullet\bullet}$ 是将 $M \otimes Q_\bullet$ 放在第 -1 列, 而 $(P \otimes Q)_{\bullet\bullet}$ 通过 $\epsilon \otimes Q$ 从第 0 列打到第 -1 列, 通俗地说就是将右上角和左上角的图表"接起来".

这样得到的图表有一大好处, 因为诸 Q_i 都是投射模, 从而是平坦模, 因此所有的行映射仍是正合的. 这时只需要如下关键的引理:

引理 4.81 (零调装配引理). 双复形 $C_{\bullet\bullet}$ 满足 $C_{pq}=0$ 对一切 $q<0$ (即只在上半平面有非零的项). 若所有的行 d_h 正合, 那么 $\mathrm{Tot}^{\oplus}(C)_\bullet$ 零调. 若所有的列 d_v 正合则 $\mathrm{Tot}^{\Pi}(C)_\bullet$ 零调.

证明. 由平移对称只计算 $H_0=0$. 对直和全复形, 设 $c=(\cdots,0,0,c_{-p,p},\cdots,c_{-1,1},c_{0,0})$ 被边缘映射打到 0, 由行正合, $d_h(c_{-p,p})=0$ 故可取 $d_h(b_{-p,p+1})=c_{-p,p}$, 考虑 $d_v(c_{-p,p})+d_h(c_{-p+1,p-1})=0$, 故 $d_h(c_{-p+1,p-1}-d_v(b_{-p+1,p}))=0$, 从而可取 $d_h(b_{-p+1,p})=c_{-p+1,p-1}-d_v(b_{-p+1,p})$, 如此下去直到 $b_{1,0}$, 不难检查 $b=(\cdots,0,0,b_{-p,p+1},\cdots,b(1,0))\mapsto c$. 这构造依赖于存在最大下标的 $c_{-p,p}\neq 0$. 而对直积则从 $b_{0,1}$ 开始构造, 依赖于能有无穷项非 0. □

对于 Ext, 投射消解 $P_\bullet\to M$, 内射消解 $N\to I_\bullet$, 并类似观察如下一些复形:

$$\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots & & \\
\mathrm{Hom}(M,I^2) \arrow[u] & \mathrm{Hom}(P_0,I^2) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{Hom}(P_1,I^2) \arrow[u] \arrow[r] & \cdots & \\
\mathrm{Hom}(M,I^1) \arrow[u] & \mathrm{Hom}(P_0,I^1) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{Hom}(P_1,I^1) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{Hom}(P_2,I^1) \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\mathrm{Hom}(M,I^0) \arrow[u] & \mathrm{Hom}(P_0,I^0) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{Hom}(P_1,I^0) \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{Hom}(P_2,I^0) \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
& \mathrm{Hom}(P_0,N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(P_1,N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(P_2,N) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

只需注意对投射模 P 和内射模 I, $\mathrm{Hom}(P,-),\mathrm{Hom}(-,I)$ 是正合函子.

性质 4.82. 对交换环 R 和 R-模 M,M',N,N', 可以定义如下映射:

$$\mathrm{Tor}_i^R(M,N)\otimes_R\mathrm{Tor}_j^R(M',N')\to\mathrm{Tor}_{i+j}^R(M\otimes_R M',N\otimes_R N').$$

设 $P_\bullet\to M,P'_\bullet\to M',P''_\bullet\to M\otimes M'$ 为投射消解, 回忆**比较定理**只需投射链复形打到正合列, 于是结合投射模的张量积和直和仍投射 (通过检查仍是直和分量), 得到 $\mathrm{Tot}(P\otimes P')\to P''$ 的链映射, 在链同伦下唯一, 诱导

$$H_n(\mathrm{Tot}(P\otimes P')\otimes(N\otimes N'))\to H_n(P''\otimes(N\otimes N'))=\mathrm{Tor}_n(M\otimes M',N\otimes N').$$

左边可重写作 $(P_\bullet\otimes N)\otimes(P'_\bullet\otimes N')$ 的全复形, 注意到对任意链复形 $C_\bullet,C'_\bullet$ 都有自然的映射 $H_i(C)\otimes H_j(C')\to H_{i+j}\mathrm{Tot}(C\otimes C')$, 于是代入 $C=P\otimes N,C'=P'\otimes N'$ 即得到所需.

习题 4.83. (1) 检查上述定义与 $P_\bullet,P'_\bullet,P''_\bullet$ 的选取无关, 且关于 M,M',N,N' 自然. 甚至会从 $0\to M_0\to M\to M_1\to 0$ 诱导出 Tor 长正合列. (2) 而且这乘积关于 $\mathrm{Tor}_\bullet(M\otimes M'\otimes M'',N\otimes N'\otimes N'')$ 有结合律. (3) 由 (1) 和 (2), 若 A,B 是 R-代数, 则 $\mathrm{Tor}_\bullet^R(A,B)$ 是分次 R-代数.

4.2.6 Tor, 挠（Torsion）与平坦性（Flatness）

在**定义 4.78** 我们定义了张量积的导出 Tor, 并在上一小节证明了其平衡性. 为了熟悉这些函子以及一般导出函子的基本性质, 在本小节开始的一些具体计算是必要的.

引理 4.84. *PID 上自由模的子模都自由, 作为推论 PID 上的投射模都自由.*

证明. 设 PID 为 R, 其上 F 自由, $U \subset F$. 设 F 一组基 $\{e_i\}_{i\in\mathscr{I}}$, 设 $\mathscr{I}$ 自带良序 $\leq$. 考虑 $p_i : F \to R$ 是往分量 i 的投影, 记 F_i 是 $\{e_j\}_{j\leq i}$ 生成的自由子模. 再记 $U_i := U \cap F_i$, 因 $p_i(U_i)$ 是 R 中理想, 故它形如 Ra_i. 取 $u_i \in U_i$ 使 $p_i(u_i) = a_i$, 特别地若 $a_i = 0$ 则要求 $u_i = 0$.
现在万事俱备, 我们声称 $u_i \neq 0$ 者构成 U 的一组基. 首先无关性显然, 因为其有限和必有唯一基数最大者. 为证明生成, 需超限归纳检查 $\{u_j\}_{j\leq i}$ 生成 U_i, 奠基显然, 后继序数和极限序数 β 都是对 $x \in U_\beta$, 考虑 $x - p_\beta(x)u_\beta$, 剩下得到一个在 U 中且序数严格小于 β 的线性组合. □

引理 4.85. *滤余极限和 Tor 可交换. 最一般的, 设 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 是满足 AB5 的 Abel 范畴, $\mathcal{A}$ 有足够投射, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是左伴随, 则 $L_\bullet F$ 与滤余极限交换. 即对滤图表 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{I} \to \mathcal{C}$ 的像 A_i,*

$$L_nF\left(\operatorname*{colim}_{i\in\mathcal{I}} A_i\right) = \operatorname*{colim}_{i\in\mathcal{I}}(L_nFA_i).$$

证明. 首先我们证明对任意图表 $\mathcal{I}$, $\mathcal{A}^{\mathcal{I}}$ 有足够投射, 对函子 $M : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$, 取 $P_i \to M(i) \to 0$ 由 AB5 取 $P_M = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} P_i$, 这样有自然的 $P_M \to M(i) \to 0$. 而 $\mathrm{Hom}(i,-)$ 是 $\mathcal{I} \to \mathsf{Set}$ 的函子, $S \mapsto P_M^{\oplus S}$ 是 $\mathsf{Set} \to \mathcal{A}$ 的函子, 它们的复合 $P : i \mapsto P_M^{\oplus \mathrm{Hom}(i,-)}$ 带来 $P \to M \to 0$. 考虑

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}^{\mathcal{I}} \arrow[r, "F^{\mathcal{I}}"] \arrow[d, "\mathrm{colim}_{\mathcal{I}}"'] & \mathcal{B}^{\mathcal{I}} \arrow[d, "\mathrm{colim}_{\mathcal{I}}"] \\
\mathcal{A} \arrow[r, "F"'] & \mathcal{B}
\end{tikzcd}.$$

现在因为 F 是左伴随, 故图表是交换的, 我们对 $\mathcal{A}^{\mathcal{I}} \to \mathcal{B}$ 取左导出, 而在 $\mathcal{A}^{\mathcal{I}}$ 中投射消解元素. 由 AB5 滤余极限正合, 于是向下走得到 $\mathcal{A}$ 中对 $\mathrm{colim}_{i\in\mathcal{I}} A_i$ 的消解, 再向右走得到原左式. 而 AB5 知 $H_\bullet$ 与取滤余极限交换得知先向右走再向下走得到原右式. □

注 4.86. 如果只证明 Tor 的情形, 可用平衡性. 这样需做消解的元素只有一个, 后利用张量积与余极限可交换, 以及取 $H_\bullet$ 与滤余极限可交换（Ker, Coker 都与滤余极限交换）.

习题 4.87. *对一切 Abel 群 A, B.*
(1) 整数 $i \geq 2$, $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(A,B) = 0$. 这是因为**引理 4.84**, 可对 Abel 群写生成元商关系的消解.
(2) $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m, B) = \begin{cases} B/mB, & i = 0 \\ {}_mB = \{b \in B : mb = 0\}, & i = 1 \end{cases}$. 注意到 ${}_mB$ 是挠群.

(3) 对一切 R-模 M, M', N, 有 $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(M \oplus M', N) = \mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(M, N) \oplus \mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(M', N)$.

(4) 利用 (2) 和 (3), 我们给出 $i \geq 2$ 时 $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}}(A, B) = 0$ 的另一个证明, 还指出 $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, B)$ 总是挠的. 为此将一个 *Abel* 群写成全体有限生成子群在包含下的滤余极限. 结合**引理 4.85** 滤余极限与 Tor 可交换, 再注意到挠群的余极限还是挠的, 于是所有问题都转化为有限生成者.

这解释了为何称 Tor. 对 Abel 群 B, $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, B)$ 是 B 的挠部分, 因为 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \mathrm{colim}_n(\mathbb{Z}/n)$.

性质 4.88. (1) A 是无挠 *Abel* 群, 则 $\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(A, B) = 0$ 对一切 $n \neq 0$ 和 *Abel* 群 B.

(2) A 是无挠 *Abel* 群当且仅当 $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, B) = 0$ 对一切 *Abel* 群 B.

证明. 注意有限生成无挠 $\mathbb{Z}$-模都是 $\mathbb{Z}^m$. □

习题 4.89. 设 $I, J \subset R$ 是理想, 则 $\mathrm{Tor}_1^R(R/I, R/J) \cong I \cap J/IJ$.

提示是对 $0 \to I \to R \to R/I \to 0$ 写 $\mathrm{Tor}_1^R(-, R/J)$ 的长正合列.

习题 4.90. 对 R-模 M, **TFAE**: (1) M 是平坦 R-模, (2) $\mathrm{Tor}_n^R(M, -) = 0$ 对一切 $n \neq 0$, (3) $\mathrm{Tor}_1^R(M, -) = 0$, (4) $\mathrm{Tor}_1^R(M, R/I) = 0$ 对所有理想 I, (5) $\mathrm{Tor}_1^R(M, R/I) = 0$ 对所有有限生成理想 I. 注意 (5) 推 (1) 是 $0 \to I \to R \to R/I \to 0$ 的长正合列及习题的**平坦等价刻画**.

这结合**性质 4.88** 推出对 $\mathbb{Z}$-模（一般的, *PID* 也对）, 平坦等价于无挠.

性质 4.91 (零调消解)**.** 对 *Abel* 范畴间的右正合函子 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, 设 $\mathcal{A}$ 有足够投射, 则 $L_\bullet FA \cong H_\bullet(FP)$, 其中 $P_\bullet \xrightarrow{\epsilon} A$ 是 A 的一个消解, 只是诸 P_i 是 F-零调对象, 即满足 $L_nFP_i = 0$ 对一切 $n \geq 1, i \geq 0$. 作为推论, Tor 的计算可以用平坦模消解得到.

证明. 回忆**性质 4.77(2)** 的维数平移性质, 记 $K_m = \mathrm{Ker}(P_m \to P_{m-1})$ 则

$$L_{m+1}FA \cong \mathrm{Ker}(FK_m \to FP_m) = \mathrm{Ker}(FP_{m+1}/\mathrm{Im}(FP_{m+2} \to FP_{m+1}) \to FP_m) = H_{m+1}(FP).$$

中间的等号: 注意 $FK_{m+1} \to FP_{m+1} \to FK_m \to 0$, 故只需证明 $\mathrm{Im}(FK_{m+1} \to FP_{m+1}) = \mathrm{Im}(FP_{m+2} \to FP_{m+1})$. 检查 $FP_{m+2} \to FK_{m+1} \to 0$ 故得. □

命题 4.92 (平坦基变换)**.** 设 $R \to T$ 是平坦环同态, 则对 R-模 M 和 T-模 N 有

$$\mathrm{Tor}_n^R(M, N) = \mathrm{Tor}_n^T(M \otimes_R T, N).$$

作为推论对 $R \to T$ 平坦环同态, 即 $- \otimes_R T$ 正合时, 对一切 R-模 M, N 都有

$$T \otimes_R \mathrm{Tor}_n^R(M, N) \cong \mathrm{Tor}_n^T(M \otimes_R T, N \otimes_R T).$$

证明. 取投射消解 $P_\bullet \to M$ 则左边是 $P_\bullet \otimes_R N$ 的同调群, 由于 T 是平坦 R-模, 于是 $P_\bullet \otimes_R T \to M \otimes_R T$ 是投射消解, 于是右边也是 $(P_\bullet \otimes_R T) \otimes_T N = P_\bullet \otimes_R N$ 的同调群, 通过 $\mathsf{Mod}_T \to \mathsf{Mod}_R$ 的遗忘得到左边. 而推论则是注意**性质 4.77(1)**. □

4.2.7 Ext 与扩张（Extensions）

引理 4.93. 内射模总是可除, *Dedekind* 环上的可除模也内射, 环 R 上的模 M **可除**指对任意非零因子 $r \in R \backslash \operatorname{zdv}(M)$ 总有 $rM = M$, 即乘 r 是 $M \to M$ 的同构.

证明. 若 M 内射, 则任意 $r \notin \operatorname{zdv}(M)$, 乘 r 映射 $M \to M$ 单, 即正合列 $0 \to M \to M$, 由内射得知可除. 反过来 Dedekind 上的可除 D, 由 **Baer 判别法**只需检查理想 $0 \neq I \subset R$ 和模同态 $I \to D$, 总能延拓为 $R \to D$ 即可. 由**定理 2.231(4)** 不妨考虑非零理想 J 使得 $IJ = rR$ 为主理想, 现对 $rR \to D$, 由可除它唯一决定了 $R \to D/r = D$ 的映射, 易检查是延拓. □

习题 4.94. (1) 对任意 *Abel* 群 A, B 总有 $\operatorname{Ext}^i_{\mathbb{Z}}(A, B) = 0$ 对 $i \geq 2$. $\mathbb{Z}$-投射模的子模投射, 内射模的商模内射, 因为 *PID* 上的投射和内射模我们已经有了完全分类.
(2) 对任意 *Abel* 群 B, $\operatorname{Ext}^0_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m, B) = {}_mB, \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m, B) = B/mB$.
还有 $\operatorname{Ext}^0_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, B) = B, \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, B) = 0$.
(3) 对任意 R-模 $\{M_i\}_{i \in \mathscr{I}}, N$ 总有 $\begin{cases} \operatorname{Ext}^i_R(\bigoplus_{i \in \mathscr{I}} M_i, N) \cong \prod_{i \in \mathscr{I}} \operatorname{Ext}^i_R(M, N) \\ \operatorname{Ext}^i_R(N, \prod_{i \in \mathscr{I}} M_i) \cong \prod_{i \in \mathscr{I}} \operatorname{Ext}^i_R(N, M_i) \end{cases}$.
(4) 于是对有限生成 *Abel* 群 A, 我们总可以计算 $\operatorname{Ext}^i_{\mathbb{Z}}(A, B)$.
接下来我们用一些例子来说明若 A 不有限生成时, 结果可能非常复杂.
(5) 我们用 A^* 记 $\operatorname{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, 称为 A 的 **Pontryagin 对偶**. 若 A 是挠 *Abel* 群, 则有 $\operatorname{Ext}^0_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z}) = 0, \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z}) = A^*$. 若记 $\mathbb{Z}/p^\infty := \operatorname{colim}(\mathbb{Z}/p^n) = \bigcup_n (\mathbb{Z}/p^n) = \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]/\mathbb{Z}$ 是挠群, 则 $(\mathbb{Z}/p^\infty)^* = \mathbb{Z}_p = \lim(\mathbb{Z}/p^n)$ 为 p-进整数. 此外还有一些奇奇怪怪的等式, 例如 $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^* = \hat{\mathbb{Z}} := \lim(\mathbb{Z}/n) = \prod_{prime\ p} \mathbb{Z}_p$, $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{A}/\mathbb{Q}$, 其中 $\mathbb{A} := \prod'_{prime\ p} \mathbb{Q}^p$ 为不含 ∞ 素点的 *Adele* 群, 即除了有限项在 $\mathbb{Q}_p$ 中, 其他项在 $\mathbb{Z}_p$ 中的 $(x_2, x_3, x_5, \cdots)$ 构成的群.
具体计算, 先写出 $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$ 对应的长正合列, 注意 $\operatorname{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = 0, \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) = 0$, 故只需证 $(\mathbb{Q})^* = \mathbb{A}$. 注意到 $\mathbb{Q} = \bigoplus_{prime\ p}(\mathbb{Z}/p^\infty)$, 计算得 $\operatorname{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}/p^\infty) = \operatorname{Hom}\left(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}], \mathbb{Z}/p^\infty\right) = \mathbb{Q}_p$, 第一个等号因为不是 p 的素数与 p 互素, 第二个等号因为 $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}] = \operatorname{colim}_{n \in \mathbb{Z}} p^n\mathbb{Z}$.
回到 $\operatorname{Hom}(\mathbb{Q}, \bigoplus_{prime\ p}(\mathbb{Z}/p^\infty))$, 假设 f 在其中, 它显然含于 $\operatorname{Hom}(\mathbb{Q}, \prod_{prime\ p}(\mathbb{Z}/p^\infty)) = \prod_{prime\ p} \mathbb{Q}_p$, 设 $f = (f_2, f_3, f_5, \cdots)$. 注意到 1 的像必须在直和 $\bigoplus(\mathbb{Z}/p^\infty)$ 中, 所以至多有限个 $f_p \notin \mathbb{Z}_p$, 反过来若 1 的像在直和中, 容易证明对任意正整数 n 有 $1/n$ 的像也在直和中, 因为 n 只与有限多个素数不互质. 于是 $\operatorname{Hom}(\mathbb{Q}, \bigoplus_{prime\ p}(\mathbb{Z}/p^\infty)) = \mathbb{A}$.
(6) 然后是和局部化的互动, 回忆**引理 2.149**, 诺特环 R, 若 M 是有限生成 R-模, 则对任意 R 的乘集 S 和 R-模 N, **引理 2.149** 的映射诱导了 $S^{-1}\operatorname{Ext}^n_R(M, N) \cong \operatorname{Ext}^n_{S^{-1}R}(S^{-1}M, S^{-1}N)$. 为此只需取 M 的一个有限生成的自由模消解, 然后注意作用 S^{-1} 正合即得所需.

接下来我们讨论 Ext 与扩张间的关系.

定义 4.95. *Abel* 范畴 $\mathcal{A}$ 中对象 x, y, 称 x 用 y 做**一个扩张**指短正合列 $0 \to y \to z \to x \to 0$ 的一个等价类, $0 \to y \to z \to x \to 0$ 和 $0 \to y \to z' \to x \to 0$ 等价当且仅当图表

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & y \arrow[r] \arrow[d, equal] & z \arrow[r] \arrow[d, equal] & x \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & y \arrow[r] & z' \arrow[r] & x \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

交换. 实际上由五引理, x, y 两列是同构结合图表交换就推出中间一列也是同构.

定理 4.96 (Baer 和)**.** 给定 *Abel* 范畴 $\mathcal{A}$ 中的两个对象 x, y, x 用 y 做的所有扩张构成一个 *Abel* 群, 其中单位元为 $0 \to y \to y \oplus x \to x \to 0$. 而对 $0 \to y \to z \to x \to 0$ 和 $0 \to y \to z' \to x \to 0$, 它们的和构造如下, 考虑 p 定义为 $z \to x \leftarrow z'$ 的拉回, 即 $p = \{(c, c') \in z \oplus z' : \overline{c} = \overline{c'}\}$. 则将 p 商掉 $\{(b, -b) : b \in y\}$ 即定义为 z'' 即可. 检查这样有自然的 $0 \to y \to z'' \to x \to 0$, 而 $z \to x$ 逆元则是取 $-(z \to x) : z \to x$.

证明. 首先加法交换律显然, 幺元几乎是验证定义. 其次检查逆元, 注意有 $x \to p$ 的映射, 考虑 $a \in x$ 在 z 的任意原像 c, 则将 $a \mapsto (c, -c)$, 证明这良定义且诱导了正合列分裂. 最后检查结合律, 对 $i = 1, 2, 3$, 检查 $0 \to y \to z_i \to x \to 0$ 任意顺序求和都是 $\{(a_1, a_2, a_3) \in z_1 \oplus z_2 \oplus z_3 : \overline{a_1} = \overline{a_2} = \overline{a_3}\}$ 商掉 $\{(b_1, b_2, b_3) \in y^{\oplus 3} : b_1 + b_2 + b_3 = 0\}$. □

定理 4.97 (模范畴扩张的 Ext 刻画)**.** 对两个 R-模 M, N, 所有 M 用 N 做的扩张构成的 *Abel* 群 G 同构于 $\mathrm{Ext}^1_R(M, N)$. 对应关系为 $0 \to N \to X \to M \to 0$ 被打到它诱导的长正合列中 $\partial : \mathrm{Hom}_R(N, N) \to \mathrm{Ext}^1_R(M, N)$ 下 id_N 的像 (实际上它也是 $\partial' : \mathrm{Hom}_R(M, M) \to \mathrm{Ext}^1_R(M, N)$ 下 id_M 的像) . 反过来对 $x \in \mathrm{Ext}^1_R(M, N)$, 和投射 P 使 $0 \to K \to P \to M \to 0$ 正合, 诱导长正合列中 $\mathrm{Hom}(K, N) \to \mathrm{Ext}^1_R(M, N) \to 0 = \mathrm{Ext}^1_R(P, N)$, 任取 x 原像 $\beta : K \to N$, 考虑 $P \leftarrow K \to N$ 的推出 X, 检查这诱导 $0 \to N \to X \to M \to 0$ 的正合列.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & P \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 . \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r] & X \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

证明. 定理叙述给出映射 $i : G \to \mathrm{Ext}^1_R(M, N)$ 和 (尚不知是否是映射的) $j : \mathrm{Ext}^1_R(M, N) \to G$. (0) 先检查定理中图表交换且正合, 这完全是推出模的构造验证的. (1) 然后检查 i 是满射, 我们声称题述 j 能给 x 找到一个原像, 为此注意定理中正合列的自然性, 得到

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Hom}(K, N) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_R(M, N) \arrow[r] & 0 , \\ \mathrm{Hom}(X, N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(N, N) \arrow[r, "\partial"'] \arrow[u, "\beta_*"] & \mathrm{Ext}^1_R(M, N) \arrow[u, equal] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \beta \arrow[r, mapsto] & x . \\ \mathrm{id}_N \arrow[r, mapsto] \arrow[u, mapsto] & x \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

(2) 接下来检查 i 是单射. 假设 i 把某扩张打成 $0 \in \mathrm{Ext}^1_R(M,N)$, 还是上面左边的交换图, 注意 $\partial(\mathrm{id}_N) = 0$ 因此 id_N 来自一个 $\mathrm{Hom}(X,N)$ 中的元素, 该元素 $X \to N$ 能从左侧分裂正合列. 这样 i 是同构, 于是 j 找到的原像必然唯一, 我们也检查了 j 良定义.
(3) 最后检查 i,j 是群同构. 假设对 $i=1,2$ 有 $0 \to N \to X_i \to M \to 0$, 它们对应 $x_1, x_2 \in \mathrm{Ext}^1_R(M,N)$, 其的 Baer 和是 $0 \to N \to Y \to M \to 0$, 这样根据构造 $P \to X_1, P \to X_2$ 也诱导 $P \to Y$ 为其的和, 限制在 K 上一定形如 $\beta_1, \beta_2 : K \to N$ 的和. □

注 4.98. 检查 $\partial : \mathrm{Hom}_R(N,N) \to \mathrm{Ext}^1_R(M,N)$ 下 id_N 的像是 $\partial' : \mathrm{Hom}_R(M,M) \to \mathrm{Ext}^1_R(M,N)$ 下 id_M 的像有纯追图证明, 两种方法都诱导 $G \to \mathrm{Ext}^1_R(M,N)$ 在 Ext 平衡下相同的同构.

注意上面这种方法可以抽象地在 Abel 范畴中定义 Ext^1 函子. 同样可以抽象定义 $\mathrm{Ext}^n(M,N)$, 它被称为 Yoneda Ext 群. 详细的定义是 $0 \to N \to X_n \to \cdots \to X_1 \to M \to 0$ 正合列的等价类, 如果两个这样的正合列能建立 M,N 处为同构的链映射则称两个正合列等价. 现在我们仍有 Baer 和, 对 X_i, X_i' 两列, X_1'' 定义为 $X_1 \to M \leftarrow X_1'$ 的拉回, X_n'' 定义为 $X_n' \leftarrow B \to X_n$ 的推出, Y_n 定义为 X_n'' 商掉 N 的斜对角线, 于是定义如下的正合列

$$0 \to N \to Y_n \to X_{n-1} \oplus X_{n-1}' \to \cdots \to X_2 \oplus X_2' \to X_1'' \to M \to 0$$

为它们的 Baer 和. 那么在有足够投射的时候, 设 $P_\bullet \to M$ 是一个投射消解, 这样

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & X_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X_1 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

而由维数平移我们有正合列

$$\mathrm{Hom}(P_{n-1}, N) \to \mathrm{Hom}(K,N) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}^n(M,N) \to 0.$$

这样 $\partial(\beta)$ 就是 $\mathrm{Ext}^n(M,N)$ 中对应的扩张. 反过来对 $\mathrm{Ext}^n(M,N)$ 中的元素也可以任取 $\mathrm{Hom}(K,N)$ 中的原像然后记 $N \leftarrow K \to P_{n-1}$ 推出 X_n 即可得到正合列

$$0 \to N \to X_n \to P_{n-2} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0.$$

一样的方法也能证明此时导出和 Yoneda $\mathrm{Ext}^n(M,N)$ 作为 Abel 群函子性地一致.

4.2.8 万有系数定理（Universal Coefficient Theorem）

定理 4.99 (Künneth 公式). 设 $P_\bullet$ 是链复形, 都是平坦 R-模, 满足每个 $d(P_n) \subset P_{n-1}$ 也是平坦 R-模, 则对 R-模 M, 有如下的短正合列:

$$0 \to H_n(P) \otimes_R M \to H_n(P \otimes_R M) \to \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(P), M) \to 0.$$

证明. 对任意 M 观察 $0 \to K_n \to P_n \to d(P_n) \to 0$ 由 $- \otimes_R M$ 诱导的长正合列, **习题 4.90** 推出 K_n 也平坦. 这样 $0 \to K \otimes M \to P \otimes M \to d(P) \otimes M \to 0$ 是复形正合列, 其中 $K, d(P)$ 中的微分为 0 映射. 于是写出上述短正合列的同调长正合列得到

$$\begin{tikzcd}
H_{n+1}(d(P) \otimes_R M) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, equal] & H_n(K \otimes_R M) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_n(P \otimes_R M) \arrow[r] & H_n(d(P) \otimes_R M) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, equal] & H_{n-1}(K \otimes_R M) . \arrow[d, equal] \\
d(P_{n+1}) \otimes_R M & K_n \otimes_R M & & d(P_n) \otimes_R M & K_{n-1} \otimes_R M
\end{tikzcd}$$

具体计算 ∂ 得知它是 $i \otimes M$, 其中 $0 \to d(P_{n+1}) \xhookrightarrow{i} K_n \to H_n(P) \to 0$. 它是 $H_n(P)$ 的平坦消解, 因此 $\mathrm{Tor}_\bullet^R(H_n(P), M)$ 是 $0 \to d(P_{n+1}) \otimes M \xrightarrow{\partial} K_n \otimes M \to 0$ 的同调群. 至此计算完成. □

推论 4.100 (同调万有系数公式). 若 $P_\bullet$ 是 R-模链复形, 满足 $P_n, d(P_n)$ 都投射, 则对每个 R-模 M, *Künneth* 公式都 (不典范地) 分裂, 即 $H_n(P \otimes_R M) \cong \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(P), M) \oplus (H_n(P) \otimes_R M)$. 由**引理 4.84** 知自由 *Abel* 群子群自由, 故自由 *Abel* 群链复形符合条件.

证明. 由投射性, 立刻推出每个短正合列 $0 \to K_n \to P_n \to d(P_n) \to 0$ 都分裂, 故 $P_n \cong K_n \oplus d(P_n)$, 作用 $- \otimes_R M$, 得知 $K_n \otimes_R M$ 是 $P_n \otimes_R M$ 的直和分量, 从而 $K_n \otimes_R M$ 是 $\mathrm{Ker}(d_n \otimes 1 : P_n \otimes_R M \to P_{n-1} \otimes_R M)$ 的直和分量 (因为它是 $P_n \otimes_R M$ 含 $K_n \otimes_R M$ 的一个子群), 商掉 $\mathrm{Im}(d_{n+1} \otimes 1 : P_{n+1} \otimes_R M \to P_n \otimes_R M)$ 得到 $H_n(P) \otimes_R M$ 是 $H_n(P \otimes_R M)$ 的直和分量, 于是由 Künneth 公式, 确认另一个直和分量后得到非典范的同构. □

之所以称之为万有系数公式, 因为在代数拓扑中, 很多链群原本是 $\mathbb{Z}$-系数的, 即一系列自由 Abel 群, 但是有时候我们关心换成其他 Abel 群 G-系数的, 于是万有系数公式告诉我们, 可以用 $\mathbb{Z}$-系数的同调群推出任意 G-系数的同调群, 随之而来的代价就是, 得到的同构是不典范的.

定理 4.101 (复形的 Künneth 公式). 若 $P_\bullet, Q_\bullet$ 是 R-模复形, $P_n, d(P_n)$ 平坦, 则有

$$0 \to \bigoplus_{p+q=n} H_p(P) \otimes_R H_q(Q) \to H_n\left(\mathrm{Tot}^\oplus(P \otimes Q)\right) \to \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R(H_p(P), H_q(Q)) \to 0.$$

若 $P_n, d(P_n)$ 投射, 则得到 (非典范) 分裂的正合列. 即具有直和关系.

证明. 类似**定理 4.99** 的证明, 得到全复形正合列

$$0 \to \mathrm{Tot}^\oplus(K \otimes Q) \to \mathrm{Tot}^\oplus(P \otimes Q) \to \mathrm{Tot}^\oplus(d(P) \otimes Q) \to 0.$$

其中 $K, d(P)$ 的链映射都是 0 映射. 于是同调群长正合列正如我们所预计的那样.
至于正合列分裂, 仍然是模仿**推论 4.100**, 推出 $\mathrm{Tot}_n^{\oplus}(d(P)\otimes Q)$ 和 $\mathrm{Tot}_n^{\oplus}(K\otimes Q)$ 是 $\mathrm{Tot}_n^{\oplus}(P\otimes Q)$ 的直和分量, 从而 $\mathrm{Tot}_n^{\oplus}(K\otimes Q)$ 也是 $\mathrm{Ker}\left(d_n : \mathrm{Tot}_n^{\oplus}(P\otimes Q)\to \mathrm{Tot}_{n-1}^{\oplus}(P\otimes Q)\right)$ 的直和分量, 于是商掉 $\mathrm{Im}\left(d_{n+1} : \mathrm{Tot}_{n+1}^{\oplus}(P\otimes Q)\to \mathrm{Tot}_n^{\oplus}(P\otimes Q)\right)$ 即得. □

实际上在上同调中, 我们也有类似的版本:

习题 4.102 (上同调万有系数公式). 设 $P_\bullet$ 是 R-模链复形, 满足 $P_n, d(P_n)$ 都投射, 则对任意 R-模 M, 我们总有 (非典范) 分裂的短正合列

$$0\to \mathrm{Ext}_R^1(H_{n-1}(P), M)\to H^n(\mathrm{Hom}_R(P, M))\to \mathrm{Hom}_R(H_n(P), M)\to 0.$$

即有 $H^n(\mathrm{Hom}_R(P, M))\cong \mathrm{Ext}_R^1(H_{n-1}(P), M)\oplus \mathrm{Hom}_R(H_n(P), M)$. 由**引理 4.84** 知自由 *Abel* 群子群自由, 故自由 *Abel* 群链复形符合条件. 和**推论 4.100** 类似, 有分裂正合列

$$0\to \mathrm{Hom}_R(d(P_n), M)\to \mathrm{Hom}_R(P_n, M)\to \mathrm{Hom}_R(K_n, M)\to 0.$$

习题 4.103 (上复形的 Künneth 公式). 设 $P_\bullet, Q^\bullet$ 为 R-模链复形和上链复形, 满足 $P_n, d(P_n)$ 投射, 则我们有如下的分裂的 R-模正合列

$$0\to \prod_{p+q=n-1}\mathrm{Ext}_R^1(H_p(P), H^q(Q))\to H^n\left(\mathrm{Tot}^{\Pi}\,\mathrm{Hom}(P, Q)\right)\to \prod_{p+q=n}\mathrm{Hom}_R(H_p(P), H^q(Q))\to 0.$$

4.3 谱序列（Spectral Sequence）

4.3.1 谱序列的第一个构造：滤复形

谱序列是一个计算同调群的实用工具或者说算法, 本质想法是通过不断逼近, 最后在代数上收敛到我们想要的结果. 作为一个基本的例子, 想象有限维线性空间链复形 $U\xrightarrow{S}V\xrightarrow{T}W$. 我们的目标是计算 V 处的同调群, 为此必须要判断 $y\in V$ 是否有 $Ty=0$, 如果是的话, 再看是否有 $y=Sx$ 对某个 $x\in U$. 如果它不来自 x, $[y]$ 就是同调群中非平凡的元素.
为此设 W 一组基 $w_1,\cdots,w_n$, $Ty=\sum a_iw_i$. 于是 $Ty=0$ 变成了 n 个小问题, 检查是否有 $a_i=0(i=1,\cdots,n)$, 这有点麻烦. 如果我们一开始只知道 $a_n=0$, 现在我们考虑 $w_1,\cdots,w_{n-1}$ 张成的子空间 $W'\subset W$. 设 $V'=T^{-1}W', U'=S^{-1}V'=(TS)^{-1}W'=U$. 于是得到了一个正合的 $0=U/U'\to V/V'\to W/W'$, $Ty\in W'$ 因此 $y-Sx\in V'$ 对某 $x\in U'$ 且 $T(y-Sx)\in W'$. 于是问题转化为 $U'\to V'\to W'$ 的同调群计算, 我们一步步地在缩小 $\mathrm{Ker}\,T$ 以外的东西. 同样我们也能考虑 U 的一维子空间 U' 并考虑 $V'=SU', W'=TV'=TSU=0$, 得到正合的

$U' \to V' \to W' = 0$, 于是转而考虑 $U/U' \to V/V' \to W/W'$ 的同调群计算. 这样一直下去, 最后整个序列会完全变成 $0 \to \operatorname{Ker} T / \operatorname{Im} S \to 0$. 至此该处的同调群水落石出.

让我们稍微一般些. 从上面的例子看, 对象的一系列相容的子结构将带来一个同调群的计算方法, 缩小以达到核与扩大以达到像的操作也完全可以同时进行, 为此先给出滤结构的定义.

定义 4.104. 设 $\mathcal{A}$ 是 *Abel* 范畴, $C^\bullet = \{C^n, d^n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathrm{Ch}(\mathcal{A})$ 是上链复形, 其**一滤结构**指一族对象 $\{F^pC^\bullet \in \mathrm{Ch}(\mathcal{A})\}_{p\in\mathbb{Z}}$. 满足 $\cdots \supset F^{p-1}C^n \supset F^pC^n \supset F^{p+1}C^n \supset \cdots$, 这称为**一条滤链**. 且要求（相容性）对应的嵌入带来链映射 $\cdots \leftarrow F^{p-1}C^\bullet \leftarrow F^pC^\bullet \leftarrow F^{p+1}C^\bullet \leftarrow \cdots$. 带滤结构的链复形称**滤复形**. 滤链的**有界性**指对诸 n, $F^pC^n = 0, F^{-p}C^n = C^n$ 对充分大的 p.

习题 4.105. 对 $C^\bullet$ 上的两个有界滤结构 F_1, F_2. F_1 用 F_2 作的**加细**指的是在每两项间作这样的细分 $F_1^{p+1}C^\bullet \subset \{F_1^{p+1}C^\bullet + F_2^kC^\bullet \cap F_1^pC^\bullet\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset F_1^pC^\bullet$. 回忆我们有 **Zassenhaus 引理**, 设对象 $X \in \mathcal{A}$ 中有四个子对象 $B \subset A, D \subset C$, 则我们有自然同构

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \frac{A\cap C}{(A\cap D)+(B\cap C)} \arrow[dl, equal] \arrow[dr, equal] & \\
\frac{B+(C\cap A)}{B+(D\cap A)} \arrow[dr, equal] & & \frac{D+(A\cap C)}{D+(B\cap C)} \arrow[dl, equal] \\
 & \frac{(A+D)\cap(B+C)}{B+D} &
\end{tikzcd}
\implies
\begin{array}{c}
\frac{F_1^{p+1}C^\bullet+(F_2^kC^\bullet\cap F_1^pC^\bullet)}{F_1^{p+1}C^\bullet+(F_2^{k+1}C^\bullet\cap F_1^pC^\bullet)}. \\
\| \\
\frac{F_2^{k+1}C^\bullet+(F_1^pC^\bullet\cap F_2^kC^\bullet)}{F_2^{k+1}C^\bullet+(F_1^{p+1}C^\bullet\cap F_2^kC^\bullet)}
\end{array}$$

这一计算表明 F_1 用 F_2 加细和 F_2 用 F_1 加细得到的相邻两项商只差置换.

还有一个与上式形状密切相关的引理, 设对象 $X, Y \in \mathcal{A}$, $f : X \to Y$, 则对子对象 $B \subset A \subset X, D \subset C \subset Y$ 总有 f 诱导如下自然的同构:

$$\tilde{f} : \frac{B + (f^{-1}(C) \cap A)}{B + (f^{-1}(D) \cap A)} \xrightarrow{\cong} \frac{f(B) + (C \cap f(A))}{f(B) + (D \cap f(A))}.$$

现假设我们拿到手一个有界的滤复形 $\{F^pC^n\}$, 定义 $E_0^{p,q} = F^pC^{p+q}/F^{p+1}C^{p+q}$, 接下来的想法是, 使用 $d(F^\bullet C^{p+q-1}), d^{-1}(F^\bullet C^{p+q+1})$ 不断细分 $0 \subset \operatorname{Im} d \subset F^\bullet C^{p+q}$ 和 $\operatorname{Ker} d \subset F^\bullet C^{p+q}$. 定义

$$\begin{aligned}
Z_r^{p,q} &:= F^{p+1}C^{p+q} + F^pC^{p+q} \cap d^{-1}(F^{p+r+1}C^{p+q+1}), \\
B_r^{p,q} &:= F^{p+1}C^{p+q} + F^pC^{p+q} \cap d(F^{p-r}C^{p+q-1}), \\
E_{r+1}^{p,q} &:= Z_r^{p,q}/B_r^{p,q}.
\end{aligned}$$

利用滤复形的有界性, 对于给定的 p, q 只要 r 足够大, 最后三者总会稳定为下标无穷者, 例如 $F^\infty C^\bullet = 0, F^{-\infty}C^\bullet = C^\bullet$, 依这想法定义如下

$$\begin{aligned}
Z_\infty^{p,q} &:= F^{p+1}C^{p+q} + \operatorname{Ker}(d : F^pC^{p+q} \to F^pC^{p+q+1}), \\
B_\infty^{p,q} &:= F^{p+1}C^{p+q} + \operatorname{Im}(d : F^pC^{p+q-1} \to F^pC^{p+q}).
\end{aligned}$$

这时经过一些简单的计算可以检查

$$F^pH^n := \{[x]\in H^n(C): x\in F^pC^n, dx=0\}\subset H^n(C),$$
$$E_\infty^{p,q} := Z_\infty^{p,q}/B_\infty^{p,q} = F^pH^{p+q}/F^{p+1}H^{p+q}.$$

有趣的事情开始了, 这些项都是怎么来的呢, 先注意**习题 4.105** 两个引理推出

$$\begin{aligned}\frac{Z_{r-1}^{p,q}}{Z_r^{p,q}} &= \frac{F^{p+1}C^{p+q}+F^pC^{p+q}\cap d^{-1}(F^{p+r}C^{p+q+1})}{F^{p+1}C^{p+q}+F^pC^{p+q}\cap d^{-1}(F^{p+r+1}C^{p+q+1})}\\ &= \frac{d(F^{p+1}C^{p+q})+d(F^pC^{p+q})\cap F^{p+r}C^{p+q+1}}{d(F^{p+1}C^{p+q})+d(F^pC^{p+q})\cap F^{p+r+1}C^{p+q+1}}\\ &= \frac{F^{p+r+1}C^{p+q+1}+F^{p+r}C^{p+q+1}\cap d(F^pC^{p+q})}{F^{p+r+1}C^{p+q+1}+F^{p+r}C^{p+q+1}\cap d(F^{p+1}C^{p+q})} = \frac{B_r^{p+r,q-r+1}}{B_{r-1}^{p+r,q-r+1}}\end{aligned}$$

考虑 $d: C^{p+q}\to C^{p+q+1}$ 诱导 $d_r^{p,q}: E_r^{p,q}\to E_r^{p+r,q-r+1}$ 为

$$E_r^{p,q}=\frac{Z_{r-1}^{p,q}}{B_{r-1}^{p,q}}\to\frac{Z_{r-1}^{p,q}}{Z_r^{p,q}}\cong\frac{B_r^{p+r,q-r+1}}{B_{r-1}^{p+r,q-r+1}}\to\frac{Z_{r-1}^{p+r,q-r+1}}{B_{r-1}^{p+r,q-r+1}}=E_r^{p+r,q-r+1}.$$

巧妙的是, 这正是映射的满单分解, 利用 $d^2=0$ 可检查上面两个箭头良定, 于是 $E_r^{p,q}$ 中 d 的核与像分别是 $Z_r^{p,q}/B_{r-1}^{p,q}$ 与 $B_r^{p,q}/B_{r-1}^{p,q}$, 因此该处 E 的同调群为 $Z_r^{p,q}/B_r^{p,q}\cong E_{r+1}^{p,q}$.

下面解释这两页纸中我们做了什么: 一开始的线性空间例子是一个极其简化的模型, 我们只使用了一个三项的链复形进行展示, 并且形象地展示了滤结构是如何缩小核以及扩大像的. 然后我们对一般的滤结构以及链复形正确地计算了一个合理的加细下 Z_r 以及 B_r 是如何逼近核与像的, 最后发现了一个有趣的事实, 即 $E_{r+1}^{p,q}$ 是 $E_r^{p,q}$ 处的同调群, 换言之最后只要不断计算同调群而无需关心 Z_r, B_r, 计算的结果会收敛到 $F^pH^{p+q}/F^{p+1}H^{p+q}$, 即从某项开始就稳定不变了, 实际上读者也能检查对于很大的 r, 边缘映射 $d_r^{p,q}$ 也会变成 0.

定义 4.106. 固定 *Abel* 范畴 $\mathcal{A}$, 一个**上同调谱序列**包含如下资料: (1) 一个自然数 r_0, 对每个 $r\geq r_0$ 和整数 p,q, 有一个 $E_r^{p,q}\in\mathcal{A}$ 以及边缘映射 $d_r=d_r^{p,q}: E_r^{p,q}\to E_r^{p+r,q-r+1}$. 满足 $d_r^2=0$. 对于一个 r, 所有 $p,q\in\mathbb{Z}$ 这些 (E_r,d_r) 称谱序列的**第 r 页**. 另外 $p+q$ 称为**总次数**, 边缘映射总把总次数加 1. (2) 一个同构 $E_{r+1}^{p,q}\cong H_r^{p,q}:=\operatorname{Ker}(d_r^{p,q}: E_r^{p,q}\to E_r^{p+r,q-r+1})/\operatorname{Im}(d_r^{p-r,q+r-1}: E_r^{p-r,q+r-1}\to E_r^{p,q})$, 即 $E_r^{p,q}$ 处的 d_r 链的上同调群同构 $E_{r+1}^{p,q}$.

谱序列 $\{E_r^{p,q}\}$ **收敛**指对任意 p,q, 存在 R 使 $r\geq R$ 时 $d_r^{p,q}, d_r^{p-r,q+r-1}$ 都是零映射, 这样 $r\geq R$ 时 $E_r^{p,q}$ 都同构, 记作 $E_\infty^{p,q}$, 称 $E_r^{p,q}$ 收敛到 $E_\infty^{p,q}$, 记 $E_r^{p,q}\Rightarrow E_\infty^{p,q}$.

例 4.107. 观察短正合列 $0\to D^\bullet\to C^\bullet\to Q^\bullet\to 0$. 于是 $C^\bullet$ 上有滤链 $C^\bullet\supset D^\bullet\supset 0$.

$$\begin{array}{ccccccc} E^{0,1} & E^{1,1} & Q^1 & D^2 & H^1(Q)\longrightarrow H^2(D) & \operatorname{Ker}(d_1^{0,1}) & \operatorname{Coker}(d_1^{0,1})\\ & & \uparrow & \uparrow & & & \\ E^{0,0} & E^{1,0} & Q^0 & D^1 & H^0(Q)\longrightarrow H^1(D) & \operatorname{Ker}(d_1^{0,0}) & \operatorname{Coker}(d_1^{0,0})\\ & & \uparrow & \uparrow & & & \\ E^{0,-1} & E^{1,-1} & Q^{-1} & D^0 & H^{-1}(Q)\longrightarrow H^0(D) & \operatorname{Ker}(d_1^{0,-1}) & \operatorname{Coker}(d_1^{0,-1})\end{array}$$

这里我们展示了原点附近的 $0,1,2$ 页，从第 2 页开始稳定不动，即有 $E_2 = E_\infty$. 于是 $\operatorname{Coker} d_1^{0,n} = F^1H^{n+1}, \operatorname{Ker} d_1^{0,n} = F^0H^n/F^1H^n$，于是得到正合列

$$0 \to \operatorname{Coker} d_1^{0,n-1} \to H^n(C) \to \operatorname{Ker} d_1^{0,n} \to 0.$$

由此得长正合列 $\cdots \to H^n(C) \to H^n(Q) \to H^{n+1}(D) \to H^{n+1}(C) \to \cdots$. 技巧可用于所有两列非零的谱序列，读者可以类似地写出一般情况的长正合列.

4.3.2 谱序列的第二个构造：双复形

给定双复形 $C^{p,q}$，为简单起见还是先考虑有界情况，即每个 $n = p+q$ 斜线上，只有有限多 $C^{p,q} \neq 0$. 这时全复形中只涉及有限直和或直积，所以干脆省略上标. 现在对 $(\operatorname{Tot} C)^\bullet$，我们有自然的分次 $F^p(\operatorname{Tot} C)^n := \operatorname{Tot}((C^{x,q})_{x\geq p})^n$. 那么依照滤复形谱序列的知识，$E_0 = C$ 而 $E_1 = H(C, d_{(0,1)})$ 即 C 沿着第二个分量的 d 的同调群，而 E_1 的导数是沿着第一个分量的 d 诱导同调群上的映射，于是 $E_2^{p,q} = H^p(H^q(C, d_{(0,1)}), d_{(1,0)})$. 此时暂不关心 E_2 和更后面页的边缘映射，核心是我们已经知道 $E \Rightarrow F^pH^{p+q}(\operatorname{Tot}(C))/F^{p+1}H^{p+q}(\operatorname{Tot}(C))$.

例 4.108. 我们重温**蛇引理**，考虑传统的图表

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "k"] & Y \arrow[r, "h"] & Z \\
 & A \arrow[u, "s"] \arrow[r, "f"] & B \arrow[u, "t"] \arrow[r, "g"] & C \arrow[u, "r"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}.$$

以 A 为 $C^{0,0}$ 构建双复形，那么在方向上我们有一些选择. 现在如果以上，右为 p,q 轴正方向，计算得到 $H^n(\operatorname{Tot})$ 在 $0,1,2,3$ 分别为 $\operatorname{Ker} f, 0, 0, \operatorname{Coker} h$，这是因为对每个 n，$n = p+q$ 上只有一项非零. 如果以右，上为 p,q 轴正方向，计算得到其第一第二页为

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Coker} s \arrow[r, "k"] & \operatorname{Coker} t \arrow[r, "h"] & \operatorname{Coker} r \\
\operatorname{Ker} s \arrow[r, "f"] & \operatorname{Ker} t \arrow[r, "g"] & \operatorname{Ker} t
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
W \arrow[drr, "\cong"] & 0 & \operatorname{Coker} h \\
\operatorname{Ker} f & 0 & W
\end{tikzcd}$$

这里利用了已知的 $H^n(\operatorname{Tot})$，至此读者请写出对应的长正合列.

例 4.109. 我们重温Tor **的平衡性**，对 R-模 M, N，作投射消解 $P_\bullet \to M, Q_\bullet \to N$，考虑第四象限的双复形 $C^{-p,-q} = P_p \otimes Q_q$. 类似前例，容易检查 $H_n(\operatorname{Tot}(P \otimes Q)) = \operatorname{Tor}_n^R(A, B)$. 这一下子就省去了**映射锥**和**零调装配**这些麻烦工具的使用. 读者类似地检查Ext **的平衡性**.

4.3.3 应用：超同调（Hyperhomology）和 Grothendieck 谱序列

定义 4.110. 足够投射的 *Abel* 范畴 $\mathcal{A}$，则 $A_\bullet \in \operatorname{Ch}_\bullet(\mathcal{A})$ 的一个 **Cartan–Eilenberg 消解**指一个上半平面的双复形 $P_{p,q}$ 对 $q \geq 0$，满足 (1) $P_{p,q} \xrightarrow{\epsilon} A_p$ 对每个 p 都是投射消解，而对 $A_\bullet$ 的像

链 $B_\bullet = (\operatorname{Im} d_\bullet, 0)$ 与同调群链 $H_\bullet = (H_\bullet(A), 0)$, $P_{p,q}$ 在水平方向取像链与同调群链得到的双复形 $P^B_{p,q}, P^H_{p,q}$ 诱导 $B_\bullet, H_\bullet$ 的投射消解, (2) 若 $A_p = 0$ 则 $P_{p,q} = 0$ 对该 p 的所有 q.
类似的, 我们也可以建立内射的 **Cartan–Eilenberg 消解**, 细节完全相同.

引理 4.111. *Cartan–Eilenberg 消解总存在.*

证明. 记 $Z_\bullet$ 为核链, 先给出 $B_\bullet, H_\bullet$ 的任意投射消解 $P^B_{p,q} \to B_p$ 与 $P^H_{p,q} \to H_p$, 由马蹄引理, 短正合列 $0 \to B_p \to Z_p \to H_p \to 0$ 给出 $0 \to P^B_{p,\bullet} \to P^Z_{p,\bullet} \to P^H_{p,\bullet} \to 0$, 短正合列 $0 \to Z_p \to C_p \to B_{p-1} \to 0$ 给出 $0 \to P^Z_{p,\bullet} \to P^C_{p,\bullet} \to P^B_{p-1,\bullet} \to 0$. 至此典范的复合 $P^C_{p+1,q} \to P^B_{p,q} \hookrightarrow P^Z_{p,q} \to P^C_{p,q}$ 给出了横向微分, 纵向是自然的, 考虑双复形微分的符号问题, 纵向微分乘上 $(-1)^p$. □

定义 4.112. 双复形间映射 $f, g : D_{\bullet\bullet} \to E_{\bullet\bullet}$ 间的**链同伦**指一族 $s^h_{p,q} : D_{p,q} \to E_{p+1,q}$ 与 $s^v_{p,q} : D_{p,q} \to E_{p,q+1}$ 使 $g - f = (d^h s^h + s^h d^h) + (d^v s^v + s^v d^v)$ 且 $s^v d^h + d^h s^v = s^h d^v + d^v s^h = 0$.

习题 4.113. 假设 $\mathcal{A}$ 中有任意直和或者需要考察的序列具有有界性, 模仿**命题 4.66**, **定理 4.73** 证明 (1) 双复形间的映射链同伦, 则诱导 $\operatorname{Tot}^\oplus$ 间的链同伦 $s^v + s^h$. (2) 两个链复形间的两个链映射链同伦, 则诱导它们 *Cartan–Eilenberg* 消解间的链同伦.

于是由此可定义超导出函子.

定义 4.114. *Abel* 范畴间的函子 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 右正合, $\mathcal{A}$ 足够投射, 则对 $\mathcal{A}$ 中的链复形 A, 倘若 (1) A 下有界或 (2) $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 中的可数直和存在, 二者至少其一成立, 则可取 *Cartan–Eilenberg* 消解 $P \to A$ 并定义 L 的**超左导出**为 $\mathbb{L}_n F(A) := H_n \operatorname{Tot}^\oplus(F(P))$. 注意前面的习题保证这一定义与消解的选择无关. 可检查有自然的函子性 $\mathbb{L}_n F : \mathrm{Ch}_\bullet(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}$.

此外还有一些随之而来的自然性质.

习题 4.115. (1) 若 $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, 将它放在第零项而也可将 A 视作链复形, 则 $\mathbb{L}_i F(A) = L_i F(A)$. (2) 考虑 $H_0 F : \mathrm{Ch}_{\geq 0}(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}$, 则此时 $\mathbb{L}_i F$ 都是 $H_0 F$ 的右导出. (3) $\mathbb{L}_i F(A[n]) = \mathbb{L}_{n+i} F(A)$, 其中 $A[n]_i := A_{n+i}$ 表示将 A 左平移 n 格. (4) 对有界链复形的短正合列 $0 \to A_\bullet \to B_\bullet \to C_\bullet \to 0$, 我们有长正合列 $\cdots \to \mathbb{L}_{i+1} F(C) \to \mathbb{L}_i F(A) \to \mathbb{L}_i F(B) \to \mathbb{L}_i F(C) \to \cdots$.

命题 4.116. 对下有界的 $A_\bullet$, 我们有谱序列

$$E^2_{p,q} = (L_p F)(H_q(A)) \Rightarrow \mathbb{L}_{p+q} F(A),$$
$$E^2_{p,q} = H_p(L_q F(A)) \Rightarrow \mathbb{L}_{p+q} F(A).$$

证明. 把 $A_\bullet$ 作 Cartan–Eilenberg 消解作为第 0 页使用双复形谱序列. □

推论 4.117. (1) 若 $A_\bullet$ 是正合, 则 $\mathbb{L}_iF(A)=0$. (2) 若 $f:A_\bullet\to B_\bullet$ 同伦等价, 则 $\mathbb{L}_\bullet F(A)=\mathbb{L}_\bullet F(B)$. (3) 若每个 A_p 都 F-零调, 即对 $q>0, L_qF(A_p)=0$, 则 $\mathbb{L}_pF(A)=H_p(F(A))$.

带着这种想法, 我们引入一个重要的工具:

定理 4.118 (Grothendieck 谱序列)**.** 设 $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ 是 *Abel* 范畴满足 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 足够内射, $G:\mathcal{A}\to\mathcal{B}, F:\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ 左正合, 且 G 把内射对象打到 F-零调对象, 则有第一象限谱序列 $E_2^{p,q}=(R^pF)\circ(R^qG)\Rightarrow R^{p+q}(F\circ G)$. 类似的也有右正合版本.

证明. 对 $A\in\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ 取内射消解 $A\to I^\bullet$, 然后再作 $G(I)^\bullet$ 的 Cartan–Eilenberg 消解 $GI^\bullet\to C^{\bullet\bullet}$. 现在我们取第零页 $E_0=C$, 按照先前命题的方法得到两个谱序列

$$E_2^{p,q}=(R^pF)(H^q(GI))\Rightarrow\mathbb{R}^{p+q}F(G(I)),$$
$$E_2^{p,q}=H^p((R^qF)(GI))\Rightarrow\mathbb{R}^{p+q}F(G(I)).$$

利用 $G(I)$ 的元素都是 F-零调的, 因此第二个谱序列给定 p, 只有 $q=0$ 时才是非零的 $H^p(FG(I))$, 这表明 $\mathbb{R}^n(F(G(I)))=H^n(FG(I))=R^n(FG)(A)$. 而第一个谱序列中注意 $H^q(GI)=R^qG(A)$, 因此第一个谱序列变成 $(R^pF)\circ(R^qG)\Rightarrow R^{p+q}(F\circ G)$, 结论得证. □

Grothendieck 谱序列有非常重要的应用, 很多代数几何中的常见谱序列都来源于此.

4.3.4 谱序列的第三个构造: 正合偶

4.4 应用: 同调维数 (Homological Dimension)

4.4.1 基本定义

定义 4.119. 对 *Abel* 范畴 $\mathcal{A},\mathcal{B}$, 若 $\mathcal{A}$ 足够投射, 则对右正合函子 $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 和 $M\in\mathcal{A}$, 可定义 M 的F-**同调维数**为 $\sup\{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}:L_nF(M)\neq 0\}$. 而 F 的**同调维数**即对所有 M 取上确界, 即 $\sup\{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}:L_nF\neq 0\}$. 同理可定义有足够内射情形的 **(上) 同调维数**.
对一个 *Abel* 范畴 $\mathcal{A}$, 由于我们有 *Yoneda* Ext^n, 可自然地定义 $\sup\{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}:\mathrm{Ext}^n\neq 0\}$ 为 $\mathcal{A}$ 的**同调维数**而无需假设它足够投射或足够内射.

定义 4.120. 对一个环 R, 我们定义**整体维数** $\mathrm{gl.dim}\,R$ 为 *Abel* 范畴 Mod_R 的同调维数, R-模 M 的**投射维数**, **内射维数**, **平坦维数**, 记作 $\mathrm{pr.dim}\,M$, $\mathrm{in.dim}\,M$, $\mathrm{fl.dim}\,M$, 分别是函子 $\mathrm{Hom}_R(M,-)$, $\mathrm{Hom}_R(-,M)$, $-\otimes M$ 的同调维数. 而环 R 的Tor-**维数** $\text{tor-dim}\,R$ 定义为 $\sup\{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}:\mathrm{Tor}_n^R\neq 0\}$. 注意区分哪些是对模定义的, 哪些是对环定义的.

尽管后面数个小节都是针对环和模的具体情形, 但在这一小节中我们仍然有一些一般结论. 这里我们研究 $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 右正合, 将 $M\in\mathcal{A}$ 的 F-同调维数记作 $d_F(M)$.

性质 4.121. 对正合列 $0\to N\to M\to Q\to 0$, 有 $d_F(M)\le\max\{d_F(N),d_F(Q)\},d_F(N)\le\max\{d_F(M),d_F(Q)\},d_F(Q)\le\max\{d_F(M),d_F(N)+1\}$ 且如有 $d_F(M)<d_F(Q)$ 则 $d_F(Q)=d_F(N)+1$. 这是 $0\to N\to M\to Q\to 0$ 诱导的长正合列的自然推论.

性质 4.122. 函子 F 的同调维数也等于 $\inf\{n\in\mathbb{Z}_{\ge 0}:L_{n+1}F=0\}$. 只要证 $L_nF=0$ 推出 $L_{n+1}F=0$, 对任意对象 M, 取投射 P 打满 M 和正合列 $0\to K\to P\to M\to 0$, 由维数平移 $L_{n+1}FM\cong L_nFK$ 得.

性质 4.123. 数 $d_F(M)$ 正是 M 的 F-零调消解的最短长度. 此外对对任意 $n\ge d_F(M)$ 只要 $0\to A_n\to\cdots\to A_0\to M\to 0$ 是正合列, 且 $A_0,\cdots,A_{n-1}$ 是 F-零调的, 则 A_n 亦然.

证明. 设最短长度为 d, 首先 $d_F(M)\le d$, 因为零调消解可以计算导出函子. 而 $d_F(M)\ge d$ 只需证明命题中关于零调的描述, 取长度 $d_F(M)-1$ 的零调消解, 然后取 $A_{d_F(M)}$ 为核即可. 对 n 归纳, $n=0$ 时显然; 对一般 n, 设 $K=\mathrm{Ker}(A_0\to M)$, 现在 $d_F(K)\le\max\{d_F(M)-1,0\}$, 于是对 $0\to A_n\to\cdots\to A_1\to K\to 0$ 使用归纳假设即得. □

性质 4.124. 若 $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B},G:\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ 是有足够投射对象的 *Abel* 范畴间的右正合函子, F 将投射对象映到 G-零调对象, 则 GF 的同调维数不超过 F,G 同调维数之和. 这是 **Grothendieck 谱序列**的直接推论.

另外, 我们观察比较常见的例子, 以建立同调维数的直观认识.

例 4.125. 对域 k, 线性空间范畴 Mod_k 的同调维数是 0, Ab 的同调维数为 1, 实际上 *PID* 的同调维数为 1. 但是不离散的赋值环整体维数可以大于 1, 例如考虑 $\mathbb{Z}_p$ 在 $F=\mathbb{Q}_p^a$ 中的整闭包 $\mathcal{O}$, 它的极大理想记作 $\mathfrak{m}$, 剩余域 k. 这样得到正合列 $0\to\mathfrak{m}\to\mathcal{O}\to k\to 0$.

首先 $\mathfrak{m}$ 不是投射 $\mathcal{O}$-模, 虽然 *Kaplansky* 告诉我们局部环上的平坦模都自由, 但是我们无需这么强的结论就能证明, 注意 $0\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathfrak{m},p\mathcal{O})\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathfrak{m},\mathcal{O})\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathfrak{m},\mathcal{O}/p)\to 0$ 不正合. 具体取一列 $\mathfrak{m}$ 中趋于可逆的元素计算它得到 $0\to p\mathfrak{m}\to\mathfrak{m}\to\mathfrak{m}/p\to 0$. 而 $\mathfrak{m}/p\ne\mathfrak{m}/p\mathfrak{m}$. 注意到其实 $\mathfrak{m}$ 有一个两项的自由消解, 所以它的投射维数为 1. 这样 k 的投射维数为 2. 下一小节我们马上就能证明 $\mathcal{O}$ 的整体维数, 也就是投射维数的最大值为 2.

4.4.2 环同调维数的一般性质

引理 4.126 (Auslander)**.** 环 R 模 $M=\bigcup_{e\in\mathscr{E}}M_e$. 其中 M_e 是在包含关系下良序的一族 R-子模, 若对每个 e, $P_e=M_e/\bigcup_{e'<e}M_{e'}$ 投射维数不超过 n, 则 M 投射维数不超过 n.

证明. 对 n 归纳, 先看 $n=0$, 诸 P_e 投射 (可能为 0). 任取截面 $P_e \to M_e$, 我们声称 $\psi : \bigoplus_{e\in\mathscr{E}} P_e \to M$ 是同构. 先证单射, 对 $x=\sum x_e \in \bigoplus P_e$ 每项非零的有限求和, 因为 $\psi(x) \in M_{e_{\max}}$ 在 P_e 的投影是 $x_{e_{\max}} \neq 0$. 再证满射, 对 $y \in M_e$, 我们对 e 超限归纳地检查 y 在像, 只需注意 $y-\psi(x_e) \in \bigcup_{e'<e} M_{e'}$, 于是 ψ 是同构, 而 M 是投射模的直和从而投射.

对 $n>0$, 对 $e \in E$ 取 F_e 是 M_e 中元素生成的自由 R-模从而得到相容短正合列 $0 \to K_e \to F_e \to M_e \to 0$. 于是蛇引理给我们短正合列

$$0 \to K_e / \bigcup_{e'<e} K_{e'} \to F_e / \bigcup_{e'<e} F_{e'} \to M_e / \bigcup_{e'<e} M_{e'} \to 0.$$

这样 $e'<e$ 时 $K_{e'} \to K_e$ 是单射且诸 $K_e/\bigcup_{e'<e} K_{e'}$ 的投射维数不超过 $n-1$, 从而归纳假设保证 K 投射维数至多 $n-1$, 这样 M 投射维数至多 n. □

注 4.127. 命题中投射维数换成平坦维数也成立, 平坦模的 $n=0$ 情形, 注意 $0 \to K \to N \to M \to 0$ 正合那么 K, M 平坦推出 N 平坦, 极限序数的情况注意余极限和 Tor 的交换性可知, 这样 $e'<e$ 时 $M_{e'}$ 皆平坦能推出 $\bigcup_{e'<e} M_{e'}$ 平坦. 而一般 $n>0$ 的递推操作也类似.

推论 4.128. 对任意环 R, 以下四个值相等, $\operatorname{gl.dim} R = \sup\{\operatorname{in.dim}(M) : M \in \mathsf{Mod}_R\} = \sup\{\operatorname{pr.dim}(M) : M \in \mathsf{Mod}_R\} = \sup\{\operatorname{pr.dim}(R/I) : I \text{ 是 } R \text{ 的理想}\}$. 以下三个值相等, $\text{tor-dim}\, R = \sup\{\operatorname{fl.dim}(M) : M \in \mathsf{Mod}_R\} = \sup\{\operatorname{fl.dim}(R/I) : I \text{ 是 } R \text{ 的理想}\}$.

例 4.129. 前一小节末的例子中, $\mathcal{O}$ 的整体维数为 2, 因为它的任意理想都在值群上是一个开或闭的区间, 很容易写出两项的自由消解. 实际上值群可数的赋值环整体维数都至多 2.

命题 4.130. 环的整体维数不小于 Tor-维数, 对诺特环此二值相等.

证明. 前者因模的投射维数不小于平坦维数, 后者因为单生成模的投射维数等于平坦维数: 消解它们只需使用有限生成模, 而有限表现平坦等价于有限生成投射. □

我们再对模的内射维数提类似的定理.

引理 4.131. 环 R 模 M, 则 $\operatorname{in.dim}(M) = \inf\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : \text{任意理想 } J, \operatorname{Ext}_R^{n+1}(R/J, M) = 0\}$.

证明. 右边只会更小, 对 d 归纳检查只要左边大于 d, 右边也会大于 d. 首先 $d=0$ 是 **Baer 判别法**, 右边是 0 就会推出 M 内射. 一般 $d>0$, 考虑 I 内射的正合列 $0 \to M \to I \to C \to 0$. 现在 $\operatorname{in.dim}(M) > d$ 推出 $\operatorname{in.dim}(C) > d-1$, 对 C 用归纳假设得知 $\operatorname{Ext}_R^d(R/J, C) \neq 0$, 因此维数平移得到 $\operatorname{Ext}_R^{d+1}(R/J, M) \cong \operatorname{Ext}_R^d(R/J, C) \neq 0$. 从而由归纳假设得. □

对细节进行一点说明, $0 \to M \to B \to R/J \to 0$ 总分裂, 这将推出 R 的任意理想 J 到 M 的映射能延拓为 $R \to M$. 考虑如下的交换图表, 其中 $M \leftarrow J \to R$ 的推出是 R-模 B:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & J \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[r] \arrow[d] & R/J \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & B \arrow[r] & R/J \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}.$$

底下一行的商也是 R/J 来自**命题 4.14** 的推出版本. 得到 $R \to B \to M$, 后一映射为投影.
然后是和局部化的关系, 因为平坦性是局部检查的, 由此得到:

命题 4.132. 环 R 模 M, $\mathrm{fl.dim}_R(M) = \sup\{\mathrm{fl.dim}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R\}$.

证明. 首先 M 的 R-模平坦消解在任意素理想 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R$ 处局部化得到 $M_\mathfrak{p}$ 的 $R_\mathfrak{p}$-模平坦消解, 故 $\mathrm{fl.dim}_R(M) \geq \mathrm{fl.dim}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$. 反过来若 $\mathrm{fl.dim}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \leq n$ 总成立, 则取 M 的 $n-1$ 项平坦消解 $F_{n-1} \to \cdots \to F_0 \to M \to 0$ 再记 $F_n = \mathrm{Ker}(F_{n-1} \to F_{n-2})$. 由 $\mathrm{fl.dim}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) \leq n$ 局部化 $\mathfrak{p}$ 可知 $(F_n)_\mathfrak{p}$ 是平坦 $R_\mathfrak{p}$ 模, 从而 F_n 是平坦 R-模, $\mathrm{fl.dim}_R(M) \leq n$. □

推论 4.133. 对环 R, 有 $\text{tor-dim}(R) = \sup\{\text{tor-dim}(R_\mathfrak{p}) : \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R\}$.

投射性也在局部化下保持. 故投射维数在局部化下不变大. 不过反正诺特环下二维数相等.

4.4.3 极小消解

本小节讨论的对象总是诺特局部环 $(R, \mathfrak{m}, k)$.

定义 4.134. 诺特局部 R-模链复形 $\cdots F_1 \to F_0 \to F_{-1} \to \cdots$ 若满足右有界, 每项都是有限秩自由模, 且诸 $d(F_n) \subset \mathfrak{m}F_{n-1}$, 或说 $F_\bullet/\mathfrak{m}F_\bullet$ 边缘映射是 0, 则称 $F_\bullet$ 为一个**极小复形**.
对链复形 $K_\bullet$, 它的一个**消解**指一个链态射 $P_\bullet \to K_\bullet$, 诱导同调群间的同构（这也被称为一个拟同构）. **极小消解**指 $F_\bullet$ 是极小复形的消解 $F_\bullet \to K_\bullet$.

引理 4.135. 任意 *Abel* 范畴 $\mathcal{A}$, 设有两个全是 $\mathcal{A}$ 投射对象的链复形 $f : C_{\bullet>0} \to D_{\bullet>0}$ 拟同构, 那么可构造 $g : D \to C$ 使 fg 链同伦于 id_D.

证明. 考虑自然嵌入 $\varphi : D \to \mathrm{cone}(f)$. 那么由**比较定理**, φ 零伦告诉我们存在对应的链同伦 $(g_n, s_n) : D_n \to C_n \oplus D_{n+1}$, 即一个分量上 $(D_n \to C_{n-1}) : g_{n-1}d_D - d_C g_n = 0$, 另一分量上 $(D_n \to D_n) : s_{n-1}d_D - f_n g_n + d_D s_n = \mathrm{id}_D$, 两个等式说 g 是链映射且 fg, id_D 链同伦. □

而这一理论的关键定理是:

定理 4.136 (极小消解). 诺特局部 $(R, \mathfrak{m}, k)$ 上的模链复形 $K_\bullet$. 如果它的同调群满足 (1) 右有界, (2) 有限生成, 那么它存在极小消解 $F_\bullet \to K_\bullet$, 且在消解的同构下唯一. 此时任意 (每项都是) 右有界投射 (模的) 消解到极小消解的映射都是逐项满射.

证明. Step 1) 观察构造需要满足什么. 总的来说使用归纳法. 假设已经有 $F_{\bullet \le n} \to K_\bullet$, 即

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & F_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n"] & F_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots, \\
\cdots \arrow[r] & K_{n+1} \arrow[r] & K_n \arrow[r] & K_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

那么它是部分极小消解的要求有两方面, (a) 上述链映射诱导同调群映射 $H_i(f)$ 在 $i < n$ 时是同构, $i = n$ 时是满射. (b) 对 $i \le n$ 有 $d(F_i) \subset \mathfrak{m}F_{i-1}$ 且 $(f_n, d) : F_n \to K_n \oplus F_{n-1}$ 诱导 $F_n \to H_n(\mathrm{cone}(F_{\bullet<n} \to K_\bullet))$ 在模 $\mathfrak{m}$ 之后是同构.

Step 2) 显然 n 极小时对 $i \le n$ 时 $F_i = 0$, 于是归纳 n 到 $n+1$, 令 $C_\bullet = \mathrm{cone}(F_{\bullet \le n} \to K_\bullet)$ 为映射锥, 由 (a) 得 $H_{\le n}(C_\bullet) = 0$, 现在取 $M = H_{n+1}(C_\bullet)$ 则有正合列

$$0 \to H_{n+1}(K_\bullet) \to M \xrightarrow{\mathrm{pr}_{F_n}} \mathrm{Ker}(F_n \to F_{n-1}) \to H_n(K_\bullet) \to 0.$$

由 R 诺特, $K_\bullet$ 各阶同调都有限生成, 不难得知 M 也有限生成. 因此 $M/\mathfrak{m}M$ 是 k-有限维线性空间. 取一组基, 然后取同样个数元素生成的自由模 F_{n+1} 并任意在 M 提升, 得到 $F_{n+1} \to M$, 由 **Nakayama 引理**这是满射. 现在 $F_{n+1} \to M \to F_n$ 自然, 于是得到 $F_{\bullet \le n+1}$.

Step 3) 然后发现依定义

$$M = \frac{\mathrm{Ker}(K_{n+1} \oplus F_n \to K_n \oplus F_{n-1})}{\mathrm{Im}(K_{n+2} \to K_{n+1} \oplus F_n)}.$$

继续用自由性 $F_{n+1} \to M$ 提升为 $h : F_{n+1} \to \mathrm{Ker}(K_{n+1} \oplus F_n \to K_n \oplus F_{n-1})$. 定义部分消解

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & F_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & F_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n"] & F_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots, \\
\cdots \arrow[r] & K_{n+2} \arrow[r] & K_{n+1} \arrow[r] & K_n \arrow[r] & K_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

其中 $f_{n+1} = \mathrm{pr}_{K_{n+1}} \circ h$, 检查是链复形以及方块交换.

Step 4) 现在我们检查消解是极小的. 先来看 Step 1) 里的 (a), 由前面的六项正合列以及 $F_{n+1} \to M$ 满, 于是 $H_n(F_{\bullet \le n+1}) = H_n(K_\bullet)$ 还有 $H_{n+1}(F_{\bullet \le n+1}) = H_{n+1}(K_\bullet)$; 再来看 Step 1) 里的 (b), 一方面 $F_{n+1} \to M$ 依定义模 $\mathfrak{m}$ 后自然是同构, 这立刻检查了 (b) 的第二句话. 然后第一句话来源于归纳假设 $F_n \to H_n(\mathrm{cone}(F_{\bullet<n} \to K_\bullet))$ 在模 $\mathfrak{m}$ 之后是同构, 而 $F_{n+1} \to F_n \to H_n(\mathrm{cone}(F_{\bullet<n} \to K_\bullet))$ 是零映射, 故 $F_{n+1} \to F_n$ 模 $\mathfrak{m}$ 是零映射.

Step 5) 最后检查定理最后两句话, 任取投射消解 $p: P_\bullet \to K_\bullet$ 和 $q: P_\bullet \to F_\bullet$ 使得和题中给定的 $f: F_\bullet \to K_\bullet$ 交换, 即下列图表:

$$\begin{tikzcd} P_\bullet \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "p"'] & & F_\bullet \arrow[dl, "f"] \\ & K_\bullet & \end{tikzcd}.$$

因为是消解, p, q, f 都是拟同构, 由于 $P_\bullet, F_\bullet$ 都右有界投射, 对 q 用前一引理知存在 $r: F_\bullet \to P_\bullet$ 使 qr 等价 id_F, 于是商下来 $\overline{q}: P_\bullet/\mathfrak{m}P_\bullet \to F_\bullet/\mathfrak{m}F_\bullet$ 是 k-线性空间的满射, **Nakayama 引理**保证 q 也逐项满射. 现在如果 $P_\bullet$ 也极小, 那么就会有两侧的逐项满射, 利用 Noether 环上有限秩自由模性质易知 q, r 都是同构 (虽然未必互逆), 于是极小消解同构下唯一. □

于是我们立刻来看一些简单的应用.

推论 4.137. *诺特局部 $(R, \mathfrak{m}, k)$ 模 M. 取 $K_\bullet$ 只在 0 下标处为 M, 极小消解 $F_\bullet$, 则*

$$\begin{aligned} d = \sup\{n : F_n \neq 0\} = {} & \mathrm{fl.dim}(M) = \mathrm{pr.dim}(M) \\ = {} & \inf\{n : \mathrm{Tor}^R_{n+1}(k, M) = 0\} = \inf\{n : \mathrm{Ext}^{n+1}_R(M, k) = 0\}. \end{aligned}$$

证明. 首先极小消解 $F_\bullet \to M$ 也是消解, 于是 $d \geq \mathrm{fl.dim}(M)$, 其次依定义 $\mathrm{fl.dim}(M) = \inf\{n : \mathrm{Tor}^R_{n+1}(-, M) = 0\} \geq \inf\{n : \mathrm{Tor}^R_{n+1}(k, M) = 0\}$, 最后 $\inf\{n : \mathrm{Tor}^R_{n+1}(k, M) = 0\} \geq d$ 是因为 $F_\bullet$ 模 $\mathfrak{m}$ 即与 k 张量积, 而依极小消解定义此时边缘映射都是 0. 同理, $F_\bullet$ 作用 $\mathrm{Hom}_R(-, k)$ 后实则等于张量 k 后再转置, 边缘映射仍都是 0, 从而一样得到关于投射维数的结果. □

推论 4.138. *诺特局部 $(R, \mathfrak{m}, k)$, 其整体维数 $\mathrm{gl.dim}(R)$ 等于*

$$\inf\{n : \mathrm{Tor}^R_{n+1}(k, -) = 0\} = \inf\{n : \mathrm{Ext}^{n+1}_R(-, k) = 0\} = \inf\{n : \mathrm{Tor}^R_{n+1}(k, k) = 0\}.$$

证明. 上述推论告诉我们计算平坦与投射维数只需作用 k, 这就得到了前两项; 然后再上述推论, 用 Tor 的平衡性, 第一项即 k 的平坦维数从而仍可只算 k 的. □

命题 4.139. *若诺特环 $\mathrm{gl.dim}(R) = 0$, 当且仅当它 Artin 且既约.*

证明. 依照前一推论, 当且仅当它在每处局部化都是域. □

4.5 应用：层的上同调（Cohomology of Sheaves）

4.5.1 层上同调及其基本性质

回忆**定义 4.78** 中我们定义了层上同调 $H^n(X,\mathcal{F})$. 由**定理 4.76** 我们知道它是 $\mathsf{Ab}(X)\to\mathsf{Ab}$ 的万有上同调 δ-函子. 同样的, 在代数几何一章中, 对环化空间 $(X,\mathcal{O}_X)$, $\mathcal{O}_X$-模也构成 Grothendieck Abel 范畴, 故也可以定义 $\mathsf{Mod}(\mathcal{O}_X)\to\mathsf{Mod}_{\mathcal{O}_X(X)}$ 的万有上同调 δ-函子 $H^n(X,\mathcal{F})$. 同理可定义 $f:(X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$ 前推 f_* 的导出 $R^nf_*:\mathsf{Mod}(\mathcal{O}_X)\to\mathsf{Mod}(\mathcal{O}_Y)$.

定义 4.140. 考虑开浸入 $j:U\hookrightarrow X$, 它诱导函子 $j_!$: 对 U 上层 $\mathcal{F}$ 可定义 X 上预层 $j_{p!}\mathcal{F}$, 在 $V\subset U$ 上取值为 $\mathcal{F}(V)$, 否则取 0, 取层化 $j_!\mathcal{F}:=(j_{p!}\mathcal{F})^{\mathrm{sh}}$. 它是 j^{-1} 的左伴随, 即 $\mathrm{Mor}_{\mathsf{Sh}(X)}(j_!\mathcal{F},\mathcal{G})=\mathrm{Mor}_{\mathsf{Sh}(U)}(\mathcal{F},j^{-1}\mathcal{G})=\mathrm{Mor}_{\mathsf{Sh}(U)}(\mathcal{F},\mathcal{G}|_U)$. $(j_!\mathcal{F})_x$ 在 $x\in U$ 为 $\mathcal{F}_x$, 否则为 0. 从茎上立刻看出 $j^{-1},j_!$ 是正合函子, 且对 U 上的层 $j^{-1}j_!=\mathrm{id}$.

如下引理指出层上同调是局部的.

引理 4.141. (1) 对环化空间 X 和开子集 $U\subset X$, 若 $\mathcal{I}$ 是内射 $\mathcal{O}_X$-模, 则 $\mathcal{I}|_U$ 是内射 $\mathcal{O}_U$-模, 于是对一切 $\mathcal{O}_X$-模 $\mathcal{F}$ 有 $H^p(U,\mathcal{F})=H^p(U,\mathcal{F}|_U)$, 前者是取 U 上截面导出.
(2) 环化空间 $f:(X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$ 和 $V\subset Y$, 有 $R^p(f|_{f^{-1}V})_*(\mathcal{F}|_{f^{-1}V})=(R^pf_*\mathcal{F})|_V$.

证明. (1) 设 $\mathcal{F}\to\mathcal{I}^\bullet$ 是 $\mathsf{Mod}(\mathcal{O}_X)$ 中内射消解, 则 $\mathcal{F}|_U\to\mathcal{I}^\bullet|_U$ 是 $\mathsf{Mod}(\mathcal{O}_U)$ 中内射消解. 故 $H^p(U,\mathcal{F}|_U)=H^p(\Gamma(U,\mathcal{I}^\bullet|_U))=H^p(\Gamma(U,\mathcal{I}_\bullet))$. (2) 有内射消解 $\mathcal{F}|_{f^{-1}(V)}\to\mathcal{I}^\bullet|_{f^{-1}(V)}$. □

定义 4.142. 定义预层 $\underline{H}^p(\mathcal{F}):U\mapsto H^p(U,\mathcal{F})$.

引理 4.143. 对 $p>0$, 层化 $\underline{H}^p(\mathcal{F})^{\mathrm{sh}}=0$. 等价的说法是对每个开 $U\subset X$ 和 X 上的层 $\mathcal{F}$, 对任意 $p>0$ 和 $\xi\in H^p(U,\mathcal{F})$, 存在 U 的开覆盖 $\{U_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ 使 $\xi|_{U_i}=0$ 对一切 $i\in\mathscr{I}$.

证明. 考虑遗忘函子 $F:\mathsf{Mod}(\mathcal{O}_X)\to\mathsf{PMod}(\mathcal{O}_X)$, 于是利用层化函子是正合函子,
得到 $(\underline{H}^p(\mathcal{F}))^{\mathrm{sh}}=(R^pF\mathcal{F})^{\mathrm{sh}}=R^p(\mathrm{sh}\circ F)(\mathcal{F})=0$, 这是因为 $\mathrm{sh}\circ F=\mathrm{id}_{\mathsf{Mod}(\mathcal{O}_X)}$. □

接下来我们将传统拓扑学中的工具 Mayer–Vietoris 序列引入:

引理 4.144. 环化空间 X, 内射 $\mathcal{O}_X$-模 $\mathcal{I}$ 和开 $U'\subset U\subset X$, 有 $\mathrm{res}_{U,U'}:\mathcal{I}(U)\to\mathcal{I}(U')$ 满.

证明. 记开浸入 $j:U\to X, j':U'\to X$, 有 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Mod}(\mathcal{O}_X)}(j_!\mathcal{O}_U,\mathcal{F})=\mathrm{Hom}_{\mathsf{Mod}(\mathcal{O}_U)}(\mathcal{O}_U,\mathcal{F}|_U)=\mathcal{F}(U)$, 类似的 $j'_!\mathcal{O}_{U'}$ 表出函子 $\mathcal{F}\mapsto\mathcal{F}(U')$. 而且由 **Yoneda** 还有典范 $\mathcal{O}_X$-模态射 $i:j'_!\mathcal{O}_{U'}\to j_!\mathcal{O}_U$ 表出限制映射, 从茎上看 i 是单态射, 因此由 $\mathcal{I}$ 内射, $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Sh}(\mathcal{O}_X)}(-,\mathcal{I})$ 是正合函子, 从而 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Sh}(\mathcal{O}_X)}(j_!\mathcal{O}_U,\mathcal{I})\to\mathrm{Hom}_{\mathsf{Sh}(\mathcal{O}_X)}(j'_!\mathcal{O}_{U'},\mathcal{I})$ 满. □

定理 4.145 (Mayer–Vietoris 序列). 环化空间 X, 开覆盖 $X = U \cup V$. 则对 $\mathcal{O}_X$-模 $\mathcal{F}$,

$$0 \to H^0(X,\mathcal{F}) \to H^0(U,\mathcal{F}) \oplus H^0(V,\mathcal{F}) \to H^0(U \cap V,\mathcal{F}) \to H^1(X,\mathcal{F}) \to \cdots$$

是正合列, 且关于 $\mathcal{F}$ 具有函子性.

类似的, 对环化空间态射 $f : X \to Y$ 与 $X = U \cup V$, 则对 $\mathcal{O}_X$-模 $\mathcal{F}$,

$$0 \to f_*\mathcal{F} \to (f|_U)_*(\mathcal{F}|_U) \oplus (f|_V)_*(\mathcal{F}|_V) \to (f|_{U\cap V})_*(\mathcal{F}|_{U\cap V}) \to R^1 f_*\mathcal{F} \to \cdots$$

是正合列, 且关于 $\mathcal{F}$ 具有函子性.

证明. 对内射消解 $\mathcal{F} \to \mathcal{I}^\bullet$, 层条件保证 $(1,-1) : \mathcal{I}^\bullet(U)\oplus\mathcal{I}^\bullet(V) \to \mathcal{I}^\bullet(U\cap V)$ 的核为 $\mathcal{I}^\bullet(X)$, 而前一引理保证 $\mathcal{I}^\bullet(U)\oplus\mathcal{I}^\bullet(V) \to \mathcal{I}^\bullet(U\cap V)$ 满, 于是对上链短正合列 $0 \to \mathcal{I}^\bullet(X) \to \mathcal{I}^\bullet(U)\oplus\mathcal{I}^\bullet(V) \to \mathcal{I}^\bullet(U \cap V) \to 0$ 取上同调群长正合列即得所需. 函子性的证明留给读者.

对后者只需 $0 \to f_*\mathcal{I}^\bullet \to (f|_U)_*(\mathcal{I}^\bullet|_U) \oplus (f|_V)_*(\mathcal{I}^\bullet|_V) \to (f|_{U\cap V})_*(\mathcal{I}^\bullet|_{U\cap V}) \to 0$ 正合. □

4.5.2 Čech 上同调及其基本性质

我们马上引入层的另一种上同调. 实际上我们完全可以对预层做很多事情.

定义 4.146. 拓扑空间 X, 开覆盖 $\mathcal{U} : \{U_i\}_{i\in\mathscr{I}}$, 预层 $\mathcal{F} \in \mathsf{PSh}(X)$. 对 $p \geq 0$ 和 $i_0, \cdots, i_p \in \mathscr{I}$, 记 $U_{i_0,\cdots,i_p} = U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}$. 定义**Čech 上链群**为 $C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) := \prod_{\mathscr{I}^{p+1}} \mathcal{F}(U_{i_0,\cdots,i_p})$. 然后对 $f \in C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$, 定义边缘映射

$$(df)_{i_0,\cdots,i_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k f_{i_0,\cdots,\hat{i_k},\cdots,i_{p+1}}|_{U_{i_0,\cdots,i_{p+1}}}.$$

不难检查 $d^2 = 0$. 因此 $C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})$ 是上链群, 记它的上同调为 $\check{H}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})$.

注 4.147. * 如果希望剔除掉这其中序关系带来的影响, 就考虑 $C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ 中所有交错的元素构成的子群**交错Čech 上链群** $C^p_a(\mathcal{U},\mathcal{F})$, 交错指若 $i_0, \cdots, i_p$ 中有两个下标相等则 $f_{i_0,\cdots,i_p} = 0$, 而互不相同下标部分需满足 $f_{i_{\sigma(0)},\cdots,i_{\sigma(p)}} = (\operatorname{sgn}\sigma) f_{i_0,\cdots,i_p}$. 实际上如果考虑 $\mathscr{I}$ 的一个良序, 则下标 $i_0 < \cdots < i_p$ 严格递增（自然就需要互不相同）者的积 $C^p_o(\mathcal{U},\mathcal{F}) \cong C^p_a(\mathcal{U},\mathcal{F})$. 对交错的 f 有 df 也交错, 因此 $C^\bullet_a(\mathcal{U},\mathcal{F})$ 也是上链群, 实际上它的上同调和 $C^\bullet$ 者相同.

一个来自 [10] 的证明简述如下, 考虑 C_s 为下标允许 $i_0 \leq \cdots \leq i_p$ 者, 我们先证 $C \to C_s \to C$ 先投影后交错嵌入与 id_C 链同伦, 再证 $C_s \to C_o \to C_s$ 先投影后嵌入与 id_{C_s} 链同伦.

对任意 $(i_0, \cdots, i_p)$ 存在唯一 $\sigma \in S_{p+1}$ 使得 $i_{\sigma(j)}$ 不减且 $i_{\sigma(j)} = i_{\sigma(j+1)}$ 时 $\sigma(j) < \sigma(j+1)$, 将该置换记作 $\sigma = \sigma^{i_0,\cdots,i_p}$. 另外任意 $\tau \in S_{p+1}$ 和 $0 \leq a \leq p$ 定义 $\tau_a \in S_{p+1}$ 将 $j = 0, 1, \cdots, a-1$ 映

到 $\tau(j)$, 而没被映到的数字在 $j=a,\cdots,p$ 从小到大排起来. 现在对 $s\in C^{p+1}$ 定义

$$h(s)_{i_0,\cdots,i_p}:=\sum_{0\le a\le p}(-1)^a\operatorname{sgn}(\sigma_a)s_{i_{\sigma_a(0)},\cdots,i_{\sigma_a(a)},i_{\sigma_a(a)},\cdots,i_{\sigma_a(p)}}.$$

检查良定义, 右边求和中每项都定义在 $U_{i_0,\cdots,i_p}$ 上. 再检查

$$(dh+hd)(s)_{i_0,\cdots,i_p}=s_{i_0,\cdots,i_p}-\operatorname{sgn}(\sigma)s_{i_{\sigma(0)},\cdots,i_{\sigma(p)}}.$$

然后再定义如下映射并检查良定义以及同伦 $h':C_s^{p+1}\to C_s^p$

$$h'(s)_{i_0,\cdots,i_p}:=\begin{cases}0, & i_0<\cdots<i_p,\\ (-1)^a s_{i_0,\cdots,i_a,i_a,\cdots,i_p}, & i_0<\cdots<i_a=i_{a+1},\end{cases}$$

$$(dh'+h'd)(s)_{i_0,\cdots,i_p}=\begin{cases}0, & i_0<\cdots<i_p,\\ s_{i_0,\cdots,i_p}, & \text{其他}.\end{cases}$$

由此两个链同伦构造完毕, 所有的计算和验证细节我们留给读者.

回到Čech 上同调. 不妨把**定义 4.39**, **定义 4.41** 中覆盖态射和加细的事弄得明白些.

定义 4.148. X 的覆盖 $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ 被称为覆盖 $\mathcal{V}=\{V_j\}_{j\in\mathscr{J}}$ 的一个**加细**, 指存在 $c:\mathscr{I}\to\mathscr{J}$ 使 $U_i\subset V_{c(i)}$, 这诱导了反向的 $\gamma:C^\bullet(\mathcal{V},\mathcal{F})\to C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})$, 得 $\check{H}^\bullet(\mathcal{V},\mathcal{F})\to\check{H}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})$. 全体加细的对偶范畴构成滤图表 $\mathcal{J}_X$, 于是取余极限定义 $\check{H}^p(X,\mathcal{F}):=\operatorname{colim}_{\mathcal{J}_X}\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$.

注 4.149. 一个小细节是, γ 诱导上同调群的映射与 c 的选取无关. 假如还有 c', 我们证明 γ,γ' 链同伦, 取 $h:C^{p+1}(\mathcal{V},\mathcal{F})\to C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ 为

$$h(s)_{i_0,\cdots,i_p}=\sum_{a=0}^{p}(-1)^a s_{c(i_0),\cdots,c(i_a),c'(i_a),\cdots,c'(i_p)}.$$

立刻检查 $\gamma-\gamma'=dh+hd$, 从而得到我们希望的结论.

性质 4.150. (1) 对任意层 $\mathcal{F}$ 和覆盖 $\mathcal{U}$, $\check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{F})=\mathcal{F}(X)$. 见**定义 4.39** 最后, 注意此时 $\mathcal{J}$ 下取余极限相当于一堆 $\mathcal{F}(X)$ 和典范的恒同映射, 故 $\check{H}^0(X,\mathcal{F})=\mathcal{F}(X)$. (2) 对每个 n, $\check{H}^n(X,-):\mathsf{Ab}(X)\to\mathsf{Ab}$ 是一个协变函子. 特别的, 对 $n=0$ 就是取整体截面函子.

接下来是一些处理. 它们虽然都是针对预层的, 但是这些观察非常重要.

习题 4.151. 环化空间 X, 开覆盖 $U=\bigcup_{i\in\mathscr{I}}U_i$, 则 $\mathcal{F}\mapsto\check{H}^n(\mathcal{U},\mathcal{F})$ 将构成 $\mathsf{PMod}(\mathcal{O}_X)\to\mathsf{Mod}_{\mathcal{O}_X(U)}$ 的上同调 δ-函子. 这里只使用了上同调长正合列.

类似**定义 4.110**, 注意到对开浸入 $j : U \hookrightarrow X$, 有

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{PMod}(\mathcal{O}_X)}(j_{p!}\mathcal{O}_U, \mathcal{F}) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{PMod}(\mathcal{O}_U)}(\mathcal{O}_U, \mathcal{F}|_U) = \mathcal{F}(U).$$

于是 $j_{p!}\mathcal{O}_U$ 是 $\mathsf{PMod}(\mathcal{O}_X)$ 中的投射对象. 且对 $U \subset V \subset X$, 类似**引理 4.114** 对应 j_U, j_V 有典范 $(j_U)_{p!}\mathcal{O}_U \to (j_V)_{p!}\mathcal{O}_V$. 这种 **Yoneda** 的看法立刻带来如下引理:

习题 4.152. 对环化空间 X 和开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \mathscr{I}}$, 记 $j_{i_0,\cdots,i_p} : U_{i_0,\cdots,i_p} \to X$ 为开浸入, 自然考虑链复形 $K(\mathcal{U})_\bullet \in \mathrm{Ch}_{\geq 0}(\mathsf{PMod}(\mathcal{O}_X))$:

$$\cdots \to \bigoplus_{i_0,i_1,i_2} (j_{i_0,i_1,i_2})_{p!}\mathcal{O}_{U_{i_0,i_1,i_2}} \to \bigoplus_{i_0,i_1} (j_{i_0,i_1})_{p!}\mathcal{O}_{U_{i_0,i_1}} \to \bigoplus_{i_0} (j_{i_0})_{p!}\mathcal{O}_{U_{i_0}}.$$

其中边缘映射在 $(j_{i_0,\cdots,i_{p+1}})_{p!}\mathcal{O}_{U_{i_0,\cdots,i_{p+1}}} \to (j_{i_0,\cdots,\hat{i_k},\cdots,i_{p+1}})_{p!}\mathcal{O}_{U_{i_0,\cdots,\hat{i_k},\cdots,i_{p+1}}}$ 为 $(-1)^k$ 倍的典范态射. 这一链复形将诱导自然的 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{PMod}(\mathcal{O}_X)}(K(\mathcal{U})_\bullet, \mathcal{F}) = C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

引理 4.153. 环化空间 X 和开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \mathscr{I}}$, 记 $\mathcal{O}_\mathcal{U} := \mathrm{Im}(\bigoplus j_{p!}\mathcal{O}_{U_i} \to \mathcal{O}_X)$, 则同调群 $H_n(K(\mathcal{U}))$ 在 $n = 0$ 时为 $\mathcal{O}_U$, 其余时刻为 0.

证明. 定义 $K^e_\bullet$ 为 $K(\mathcal{U})_\bullet$ 基础上将 $\mathcal{O}_U$ 放在 -1 格, 现只需证明对任意开 $W \subset X$ 作为截面, $K^e_\bullet(W)$ 与零链同伦. 为此分解指标集 $\mathscr{I} = \mathscr{I}_1 \sqcup \mathscr{I}_2$ 其中 $W \subset U_i$ 当且仅当 $i \in \mathscr{I}_1$. 若 $\mathscr{I}_1 = \varnothing$ 则结论显然. 现在考察 $\mathscr{I}_1$ 非空, 此时 $\mathcal{O}_\mathcal{U}(W) = \mathcal{O}_X(W)$ 且 $K^e_p(W) = \bigoplus_{i_0,\cdots,i_p \in \mathscr{I}_1} \mathcal{O}_X(W)$.
进一步的, $K^e_\bullet(W)$ 上的导数为

$$d(s)_{i_0,\cdots,i_p} = \sum_{j=0}^{p+1} \sum_{i \in \mathscr{I}_1} (-1)^j s_{i_0,\cdots,i_{j-1},i,i_j,\cdots,i_p}.$$

现在固定一个 $\mathbf{i} \in \mathscr{I}_1$, 我们定义 $h : K^e_p(W) \to K^e_{p+1}(W)$ 为

$$h(s)_{i_0,\cdots,i_{p+1}} = \begin{cases} 0, & i_0 \neq \mathbf{i}, \\ s_{i_1,\cdots,i_{p+1}}, & i_0 = \mathbf{i}. \end{cases}$$

经计算 $(dh + hd)(s) = s$. 于是我们证明了同调群如题所述. □

推论 4.154. 环化空间 X, 开覆盖 $U = \bigcup_{i \in \mathscr{I}} U_i$, 则 $\check{H}^n(\mathcal{U}, -)$ 作为 δ-函子典范同构于左正合协变函子 $\check{H}^0(\mathcal{U}, -)$ 的右导出 R^n.

证明. 首先 $\mathsf{PMod}(\mathcal{O}_X)$ 足够内射, 于是它存在右导出. 为此只需证明 $\check{H}^n$ 是万有 δ-函子, 于是由**引理 4.63** 只需证明它可擦除, 为此注意 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{PMod}(\mathcal{O}_X)}(K(\mathcal{U})_\bullet, \mathcal{I}) = C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{I})$, 于是利用 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{PMod}(\mathcal{O}_X)}(-, \mathcal{I})$ 正合以及 $K(\mathcal{U})_\bullet$ 的同调信息得知 $\check{H}^i(\mathcal{U}, \mathcal{I}) = 0$ 对 $i > 0$. □

此外注意到层化是正合的且是遗忘的左伴随于是 $\mathsf{Mod}(\mathcal{O}_X)$ 中的内射对象也是 $\mathsf{PMod}(\mathcal{O}_X)$ 中的内射对象, 那么上面的证明也告诉我们 $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{I})$ 在 $p = 0$ 时是 $\mathcal{I}(U)$, $p > 0$ 时是 0. 马上我们就能将两种上同调联系起来.

4.5.3 联系两种上同调, Grothendieck 谱序列

首先我们介绍一个 Grothendieck 谱序列的一个应用:

> **推论 4.155** (Grothendieck 谱序列推论). 环化空间 X 和 $U \subset X$ 的开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in\mathscr{I}}$. 则对于 $\mathcal{O}_X$-模 $\mathcal{F}$, 有谱序列 $E_2^{p,q} = \check{H}^p(\mathcal{U}, \underline{H}^q(\mathcal{F})) \Rightarrow H^{p+q}(U, \mathcal{F})$. 且其关于 $\mathcal{F}$ 函子性.

证明. 我们对遗忘函子 $F : \mathsf{Mod}(\mathcal{O}_X) \to \mathsf{PMod}(\mathcal{O}_X)$ 和 $\check{H}^0(\mathcal{U}, -) : \mathsf{PMod}(\mathcal{O}_X) \to \mathsf{Mod}_{\mathcal{O}_X(U)}$ 使用 **Grothendieck 谱序列**. 现在我们有 $\check{H}^0(\mathcal{U}, F\mathcal{F}) = \mathcal{F}(U)$, 也知道了 $F(\mathcal{I})$ 是Čech 零调的, 还知道了 $\check{H}^p(\mathcal{U}, -) = R^p\check{H}^0(\mathcal{U}, -), \underline{H}^q = R^qF$, 这些放在一起即得到了我们需要的结论. □

这一结论马上带来一些重要推论.

引理 4.156. 环化空间 X, $U \subset X$ 开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in\mathscr{I}}$, $\mathcal{O}_X$-模层 $\mathcal{F}$ 使 $H^i(U_{i_0,\cdots,i_p}, \mathcal{F}) = 0$ 对一切 $i > 0, p \geq 0, (i_0, \cdots, i_p) \in \mathscr{I}^{p+1}$. 则作为 $\mathcal{O}_X(U)$-模有同构 $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cong H^p(U, \mathcal{F})$.

证明. **Grothendieck 谱序列推论**的 E_2 页除 $q = 0$ 都没了, $q = 0$ 即整体截面. □

定义 4.157. 称 U 的一族覆盖**共尾**指 $\{\mathcal{V}^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是在细分范畴 $\mathscr{J}_U$ 下的一个共尾族, 即对任意 U 的覆盖都存在一个细分 $\mathcal{V}^\lambda$.

引理 4.158. 环化空间 X, $\mathcal{O}_X$-模短正合列 $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$. 对开集 $U \subset X$, 若有 U 的一族共尾覆盖 $\{\mathcal{U}^\lambda\}$ 使 $\check{H}^1(\mathcal{U}^\lambda, \mathcal{F}) = 0$, 则 $\mathcal{G}(U) \to \mathcal{H}(U)$ 满.

证明. 任取 $s \in \mathcal{H}(U)$, 取开覆盖 $\{U_i\} = \mathcal{U}^\lambda$ 使 $s|_{U_i}$ 来自 $s_i \in \mathcal{G}(U_i)$. 那么 $s_{i_0,i_1} = s_{i_1}|_{U_{i_0,i_1}} - s_{i_0}|_{U_{i_0,i_1}} \in \mathcal{F}(U_{i_0,i_1})$ 因为它打到 $0 \in \mathcal{H}(U_{i_0,i_1})$, 由上同调消失可设 $t_i \in \mathcal{F}(U_i)$ 使 $s_{i_0,i_1} = t_{i_1}|_{U_{i_0,i_1}} - t_{i_0}|_{U_{i_0,i_1}}$, 因此 $s_i - t_i$ 符合层条件从而粘成 $\mathcal{G}$ 中的 U 截面且它打到 s. □

引理 4.159. 环化空间 X, 一个拓扑基 $\mathcal{B}$, $\mathcal{O}_X$-模 $\mathcal{F}$ 和一族覆盖 $\{\mathcal{U}^\lambda\}$, 满足每个 $\mathcal{U}^\lambda : U = \bigcup U_i$ 有 U 和 U_i 的任意有限交都来自 $\mathcal{B}$, 且对每个 $U \in \mathcal{B}$ 的覆盖都在 $\{\mathcal{U}^\lambda\}$ 共尾. 现若有 $\check{H}^p(\mathcal{U}^\lambda, \mathcal{F}) = 0$ 对所有 $p > 0$, 则 $H^p(U, \mathcal{F}) = 0$ 对所有 $p > 0$.

证明. 由足够内射, 取 $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I} \to \mathcal{Q} \to 0$ 其中 $\mathcal{I}$ 是内射 $\mathcal{O}_X$-模, 那么对每个 $\mathcal{U}^\lambda$, $\mathcal{I}$ 的正阶Čech 上同调都平凡. 现利用共尾, 前一引理告诉我们对 $U \in \mathcal{B}$ 有 $0 \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{I}(U) \to \mathcal{Q}(U) \to 0$. 因此我们有 $0 \to C^\bullet(\mathcal{U}^\lambda, \mathcal{F}) \to C^\bullet(\mathcal{U}^\lambda, \mathcal{I}) \to C^\bullet(\mathcal{U}^\lambda, \mathcal{Q}) \to 0$ 正合, 这里利用了 U 和 U_i 的任意交都来自 $\mathcal{B}$. 于是长正合列推出对每个 $\mathcal{U}^\lambda$, $\mathcal{Q}$ 的正阶Čech 上同调都平凡.

现在考虑层上同调, 前面我们知道了 $H^0(U, \mathcal{I}) \to H^0(U, \mathcal{Q})$ 满, 于是 $H^1(U, \mathcal{F}) = 0$, 然后用 $\mathcal{Q}$ 代替 $\mathcal{F}$ 继续上述过程可得 $H^2(U, \mathcal{F}) = 0$, 如此下去可得到所有高阶层上同调都消失. □

注 4.160. 任意概形 X, 其上拟凝聚层 $\mathcal{F}$ 及 X 的一个仿射开覆盖 $\mathcal{U}$ 满足任意有限交仍仿射, 我们声称 $\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \check{H}^p(X,\mathcal{F})$ 是同构且等于 $H^p(X,\mathcal{F})$. 由 **Grothendieck 谱序列推论**只要证明对仿射的 $U \subset X$ 有 $H^p(U,\mathcal{F}) = 0$, 而根据前一引理只需取 $\{\mathcal{U}^\lambda\}$ 为全体主开集的覆盖, 证明 $\check{H}^p(\mathcal{U}^\lambda,\mathcal{F}) = 0$ 即可, 而这是一个计算验证的简单事实.

注意一个细节, 诱导同构的映射 $\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \operatorname{colim}_{\mathcal{J}_X} = \check{H}^p(X,\mathcal{F})$ 是典范的, 仿射开集构成的覆盖在所有覆盖中共尾, 于是只需检查它们间加细的带来各种映射, 注意在谱序列上会诱导它们间的典范映射, 从第二页开始它们是 $\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$, 已经收敛到 $H^p(X,\mathcal{F})$ 且映射都是恒同.

此时对 $0 \to \mathcal{F}'' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}' \to 0$, 我们也能用这个开覆盖计算得到长正合列 $0 \to \mathcal{F}''(X) \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}'(X) \to \check{H}^1(X,\mathcal{F}'') \to \check{H}^1(X,\mathcal{F}) \to \cdots$.

> **推论 4.161.** 设 $f: X \to Y$ 是环化空间的态射, $\mathcal{I}$ 是内射 $\mathcal{O}_X$-模, 则对任意 $p > 0$, 开 $V \subset Y$ 和任意 V 的开覆盖 $\mathcal{V}$, 有 $\check{H}^p(\mathcal{V}, f_*\mathcal{I}) = 0$ 以及 $H^p(V, f_*\mathcal{I}) = 0$.

证明. 设 $\mathcal{U}: f^{-1}(V) = \bigcup f^{-1}V_j$, 于是 $C^\bullet(\mathcal{V}, f_*\mathcal{I}) = C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{I})$, 这是因为取完全原像和交可交换, 因此Čech 上同调平凡而后由前一引理层上同调平凡. □

4.5.4 松软（Flasque）层

4.6 群同调和群上同调

4.6.1 定义与基本例子

群的同调理论主要研究 $\mathsf{Mod}_{\mathbb{Z}[G]}$ 上两个到自身的函子 $-^G, -_G$.

定义 4.162. 对 $A \in \mathsf{Mod}_{\mathbb{Z}[G]}$, 定义 $A^G, A_G \in \mathsf{Mod}_{\mathbb{Z}[G]}$ 为

$$\begin{aligned} A^G &:= \{a \in A : \forall g \in G, ga = a\} &&= \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A), \\ A_G &:= A/\operatorname{span}_{\mathbb{Z}[G]}\{ga - a : g \in G, a \in A\} &&= \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A. \end{aligned}$$

其中 $\mathbb{Z}$ 视为平凡 $\mathbb{Z}[G]$-模. 检查 A^G 为 A 的最大平凡子模, A_G 为 A 的最大平凡商模, 另外上述两个函子互为伴随关系, 即 $\operatorname{Mor}_{\mathbb{Z}[G]}(A_G, B) \cong \operatorname{Mor}_{\mathbb{Z}[G]}(A, B^G)$. 因此 $-^G$ 左正合, $-_G$ 右正合. 由于它 **AB5**, 故具有足够内射和投射, 对应的导出函子记为 $H^\bullet(G;A) := R^\bullet(-^G)(A)$ 和 $H_\bullet(G;A) := L_\bullet(-_G)(A)$. 分别称**群上同调函子**和**群同调函子**.

当然也可以记 $H_\bullet(G;A) = \operatorname{Tor}_\bullet^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A), H^\bullet(G;A) = \operatorname{Ext}^\bullet_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$. 这样写立刻就能用上以前所学之知识, 如 $G \cong (\mathbb{Z}, +)$ 那么 $\mathbb{Z}[G] \cong \mathbb{Z}[X^{\pm 1}]$, 根据平衡, 对 $\mathbb{Z}$ 做自由消解

$$0 \to \mathbb{Z}[X^{\pm 1}](X-1) \to \mathbb{Z}[X^{\pm 1}] \to \mathbb{Z} \to 0.$$

这意味着它的投射维数是 1, 故函子 $H^\bullet(G;A), H_\bullet(G;A)$ 的同调维数是 1. 这一结果很容易推广到一般集合 S 作为字生成词的自由群, 我们也有类似的自由消解

$$0 \to \mathbb{Z}[G] \cdot \{X-1 : X \in S\} \to \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z} \to 0.$$

从而对自由群来说函子 $H^\bullet(G;A), H_\bullet(G;A)$ 的同调维数都是 1. 通过计算可知此时

$$H_1(G;\mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{X\in S} \mathbb{Z},\ H^1(G;\mathbb{Z}) \cong \prod_{x\in S} \mathbb{Z}.$$

定义 4.163. 对映射 $\epsilon : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}$ 为 $\sum n_g g \mapsto \sum n_g$, 称 $\mathfrak{I} = \operatorname{Ker}\epsilon$ 为 $\mathbb{Z}[G]$ 的**增广理想**, 对有限群 G, 称 $N = \sum_{g\in G} g \in Z(\mathbb{Z}[G])$ 为 $\mathbb{Z}[G]$ 的**范数元素**, 因为不难检查有 $gN = N = Ng$. 实际上对有限群 G 有 $\mathbb{Z}[G]^G = \mathbb{Z}[G]\cdot N$, 对无限群 G 有 $\mathbb{Z}[G]^G = 0$.

例 4.164. 有限循环群, 设 $G = \mathbb{Z}/m$. 取范元素 N 和 G 的生成元 σ, 得到 $\mathbb{Z}$ 的自由消解

$$\cdots \overset{\sigma-1}{\to} \mathbb{Z}[G] \overset{N}{\to} \mathbb{Z}[G] \overset{\sigma-1}{\to} \mathbb{Z}[G] \overset{\epsilon}{\to} \mathbb{Z} \to 0.$$

于是通过简单计算立刻得到如下的周期性结果

$$H_n(G;A) = \begin{cases} A/(\sigma-1)A, & n = 0, \\ A^G/NA, & n = 1,3,5,\cdots, \\ \{a\in A : Na = 0\}/(\sigma-1)A, & n = 2,4,6\cdots, \end{cases}$$
$$H^n(G;A) = \begin{cases} A^G, & n = 0, \\ A^G/NA, & n = 2,4,6,\cdots, \\ \{a\in A : Na = 0\}/(\sigma-1)A, & n = 1,3,5\cdots. \end{cases}$$

无论是表现出的周期性还是上下同调的一致性都是很重要且神奇的.

命题 4.165. 有限群 G 是 m 阶群, 若一个 G-模 A 满足乘 m 的映射是同构, 那么

$$H_0(G;A) = H^0(G;A) = eA,\ H_n(G;A) = H^n(G;A) = 0,\ n > 0.$$

证明. 设 $R = \mathbb{Z}[G][m^{-1}]$, 那么 R 中元素 $e = N/m$ 满足 $e^2 = e$. 注意作为环同构 $R \cong eR \times (1-e)R$, 其中 $eR \cong \mathbb{Z}[1/m]$, 检查 $A^G = eA = A/(1-e)A = A_G$, 另外 eR 是直和分量因此是投射 R-模. 另外注意到 R 是局部化从而是平坦 $\mathbb{Z}[G]$-模, 因此 $n > 0$ 时

$$H_n(G;A) = \operatorname{Tor}_n^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A) = \operatorname{Tor}_n^R(\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}[G]} R, A) = \operatorname{Tor}_n^R(eR, A) = 0.$$

然后观察上同调, 假设 $P_\bullet \to \mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Z}[G]$-投射消解, 则由张量积的泛性质得到 $P_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}[G]} R \to \mathbb{Z}[1/m] = eR$ 是 R-投射消解.

$$\begin{aligned} H^n(G;A) = \operatorname{Ext}^n_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A) &= H^n \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(P_\bullet, A) \\ &= H^n \operatorname{Hom}_R(P_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}[G]} R, A) = \operatorname{Ext}^n_R(eR, A) = 0. \end{aligned}$$

由此我们证明了命题. □

后面还有一种用限制 Res 和余限制 Cores 的看法.

例 4.166. 定义 $\theta : G \to \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$ 为 $\theta(g) = g - 1$ 以及 $\sigma : \mathfrak{I} \to G/[G,G]$ 为 $\sigma(g-1) = \overline{g}$. 那么 $\theta[G,G] = 0, \sigma\mathfrak{I}^2 = 0$. 由此检查 θ, σ 给出了 G-模同构 $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \cong G/[G,G]$. 由此从增广理想定义的短正合列 $0 \to \mathfrak{I} \to \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z} \to 0$ 得到长正合列

$$H_1(G;\mathbb{Z}[G]) = 0 \to H_1(G;\mathbb{Z}) \to \mathfrak{I}_G \to (\mathbb{Z}[G])_G \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_G \to 0.$$

利用 $\mathbb{Z}[G]$ 投射, 第一项是 0, 而 $(\mathbb{Z}[G])_G \to \mathbb{Z}_G$ 是 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ 的同构, 由此推出作为 G-模有同构 $H_1(G;\mathbb{Z}) \cong \mathfrak{I}_G = \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \cong G/[G,G]$. 能看出群的交换化是作为群同调自然产生的.

推论 4.167. 若 A 是平凡 G-模, 则 $H_0(G;A) \cong A$, 对 $n \geq 1$ 有非典范的同构

$$H_n(G;A) \cong H_n(G;\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} A \oplus \operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(G;\mathbb{Z}), A).$$

而对上同调来说, $H^0(G;A) \cong A$, 对 $n \geq 1$ 有非典范的同构

$$H^n(G;A) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(G;\mathbb{Z}), A) \oplus \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(G;\mathbb{Z}), A).$$

特别地 $H_1(G;A) \cong G/[G,G] \otimes_{\mathbb{Z}} A, H^1(G;A) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(G/[G,G], A)$.

证明. 平凡 G-模可看作普通 $\mathbb{Z}$-模, 两个平凡 G-模的 $\mathbb{Z}[G]$ 同态和张量都可以看作普通 $\mathbb{Z}$-模的. 于是都可看作在 $\mathbb{Z}$-模中然后使用 Abel 群的万有系数定理. □

习题 4.168. 若 G 为有限群, $H^1(G;\mathbb{Z}) = 0$, 而 $H^2(G;\mathbb{Z}) \cong H^1(G;\mathbb{C}^\times)$ 正是 G 的全体一维表示. 技巧是考虑正合列 $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times \to 0$. 后一个映射是 $x \mapsto \exp(2\pi i x)$. 利用 $\mathbb{C}$ 可除推出 $H^1(G;\mathbb{C}) = H^2(G;\mathbb{C}) = 0$, 于是得到我们需要的相等.

然后是几个关于乘积的结果, $\mathbb{Z}[G \times H] \cong \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[H]$. 先来看乘积群的同调

命题 4.169 (Künneth 公式). 如下的正合列分裂

$$0 \to \bigoplus_{p+q=n} H_p(G;\mathbb{Z}) \otimes H_q(H;\mathbb{Z}) \to H_n(G \times H;\mathbb{Z}) \to \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_p(G;\mathbb{Z}), H_q(G;\mathbb{Z})) \to 0.$$

证明. 取 $\mathbb{Z}[G]$-自由消解 $P_\bullet \to \mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z}[H]$-自由消解 $Q_\bullet \to \mathbb{Z}$, 那么 $C_{\bullet\bullet} := P_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} Q_\bullet$ 的全复形就是 $\mathbb{Z}$ 的 $\mathbb{Z}[G \times H]$-自由消解. 用双复形的 Künneth 公式立刻得到定理证明. □

对上同调来说我们引入所谓**叉积**, 自然地可以定义

$$\begin{aligned} \mu : \mathrm{Hom}_G(P,\mathbb{Z}) \otimes \mathrm{Hom}_H(Q,\mathbb{Z}) &\to \mathrm{Hom}_{G\times H}(P \otimes_{\mathbb{Z}} Q, \mathbb{Z}) \\ \mu(f \otimes g)(x,y) &= f(x)g(y). \end{aligned}$$

于是将叉积 $\times$ 定义为下图向右向下再向左的复合:

$$\begin{tikzcd} H^p(G;\mathbb{Z}) \otimes H^q(H;\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\times"'] & H^{p+q}(\mathrm{Tot}^{\oplus} \mathrm{Hom}_G(P_\bullet,\mathbb{Z}) \otimes \mathrm{Hom}_H(Q_\bullet,\mathbb{Z})) \arrow[d, "\mu"] \\ H^{p+q}(G \times H;\mathbb{Z}) \arrow[r, equal] & H^{p+q}(\mathrm{Tot}^{\oplus} \mathrm{Hom}_{G\times H}(P_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} Q_\bullet,\mathbb{Z})) \end{tikzcd}.$$

习题 4.170. 检查若诸 P_p 都取成有限生成自由 $\mathbb{Z}[G]$-模时, 上图表中的 μ 是同构, 这种情况下由 *Künneth* 公式得知存在分裂的正合列

$$0 \to \bigoplus_{p+q=n} H^p(G;\mathbb{Z}) \otimes H^q(H;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\times} H^n(G \times H;\mathbb{Z}) \to \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H^p(G;\mathbb{Z}), H^q(H;\mathbb{Z})) \to 0.$$

若 G 是有限群时, 由 $\mathbb{Z}[G]$ 的诺特性（它的理想总是有限生成 $\mathbb{Z}$-模）, 诸 P_p 当然可以取为有限生成 $\mathbb{Z}[G]$-模, 命题情形适用.

4.6.2 Shapiro 引理和换群

设 $H \subset G$ 为子群. 那么 $\mathbb{Z}[G]$ 是自由 $\mathbb{Z}[H]$-模, 这是因为陪集 (代表元) 给出一组基. 如此一来, 函子 $\mathsf{Mod}_{\mathbb{Z}[H]} \to \mathsf{Mod}_{\mathbb{Z}[G]}$, $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} \bullet$, 或写 $\mathrm{Ind}_G^H \bullet$, 是正合的. 同样可以定义 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G],\bullet) = \mathrm{Coind}_H^G \bullet$, 注意它作为 $\mathbb{Z}[G]$-模的作用是对 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G],\bullet)$ 以及 $h \in H, g \in G$, $f(hx) = hf(x)$, $(g \cdot f)(x) := f(xg)$, 在有限 $[G:H]$ 时它也是正合的.

引理 4.171 (Shapiro). 设 $H \subset G$ 为子群, 以及 H-模 M, 那么

$$H_\bullet(G;\mathrm{Ind}_H^G M) \cong H_\bullet(H;M), \;\; H^\bullet(G;\mathrm{Coind}_H^G M) \cong H^*(H;M).$$

证明. 设 $P_\bullet \to \mathbb{Z}$ 是 G-自由消解, 那么它们作为 $\mathbb{Z}[H]$-模消解来说也是自由的, 而

$$P \otimes_{\mathbb{Z}[G]} (\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} M) \cong P \otimes_{\mathbb{Z}[H]} M.$$

于是左右的同调群分别是 $H_\bullet(G; \mathrm{Ind}_H^G M)$ 和 $H_\bullet(H; M)$. 类似的

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(P, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[H]}(\mathbb{Z}[G], M)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[H]}(P, M).$$

于是群上同调的结论也由此自然得到. □

引理 4.172. 若 $[G:H] < +\infty$, 则作为 G-模 $\mathrm{Ind}_H^G(M) \cong \mathrm{Coind}_H^G(M)$.

证明. 具体构造. 设 X 是 G/H 的左陪集分解, 即给出 $\mathbb{Z}[G]$ 作为 $\mathbb{Z}[H]$-模的一组基. 那么 $\mathrm{Ind}_H^G(M)$ 是一系列 $x \otimes M$ 的直和, 且若 $g \in G, h \in H; x, y \in X$ 有 $gx = yh$ 则 $g(x \otimes m) = y \otimes (hm)$. 现在观察 $X^{-1} = \{x^{-1} : x \in X\}$ 给出了 G/H (有地方也写 $H\backslash G$) 的右陪集分解, 于是 $\mathrm{Coind}_H^G(M)$ 是一系列 $\pi_x M$ 的直和, 其中 $\mathbb{Z}[H]$-映射 $\pi_x m : \mathbb{Z}[G] \to M$ 将 $x^{-1} \mapsto m \in M$ 但将其他 $X \backslash \{x\}$ 中的元素打到 0. 那么这里 $gx = yh$ 则 $y^{-1}g = hx^{-1}$, 则

$$(g(\pi_x m))(y^{-1}) = (\pi_x m)(y^{-1}g) = (\pi_x m)(hx^{-1}) = h \cdot (\pi_x m)(x^{-1}) = hm.$$

对 $z \neq y$, $g(\pi_x m)$ 将 z^{-1} 打到 0, 因此 $g(\pi_x m) = \pi_y(hm)$, 故 $x \otimes m \mapsto \pi_x m$ 得 G-模同构. □

特别地, H 是平凡群的结论也是有着重要意义的. 经典的例子是如下的 **Hilbert 90**:

> **推论 4.173** (Hilbert 90, 加法)**.** *域有限 Galois 扩张 L/K, $G := \mathrm{Gal}(L/K)$. 则 L 按 Galois 作用的方式自然成为 G-模, 那么 $L^G \cong L_G \cong K$ 且*
>
> $$H^n(G; L) \cong H_n(G; L) \cong \begin{cases} 0, & n > 0, \\ K, & n = 0. \end{cases}$$

证明. 注意**正规基定理**告诉我们存在 $x \in L$ 使 $\{g(x) : g \in G\}$ 构成 L/K 线性空间基. 那么 $L \cong \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} K$ 而且 $L^G \cong L_G \cong K$, 然后使用 H 为平凡群的 **Shapiro 引理**, 立得结论. □

例 4.174. 延续上文 **Hilbert 90** 的观察, 若 G 是循环群, 阶 m 生成元 σ. 于是

$$\mathrm{Tr}_{L/K}(x) = x + \sigma x + \cdots + \sigma^{m-1} x \in K.$$

于是 **Hilbert 90** 告诉我们存在这样一个正合列

$$0 \to K \to L \xrightarrow{\sigma - 1} L \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{L/K}} K \to 0.$$

考虑一个特殊情况, $\mathrm{char}\, K = [L:K] = p$, 则 $\mathrm{Tr}(1) = 0$, 因此存在 $x \in L$ 使 $(\sigma - 1)x = 1$ 即 $\sigma x = x + 1$, 于是 $L = K(x)$ 且 $x^p - x \in K$, 因为可以具体计算

$$\sigma(x^p - x) = (x+1)^p - (x+1) = x^p - x.$$

定义 4.175. 对群同态 $\rho: H \to G$, 常用情形是 $H \subset G$. 考虑遗忘函子 $\rho^\sharp: \mathsf{Mod}_G \to \mathsf{Mod}_H$, 显然它正合 (因为是有基底集合的对象), 考虑自然满射 $(\rho^\sharp M)_H \to M_G$ 和自然单射 $M^G \to (\rho^\sharp M)^H$. 它们自然诱导了 δ-函子间的态射, 称为**余限制**和**限制**映射,

$$\mathrm{Cores}_H^G: H_\bullet(H; \rho^\sharp M) \to H_\bullet(G; M),\ \mathrm{Res}_H^G: H^\bullet(G; M) \to H^\bullet(H; \rho^\sharp M).$$

只需注意 $H_\bullet(G; -), H^\bullet(G; -)$ 是万有 δ-函子以及 $H_\bullet(H; \rho^\sharp -), H^\bullet(H; \rho^\sharp -)$ 是 δ-函子.

引理 4.176. 对 $H \subset G$ 和 G-模 M, G-等变 $\iota: M \to \mathrm{Coind}_H^G \rho^\sharp M$ 和 $\kappa: \mathrm{Ind}_H^G \rho^\sharp M \to M$ 诱导

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_H^G : & H^i(G; M) \to H^i(G; \mathrm{Coind}_H^G \rho^\sharp M) \cong H^i(H; \rho^\sharp M),\\ \mathrm{Cores}_H^G : & H_i(H; \rho^\sharp M) \cong H_i(G; \mathrm{Ind}_H^G \rho^\sharp M) \to H_i(G; M).\end{aligned}$$

证明. 不难检查题述 ι, κ 诱导了 δ-函子间的映射, 且典范的有 $(\mathrm{Coind}_H^G \rho^\sharp M)^G \cong (\rho^\sharp M)^H$ 以及 $(\mathrm{Ind}_H^G \rho^\sharp M)_G \cong (\rho^\sharp M)_H$, 于是它们正是我们欲求的 δ-函子. □

另外若 $[G : H] < +\infty$ 则 κ 可以写成 $\mathrm{Coind}_H^G \rho^\sharp M \to M$, 这诱导

$$\mathrm{Cores}_H^G : H^i(H; \rho^\sharp M) \cong H_i(G; \mathrm{Coind}_H^G \rho^\sharp M) \to H_i(G; M).$$

此时可以检查 $\mathrm{Cores} \circ \mathrm{Res}\, M = [G : H]$ 是乘常数 $[G : H]$ 的映射. 由此读者可以重新给出前述有限群乘阶数的映射是同构推出高阶上同调消失的定理. 此外也能隐约感受到有限群时同调和上同调之间的紧密联系, 这将在 **Tate 上同调**的小节处做一个更详细的介绍.

4.6.3 具体计算：杠消解（Bar Resolution）和 H^1

考虑一些形式记号生成的自由 $\mathbb{Z}[G]$-模 $B_n^u := \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}[G]}\{[g_1 \otimes \cdots \otimes g_n], g_1, \cdots, g_n \in G\}$. 由此可以考虑构造 $\mathbb{Z}$ 的这样一个自由消解, 称为**非标准杠消解**:

$$\cdots \xrightarrow{d} B_2^u \xrightarrow{d} B_1^u \xrightarrow{d} B_0^u \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0.$$

其中 $B_0^u = \mathbb{Z}[G] \cdot [\ ]$ 是空记号生成的, 具体来说, 我们写出边界映射

$$\begin{aligned}d[g_1 \otimes \cdots \otimes g_n] := g_1[g_2 \otimes \cdots \otimes g_n] + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i [g_1 \otimes \cdots \otimes (g_i g_{i+1}) \otimes \cdots \otimes g_n]\\ + (-1)^n [g_1 \otimes \cdots \otimes g_{n-1}].\end{aligned}$$

也能定义所谓的**标准杠消解**: 考虑 B_n 为 B_n^u 商掉其中存在 $g_i = 1$ 的记号构成的子模 K_n.

引理 4.177. 两种杠消解都给出了 $\mathbb{Z}$ 的自由消解.

证明. 只需检查是正合列, 先检查 $d_{B^u}^2=0$. 实际上假设上面三部分为 D_1,D_2,D_3, 记 d^2 中的九类求和项为 D_{ij} 为 $d(D_i)$ 的第 j 部分, 留给读者检查

$$D_{22}=0,\ D_{11}+D_{12}+D_{21}=0,\ D_{13}+D_{31}=0,\ D_{23}+D_{32}+D_{33}=0,$$

而 $\mathrm{Im}(d:B_1^u\to B_0^u)$ 正是增广理想, 然后 $d_B^2=0$ 可以检查 $d(K_n)\subset K_{n-1}$. 再检查诸处正合. 只需检查遗忘为 Abel 群 ($\mathbb{Z}$-模) 后检查正合, 定义 Abel 群同态

$$s_{-1}:\mathbb{Z}\to B_0^u,\ s_{-1}(1)=[\ ];\ s_n:B_n^u\to B_{n+1}^u,\ s_n(g_0[g_1\otimes\cdots\otimes g_n])=[g_0\otimes g_1\otimes\cdots\otimes g_n].$$

于是 $\epsilon s_{-1}=1, ds_n+s_{n-1}d=1$, 由链同伦得知 $1,0$ 诱导相同的同调群映射, 故同调群平凡. □

我们给出了一个能具体计算用的消解, 马上利用它给上同调群一个杠消解刻画.

推论 4.178. 对 $M\in\mathsf{Mod}_{\mathbb{Z}[G]}$, 那么 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(B_n^u,M)=\{\phi_n:\underbrace{G\times\cdots\times G}_{n}\to M\}$, 这是定义 $\phi_n(g_1,\cdots,g_n)$ 为 $g_1\otimes\cdots\otimes g_n$ 的像确定的. 由此一来, $H^n(G;M)=Z^n/B^n$, 其中

$$\begin{aligned}Z^n:=\Bigg\{[\phi_n:\underbrace{G\times\cdots\times G}_{n}\to M]:g_0\phi_n(g_1,\cdots,g_n)+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\phi_n(g_0,\cdots,g_{i-1}g_i,\cdots,g_n)\\+(-1)^{n+1}\phi_n(g_0,\cdots,g_{n-1})=0\Bigg\},\\B^n:=\Bigg\{\phi_n(g_1,\cdots,g_n)=g_1\phi_{n-1}(g_2,\cdots,g_n)+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\phi_{n-1}(g_1,\cdots,g_ig_{i+1},\cdots,g_n)\\+(-1)^n\phi_{n-1}(g_1,\cdots,g_{n-1})=0\Bigg\}.\end{aligned}$$

群同调也类似, 细节留给读者. 我们以 H^1 为例仔细观察:

例 4.179. 对 $M\in\mathsf{Mod}_{\mathbb{Z}[G]}$, 杠消解计算得到的

$$\begin{aligned}Z^1&:=\{[\phi:G\to M]:g_0\phi(g_1)-\phi(g_0g_1)+\phi(g_0)=0\},\\B^1&:=\{\phi:\exists m\in M,\phi(g_1)=g_1m-m\}.\end{aligned}$$

推论 4.180 (Hilbert 90, 乘法)**.** 域有限 *Galois* 扩张 L/K, 则 $H^1(\mathrm{Gal}(L/K),L^\times)=1$.

证明. 设 $\phi\in Z^1$, 即 $\phi(hg)=h(\phi(g))\phi(h)$, 对 $x\in L$ 记 $a_x:=\sum_{g\in\mathrm{Gal}(L/K)}\phi(g)^{-1}\cdot g(x)$ 则

$$h(a_x)=\sum_{g\in\mathrm{Gal}(L/K)}h(\phi(g))^{-1}\cdot(hg)(x)=\phi(h)\sum_{g\in\mathrm{Gal}(L/K)}\phi(hg)^{-1}\cdot(hg)(x)=\phi(h)\cdot a_x.$$

因此若 $a_x\neq 0$ 则 $\phi(h)=h(a_x)/a_x\in B^1$ 从而命题得证. 注意 **Dedekind–Artin 线性无关**告诉我们 $\sum\phi(g)^{-1}\cdot g:L\to L$ 不是零映射, 故总能找到符合条件的 x 使得 $a_x\neq 0$. □

4.6.4 Tate 上同调

仅限于本小节, 涉及的群都指有限群.

对 $M \in \mathsf{Mod}_G$, 我们可以定义范数映射 $\mathcal{N}_G : M \to M$ 为 $m \mapsto \sum_{g\in G} gm$.

4.6.5 群上同调的谱序列

4.6.6 一些应用

首先是两个 **Hilbert 90**, 它们能给出 Kummer 扩张和 Artin–Schreier 扩张的分类.

4.6.7 半单代数 *

4.6.8 Brauer 群 *

4.7 导出范畴（Derived Category）

Chapter 5

李代数及其表示理论初步

5.1 李代数基本知识

5.1.1 定义与基本概念

本小节中, 固定 F 为一特征 0 的域. 实际上 $F=\mathbb{R},\mathbb{C}$ 总是常见的情形, 不过我们总会对具体的条件做出说明. 首先观察定义及数个经典的例子.

定义 5.1. 域 F 上的线性空间 L 称为一个**李代数**, 是指它有一个 $[-,-]:L\times L\to L$ 的反对称双线性映射, 被称为**李括号**, 满足如下 **Jacobi 恒等式**, 对一切 $x,y,z\in L$ 有:

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0.$$

李代数间的**同态**也称**李同态**, 是保持李括号的线性映射, 即满足 $\phi([x,y])=[\phi(x),\phi(y)]$ 者.

例 5.2. (1) $\mathfrak{gl}(V)$ 元素上是 $\mathrm{End}_F(V)$, 即 $V\to V$ 的全体 F-线性映射, 取 $[x,y]=xy-yx$. 其李子代数称**线性李代数**. 对 $V=F^n$ 选标准基而视 $\mathfrak{gl}(V)$ 为 $M_{n\times n}(F)$ 矩阵, 改记 $\mathfrak{gl}(n,F)$.
接下来是最经典的四个例子, 它们被称为**典型李代数**, 这四族记 $\mathsf{A}_\ell,\mathsf{B}_\ell,\mathsf{C}_\ell,\mathsf{D}_\ell,\ell\geq 1$.
(2) A_ℓ: 取 $\dim V=\ell+1$. 用 $\mathfrak{sl}(V)$ 或 $\mathfrak{sl}(\ell+1,F)$ 记 $\mathfrak{gl}(V)$ 中全体迹为 0 的映射.
(3) C_ℓ: 取 $\dim V=2\ell$. 设 V 上一个非退化的反对称双线性型 $f(\cdot,\cdot)$. 用 $\mathfrak{sp}(V)$ 记使得 $f(x(v),w)=-f(v,x(w))$ 对全体 $v,w\in V$ 成立的 $\mathfrak{gl}(V)$ 中映射. 特别的, 取 $V=F^{2\ell}$ 和标准基, 设 f 的矩阵为 $s=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & I_\ell\\ -I_\ell & \mathbf{0}\end{bmatrix}$, 此时用 $\mathfrak{sp}(2\ell,F)$, $x=\begin{bmatrix}m & n\\ p & q\end{bmatrix}$ 在其中当且仅当 $sx+x^ts=0$ 即 $n^t=n,p^t=p,m^t+q=0$. 显然其是 $\mathfrak{sl}(2\ell,F)$ 的李子代数, 维数为 $2\ell^2+\ell$.
(4) B_ℓ: 取 $\dim V=2\ell+1$. 设 V 上一个非退化的对称双线性型 $f(\cdot,\cdot)$. 用 $\mathfrak{o}(V)$ 记使得 $f(x(v),w)=-f(v,x(w))$ 对全体 $v,w\in V$ 成立的 $\mathfrak{gl}(V)$ 中映射. 特别的, 取 $V=F^{2\ell+1}$ 和

标准基, 设 f 的矩阵为 $s = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \mathbf{0} & I_\ell \\ & I_\ell & \mathbf{0} \end{bmatrix}$, 此时记 $\mathfrak{o}(2\ell+1, F)$, 维数为 $2\ell^2+\ell$.

(5) D_ℓ: 取 $\dim V = 2\ell$, $s = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I_\ell \\ I_\ell & \mathbf{0} \end{bmatrix}$. 不难检查 $\dim \mathfrak{o}(2\ell, F) = 2\ell^2 - \ell$.

(6) 还有几类 $\mathsf{E}_6, \mathsf{E}_7, \mathsf{E}_8, \mathsf{F}_4, \mathsf{G}_2$ 李代数称为例外李代数, 所谓 *Cartan–Killing* 分类是指上面从 (2) 到 (6) 定义的这些李代数恰好是全体复有限维单李代数, 他们的具体介绍放到后文.

读者不难检查这些空间确实在李括号下是封闭的, 它们都来自于典型李群. 另外对 $F = \mathbb{R}$ 的对称情况的合同要考虑负惯性指数, 而在 $F = \mathbb{C}$ 的情形则都一样.

例 5.3. 另一类产生李代数的方法则是从现有的结构构造.

(1) 对两个李代数 $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$, 它们的直和 $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ 也具有李代数结构:

$$[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] := ([x_1, x_2], [y_1, y_2]).$$

(2) 定义李代数 $\mathfrak{g}$ 的**理想**, 即一个线性子空间 I, 使 $[x, y] \in I$ 对任意 $x \in I, y \in \mathfrak{g}$. 或者便捷地把这要求写作 $[I, \mathfrak{g}] \subset I$, 以后对集合 $X, Y \subset \mathfrak{g}$, 记 $[X, Y] := \operatorname{span}_F\{[x, y] : x \in X, y \in Y\}$.

(3) 设 I 是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 则 $\mathfrak{g}/I$ 也是一个李代数, 它的李括号结构自然继承自 $\mathfrak{g}$.

(4) 给定李代数的同态 $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$, 则 $\operatorname{Im} f$ 是一个李代数. $\operatorname{Ker} f$ 则是一个理想. 且

$$\operatorname{Im} f \cong \mathfrak{g} / \operatorname{Ker} f.$$

(5) 实际上对 $I \subset J$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 有自然的 $(\mathfrak{g}/I)/(J/I) \cong \mathfrak{g}/J$. 而对 $\mathfrak{g}$ 的一般两个理想 I, J, 他们的和与交也是理想而且有 $I/(I \cap J) \cong (I+J)/J$.

(6) $Z(\mathfrak{g}) := \{x \in \mathfrak{g} : [x, \mathfrak{g}] = 0\}$ 表示 $\mathfrak{g}$ 的**中心**, 一个李代数**交换**是指 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$ 或等价的 $Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$. 这样定义是因为李代数的"交换性"即李括号为零.

(7) 考虑如下的映射 $\operatorname{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, $x \mapsto \operatorname{ad}(x)$, $\operatorname{ad}(x)(y) = [x, y]$, 称为伴随表示. 不难检查有 $\operatorname{Ker}(\operatorname{ad}) = Z(\mathfrak{g})$. 实际上对一个一般的 F-代数 (甚至不需要乘法的交换和结合性) A 我们可以定义其上的一个**导子**是指一个满足 $\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b)$ 的 $\operatorname{End}_F(A)$ 中者. A 的全体导子是一个 F-李子代数 $\operatorname{Der}(A) \subset \mathfrak{gl}(A)$, 当然, $\operatorname{Der}(A)$ 上的李括号自然地定义为 $[\delta, \delta'] = \delta \circ \delta' - \delta' \circ \delta$. 易发现我们上面定义了李代数同态 $\operatorname{ad} : \mathfrak{g} \to \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$. 读者验证 $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})$ 是 $\operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ 中的理想.

定义 5.4. 李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个**表示** (ρ, V) 是指一个李同态 $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$. 一个 $\mathfrak{g}$ 的表示也常被称为一个**$\mathfrak{g}$-模**. 表示 V 的**子表示**指 V 的 $\mathfrak{g}$-不变子空间, 表示**不可约**指没有非 $0, V$ 的子表示.

5.1.2 幂零（Nilpotent）与可解（Solvable）的探索

定义 5.5. 记 $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}^{(0)} := \mathfrak{g}$, 归纳地定义 $\mathfrak{g}^n := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{n-1}], \mathfrak{g}^{(n)} := [\mathfrak{g}^{(n-1)}, \mathfrak{g}^{(n-1)}]$. 我们称 $\mathfrak{g}^0 \supset \mathfrak{g}^1 \supset \cdots$ 为 $\mathfrak{g}$ 的**中心列**, $\mathfrak{g}^{(0)} \supset \mathfrak{g}^{(1)} \supset \cdots$ 为 $\mathfrak{g}$ 的**导出列**. 李代数称为**幂零**的, 指中心列稳定到 0; 称为**可解**的, 指导出列稳定到 0. 显然 $\mathfrak{g}^{(n)} \subset \mathfrak{g}^n$ 故幂零性推出可解性.
另外记号上我们也用 $I^{(n)}$ 指理想 I 看作 $\mathfrak{g}$ 的李子代数依照上法定义者, 显然 *Jacobi* 恒等式告诉我们两个理想 I, J 有 $[I, J]$ 还是理想, 从而 $I^{(n)}$ 也是理想.

定义 5.6. $x \in \mathfrak{g}$ 称为 **ad-幂零**的指 $\mathrm{ad}(x)$ 作为线性映射是幂零的.

> **命题 5.7.** (1) $\mathfrak{g}$ 幂零 (resp. 可解) 则其李子代数和商代数都幂零 (resp. 可解). (2) $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ 幂零 (resp. 可解) 则 $\mathfrak{g}$ 幂零 (resp. 可解). 另外关于幂零性, 我们有:
> (3) 幂零李代数有非平凡中心. (4) 幂零李代数中的元素都 *ad*-幂零.

证明. (2) $(\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g}))^n = 0$, 考虑 $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ 典范映射, 有 $\mathfrak{g}^n \subset Z(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}^{n+1} = 0$. 可解同理. (3) 设 n 是使 $\mathfrak{g}^n = 0$ 最小者, 则 $\mathfrak{g}^{n-1} \in Z(\mathfrak{g})$. (4) 若 $\mathfrak{g}^{n+1} = 0$, 则 $\mathrm{ad}(x)^n(y) = 0, \forall x, y \in \mathfrak{g}$. □

> **命题 5.8.** 设 V 有限维 F-线性空间, 线性李代数 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ 只含 $\mathrm{End}_F(V)$ 中的幂零阵, 则 (1) 存在 $v \in V$ 非零使 $\mathfrak{g}v = 0$. (2) 存在一列 F-线性空间 $0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_d = V$ 使 $\dim V_i = i$（一个旗）且 $\mathfrak{g}(V_i) \subset V_{i-1}$. 作为推论, 存在一组基使 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ 中者在此基下皆为严格（对角线 0 的）上三角矩阵.

证明. 对某 $x \in \mathfrak{g}$ 作为线性映射, 设 n 使得 $x^n = 0$ 则 $\mathrm{ad}(x)^{2n}(y) = 0$, 因为展开每一项都是 $x^i y x^{2n-i}$ 的形式. (1) 对 $\dim \mathfrak{g}$ 归纳, 零维显然. 设 $\mathfrak{h}$ 是极大李子代数 (有限维知存在性), 由 $\dim \mathfrak{h} < \dim \mathfrak{g}$ 依归纳假设, $\overline{\mathrm{ad}} : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ 只含幂零矩阵且像维度更低故总有 $x \in \mathfrak{g} \backslash \mathfrak{h}$ 使 $[\mathfrak{h}, x] \subset \mathfrak{h}$. 于是 $\mathfrak{h} + Fx$ 是更大李子代数故 $\mathfrak{h} + Fx = \mathfrak{g}$. 现在令 $W = \{w \in V : \mathfrak{h}w = 0\}$. 于是由归纳假设 $W \neq 0$. 而且计算得 $y \in \mathfrak{h}, v \in W$ 时, $yxv = xyv + [y, x]v$ 故 $xW \subset W$, 从而由 x 幂零得知在 W 有特征值 0 的特征向量 v, 故 $\mathfrak{g}v = 0$. (2) 对 $\dim V$ 归纳, 一维显然. 由 (1) 取 $v \neq 0$ 使 $\mathfrak{g}v = 0$, 则取 $V_1 = Fv$ 然后对 V/V_1 使用归纳假设. 取基的结论我们留做习题. □

> **定理 5.9** (Engel)**.** 设 $\mathfrak{g}$ 是有限维李代数. 则 $\mathfrak{g}$ 幂零当且仅当全体元素皆 *ad*-幂零.

证明. 左推右是**命题 5.7(4)**, 右推左注意 $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 的核为 $Z(\mathfrak{g})$, 故 $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. 都是幂零阵故**命题 5.8** 得全是严格上三角, 从而 $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ 幂零而再由**命题 5.7(2)**. □

定义 5.10. 设 V 是 F-线性空间, 线性李代数 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$. $\mathfrak{g}$ 的一个**权**指的是一个 $\mathfrak{g} \to F$ 的线性映射, 使**权空间** $V_\lambda := \{v \in V : xv = \lambda(x)v, \forall x \in \mathfrak{g}\} \neq 0$. 这可看作某种意义上的特征.

引理 5.11 (不变性引理). 设 V 有限维 F-线性空间, $\operatorname{char} F = 0$. 李子代数 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$, I 是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 设 $\lambda : I \to k$ 是 I 的权, 则对应的权空间 V_λ 有 $\mathfrak{g}V_\lambda \subset V_\lambda$.

证明. 对 $y \in \mathfrak{g}, 0 \neq v \in V_\lambda$ 下证 $yv \in V_\lambda$. 归纳取 $v_0 = v, v_{n+1} = yv_n$, 令 $W = \operatorname{span}_F(v_n)_{n\geq 0}$, 设 $N \geq 1$ 为使 $v_0, \cdots, v_{N-1}$ 无关的最大者, 则 $\{v_n\}_{n=0}^{N-1}$ 是 W 一组基. 对 $x \in I$ 有

$$xv_{n+1} = y(xv_n) + [x, y]v_n.$$

因为 $[x, y] \in I$, 于是归纳地（证明归纳递推时分别用 x 和 $[x, y]$ 代替 x）可证明 xv_n 能写成 $v_0, \cdots, v_n$ 的线性组合, 而且 v_n 系数为 $\lambda(x)$. 这样 $x : W \to W$ 计算迹得到 $\operatorname{Tr}_W(x) = N\lambda(x)$. 再用 $[x, y]$ 代替 x 可得 $0 = N\lambda([x, y])$, 由域特征 0 保证 $\lambda([x, y]) = 0$. 因此

$$x(yv) = y(xv) + [x, y]v = y\lambda(x)v + \lambda([x, y])v = \lambda(x)yv.$$

这即 $yv \in V_\lambda$, 由 y, v 的任意性从而结论得证. □

定理 5.12 (Lie). 设 V 有限维 $\mathbb{C}$-线性空间, 可解 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$. 则存在非零 $v \in V$ 使 $\mathfrak{g}v \subset \mathbb{C}v$.

证明. 对 $\dim \mathfrak{g}$ 归纳, 一维显然, 下面看递推. 由可解性 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subsetneq \mathfrak{g}$, 于是取 U 是 $\mathfrak{g}$ 中包含 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 的任意余一维子空间, 记 $\mathfrak{g} = U \oplus \mathbb{C}z$. 现在由归纳假设取非零 $w \in V$ 使 $Uw \subset \mathbb{C}w$, 对应的权 $\lambda : U \to \mathbb{C}$. 显然 U 是理想, 由**不变性引理**得知 $\mathfrak{g}V_\lambda \subset V_\lambda$, 特别的 $zV_\lambda \subset V_\lambda$. 因此由 $\mathbb{C}$ 代数闭知存在 $0 \neq v \in V_\lambda$ 使 $zv = \mu v$. 现在我们计算

$$x \in \mathfrak{g} = U \oplus \mathbb{C}z,\ x = u + \beta z,\ xv = (\lambda(u) + \beta\mu)v.$$

从而 $\lambda(u) + \beta\mu$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个权, 对应的 v 在权空间中. □

注 5.13. 实际上无需 $F = \mathbb{C}$, 只需 F 囊括所有 $\mathfrak{g}$ 中者的特征值, 但特征 0 总是需要的.

推论 5.14. (1) 设 $\mathbb{C}$-有限维李代数 $\mathfrak{g}$, 理想 I. 则 $\mathfrak{g}$ 可解等价于 $I, \mathfrak{g}/I$ 都可解. (换成幂零不对) (2) 存在极大可解理想, 记之作 $\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$. (3) 若可解 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$, 则存在一列 F-线性空间 $0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_d = V$ 使 $\dim V_i = i$（一个旗）且 $\mathfrak{g}(V_i) \subset V_i$. 作为推论, 存在一组基使 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ 中者在此基下皆为上三角阵. (4) $\mathfrak{g}$ 可解等价于 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 幂零.

证明. (1) 左推右在**命题 5.7(1)**, 右推左设 $(\mathfrak{g}/I)^{(k)} = 0, I^{(l)} = 0$, 注意 $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/I$ 的典范映射下, $\mathfrak{g}^{(k)}/I = (\mathfrak{g}/I)^{(k)}$, 故 $\mathfrak{g}^{(k)} \subset I$ 从而 $\mathfrak{g}^{(k+l)} \subset I^{(l)} = 0$. 幂零的反例是二维者 $\mathfrak{g} = Fx \oplus Fy$, $[x, y] = x, I = Fx$. (2) 由 (1) 注意 I, J 可解时由 $(I + J)/J \cong I/(I \cap J)$ 以及 $I \cap J$ 可解推出 $I + J$ 可解. (3)(4) 和**命题 5.8(2)** 类似. (3) 则对 $\dim V$ 归纳, 一维显然, **Lie 定理**完成归纳递推. (4) 注意 $\ker(\operatorname{ad}) = Z(\mathfrak{g})$, 故由 (3) 和**命题 5.7(2)** 立即得出左推右, 而右推左显然. □

5.1.3 具体 Jordan 分解和 Cartan 判别

熟知代数闭域上有限维线性映射总有 Jordan 标准型.

> **定理 5.15** (具体 Jordan 分解). 设 V 是有限维 $\mathbb{C}$ 线性空间, $x \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$, 则存在唯一的 $x_s, x_n \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$, 使得 x_s 可对角化, x_n 幂零且 $x = x_s + x_n$, $x_s x_n = x_n x_s$.

证明. 设 x 的矩阵为其 Jordan 标准型, x_s 取成对角部分, x_n 为严格上三角部分即得存在性. 对唯一性, 注意存在性中构造的 x_s, x_n 是 x 的多项式, 若还有 x'_s, x'_n 则它们与 x 进而与 x_s, x_n 可交换, 则 $x_s - x'_s = x'_n - x_n$ 既半单（同时对角化）又幂零（可交换幂零阵的和）从而是 0. □

注 5.16. *Jordan 分解具有函子性, 具体的: 对 $\mathbb{C}$-线性的 $f : V \to W$ 和 $x \in \mathrm{End}(V), y \in \mathrm{End}(W)$ 使得 $yf = fx$, 则有 $y_s f = f x_s$, $y_n f = f x_n$. 这是因为 f 将 $V(x,\lambda) = \mathrm{Ker}(x-\lambda)^N$ 打入 $V(y,\lambda) = \mathrm{Ker}(y-\lambda)^N$（$N$ 大于 x, y 最小多项式中 λ 的重数）. 而 x_s 相对于在每个 V_λ 取 $\lambda \cdot \mathrm{id}$ 相加, 因此 $y_s f = f x_s$. 即如下的交换图:*

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x"'] & W \arrow[d, "y"] \\
V \arrow[r, "f"'] & W
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x_s"'] & W \arrow[d, "y_s"] \\
V \arrow[r, "f"'] & W
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "x_n"'] & W \arrow[d, "y_n"] \\
V \arrow[r, "f"'] & W
\end{tikzcd}.
$$

引理 5.17. *考虑 V 是 $\mathbb{C}$-有限维线性空间, $\mathrm{ad} : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{gl}(V))$. 记 $x = x_s + x_n$ 是 x 作为线性映射的 Jordan 分解, 则 $\mathrm{ad}(x) = \mathrm{ad}(x_s) + \mathrm{ad}(x_n)$ 是 $\mathrm{ad}(x)$ 作为线性映射的 Jordan 分解.*

证明. 显然 $[\mathrm{ad}(x_s), \mathrm{ad}(x_n)] = \mathrm{ad}([x_s, x_n]) = 0$; 而 x_n 幂零故 ad-幂零, 即 $\mathrm{ad}(x_n)$ 幂零. 最后 x_s 在 V 的一组基 $\{v_i\}$ 下对角化为 $\mathrm{diag}\{\lambda_i\}$, 则 $\mathrm{ad}(x_s)$ 在基 $\{v_i^* \otimes v_j\}$ 下为 $\mathrm{diag}\{\lambda_i - \lambda_j\}$. □

> **定理 5.18** (Cartan 判别). V 是 $F = \mathbb{C}$ 上的有限维线性空间, 线性李代数 $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$, 则 $\mathfrak{g}$ 可解的充要条件是 $\mathrm{Tr}(xy) = 0$ 对一切 $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], y \in \mathfrak{g}$.

证明. 首先假设 $\mathfrak{g}$ 可解, 由**推论 5.14(3)** 上三角化, 于是迹为零者显然. 反过来只需证明任意 $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 是幂零线性映射而后由**推论 5.14(4)**, **Engel 定理**得. 为此需证明 x 的特征值模长平方和为 0. 我们取定 V 的一组基使此时 x_s 对角, 定义 $\overline{x_s}$ 为将 x_s 对角元皆换成共轭者, 需证明 $\mathrm{Tr}(\overline{x_s}x) = 0$. 设 $x = \sum_{i=1}^n [y_i, z_i]$ 计算得:

$$
\mathrm{Tr}(\overline{x_s}x) = \mathrm{Tr}\left(\sum_{i=1}^n \overline{x_s}[y_i, z_i]\right) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Tr}([\overline{x_s}, y_i]z_i) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(\overline{x_s})(y_i)z_i)
$$

此时 $\mathrm{ad}(\overline{x_s})$ 作为 $\mathfrak{gl}(V)$ 到自身的线性映射对角化为 $\mathrm{diag}\{\overline{\lambda_i - \lambda_j}\}$. 可证其是 $\mathrm{ad}(x_s)$ 的多项式, 依照**引理 5.17** 进而是 $\mathrm{ad}(x)$ 的多项式. 须证此多项式常数项为 0, 这样 $\mathrm{ad}(\overline{x_s})(y_i) \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 从而依题目条件上右式为 0. 注意 $\mathrm{Im}(\mathrm{ad}(\overline{x_s})) = \mathrm{Im}(\mathrm{ad}(x_s)) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{ad}(x)) \neq \mathfrak{gl}(V)$. 倘若常数项非零则 $\mathrm{Im}(\mathrm{ad}(x))$ 包含常多项式的像即 $\mathfrak{gl}(V)$ 而矛盾. □

引理 5.19. 设 F 是特征 0 的域, $G=\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(F)$ 即域 F 作为 $\mathbb{Q}$-线性空间的自同态. 若一列 $x_1,\cdots,x_n\in F$ 使得对任意 $\phi\in G$ 总有 $\phi(x_1)x_1+\cdots+\phi(x_n)x_n=0$, 则 $x_1=\cdots=x_n=0$.

证明. 实际上只研究 $\phi:F\to\mathbb{Q}$ 且限制在 $\mathbb{Q}$ 上取恒同. 对条件作用 ϕ 得 $\sum\phi(x_i)^2=0$. 现在若某 $x_i\notin\mathbb{Q}$, 构造一个 ϕ 将它打到 1 而得到矛盾, 若诸 x_i 都在 $\mathbb{Q}$ 则结论显然. □

注 5.20. 实际上 *Cartan* 判别的 $F=\mathbb{C}$ 改成一般特征 0 的域, 结果仍然成立. 用 F^a 记 F 的代数闭包, 则 $\mathfrak{g}\otimes_F F^a\subset\mathfrak{gl}(V\otimes_F F^a)$ 可解当且仅当 $\mathfrak{g}$ 可解（为什么）且对应的迹条件不变. 另一边则是使用**引理 5.19** 可得, 这可替换原先 $\overline{x_s}$ 的构造.

5.2 半单性的认知

5.2.1 Killing 形式、半单（Semi-Simple）的基本性质

定义 5.21. **单**李代数指非交换且无 $0,\mathfrak{g}$ 以外的理想者, **半单**李代数定义作单李代数的直和.

定义 5.22. 设 $\mathfrak{g}$ 是一个有限维 F-李代数. 其 **Killing 形式**定义为如下的双线性型:

$$K(x,y)=\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y)).$$

迹是指作为 $\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 的线性映射取. 显然这是 $\mathfrak{g}$ 上的对称 F-双线性型.

性质 5.23. 关于 *Killing* 形式有如下一些常用性质.
(1) 满足所谓**不变性**, 即对任意 $x,y,z\in\mathfrak{g}$ 有 $K([x,y],z)=K(x,[y,z])$. (2) 对任意 $\mathfrak{g}$ 的理想 I, $I^{\perp}=\{x\in\mathfrak{g}:K(x,y)=0,\ \forall y\in I\}$ 仍是理想.
实际上 (1) 对矩阵 A,B,C 有 $\mathrm{Tr}([A,B]C)=\mathrm{Tr}(A[B,C])$. (2) 由 (1) 显然.

另外有了 Killing 形式, 因为 $\mathfrak{g}$ 可解当且仅当 $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ 可解, 借由 ad 映射将 $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ 嵌入 $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 作为线性李代数, 故我们可以考虑 Cartan 判别**定理 5.18** 的特例如下:

定理 5.24 (Cartan 判别 *)**.** 特征 0 域上有限维李代数 $\mathfrak{g}$ 可解等价于 $K([\mathfrak{g},\mathfrak{g}],\mathfrak{g})=0$.

引理 5.25. 设 $\mathfrak{g}$ 是有限维李代数, 理想 I. 则有 *Killing* 形限制: $K_I=K_{\mathfrak{g}}|_{I\times I}$.

证明. 只需任取 I 的基扩充为 $\mathfrak{g}$ 的基. 对 $x,y\in I$ 有 $\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y):\mathfrak{g}\to I$, 作为 $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 的矩阵来看, 能对迹产生贡献的部分只有作为 $I\to I$ 线性映射的部分, 即是在 $\mathfrak{gl}(I)$ 中的迹. □

而本小节的一个主要内容是下面的定理:

定理 5.26 (半单判别)**.** 设 $\mathfrak{g}$ 是有限维特征 0 的域 F 上的李代数. 则 **TFAE**:
(1) $\mathfrak{g}$ 是半单李代数. (2) $\mathfrak{g}$ 是其一系列单理想（作为李代数）的直和. (3) $\mathfrak{g}$ 的 *Killing* 形式非退化. (4) $\mathfrak{g}$ 的交换理想只有 0. (5) $\mathfrak{g}$ 的可解理想只有 0, 等价的 $\mathrm{rad}(\mathfrak{g}) = 0$.

证明. 比较显然的是 (1) $\iff$ (2). 接下来 (2) $\implies$ (4) 因为半单李代数的理想都能分类, 若 $\mathfrak{g}$ 单, 则任意非零 $x \in \mathfrak{g}$ 生成的理想 I 必是 $\mathfrak{g}$, 否则 $[x, \mathfrak{g}] = 0$ 从而 Fx 是非平凡理想, 通过与单分量作李括号可证明半单李代数的理想只能是其中若干个单者的直和.

再看 (4) $\implies$ (5): 注意到若 I 是 $\mathfrak{g}$ 的非零可解理想, 取最大 n 使 $I^{(n)} \neq 0$ 则有 $I^{(n)}$ 是交换理想. 接着 (5) $\implies$ (3): 记 $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^{\perp}$, 由**引理 5.25** 与 **Cartan 判别**知 $\mathfrak{h}$ 可解故 $\mathfrak{h} = 0$, 这即 K 非退化. 然后是 (3) $\implies$ (4), 若 $\mathfrak{g}$ 有交换理想 $I \neq 0$, 则 $(\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y))^2 = 0$ 对一切 $x \in \mathfrak{g}, y \in I$（注意 I 是理想故 $[y, [x, [y, z]]] \in [I, I] = 0$）, 故这推出 $K(x, y) = 0$ 而与非退化矛盾.

上面证了 (3), (4), (5) 等价, 最后我们指出 (3) $\implies$ (2): 对 $\mathfrak{g}$ 的理想 I, 注意非退化知 $I \oplus I^{\perp} = \mathfrak{g}$. 因此将 Killing 形限制在理想上再对维数归纳, 可将 $\mathfrak{g}$ 分解为单理想的直和. □

习题 5.27. 特征 0 有限维 $\mathfrak{g}$ 理想 I, 研究可解理想证明 $\mathfrak{g}$ 半单等价于 $I, \mathfrak{g}/I$ 都半单.

推论 5.28. 特征 0 域上的有限维李代数 $\mathfrak{g}$, 总有 $\mathfrak{g}^{\perp} \subset \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$（不一定取等, $[x, y] = x$ 者可解但 $K(y, y) = 1$）. 另外商代数 $\mathfrak{g}/\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ 半单, $\mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ 实则是使 $\mathfrak{g}/I$ 半单的 I 中最小者.

证明. 由 **Cartan 判别**, $\mathfrak{g}^{\perp}$ 可解故 $\mathfrak{g}^{\perp} \subset \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$. 由**定理 5.26** $\mathfrak{g}/I$ 半单等价于无非零可解理想, 等价于 I 含 $\mathfrak{g}$ 的全体可解理想. （若不含可解 J, 则 $(I + J)/I \cong J/(J \cap I)$ 非零可解） □

推论 5.29. 若 $\mathfrak{g}$ 是特征 0 有限维半单李代数, 则 $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ 在 ad 下同构.

证明. 因为半单故 $Z(\mathfrak{g}) = 0$, 从而 $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ 是单同态, 而且因为 $\delta \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ 有 $[\delta, \mathrm{ad}(x)] = \mathrm{ad}(\delta(x))$ 从而 $I = \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ 是 $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ 中理想. 为证满, 考虑 $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ 中的 Killing 形 K, 由半单和**引理 5.25** 知 $K|_I$ 非退化, 于是 $I \oplus I^{\perp} = \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. 现在对 $\delta \in I^{\perp}$ 和任意 $x \in \mathfrak{g}$ 有 $\mathrm{ad}(\delta(x)) = [\delta, \mathrm{ad}(x)] \in I \cap I^{\perp} = 0$. 因此 $\delta(x) = 0$, 故 $I^{\perp} = 0$. □

5.2.2 万有包络代数（Universal Enveloping Algebras）

定义 5.30. 设 $\mathfrak{g}$ 是 k-李代数. 则 $\mathfrak{g}$ 的**万有包络代数**是指如下的资料：一个 k-含幺结合代数 $U\mathfrak{g}$ 和一个李同态 $c : \mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}$, $c([x, y]) = cx \cdot cy - cy \cdot cx$. 使得任意 k-含幺结合代数 A 和李同态

$\varphi:\mathfrak{g}\to A$, 都存在唯一李同态 $\psi:U\mathfrak{g}\to A$ 使 $\varphi=\psi\circ c$, 即如下交换图表

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "c"] \arrow[d, "\varphi"'] & U\mathfrak{g} \arrow[dl, dashed, "\exists!\psi"] \\ A & \end{tikzcd}.$$

例子是 $\mathfrak{g}=k$ 时, $U\mathfrak{g}=k[x]$, $c:1\mapsto x$, $\psi:x\mapsto\varphi(1)$.

定理 5.31. 万有包络代数存在且(在李同构的意义下)唯一.

证明. 唯一性由万有性质得. 存在性使用张量代数构造, 记 $T\mathfrak{g}=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathfrak{g}^{\otimes n}$, 张量积是作为线性空间取的, 其好处是对任意题述 A, $\mathrm{Hom}_{{}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}}(\mathfrak{g},A)=\mathrm{Hom}_{\mathsf{AssAlg}}(T\mathfrak{g},A)$. 用 I 表示全体 $[x,y]-x\otimes y+y\otimes x$ 生成的双边理想, 其中 $x,y,[x,y]\in\mathfrak{g}$. 于是我们定义 $U\mathfrak{g}=T\mathfrak{g}/I$, 并取 c 为典范的 $\mathfrak{g}\to T\mathfrak{g}\to U\mathfrak{g}$, 通过 $T\mathfrak{g}$ 的性质, 读者不难证明这样定义的 $(U\mathfrak{g},c)$ 符合万有性质. □

性质 5.32. 设 $\mathfrak{g}$ 是 k-李代数, 则从范畴同构的意义下:
有 ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}$(对象是 k-线性空间, $\mathfrak{g}$ 的李表示)同构于 ${}_{U\mathfrak{g}}\mathsf{Mod}$($U\mathfrak{g}$-左模).

证明. 由 $U\mathfrak{g}$ 的万有性质, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Lie}}(\mathfrak{g},\mathfrak{gl}(V))=\mathrm{Hom}_{\mathrm{Lie}}(U\mathfrak{g},\mathfrak{gl}(V))$. 不难检查函子性. □

定义 5.33. 若 $\mathfrak{g}$ 是 k-线性空间, 考虑平凡李括号 $[x,y]=0$ 对一切 $x,y\in\mathfrak{g}$, 此时 $U\mathfrak{g}=\mathrm{Sym}\,\mathfrak{g}$ 被称为 $\mathfrak{g}$ 的 **(万有) 对称代数**, 记 $S\mathfrak{g}$. 对一般李代数 $\mathfrak{g}$, 显然 $T\mathfrak{g}$ 上有自然的滤过, 考虑

$$T_n\mathfrak{g}:=\bigoplus_{k=0}^{n}\mathfrak{g}^{\otimes k},\qquad \mathrm{gr}_n T\mathfrak{g}:=T_n\mathfrak{g}/T_{n-1}\mathfrak{g},\qquad \mathrm{gr}\,T\mathfrak{g}:=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathrm{gr}_n T\mathfrak{g},$$
$$U_n\mathfrak{g}:=\mathrm{Im}(T_n\to U_n)|_{T_n\mathfrak{g}},\qquad \mathrm{gr}_n U\mathfrak{g}:=U_n\mathfrak{g}/U_{n-1}\mathfrak{g},\qquad \mathrm{gr}\,U\mathfrak{g}:=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathrm{gr}_n U\mathfrak{g}.$$

自然诱导了 $U\mathfrak{g}$ 上的滤过, 这样得到的 $\mathrm{gr}\,U\mathfrak{g}$ 是交换含幺的分次代数. 因为 $S\mathfrak{g}$ 的万有性质($T\mathfrak{g}$ 的商中交换的最大者), $\mathfrak{g}\to\mathrm{gr}\,U\mathfrak{g}$ 的典范同态诱导了 $\iota:S\mathfrak{g}\to\mathrm{gr}\,U\mathfrak{g}$.

定理 5.34 (Poincaré-Birkhoff-Witt)**.** 设 $\mathfrak{g}$ 是 k-李代数($\mathfrak{g}$ 是自由 k-模), 则 ι 是同构.

证明. 我们需要三个引理. 设 $\{x_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一组 k-基, 其中 $\mathscr{I}$ 是全序集.

引理 5.35. 所有形如 $c(x_{i_1})\cdots c(x_{i_m}), i_1\le\cdots\le i_m, m\le n$ 者作为 k-模生成 $U_n\mathfrak{g}$.

对 n 归纳, $n=0,1$ 显然, 一般用 $A\otimes y\otimes x\otimes B=A\otimes x\otimes y\otimes B-A\otimes[x,y]\otimes B$ 调整顺序.

引理 5.36. 只需所有形如 $c(x_{i_1})\cdots c(x_{i_m}), i_1\le\cdots\le i_m$ 者在 $U\mathfrak{g}$ 线性无关, 定理即得证.

引理条件下, 检查 $m \le n$ 者构成 $U_n\mathfrak{g}$ 的一组基 (前引理保证生成, 再加之无关性), 故 $m = n$ 者构成 $\mathrm{gr}_n U\mathfrak{g}$ 的一组基, 从而 $\mathrm{gr}_n S\mathfrak{g} \to \mathrm{gr}_n U\mathfrak{g}$ 对应将 $x_{j_1}\cdots x_{j_m}$ 一组基映到 $c(x_{i_1})\cdots c(x_{i_m})$ 一组基, $i_1 \le \cdots \le i_m$ 是 $j_1, \cdots, j_m$ 的一组重排. 于是此引理得证.

- 为便捷引入一些记号, 对指标 $M = (i_1, \cdots, i_m)$ 满足 $i_1 \le \cdots \le i_m$ 记 $x_M := x_{i_1}\cdots x_{i_m} \in S\mathfrak{g}$, $\ell(M) := m$; $i \le M$ 指 $i \le i_1$, 再记 $iM := (i, i_1, \cdots, i_m)$.

引理 5.37. 对 $i \le M$, 作用 $x_i \cdot x_M = x_{iM}$ 可延拓为 $\mathfrak{g}$ 在 $S\mathfrak{g}$ 的整个李表示. 换言之可以合理定义 $\mathfrak{g} \times S\mathfrak{g} \to S\mathfrak{g}$ 使 $xys - yxs = [x, y]s$ 对 $x, y \in \mathfrak{g}, s \in S$.

为此只需定义一般 $x_i{\cdot}x_M$ 作用, 由超限归纳, 假设 $x_j{\cdot}x_N$ 对 $j < i, \ell(N) = \ell(M)$ 和 $j, \ell(N) < \ell(M)$ 的情况已定义, 而且把 "$x_j \cdot x_N$ 是 x_L 的 k-线性组合, 其中 $\ell(L) \le \ell(N) + 1$" 加入归纳. 定义 $x_ix_M := \begin{cases} x_{iM}, & i \le M; \\ x_j(x_ix_N) + [x_i, x_j]x_N, & M = jN, i > j \end{cases}$. 可检查 $\ell(L) \le \ell(N) + 1$ 确实一直成立. 现只需计算 $x_ix_jx_N - x_jx_ix_N = [x_i, x_j]x_N$ 对一切 i, j, N 成立.

由反对称性只研究 $i > j$, 而且 $j \le N$ 的情况也已经由 $x_jx_N = x_{jN}$ 和 x_ix_{jN} 的定义满足, 故只剩下 $N = kL, i > j > k$, $x_ix_jx_kx_L - x_jx_ix_kx_L = [x_i, x_j]x_kx_L$. 对 $\min\{i, j\}$ 归纳可设此式已经对将 ijk 置换为 jki, kij 的情形成立, 另对 $\ell(N)$ 归纳可以假设 $xyx_L = yxx_L + [x, y]x_L$ 对所有 $x, y \in \mathfrak{g}$ 成立, 于是先取 $x = [x_i, x_j], y = x_k$; 后取 $x = x_i, y = x_j$ 展开原右式:

$$\begin{aligned} [x_i, x_j]x_kx_L &= x_k[x_i, x_j]x_L + [[x_i, x_j], x_k]x_L \\ &= x_kx_ix_jx_L - x_kx_jx_ix_L + [[x_i, x_j], x_k]x_L. \end{aligned}$$

将之对 ijk 取作 ijk, jki, kij 的情况求和, 结合 jki, kij 上已经成立者得到

$$\begin{aligned} [x_i, x_j]x_kx_L = {} & x_ix_jx_kx_L - x_jx_ix_kx_L \\ & + [[x_i, x_j], x_k]x_L + [[x_j, x_k], x_i]x_L + [[x_k, x_i], x_j]x_L. \end{aligned}$$

从而由于 $\mathfrak{g}$ 满足 Jacobi 恒等式, 我们完成了引理的证明.

回到原题, $S\mathfrak{g}$ 依上法成为 $\mathfrak{g}$-模进而由**性质 5.32** 成为 $U\mathfrak{g}$-左模, 为了证明 $U\mathfrak{g}$ 中 $c(x_{i_1})\cdots c(x_{i_m})$ 者线性无关, 只需证明它们在 $S\mathfrak{g}$ 上的作用不能线性组合为 0 作用. 注意 $c(x_{i_1})\cdots c(x_{i_m})$ 作用在 $1 = x_\varnothing$ 上得单项式 x_M, 而多项式环中互不相同的单项式是线性无关的, 故得证. □

习题 5.38. $c : \mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}$ 是单射, 实际上是到 $\mathrm{gr}_1 U\mathfrak{g}$ 的到像同构. 另一个直观的应用是 $U\mathfrak{g}$ 没有非零零因子, 提示是考察最高次项者而转化到 $\mathrm{gr}\, U\mathfrak{g}$ 的讨论.

习题 5.39. 检查若 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, 则 $U\mathfrak{g}_1 \otimes U\mathfrak{g}_2 \to U\mathfrak{g}$, $u_1 \otimes u_2 \mapsto u_1u_2$ 是同构. 另一方面证明泛性质也带来一个典范同构, 并检查这两种方式得到的同构是一样的.

5.2.3 Casimir 元与 Weyl 完全可约性定理

定义 5.40. 假设 $\mathfrak{g}$ 是 F-李代数, $(\varphi, V), (\psi, W)$ 是 $\mathfrak{g}$-表示, 则 $\mathrm{Hom}_F(V,W), V\otimes W$ 也是 $\mathfrak{g}$-表示: 对 $f\in \mathrm{Hom}_F(V,W)$ 定义 $(xf)(v)=x(fv)-f(xv)$; 定义 $x(v\otimes w)=(xv)\otimes w+v\otimes(xw)$, 可检查它们是表示. 作为特例在 $\mathrm{Hom}_F(V,F)=V^\vee$ 的 $(xf)(v)=-f(xv)$ 也使它成为表示.
再记 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V,W)=\{f\in\mathrm{Hom}_F(V,W): f(xv)=x(fv), \forall x\in\mathfrak{g}\}$, 以及
$V^{\mathfrak{g}}:=\{v\in V: xv=0, \forall x\in\mathfrak{g}\}$. 有趣的是 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V,W)=\mathrm{Hom}(V,W)^{\mathfrak{g}}$.

习题 5.41 (Schur 引理)**.** 对代数闭 F 上的有限维 $\mathfrak{g}$ 的有限维不可约表示 V,W 我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V,W)=\begin{cases}0, & V\ncong W;\\ F, & V\cong W.\end{cases}$$

代数闭的条件用于 $f,g\in\mathrm{Aut}_{\mathfrak{g}}(V)$, $f^{-1}g$ 总有特征值和特征向量.

定义 5.42. 一个表示**完全可约**指它是不可约子表示的直和.

定义 5.43. 设 $\mathfrak{g}$ 是有限维李代数, B 是 $\mathfrak{g}$ 上的非退化对称二次型. 对 $\mathfrak{g}$ 的一组基 x_i, 设关于 B 的对偶基为 x^i. 则将如下的元素称为 $\mathfrak{g}$ 关于 B 的 **Casimir 元**:

$$C_B:=\sum_i c(x_i)c(x^i)\in U\mathfrak{g}.$$

若 B 是非退化的 *Killing* 形 K, 则简记 C, 称之 $\mathfrak{g}$ 的 *Casimir* 元. 注意 C_B 并不依赖于基 x_i 的选取, 考虑 $I=\sum x_i\otimes x^i\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\cong\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}^\vee=\mathrm{End}_k(\mathfrak{g})$ (在 B 下作为线性空间的相等) 即是 $\mathrm{id}_{\mathrm{End}_k(\mathfrak{g})}$ 与基选取无关, 故 I 从 $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}\subset T\mathfrak{g}$ 打到 $U\mathfrak{g}$ 中的 C_B 证明了 C_B 与基选取无关.
对 B 是满足**不变性**者 (如 *Killing* 形), 总有 $C_B\in Z(U\mathfrak{g})$. 首先 $\mathfrak{g}$ 通过 ad 作用于自身作为表示, 而 $\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}^\vee$ 取 $x\mapsto B(x,-)$ 是 $\mathfrak{g}$ 表示同构, 等价于 $B(x,[y,-])=B([x,y],-)$. 而 $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}^\vee=\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ (左边按 ad 分别作用在 $\mathfrak{g},\mathfrak{g}^\vee$; 右边按 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})}\circ\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$) 是表示同构, 故对 $y\in\mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} I&=\sum_i x_i\otimes x^i\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}, & yI&=\sum_i\Big([y,x_i]\otimes x^i+x_i\otimes[y,x^i]\Big)=y\otimes I-I\otimes y+z,\\ I&=\sum_i x_i\otimes x^i\in\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), & yI&=\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(y))(I)=\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(y)\mathrm{id}_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})}-\mathrm{id}_{\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})}\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(y)=0.\end{aligned}$$

其中 z 于 $x\otimes y-y\otimes x-[x,y]$ 生成的 $T\mathfrak{g}$ 的双边理想中, 这表明 $C_B\in Z(U\mathfrak{g})$.

> **命题 5.44.** 设 V 是有限维半单 $\mathbb{C}$-李代数 $\mathfrak{g}$ 的有限维表示. 那么对某 *Casimir* 元 $C_V\in Z(U\mathfrak{g})$ 在 V 上作用相当于数乘, 若 V 非平凡则该数乘非 0 者, 若 V 平凡则数乘 0.

证明. 首先取 $B_V(x,y) := \mathrm{Tr}_V(\rho(x)\rho(y))$, 类似**性质 5.23** 不难检查它是对称且有不变性的二次型. 若它非退化, 则它对应一个 Casimir 元 C_V, 那么 **Schur 引理**保证 C_V 作用相当于数乘 λ, 计算 $\mathrm{Tr}_V(C_V) = \sum \mathrm{Tr}_V(\rho(x_i)\rho(x^i)) = \sum K(x_i, x^i) = \dim \mathfrak{g}$ 从而 $\lambda = \dim \mathfrak{g} / \dim V$.

一般的它可能退化, 设 B_V 下的正交补 $I := \mathfrak{g}^\perp$. 首先 $I \neq \mathfrak{g}$ 否则**定理 5.18 的 Cartan 判别**保证它可解从而 $\mathfrak{g}$ 既半单又可解而矛盾. 其次由半单性 $\mathfrak{g} = I \oplus I^\perp$, 后者是 I 在 Killing 形式下的正交补, 故半单理想 $I^\perp \neq 0$, 显然 $B_V|_{I^\perp}$ 非退化. 这时取 $I^\perp$ 关于 $B_V|_{I^\perp}$ 的 Casimir 元 C_V, 由于 $I, I^\perp$ 可交换与**习题 5.39** 得知 $C_V \in Z(U\mathfrak{g})$, 与开始时一样的方法, 此时用 $B_V|_{I^\perp}(x,y)$ 和 $I^\perp$ 代替 $B_V(x,y)$ 和 $\mathfrak{g}$, 则非退化条件得到满足, 从而 $\lambda = \dim I^\perp / \dim V$, 结论得证. □

定理 5.45 (Weyl). 有限维 $\mathbb{C}$-半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的有限维表示都完全可约.

证明. 这是李代数上同调的第一次露面. 注意 ${}_{\mathfrak{g}}\mathsf{fgMod}$ 是一个 Abel 范畴, 其核、余核、单态射、满态射、张量积完全按照作为 ${}_{k}\mathsf{fgMod}$ 者来. 现为证明完全可约, 只需范畴中任意正合列 $0 \to V_1 \to W \to V_2 \to 0$ 都分裂, 下面分步证明这点.

引理 5.46. 由**定义 5.40** 考虑函子 $-^{\mathfrak{g}} = \mathrm{Hom}(\mathbb{C}, -)^{\mathfrak{g}} = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathbb{C}, -)$ 的导出 $\mathrm{Ext}^\bullet$. 则:
对任意不可约表示 V 有 $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{C}, V) = 0$. 进而对任意表示 V 这都成立.

这等价于任意正合列 $0 \to V \to W \to \mathbb{C} \to 0$ 都分裂. 我们分类讨论 V 不平凡以及 $V = \mathbb{C}$. 对 V 不平凡, 由**命题 5.44**, C_V 在 $\mathbb{C}$ 上零作用, 在 V 上乘 $\lambda \neq 0$. 故按照 C_V 的特征值分解得 $W = V \oplus W^0$, 其中 W^0 是 C_V 的 0-特征子空间. 由于 $C_V \in Z(U\mathfrak{g})$, W^0 是一维子表示, 从而由 $W^0 \cong \mathbb{C}$ 而得 $W \cong V \oplus \mathbb{C}$. 若 $V = \mathbb{C}$ 平凡, 则 W 是二维表示, 且 $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(W)$ 的像是上三角矩阵进而可解, 故 W 只能是平凡表示 $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. 于是不可约时总有 $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{C}, V) = 0$.
对 $0 \to V_1 \to V \to V_2 \to 0$ 得长正合列 $\cdots \to \mathrm{Ext}^1(\mathbb{C}, V_1) \to \mathrm{Ext}^1(\mathbb{C}, V) \to \mathrm{Ext}^1(\mathbb{C}, V_2) \to \cdots$. 然后对维数归纳, $\dim V_1, \dim V_2$ 都比 $\dim V$ 小, 于是一般表示 V 的结论也得到了.

• 回到原题, 欲证 $0 \to V_1 \to W \to V_2 \to 0$ 分裂. 为此考虑正合函子

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_2, -) = V_2^\vee \otimes - : {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{fgMod} \to {}_{\mathfrak{g}}\mathsf{fgMod}.$$

于是有正合列 $0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_2, V_1) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_2, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_2, V_2) \to 0$. 作用 $-^{\mathfrak{g}}$ 得长正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_2, V_1) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_2, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_2, V_2) \to \mathrm{Ext}^1(\mathbb{C}, V_2^\vee \otimes V_1) = 0.$$

因此由 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_2, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V_2, V_2)$ 满射得知, 存在表示同构 $f \in V_2 \to W$ 复合上 $W \to V_2$ 得到 V_2 上的恒同映射. 这即正合列分裂, 结论得证. □

注 5.47. 证明完全可约性还可以考虑将 $\mathbb{C}$-有限维半单李代数写成一个实李代数的复化, 对应回一个紧、单连通的李群, 这时注意到紧李群的表示都是酉表示, 因此完全可约性来源于取正交补, 最后这又回到李代数表示的分解. 然而我们还是希望在代数笔记中避免出现大量分析.

5.2.4 一个简短的小节: 约化（Reductive）李代数

定义 5.48. 一个李代数 $\mathfrak{g}$ 若满足 $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ 半单, 则称之**约化的**. 很显然, 约化的等价定义方式是 $Z(\mathfrak{g}) = \mathrm{rad}(\mathfrak{g})$ 以及 $[\mathfrak{g}, \mathrm{rad}\,\mathfrak{g}] = 0$. 一个约化而不半单的经典例子是 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$.

引理 5.49. 设 V 是有限维复李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个有限维不可约表示. 则一切 $h \in \mathrm{rad}\,\mathfrak{g}$ 在 V 上作用都是数乘. 特别的, 作为直接推论, 若 $h \in [\mathfrak{g}, \mathrm{rad}\,\mathfrak{g}]$ 则它在 V 上零作用.

证明. 由 **Lie 定理**我们知道 V 作为可解 $\mathrm{rad}\,\mathfrak{g}$ 的表示, 存在权 $\lambda : \mathrm{rad}\,\mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ 使得 $V_\lambda \neq 0$. 而**引理 5.11(不变性引理)** 得知 V_λ 是 V 的 $\mathfrak{g}$-子表示, 结合非零和 V 不可约故 $V_\lambda = V$. □

命题 5.50. 如果有限维复李代数 $\mathfrak{g}$ 有一个有限维表示 (ρ, V), 满足 $\mathfrak{g}$ 上的二次型 $B_V(x, y) = \mathrm{Tr}_V(\rho(x)\rho(y))$ 非退化, 则 $\mathfrak{g}$ 是约化李代数. 作为推论 $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ 的约化性显然.

证明. 只证 $[\mathfrak{g}, \mathrm{rad}\,\mathfrak{g}] = 0$. 设 $x \in [\mathfrak{g}, \mathrm{rad}\,\mathfrak{g}]$, 观察 V 的一个 $\mathfrak{g}$-不可约子表示 V_1, 由上述引理知 x 在 V_1 上零作用. 注意对 $\mathfrak{g}$-表示短正合列 $0 \to V_1 \to V \to V_2 \to 0$ 总有 $B_V = B_{V_1} + B_{V_2}$（依赖 B_V 定义而一般二次型不可）. 对维数归纳得 $B_V(x, -) = 0$ 从而由非退化得 $x = 0$. □

结合半单李代数表示的完全可约性, 我们容易得到约化李代数情形的 Levi 定理:

命题 5.51. 有限维约化复李代数 $\mathfrak{g}$ 总能写成 $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}_s$. 其中 $\mathfrak{g}_s \subset \mathfrak{g}$ 是半单理想.

证明. 考虑 ad 作用下 $\mathfrak{g}$ 作为半单李代数 $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ 的表示. 由完全可约性**定理 5.45**, $Z(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ 是子表示从而 $\mathfrak{g} = Z(\mathfrak{g}) \oplus I$, I 是 $\mathfrak{g}$ 的理想且 $I \cong \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ 半单. 从而取 $\mathfrak{g}_s := I$ 符合条件. □

5.2.5 例子: 低维李代数、$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 的有限维不可约表示

例 5.52. 低维李代数是典范的例子. 一维当然没什么好说的, 二维的李代数只需考察 $[x, y] = ax + by$, 若非交换, 设 $a \neq 0$ 故 $[ax + by, y/a] = ax + by$. 发现一二维的情况总是可解的.
而三维的李代数, 讨论 $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 的维数, 也类似处理 $\dim \mathfrak{g}^{(1)} = 0, 1, 2$ 的情形. 一维者注意 $[-, -] : \bigwedge^2 \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 的核是二维的, 设其形如 $x \wedge Y, Y \in \mathfrak{g}$. 从而扩充基得到

$$[x, y] = [x, z] = 0, [y, z] = ax + by + cz.$$

若 $b \neq 0$ 则 $[ax + by + cz, z/b] = ax + by + cz$; $c \neq 0$ 类似. 若 $b = c = 0, a \neq 0$ 则 $[y, z/a] = x$. 易检查 *Jacobi* 恒等式, 注意 $[y, z] = y, [y, z] = x$ 时对应不同李代数, 后者幂零而前者不然.
从二维开始, 基变换到代数闭域分类. 二维者则设 $\mathfrak{g}^{(1)}$ 一组基 y, z. 设 $[y, z] = ay + bz$, 因为 $\mathrm{ad}(y)$ 将 y 打到 0, z 打到 $ay + bz$ 所以迹为 b; 但是 $y \in \mathfrak{g}^{(1)}$ 从而 $\mathrm{ad}(y)$ 是一个交换子而迹必须为 0. 从而 $b = 0$, 同理 $a = 0$. 于是扩充基, 注意 $\mathrm{ad}(x) : \mathfrak{g}^{(1)} \to \mathfrak{g}^{(1)}$ 是满射从而为同构.

若 $\mathrm{ad}(x) : \mathfrak{g}^{(1)} \to \mathfrak{g}^{(1)}$ 可对角化，则 $[x,y]=y,[x,z]=cz,[y,z]=0,c\neq 0$. 不可对角化的情况是 $[x,y]=y,[x,z]=y+z,[y,z]=0$. 而这两种确实本质不同，因为 $\mathrm{ad}(X), X\in\mathfrak{g}-\mathfrak{g}^{(1)}$ 与 $\mathrm{ad}(x)$ 只差一个常数，所以其等价类可以被在差 c, c^{-1} 的情况下本质决定.

最后三维者，即 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\mathfrak{g}$ 而不可解，此时任取基 x,y,z 总有 $[x,y],[y,z],[z,x]$ 线性无关，因此 $\mathrm{ad}(x)$ 对任意 $n\neq 0$ 总是秩 2 的，核为 $\mathbb{C}x$. 要么 $\mathrm{ad}(x)$ 的 *Jordan* 标准形是 $J_3(0)$，要么存在非零特征值，由二维方法迹为 0 得知其两个非零特征互为相反数. 因为 $\mathfrak{g}$ 不幂零故 **Engel 定理**保证总有某 h 是前者. 此时记 $[h,x]=ax,[h,y]=-ay$，计算 *Jacobi* 恒等式得到

$$[h,[x,y]] = -[x,[y,h]]-[y,[h,x]] = 0.$$

故 $[x,y]=bh, b\neq 0$. 现在通过 h 的倍数代替 h 可设 $a=2$，然后 x,y 换成线性倍数而设 $b=1$，现在我们注意如下的三个 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 中的矩阵

$$H=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \qquad X=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \qquad Y=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$

$$[H,X]=2X, \qquad [H,Y]=-2Y, \qquad [X,Y]=H.$$

因此 $\mathbb{C}$ 上者必有 $\mathfrak{g}\cong\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$，这是我们碰到的第一个单李代数（检查）.

例 5.53. 接下来我们考察 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的一些基本性质. 首先是 *Killing* 形式，

$$K(aH+bX+cY, aH+bX+cY) = \begin{bmatrix}a & b & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}.$$

当然非退化. 对应 H,X,Y 的对偶基是 $H/8, Y/4, X/4$，故 *Casimir* 元是 $H^2/8+(XY+YX)/4$. 而重要的事实是该元的多项式生成了整个 $Z(U\mathfrak{g})$，这放到后文 *Harish-Chandra* 定理再讲.

命题 5.54. $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的有限维不可约复表示通过取维数和正整数数 $\mathbb{Z}_+$ 一一对应.

证明. 先证存在性. 对每个 $d\geq 0$，考虑 $U_d\subset\mathbb{C}[x,y]$ 是齐 d 次的多项式构成的 $d+1$ 维子空间. H,X,Y 分别以 $x\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial x}$ 作用于其上. 不难检查李括号被保持而且作用确实是自身到自身. 对于不可约性，注意对任何子表示中的任何非零元素，不断作用 X 保证 x^d 于其中，在此基础上不断作用 Y 保证 $x^{d-k}y^k$ 于其中，于是其包含所有 $d+1$ 个生成元.

再证唯一性. 设 V 是有限维表示，对 $\mu\in\mathbb{C}$ 取 $V_\mu := \{v\in V : Hv=\mu v\}$. 简单计算得到 $XV_\mu\subset V_{\mu+2}, YV_\mu\subset V_{\mu-2}$. 取 μ 使 $V_\mu\neq 0$，且 $V_{\mu+2}=0$. 任一非零 $v\in V_\mu$，容易检查 $\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{v, Yv, Y^2v,\cdots\}$ 是 V 的子表示，从而等于 V. 由 V 有限维得 H 的特征值有限，可设最小

的 n 使 $Y^n v=0$, 从而 $\{Y^k v, 0\le k\le n-1\}$ 构成 V 的一组基 (H 不同特征值的特征向量得知无关). 归纳地检查 $H(Y^k v)=(\mu-2k)(Y^k v), X(Y^k v)=k(\mu-k+1)(Y^{k-1}v)$, 特别的 $k=n$ 时 $X(Y^n v)=n(\mu-n+1)(Y^{n-1}v)=0$ 从而 $\mu=n-1$, 我们确定了整个表示. □

于是由**定理 5.45** 我们明白了 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的所有有限维表示都是上述者的直和.

例 5.55. 沿用上面的记号, 有 $U_m\otimes U_n\cong U_{m+n}\oplus U_{m+n-2}\oplus\cdots\oplus U_{|m-n|}$. 所谓 *Clebsch–Gordan* 系数, 由完全可约性, 为确定不可约分解只需对 H 对特征值作分解, 计算对应特征子空间的维数即得. 另外不难检查 U_0 是平凡表示, U_1 是二维的矩阵表示, U_2 是 *ad*-表示.

5.3 Cartan 子代数和根空间

5.3.1 半单李代数的抽象 Jordan 分解、Cartan 子代数

定理 5.56 (抽象 Jordan 分解)**.** 设 $\mathfrak{g}$ 是有限维复半单李代数, $x\in\mathfrak{g}$. 则
(1) 存在 $\mathfrak{g}$ 中两元素 x_s, x_n, 作为 $\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 线性映射 $\mathrm{ad}(x_s)$ 半单, $\mathrm{ad}(x_n)$ 幂零且 $x=x_s+x_n$, $[x_s,x_n]=0$. (2) 设 $\rho:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ 是有限维复表示, 则有具体的 *Jordan* 分解 $\rho(x_s)=\rho(x)_s, \rho(x_n)=\rho(x)_n$. (3) 对 $\mathfrak{g}'$ 是另一有限维复半单李代数, $\varphi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$ 是李同态. 则 (1) 中 $\mathfrak{g}$ 中的抽象 *Jordan* 分解 $x=x_s+x_n$ 打到 $\varphi(x)=\varphi(x_s)+\varphi(x_n)$ 成为 $\mathfrak{g}'$ 中的分解.

证明. (1) 考虑 $\mathrm{ad}(x):\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 由 Jordan 标准型写出 $\mathfrak{g}=\bigoplus\mathfrak{g}_\lambda$, 其中 $\mathfrak{g}_\lambda:=\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}\,x-\lambda\cdot\mathrm{id})^\infty$. 我们声称 $[\mathfrak{g}_\lambda,\mathfrak{g}_\mu]\subset\mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$, 注意到 Jacobi 恒等式保证 $(\mathrm{ad}\,x-\lambda-\mu)[y,z]=[(\mathrm{ad}\,x-\lambda)y,z]+[y,(\mathrm{ad}\,x-\mu)z]$, 从而对 $y\in\mathfrak{g}_\lambda, z\in\mathfrak{g}_\mu$, 归纳地给出:

$$(\mathrm{ad}\,x-\lambda-\mu)^n[y,z]=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[(\mathrm{ad}\,x-\lambda)^k y,(\mathrm{ad}\,x-\mu)^{n-k}z\right]$$

在 $n>\dim\mathfrak{g}_\lambda+\dim\mathfrak{g}_\mu$ 时它总是 0. 现在设 $\mathrm{ad}(x)=(\mathrm{ad}\,x)_n+(\mathrm{ad}\,x)_n$ 是具体 Jordan 分解, 依定义 $(\mathrm{ad}\,x)_s|_{\mathfrak{g}_\lambda}=\lambda$. 于是由 $[\mathfrak{g}_\lambda,\mathfrak{g}_\mu]\subset\mathfrak{g}_{\lambda+\mu}$ 结合**推论 5.29** 得知 $(\mathrm{ad}\,x)_s\in\mathrm{Der}(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}$ 从而 $(\mathrm{ad}\,x)_s=\mathrm{ad}(x_s)$ 对某 $x_s\in\mathfrak{g}$. 这样 x_s, $x_n:=x-x_s$ 构成 (1) 中所需的分解, 因为 $\mathfrak{g}$ 半单, $Z(\mathfrak{g})=0$ 从而 ad 是单射, 结合 $\mathrm{ad}[x_s,x_n]=[(\mathrm{ad}\,x)_s,(\mathrm{ad}\,x)_n]=0$ 得知确实符合条件. 而唯一性则是 $\mathrm{ad}\,x$ 的 Jordan 分解的唯一性和 ad 是单射保证的.
(2), (3) 则是函子性**注 5.16** 确认的, 具体细节作为习题留给读者. □

注 5.57. 有了这一工具, 可便捷地讨论复半单李代数上的 ad-半单元和 ad-幂零元, 即抽象 *Jordan* 分解 $x=x_s+x_n$ 中使 $x_n=0$ 或 $x_s=0$ 的元素. 显然 ad-半单元不止有 0, 否则由 $(x_s)_s=x_s=0$ 得所有元素都是 ad-幂零的, 由 **Engel 定理**得 $\mathfrak{g}$ 幂零而与半单矛盾.

定义 5.58. 设 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ 是有限维复半单李代数的子代数. 若 $\mathfrak{h}$ 可交换且只含有 $\mathfrak{g}$ 中的 ad-半单元, 则称 $\mathfrak{h}$ 为**一个环面子代数**. 环面子代数在包含关系下的极大者称一个 **Cartan 子代数**.

注 5.59. 设 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ 是有限维复半单李代数的子代数, 只需知道其中全是 ad-半单元就能证明它的交换性. 倘若不交换, 说明存在某 $\operatorname{ad} x \neq 0$, 由半单性考虑 $(\operatorname{ad} x)(y) = \lambda y$ 对某 $\lambda \neq 0, y \neq 0$. 故 $(\operatorname{ad} y)^2(x) = [\lambda y, y] = 0$, 但由半单性必须 $(\operatorname{ad} y)(x) = 0$ 而矛盾.

命题 5.60. 设 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ 是有限维复半单李代数的环面子代数, 记 $(-,-)$ 是一非退化有 $\mathfrak{g}$ 不变性的对称二次型, 则有如下一系列事实: (1) 有 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha$, 其中 $\mathfrak{h}^*$ 是 $\mathfrak{h}$ 权的集合（即 $\mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ 线性映射）, $\mathfrak{g}_\alpha := \{x \in \mathfrak{g} : (\operatorname{ad} h)(x) = \alpha(h)x, \forall h \in \mathfrak{h}\}$ 是权空间. 特别的 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$. (2) $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. (3) 若 $\alpha + \beta \neq 0$ 则 $(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0$. 而 $(-,-)|_{\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}}$ 作为二次型非退化.

证明. (1) 诸 $\operatorname{ad}(h) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $h \in \mathfrak{h}$ 是两两可交换的半单阵, 故可同时对角化, 对应的权空间是特征子空间. (2) 则比**定理 5.56** 中的计算简单, 对 $y \in \mathfrak{g}_\alpha, z \in \mathfrak{g}_\beta, h \in \mathfrak{h}$:

$$(\operatorname{ad} h)[y, z] = [(\operatorname{ad} h)y, z] + [y, (\operatorname{ad} h)z] = (\alpha + \beta)(h)[y, z].$$

(3) 由不变性得 $0 = ([h, x], y) + (x, [h, y]) = (\alpha + \beta)(h)(x, y)$. 取 h 使 $(\alpha + \beta)(h) \neq 0$, 说明 $(x, y) = 0$ 对一切 $\alpha + \beta \neq 0$. 现在 $(-,-)$ 非退化等价于诸 $\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}$ 上皆非退化. □

命题 5.61. 设 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ 是有限维复半单李代数的环面子代数, 则 $\mathfrak{h}$ 是 *Cartan* 子代数当且仅当中心化子 $\mathfrak{h} = C(\mathfrak{h}) := \{x \in \mathfrak{g} : [x, \mathfrak{h}] = 0\}$. 有时也将后者作为 *Cartan* 子代数的定义.

证明. 中心化子是自己显然推出环面子代数极大, 反过来极大时我们证明 $\mathfrak{g}_0 = C(\mathfrak{h})$ 是环面子代数, 注意它包含 $\mathfrak{h}$ 从而由极大性必相等. 首先对 $x \in \mathfrak{g}_0$, 依照**定理 5.56** 的构造, 任意 $y \in \mathfrak{g}$ 有 $[x, y] = 0 \implies [x_s, y] = 0$（$y$ 包含在 x 的 0 特征空间）, 故 $x_s \in \mathfrak{g}_0$. 观察 $\operatorname{ad} x|_{\mathfrak{g}_0}$ 是幂零的: 否则它有非 0 特征导致 $\operatorname{ad} x_s|_{\mathfrak{g}_0} \neq 0$, 这表明 $\operatorname{ad} x_s \in C(\mathfrak{h}) \backslash \mathfrak{h}$ 从而 $\mathbb{C} \operatorname{ad} x_s \oplus \mathfrak{h}$ 是比 $\mathfrak{h}$ 更大的环面子代数（可交换半单者的和半单）而矛盾.

于是 **Engel 定理**得 $\mathfrak{g}_0$ 幂零. 而且 $\mathfrak{g}_0$ 通过 ad 作用在 $\mathfrak{g}$ 上, 对应的 $B(x, y) = \operatorname{Tr}_{\mathfrak{g}}(\operatorname{ad} x \cdot \operatorname{ad} y)$ 正是 Killing 形在 $\mathfrak{g}_0$ 上的限制. 结合**命题 5.60(3)** 得知它非退化, 从而**命题 5.50** 推出 $\mathfrak{g}_0$ 约化, 结合幂零得 $\mathfrak{g}_0$ 交换（为什么）. 现在只需证明 $\mathfrak{g}_0$ 中者都 ad-半单. 现在我们已经得知 $x_n \in \mathfrak{g}_0$, 只需证 $x_n = 0$. 因为 $\operatorname{ad} x_n$ 幂零而且 $\mathfrak{g}_0$ 可交换, 从而对任意 $y \in \mathfrak{g}_0$ 有 $\operatorname{ad} x_n \cdot \operatorname{ad} y$ 也幂零. 从而 $\operatorname{Tr}_{\mathfrak{g}}(\operatorname{ad} x_n \cdot \operatorname{ad} y) = 0$, 结合**命题 5.60(3)** 得知它非退化, 从而 $x_n = 0$, 结论得证. □

5.3.2 根空间分解（root decomposition）及其基本性质

本小节讨论中, $\mathfrak{g}$ 始终有限维复半单, 取定 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ 为 Cartan 子代数. 回顾:

定理 5.62 (根空间分解). $\mathfrak{h}$ 是 *Cartan* 子代数时, 称此时的权与权空间为**根**与**根空间**.
(1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{0\neq\alpha\in\mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha$ 称**根空间分解**. (2) $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. (3) 对 $\alpha+\beta \neq 0$, $\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta$ 在 *Killing* 形下正交, $\alpha+\beta=0$ 则 $\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_\beta$ 在 *Killing* 形下非退化. (4) 若 $\mathfrak{g}$ 是一系列单李代数 $\mathfrak{g}_i$ 的直和. 设 $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{g}_i$ 是 *Cartan* 子代数. 则 $\mathfrak{h} = \bigoplus \mathfrak{h}_i$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 *Cartan* 子代数, 而且 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_i \left(\bigoplus_j \mathfrak{g}_{\alpha_{ij}}\right)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的根空间分解. (5) 反过来 $\mathfrak{g}$ 的任意一个 *Cartan* 子代数 $\mathfrak{h}$ 都是诸 $\mathfrak{g}_i$ 的 *Cartan* 子代数 $\mathfrak{h}_i$ 的直和. 从而 $\mathfrak{g}$ 的任意根空间分解都形如 (4) 描述的那样.

证明. 因为 $\mathfrak{h} = C(\mathfrak{h})$ 故它是整个 $\mathfrak{g}_0$, (1)(2)(3) 都是**命题 5.60** 在 Killing 形下者. (4) 显然. (5) 考虑 $\mathfrak{h}$ 投影到诸 $\mathfrak{g}_i$ 上得 $\mathfrak{h}_i$. 对 $x \in \mathfrak{g}_i, h \in \mathfrak{h}$, 设 h_i 是 h 在 $\mathfrak{g}_i$ 的投影则显然 $[h,x] = [h_i,x]$. 由此推出 $C_{\mathfrak{g}_i}(\mathfrak{h}_i) = \mathfrak{h}_i$, 结合容易看出的半单性, 现检查了诸 $\mathfrak{h}_i$ 是 Cartan 子代数. 现在 $\mathfrak{h} \subset \bigoplus \mathfrak{h}_i$ 是 $\mathfrak{g}$ 的两个 Cartan 子代数, 由极大性得出二者相等. □

命题 5.63. 有限维复单李代数 $\mathfrak{g}$, 不变的对称非退化内积都和 *Killing* 形差一个常数倍.

证明. 注意到 $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^\vee$ 通过取 $x \mapsto (x,-)$ 是 $\mathfrak{g}$-表示同构, 实际上这样的同构一一对应于不变的对称非退化内积 $(-,-)$, 同构差常数倍对应的内积也只差常数倍. 由于 $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\vee$ 是单李代数, **Schur 引理**得知它们间的同构映射只能差常数倍, 从而结论得证. □

实际上, 根空间分解蕴含着比**定理 5.62** 更多的信息, 但为研究清楚须做些准备. 不妨用 $(-,-)$ 表示一个一般的 $\mathfrak{g}$-不变非退化对称二次型. **定理 5.60(3)** 告诉我们 $(-,-)$ 在 $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$ 下非退化, 所以依靠它可以将 $\mathfrak{h}^*$ 和 $\mathfrak{h}$ 等同起来. 用 $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ 记 $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ 对应者. 用 $R \subset \mathfrak{h}^* \backslash \{0\}$ 记使根空间 $\mathfrak{g}_\lambda \neq 0$ 的 λ 者的集合. 下面这个引理通过研究 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 打到 $\mathfrak{g}$ 来研究 $\mathfrak{g}$.

引理 5.64. (1) 对任意 $x \in \mathfrak{g}_\alpha, y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ 有 $[x,y] = (x,y)H_\alpha$. (2) 对 $\alpha \in R$ 有 $(\alpha,\alpha) := (H_\alpha, H_\alpha) \neq 0$. (3) 对 $\alpha \in R$ 设 $x \in \mathfrak{g}_\alpha, y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ 有 $[x,y] = (x,y)H_\alpha$ 使得 $(x,y) = 2/(\alpha,\alpha)$, 记 $h_\alpha := 2H_\alpha/(\alpha,\alpha)$. 则 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathfrak{g}$ 的映射 $X \mapsto x, Y \mapsto y, H \mapsto h_\alpha$ 是李同态（是嵌入）, 把像记作 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\alpha$, 称之标准 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 三元组. (4) h_α 的定义与二次型 $(-,-)$ 的选取无关.

证明. (1) 对 $z \in \mathfrak{h}$, 利用不变性, 计算得 $([x,y],z) = (x,[y,z]) = \alpha(z)(x,y) = (H_\alpha,z)(x,y)$. 结合 $[x,y] \in \mathfrak{g}_0$, 因此这足以确定唯一的 H_α. (2) 由 (1) $h := [x,y] = (x,y)H_\alpha$, 这样对任意 $z \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ 有 $([h,x],z) = (h,[x,z]) = (x,z)(H_\alpha,h)$, 从而非退化性计算得 $[h,x] = \alpha(h)x$, 同理 $[h,y] = -\alpha(h)y$. 现在假设 $(\alpha,\alpha) = \alpha(H_\alpha) = 0$, 由非退化设 $x \in \mathfrak{g}_\alpha, y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ 使得 $(x,y) \neq 0$, 则 $[h,x] = [h,y] = 0$. 这样回忆**例 5.52**, $\mathfrak{n} := \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{x,y,h\}$ 是幂零李代数, 考虑 $\mathrm{ad} : \mathfrak{n} \hookrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, 使用**命题 5.8**, 可设 x,y,h 在一组基下严格上三角. 结合 $h \in \mathfrak{h}$ 是 ad-半单元得知 $h = 0$, 这与 $\alpha \neq 0, (x,y) \neq 0$ 矛盾. (3) 即 (2) 一开始的计算, 注意 $\alpha(h_\alpha) = 2$. (4) 注意**定理 5.62(4)(5)** 和**命题 5.63**, 现在 h_α 只依赖于某单李代数分量上取的内积, 而只差常数倍足以推出命题. □

定理 5.65 (根空间分解的性质). 如下诸事实成立.

(1) 任意 $\lambda \in R$, 总有 $\dim \mathfrak{g}_\lambda = 1$. (2) 对 $\alpha \in R$, $\mathbb{C}\alpha \cap R = \{\pm\alpha\}$.

(3) $\operatorname{span}_{\mathbb{C}} R = \mathfrak{h}^*$, 对应的 $\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{h_\alpha\}_\alpha = \mathfrak{h}$. (4) 对 $\alpha, \beta \in R$, $\beta(h_\alpha) = 2(\alpha,\beta)/(\alpha,\alpha) \in \mathbb{Z}$.

(5) 对 $\alpha \in R$, 定义反射 $s_\alpha : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}^*$ 为

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - \lambda(h_\alpha)\alpha = \lambda - \frac{2(\alpha,\lambda)}{(\alpha,\alpha)}\alpha.$$

则对任意 $\beta \in R$ 有 $s_\alpha(\beta) \in R$.

(6) 对诸 $\alpha \in R$, 存在非零的 $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}, h_\alpha \in \mathfrak{g}_0$ 使得 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathbb{C}h_\alpha \oplus \mathfrak{g}_\alpha$ 的映射 $X \mapsto x_\alpha, Y \mapsto y_\alpha, H \mapsto h_\alpha$ 是李同构. (7) 若同时有 $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in R$, 则 $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

(8) *Killing* 形式限制在 $\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{h_\alpha\}_\alpha$ 下正定.

证明. 证明不会完全按编号顺序. 下先声称 V 是 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\alpha$ 的不可约表示, 其中

$$V = \mathbb{C}h_\alpha \oplus \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}-\{0\}} \mathfrak{g}_{k\alpha} \subset \mathfrak{g}.$$

显然它是表示, 注意 $\alpha(h_\alpha) = 2$, 按照**引理 5.64** 的具体计算 h_α 的特征子空间 $V_0 = \mathbb{C}h_\alpha, V_{2k+1} = 0, V_{2k} = \mathfrak{g}_{k\alpha}$. 因此**命题 5.54** 的讨论结合 $\dim V_0 = 1, \dim V_1 = 0$ 知 V 不可约, (1) 随即得到.

再看 (3), 若 R 不张成 $\mathfrak{h}^*$ 则存在 $0 \neq h \in \mathfrak{h}$ 使 $\alpha(h) = 0$ 对一切 $\alpha \in R$. 于是 $h \in Z(\mathfrak{g})$, 这与半单代数中心平凡相矛盾. 接下来是 (4), 将 $\mathfrak{g}$ 看作 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\alpha$ 的表示. 仍然是**引理 5.64(2)** 证明的具体计算, 验证 $\mathfrak{g}_\beta$ 中的元素都是 h_α 的 $\beta(h_\alpha)$ 特征空间, 因此**命题 5.54** 保证 $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$.

然后是 (2) 和 (6), 设 $\beta = c\alpha, c \in \mathbb{C}$, $\alpha, \beta \in R$. 现在 $2(\alpha,\beta)/(\alpha,\alpha) = 2c \in \mathbb{Z}$, 另一方面 $2(\alpha,\beta)/(\beta,\beta) = 2/c \in \mathbb{Z}$. 于是 $c \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 1/2\}$. 为了排除后四者, 通过交换 α, β 和添加负号设 $\beta = 2\alpha$ 来推矛盾. 现在 (1) 推出 $V_2 = \mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{C}x_\alpha$. 但是 $[x_\alpha, x_\alpha] = 0$ 而无法抵达 V_4, 同理也无法用 y_α 抵达 V_{-4}. 因此 V 有子表示 $\mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathbb{C}h_\alpha \oplus \mathfrak{g}_\alpha$, 由不可约性得知 2α 不是根.

对 (5), 考虑 $W = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}$ 是 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\alpha$ 的表示. 先假设 $\beta(h_\alpha) = n \in \mathbb{Z} \geq 0$. $\mathfrak{g}_\beta$ 便是 h_α 特征值 n 的特征空间. 现在**命题 5.54** 得知 y_α^n 是特征 n 空间到 $-n$ 空间的同构. 从而 $\beta - n\alpha = s_\alpha(\beta) \in R$. 由 $\dim \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha} \in \{0,1\}$ 也推出 W 是不可约表示. 而 $n \leq 0$ 考虑 x_α^n 即可.

而后是 (7). $0 \neq e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, 0 \neq e_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$ 的李括号非零由 W 不可约保证.

最后是 (8), 对 $0 \neq h \in \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{h_\alpha\}_\alpha$, $K(h,h) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad}(h)^2) = \sum_{\alpha\in R} \alpha(h)^2 \geq 0$, 结合 Killing 形式在 $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ 的非退化性立刻得到所需的正定性. □

这个定理给出了通过根系研究半单李代数的核心思想. 马上将看到这一系列对 R 来说乱七八糟的要求如何卡死半单李代数的可能结构. 不过更深入的讨论前, 我们还要确定 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的选择到底起到什么作用, 这便是下一小节的内容, 初次阅读应大致看一眼定义和结果.

5.3.3 正规元（Regular Elements）和 Cartan 子代数的共轭 *

为了研究李代数, 有时不可避免地用到一些拓扑和分析, 这里我们尽可能写得自洽些.

定义 5.66. 有限维李代数 $\mathfrak{g}$, 对 $x \in \mathfrak{g}$ 定义 $n(x) := \dim \operatorname{Ker}(\operatorname{ad} x)^\infty$.
再记 $\operatorname{rank}(\mathfrak{g}) := \min_{x\in\mathfrak{g}} n(x)$. 而对于能取到 $n(x) = \operatorname{rank}(\mathfrak{g})$ 的那些 $x \in \mathfrak{g}$, 我们称之**正规元**.

研究 Jordan 标准型发现, $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ 中的正规元恰是那些有 n 个互不相同的特征值者, 实际上, 不满足这条件的元素是“稀少的”, 下面的命题刻画了这种直观.

命题 5.67. 有限维复李代数 $\mathfrak{g}$, 正规元的集合 $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$ 在 $\mathfrak{g}$ 开、连通且稠密.

证明. 对 $x \in \mathfrak{g}$ 定义 $p_x(t) := \det(\operatorname{ad} x - t) = t^n + a_{n-1}(x)t^{n-1} + \cdots + a_0(x)$. 则 $n(x)$ 是 $p_x(t)$ 的 0 零点重数, 对正规元来说 $a_r(x) \neq 0$ 的最大 r 正是 $\operatorname{rank}(\mathfrak{g})$. 注意 $a_r(x)$ 是 $\mathfrak{g}$ 上非零多项式, 因此 $\mathfrak{g}^{\text{reg}} = \{x \in \mathfrak{g} : a_r(x) \neq 0\}$ 在 $\mathfrak{g}$ 开稠. 最后对不同的正规元 x, y 考察 $l = \{x + ty : t \in \mathbb{C}\}$. 则 $l \cap \mathfrak{g}^{\text{reg}} = \{x + ty : a_r(x + ty) \neq 0\}$ 同胚于 $\mathbb{C}$ 去掉有限个点, 显然道路连通. □

为了避免引入李群, 我们研究 exp 映射的一种合理实现. 考虑有限维复半单李代数 $\mathfrak{g}$, 对 $x \in \mathfrak{g}$, 我们定义 $e^{\operatorname{ad} x} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 为 $\sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{ad} x)^n/n!$. 在 $\operatorname{ad} : \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 下, 矩阵上这表现为

$$e^{\operatorname{ad} x} y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\operatorname{ad} x)^n y}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} \frac{x^{n-m} y x^m}{n!} = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{\infty} \frac{x^s}{s!} y \frac{(-x)^t}{t!} = e^x y e^{-x} \in \mathfrak{g}.$$

由此 $e^{\operatorname{ad} x}[y, z] = e^x(yz - zy)e^{-x} = [e^x y e^{-x}, e^x z e^{-x}] = [e^{\operatorname{ad} x} y, e^{\operatorname{ad} x} z]$, 从而这是 $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 的自同构. 从而 $n(y) = n(e^{\operatorname{ad} x} y)$. 利用这一点我们证明:

命题 5.68. 对复半单 $\mathfrak{g}$ 及其任意 *Cartan* 子代数 $\mathfrak{h}$. (1) $\dim \mathfrak{h} = \operatorname{rank}(\mathfrak{g})$. (2) 我们有

$$\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^{\text{reg}} = V,\ \ V := \{h \in \mathfrak{h} : \alpha(h) \neq 0, \forall \alpha \in R\}.$$

特别的, $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^{\text{reg}}$ 是 $\mathfrak{h}$ 中的开稠集.

证明. 定义 $\varphi : \mathfrak{g} \times V \to \mathfrak{g}$ 为 $(g, x) \mapsto e^{\operatorname{ad} g} x$ 并记 $U := \operatorname{Im} \varphi$. 现在对 $x \in V$ 在 $(0, x)$ 处计算切映射 $\varphi_* : (g, h) \mapsto [g, x] + h$, 结合 V 的定义 $[\mathfrak{g}_\alpha, x] = \mathfrak{g}_\alpha$ 得知 φ_* 是满射, 结合 V 是开集得出 U 是开集. 于是 U 必与开稠的 $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$ 相交. 另一方面对任意 $u = e^{\operatorname{ad} g} x \in U \cap \mathfrak{g}^{\text{reg}}$, 有 $n(u) = n(x) = \dim C_{\mathfrak{g}}(x) = \operatorname{rank}(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{h}$（第二个等号因为 $x \in V \subset \mathfrak{h}$ 以及根空间分解, 第三个等号是 u 正规, 第四个等号因为 V 的定义, $x \in V$ 推出 $C_{\mathfrak{g}}(x) = \mathfrak{h}$）. 而注意 $h \in \mathfrak{h}$ 时

$$n(h) = \dim C_{\mathfrak{g}}(h) = \dim \mathfrak{h} + \#\{\alpha \in R : \alpha(h) = 0\}.$$

于是 $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^{\text{reg}} = V$, 两小问皆已明晰. □

定理 5.69. (1) 有限维复半单 $\mathfrak{g}$. 其任意正规半单元 x 都使 $C_{\mathfrak{g}}(x)$ 是一个 *Cartan* 子代数. 反过来, $\mathfrak{g}$ 的每个 *Cartan* 子代数都形如 $C_{\mathfrak{g}}(x)$, 其中 x 是 $\mathfrak{g}$ 的正规半单元.
(2) 作为推论, 每个正规元都半单, 每个正规元含于唯一的 *Cartan* 子代数. 而且对任意两个 *Cartan* 子代数 $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$, 总存在 $g \in \mathfrak{g}$ 使得 $\mathfrak{h}_2 = e^{\operatorname{ad} g}\mathfrak{h}_1$.

证明. 证明 $C_{\mathfrak{g}}(x)$ 是环面子代数类似**命题 5.61**. 令 $\mathfrak{h} = \mathbb{C}x$ 是环面子代数, 依 $\operatorname{ad} x$ 将 $\mathfrak{g}$ 写成其特征空间直和 $\bigoplus_\lambda \mathfrak{g}_\lambda$. 则**命题 5.60(3)** 考虑 $\mathfrak{g}_0$ 通过 ad 作用在 $\mathfrak{g}$, $B(x, y) = \operatorname{Tr}_{\mathfrak{g}}(\operatorname{ad} x \cdot \operatorname{ad} y)$ 是 Killing 形式在 $\mathfrak{g}_0$ 的限制而非退化, 故**命题 5.50** 得 $\mathfrak{g}_0$ 是 $\mathfrak{g}$ 的约化李子代数.
再证 $\mathfrak{g}_0 = C_{\mathfrak{g}}(x)$ 幂零, 由 **Engel 定理**只证元素皆 ad-幂零. 对 $y \in C_{\mathfrak{g}}(x)$ 设 $x_t = x + ty \in C_{\mathfrak{g}}(x)$, 考虑 $\operatorname{ad} x_t|_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0}$, 在 $t = 0$ 时它显然可逆, 因此当 $|t|$ 充分小时亦然, 此时 $\operatorname{Ker} x_t^\infty \subset \mathfrak{g}_0$. 另一方面 $n(x_t) \geq \operatorname{rank}(\mathfrak{g}) = \dim C_{\mathfrak{g}}(x)$, 因此当 $|t|$ 充分小时 $\operatorname{ad} x_t|_{\mathfrak{g}_0}$ 幂零. 于是由 x, y 的可交换性对任意 t 都有 $\operatorname{ad} x_t|_{\mathfrak{g}_0}$ 幂零. 于是现在 $\mathfrak{g}_0$ 交换. 最后对 $y \in \mathfrak{g}_0$, 有 $[y, x] = 0 \implies [y_s, x] = 0$ (x 包含在 y 的 0 特征空间) 从而 $y_s, y_n \in \mathfrak{g}_0$. 由 $\mathfrak{g}_0$ 交换故 $\operatorname{ad} y_n \cdot \operatorname{ad} z$ 幂零对一切 $z \in \mathfrak{g}_0$ 而 $\operatorname{Tr}_{\mathfrak{g}}(\operatorname{ad} y_n \cdot \operatorname{ad} z) = 0$ 结合**命题 5.60(3)** 非退化得知 $y_n = 0$. 从而 $\mathfrak{g}_0$ 是环面子代数.
接下来的过程基本都是一个套路. 由于 $\mathfrak{g}_0 \subset C_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_0) \subset C_{\mathfrak{g}}(x) = \mathfrak{g}_0$ 从而 $\mathfrak{g}_0$ 是 Cartan 子代数. 反过来对 Cartan 子代数 $\mathfrak{k}$, **命题 5.68(2)** 得知它总包含一个正规元 x, 依定义半单. 于是 $\mathfrak{k} \subset C_{\mathfrak{g}}(x)$ 是两个互相包含的 Cartan 子代数而两者相等. 这样我们得到了 (1) 的二者. 作为推论, 现在对正规元 x, 观察特征值立刻发现 x_s 也正规. 于是 $C_{\mathfrak{g}}(x_s)$ 是 Cartan 子代数, 而且 $x \in C_{\mathfrak{g}}(x_s)$ 从而 x 是半单的. 从而任意正规元都含于 Cartan 子代数: $x \in C_{\mathfrak{g}}(x)$; 唯一性也是显然的, 若 x 还在 Cartan 子代数 $\mathfrak{k}$ 中, $\mathfrak{k} \subset C_{\mathfrak{g}}(x)$ 从而二者相等.
还剩下 (2) 的最后一条, 对 $x \in \mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$, 设它含于唯一 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}_x = C_{\mathfrak{g}}(x)$. 在 $\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$ 上定义等价关系 $x \sim y \iff \mathfrak{h}_x, \mathfrak{h}_y$ 在一个 $e^{\operatorname{ad} g}$ 下共轭. 选定 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$, 注意**命题 5.68** 的证明细节 $U = e^{\operatorname{ad}\mathfrak{g}}V$ 是开集, 其中 $V = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$, 因此任意 $x \in \mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$ 所在的等价类含 x 的开邻域. 故等价类皆是一些连通分支的并, 结合**命题 5.67** $\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$ 连通知仅一个等价类. □

这表明取不同的 Cartan 子代数得到的根空间分解在复半单李代数的自同构下相同.

5.4 根系和半单李代数分类

5.4.1 根系 (Root Systems) 的一系列相关概念和基本性质

现在我们提炼出**根空间分解的性质**, 从而引入下列概念.

定义 5.70. 一个 **(抽象) 根系**包含如下资料: 一个 r 维欧氏空间 (有限维内积空间) E 和一个有限集 $R \subset E - \{0\}$. R 中的元素称为**根**, r 称该根系的阶. 这些资料满足下面三条:

(1) $\mathrm{span}_{\mathbb{R}} R = E$. (2) 任意根 α,β, 有 $n_{\alpha\beta} = 2(\alpha,\beta)/(\beta,\beta) \in \mathbb{Z}$.
(3) 定义反射 $s_\alpha : E \to E$, $\lambda \mapsto \lambda - 2(\alpha,\lambda)\alpha/(\alpha,\alpha)$. 则任意 $\alpha,\beta \in R$ 有 $s_\alpha(\beta) \in R$.
显然出于**定理 5.65** 证明中一样的理由, 这些条件保证若 $\alpha, c\alpha \in R$ 则 $c \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 1/2\}$. 倘若根系 R 使得 c 只取 ± 1, 则称该根系是**约化**的. 业已明白有限维复半单李代数根系是约化的, 此时的 E 选为原 $\mathfrak{h}^*$ 的实线性子空间 $\mathrm{span}_{\mathbb{R}} R$. 容易看出 $\mathfrak{h}^* = E \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.
我们也抽象定义**余根** $\alpha^\vee \in E^*$ 为 $\alpha^\vee = 2(\alpha,-)/(\alpha,\alpha)$, 即 h_α.

这些要求都有清晰的几何图像, (2) 是说一个根 β 投影到另一根 α 所在直线上, 长度必是 α 的整数或半整数倍. (3) 则是说 β 关于 α 的垂面反射还是根. 作为例子, 下面先观察 $r = 2$.

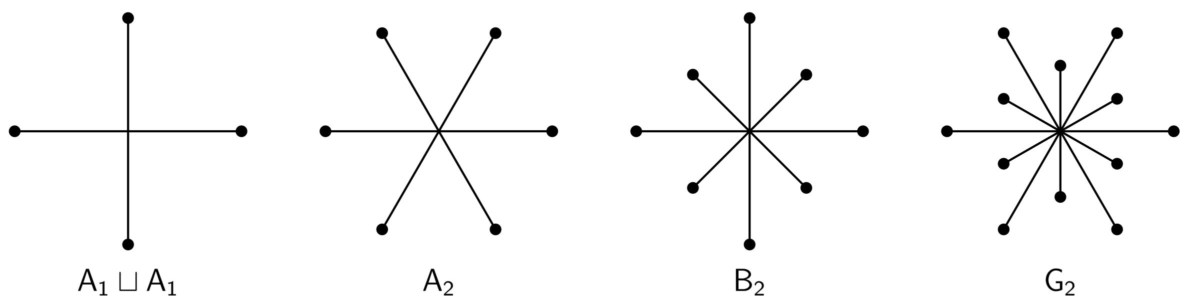
命题 5.71. 设 $\alpha,\beta \in R$ 是不共线的两根, 记夹角 $\varphi \in (0,\pi)$, $|\alpha| \geq |\beta|$. 则下列之一成立:
(1) $\varphi = \pi/2$, $n_{\alpha\beta} = n_{\beta\alpha} = 0$.
(2) $\varphi = 2\pi/3$, $|\alpha| = |\beta|$, $n_{\alpha\beta} = n_{\beta\alpha} = -1$. (2') $\varphi = \pi/3$, $|\alpha| = |\beta|$, $n_{\alpha\beta} = n_{\beta\alpha} = 1$.
(3) $\varphi = 3\pi/4$, $|\alpha| = \sqrt{2}|\beta|$, $n_{\alpha\beta}, n_{\beta\alpha} = -2, -1$. (3') $\varphi = \pi/4$, $|\alpha| = \sqrt{2}|\beta|$, $n_{\alpha\beta}, n_{\beta\alpha} = 2, 1$.
(4) $\varphi = 5\pi/6$, $|\alpha| = \sqrt{3}|\beta|$, $n_{\alpha\beta}, n_{\beta\alpha} = -3, -1$. (4') $\varphi = \pi/6$, $|\alpha| = \sqrt{3}|\beta|$, $n_{\alpha\beta}, n_{\beta\alpha} = 3, 1$.

证明. 注意到 $n_{\alpha\beta} n_{\beta\alpha} = 4\cos^2\varphi \in \{0,1,2,3\}$. 从而分析这有限种情况即得. □

定义 5.72. 对 $R_1 \subset E_1, R_2 \subset E_2$ 是两个根系, 它们的一个**同构** 是指一个 $\varphi : E_1 \to E_2$ 的线性同构, 使得 φ 是 R_1, R_2 之间的双射, 而且 $n_{\varphi(\alpha)\varphi(\beta)} = n_{\alpha\beta}$ 对任意 $\alpha,\beta \in R$.

定理 5.73 (秩 2 约化根系). 所有的秩 2 约化根系仅有 $\mathsf{A}_1 \sqcup \mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \mathsf{B}_2, \mathsf{G}_2$.

证明. 依照**命题 5.71** 和根系的条件 (3) 补全整个图, 得到:



在 $\pi/2$ 时对长度没有限制, 通过同构可设一样长, 最后检查没有其他情形. □

注 5.74. 由此讨论得知 $\alpha,\beta \in R$ 不共线使 $(\alpha,\beta) < 0$, 那么 $\alpha + \beta \in R$.

定义 5.75. 一个根系 R 的 **Weyl 群**是指 $\mathrm{GL}(E)$ 中全体 $\{s_\alpha\}_{\alpha \in R}$ 生成的子群.

习题 5.76. R 在 W 下不变; 因为 R 张成 E, 从而 R 上的作用可确定整个 E 上的作用. 故根系 R 的 *Weyl* 群 W 总是 $\mathrm{O}(E)$ 的有限子群. 对 $w \in W, \alpha \in R$ 有 $s_{w(\alpha)} = w s_\alpha w^{-1}$.

接下来我们希望从根中选取几个作为生成元.

定义 5.77. 选取 $t \in E$ 使对任意根 α 有 $(t,\alpha) \neq 0$（即 t 正规）. 记 $R = R_+ \sqcup R_-$, 其中 $R_\pm := \{\alpha \in R : \pm(\alpha,t) > 0\}$, 这分解称之为 R 的**一个极化**. R_+, R_- 中的根分别称之**正根**和**负根**. 对正根 α, 若它不是两个正根的和, 则称它为一个**单根**, 记单根的集合 Π.

> **命题 5.78.** (1) 每个正根都能写成有限个单根的和. (2) 两不同单根 $\alpha, \beta \in \Pi$ 有 $(\alpha,\beta) \leq 0$, 由此得出所有单根 $\mathbb{R}$-线性无关. (3) 有 $\operatorname{span}_{\mathbb{R}} \Pi = E$, 即全体单根张成 E.
> (4) 不可约根系中存在唯一 $\beta \in R_+$ 对任意 $0 \neq \alpha \in \operatorname{Span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi$ 都有 $\beta + \alpha \notin R$.

证明. (1) 对 $\alpha \in R_+$, 若它非单根, 依定义 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, 考虑 $(\alpha,t) = (\alpha_1,t) + (\alpha_2,t)$ 结合 (α,t) 只有有限多取值, 故递降得知. (2) 若 $(\alpha,\beta) > 0$ 则由**注 5.74** 对 $-\alpha, \beta$ 得到 $\eta = -\alpha + \beta \in R$. 若 $\eta \in R_+$ 则 $\beta = \eta + \alpha$ 不单; 而 $\eta \in R_-$ 则 $\alpha = \beta + (-\eta)$ 不单从而矛盾. 若线性相关, 假设表达式系数有正有负, 分立两侧得 $\alpha = \sum_{i \in \mathscr{I}} c_i \alpha_i = \sum_{j \in \mathscr{J}} c_j \alpha_j$ 使诸 $c_i, c_j > 0$ 且 $\mathscr{I} \cap \mathscr{J} = \varnothing$, 推出 $(\alpha,\alpha) \leq 0$ 故 $\alpha = 0$; 这归约到系数全为正, 此时 $0 = (\sum_{i \in \mathscr{I}} c_i \alpha_i, t) > 0$ 而矛盾. (3) 注意到由 (1) 知单根的 $\mathbb{Z}$-线性组合得到全部 R_+ 者进而得到全部 R 者, 而 R 张成 E.
(4) 首先我们声称任意符合题述的 β 写成单根组合的系数皆正. 否则设系数正的和零的单根集合分别为 Π_1, Π_2, 由不可约性至少存在 $\alpha_1 \in \Pi_1, \alpha \in \Pi_2$ 使 $(\alpha_1, \alpha_2) < 0$, 于是 $(\beta, \alpha_2) < 0$ 从而 $\beta + \alpha_2 \in R$ 矛盾. 现设不唯一有 β_1, β_2, 则 $(\beta_1, \alpha) \geq 0$ 对一切 α 且至少其一严格, 所以 $(\beta_1, \beta_2) > 0$, 故 $\beta_1 - \beta_2 \in R$ 矛盾, 因为 R 中者必为 Π 中者的非负或非正线性组合. □

定义 5.79. 由**命题 5.78**, 任意正根 $\alpha \in R_+$ 总能被唯一写成单根的非负整数系数线性组合 $\sum_{\alpha_i \in \Pi} n_i \alpha_i$. 下记 $\operatorname{ht}(\alpha) = \sum n_i \in \mathbb{Z}_+$ 为根 α 的**高度**, 对高度归纳在很多证明中很有效.

5.4.2 Weyl 腔（Chamber）、对偶根系、根（Root）格与权（Weight）格

定义 5.80. 根系 $R \subset E$, 称 $\{t \in E : (t,\alpha) \neq 0, \forall \alpha \in R\}$ 的一个连通分支为一个 **Weyl 腔**.

引理 5.81 (齐次线性不等式组的解集). 在欧氏空间中, 一系列无矛盾的 $(t,\alpha) > 0$ 对应的解集 C, 闭包 $\overline{C}$ 是一个无界凸集. 而 ∂C 则是有限个余一维的面之并, 每个这样余一维的面都落在某个 α 的正交补超平面中, 称这些超平面为 C 的**墙**.

证明. 检查 C 开, 而且 $\mathbb{R}_+ C = C$, $\overline{C}$ 是 $(t,\alpha) \geq 0$ 确定者, 而 ∂C 则是 $\overline{C}$ 中至少一则取等者. 余一维的面指某些 α 使 $(t,\alpha) = 0$ 的超平面上满足其余 $(t,\alpha') > 0, \alpha' \neq \alpha$ 无矛盾者所确定的区域. 现在贪心去掉一些不影响原 C 解集的 α, 直到去掉必然使解集变大为止, 对剩下的 $(t,\alpha) > 0$, 因为再去掉任一个 $(t,\alpha) > 0$ 会得到更大的凸区域. 取原区域和更大区域任意各一点连成的线段必交 $(t,\alpha) = 0$ 于某点, 该点上 $(t,\alpha') > 0, \alpha' \neq \alpha$ 无矛盾. 结论得证. □

几何直观来说, Weyl 腔是一些过原点的半空间交出的区域, 下列性质是比较自然的.

性质 5.82. (1) 一个 *Weyl* 腔 C, 闭包 $\overline{C}$ 是一个无界凸集. 而 ∂C 则是有限个余一维的面之并, 每个这样余一维的面都落在某个 α 的正交补超平面中, 称这些超平面为 C 的**墙**.
(2) 取 t 在同一个 *Weyl* 腔诱导相同的极化. 不同的 *Weyl* 腔诱导不同的极化.
(3) 任两个 *Weyl* 腔 C, C' 可通过一系列 *Weyl* 腔 $C = C_0, C_1, \cdots, C_l = C'$ 连接其中 C_i, C_{i+1} 具有一面公共的墙, 进而 *Weyl* 群在 *Weyl* 腔上可迁作用.
(4) 每个 *Weyl* 腔恰有 $r = \operatorname{rank}(R)$ 面墙, 这些墙正是它对应极化中单根的正交补.
(5) 对约化根系 R 的两个极化 $R_+ \sqcup R_-, R'_+ \sqcup R'_-$. 对应的单根系为 Π, Π'. 存在一个 *Weyl* 群中的元素 $w \in W$ 使得 $\Pi = w(\Pi')$.

证明. (1) 是**引理 5.81**. (2) 由连通性, Weyl 腔由与全体 α 的内积是正还是负所确定. (3) 简单观察 E 去掉由所有 $(t, \alpha) = (t, \beta) = 0$ (其中 α, β 不共线) 确定的这有限个余二维的空间后仍连通且是开集. 因此任两个 Weyl 腔任取内点可由有限分段线性的折线连接, 微扰设每段线段与诸墙至多交一次, 从而按照折线依次所在的 Weyl 腔可确定诸 C_i. 不难检查全体 Weyl 腔的并在任意 $w \in W$ 下作用为自同胚, 因此每个连通分支 w 下双射一个连通分支, 从而相邻的 Weyl 腔中可找到一对点（取面上一点作垂线取充分近等距的两点）通过所在墙的反射互相映射, 进而这两个腔也如此. (4) 一个 Weyl 腔 C 恰由它对应的极化的单根集 Π 按 $\{(t, \alpha) > 0 : \alpha \in \Pi\}$ 确定. 因为单根构成基, 通过线性映射换作标准的 $(t, e_i) > 0$, 任意去掉一者解集会变大, 所以它们恰确定所有墙. (5) 因为约化根系中 $\alpha, c\alpha \in R$ 确定 $\alpha \in \{\pm 1\}$, 故从 Weyl 腔确定墙, 进而唯一确定单根集. 至此, 我们严格给出了诸几何直观的证明. □

定义 5.83. 若 $R \subset E$ 是约化根系, 则 $R^\vee := \{\alpha^\vee : \alpha \in R\} \subset E^*$ 也是约化根系, 称之**对偶根系**. 不难验证若 $(t, R_+ \sqcup R_-), \Pi$ 是 R 的一个极化和单根, 则 $\Pi^\vee = \{\alpha^\vee : \alpha \in \Pi\}$ 是极化 $(t^\vee, R_+^\vee \sqcup R_-^\vee)$ 对应的单根：小心 $\alpha^\vee + \beta^\vee \neq (\alpha + \beta)^\vee$, 故只能检查所在 *Weyl* 腔的墙对应关系.
现记 $Q := \operatorname{span}_{\mathbb{Z}}\{\alpha \in R\}, Q^\vee = \operatorname{span}_{\mathbb{Z}}\{\alpha \in R^\vee\}$ 分别是 E, E^* 中的格, 分别称为 R 的**根格**与**余根格**. 显然它们分别由 $\Pi, \Pi^\vee$ 作为一组基张成, 得到完备格. 注意 Q 并不是 $Q^\vee$ 的对偶格, 考虑到这点, 我们再记 $P := \{\lambda \in E : \alpha^\vee(\lambda) \in \mathbb{Z}, \forall \alpha \in R\}$ 为 $Q^\vee$ 的对偶格, 称 R 的**权格**.
因为 $n_{\alpha\beta} = \beta^\vee(\alpha) \in \mathbb{Z}$ 故 $R \subset P$ 进而 $Q \subset P$. 对互相包含的两个完备格, 阶 $\#(P/Q)$ 可以用 $\det(\alpha_i^\vee \alpha_j)_\Pi$ 计算得到. 于是我们把 $r \times r$ 的矩阵 $(\alpha_i^\vee \alpha_j)_\Pi$ 称作 R 的 **Cartan 矩阵**.

定理 5.84 (单根生成根系)**.** 设 $R \subset E$ 是约化根系. 任意极化 $R_+ \sqcup R_-$ 对应单根 Π. 则
(1) 所谓**单反射**构成的集合 $\{s_\alpha\}_{\alpha \in \Pi}$ 生成 *Weyl* 群 W. (2) $W(\Pi) = R$. 称 Π **生成**根系 R.

证明. (1) 回忆**性质 5.82(3)(4)**, 注意到每个 $(t, \alpha) = 0$ 都能成为某个 Weyl 腔 C 的墙（其上远离其他 $(t, \alpha') = 0$ 处取垂线和等距点）, 因此取题述极化的 Weyl 腔到 C 的一列 $C_0, \cdots, C_l = C$.

注意 C_0 的墙的反射正是单根给出的, 再回忆**习题 5.76** 有 $s_{w(\alpha)=ws_\alpha w^{-1}}$, 因此 C_1 墙的反射可由 $\{s_\alpha\}_{\alpha\in\Pi}$ 生成, 同理逐步得到 $C_2,\cdots,C_l$ 墙的反射. (2) 因为每个 $(t,\alpha)=0$ 都能成为墙, 说明它们能成为某个极化的单根, 而**性质 5.82(2)(5)** 知 Weyl 群在单根间是可迁的. □

关于 Weyl 腔, 单反射的一些性质会在研究最高权的时候再次出现, 我们到那时再提.

5.4.3 Dynkin 图（Diagram）和根系的分类

现在是时候享受一些阶段性成果了. 我猜很多读者在各种地方都见到一些看起来像化学分子结构一样的东西, 它们叫 Dynkin 图. 本小节我们揭晓, 它们到底是什么意思, 究竟从它们如何得到整个根系乃至整个半单李代数. **本小节中**, 所有根系都认为是约化的.

定义 5.85. 称一个根系 $R\subset E$ 为**可约**的是指存在分解 $R=R_1\sqcup R_2$, 在内积下 $R_1\perp R_2$. 如果一个根系不是可约的, 则称它为**不可约**的. 例如 $\mathsf{A}_1\sqcup\mathsf{A}_1$ 可约而 A_2 不可约.

引理 5.86. (1) 考虑可约的 $R=R_1\sqcup R_2$. 则任给 R 的极化, 它的单根集 Π 总可以写成 $\Pi_1\sqcup\Pi_2$, 其中 $\Pi_i=\Pi\cap R_i$ 是 R_i 的单根集. (2) 反过来若 R 的某单根集可写成 $\Pi=\Pi_1\sqcup\Pi_2,\Pi_1\perp\Pi_2$. 则 $R=R_1\sqcup R_2$, 其中 R_i 是 Π_i 生成的根系.

证明. (1) 注意到与 $(t,\alpha)>0$ 这样确定的极化, 等价于分别在 R_1,R_2 中考虑 t 在两正交子空间中投影带来的极化. 而注意到不会有根能写成 R_1,R_2 中两根的和, 因此单根都是对应的. (2) 注意到对 $\alpha_i\in\Pi_i$ 有 $s_{\alpha_1}(\alpha_2)=\alpha_2$. 因此大 Weyl 群 W 等于两边 Π_i 中单反射生成的 Weyl 群的乘积 $W_1\times W_2$. 因此 $R=W(\Pi_1\sqcup\Pi_2)=W_1(\Pi_1)\sqcup W_2(\Pi_2)$. □

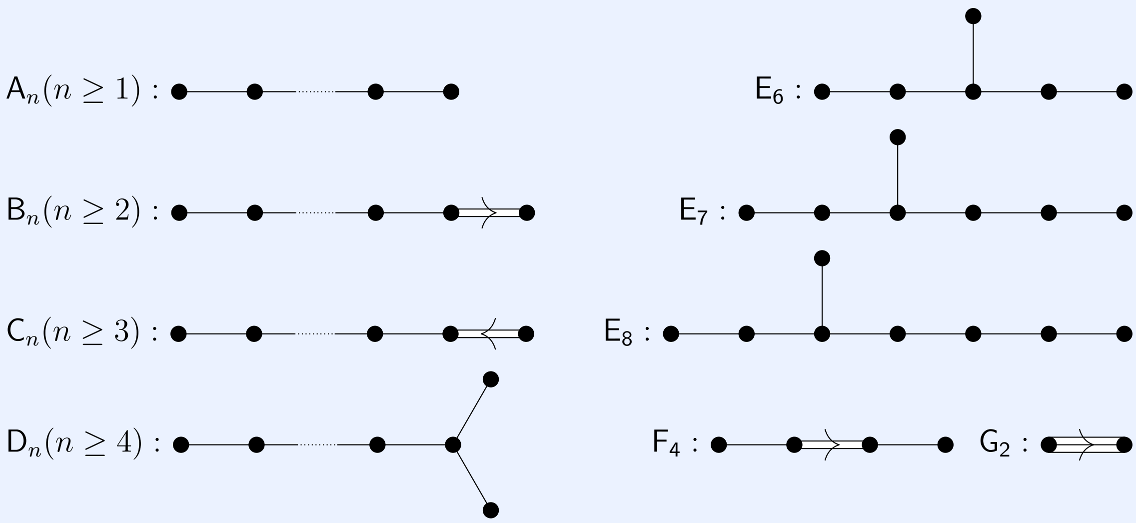
通过将根系不断分解出不可约子根系, 而且容易注意到分解方式的唯一性, 现在只需确定所有可能的不可约根系. 为此, **本小节接下来的讨论中** $\Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}\subset R$ 总指一个不可约根系取定的单根集. 记对应的 Cartan 矩阵为 $A:=(\alpha_i^\vee\alpha_j)_{r\times r}$.

定义 5.87. （无论是否可约的）根系 R 的 **Dynkin 图**是一个图（图论意义下）, 顶点集是 Π. 而连边的确定按照**命题 5.71** 确认的四种方式进行. 若两单根夹角 $\pi/2$ 则不连边, 当夹角分别是 $2\pi/3,3\pi/4,5\pi/6$ 时分别在两单根间连 $1,2,3$ 条边. 若两根长度不同, 则使用有向边, 箭头从长的单根指向短的单根; 长度相同则用无向边. 显然不可约当且仅当 *Dynkin* 图连通.

例 5.88. 定理 5.73 中四种二阶约化根系的 *Dynkin* 图如下示:

图上看出 $\mathsf{A}_1\sqcup\mathsf{A}_1$ 不连通, 其余三者连通.

定理 5.89 (不可约 Dynkin 图的分类). 不可约的约化根系, 其 *Dynkin* 图只能是如下之一:



这里的下标表示根系的阶数 (对应图的顶点数), 字母表示分类, 对照**例 5.2**.

证明. 考察一个简化的分类问题, 将单根除以模长记 $\{\epsilon_i\}_{i=1}^r$ 单位长, 现只有它们间的夹角信息被保留, 这得到的 Dynkin 图所有的边变成无向的, 称之 **Coxeter 图**. 下依诸步骤分类之:

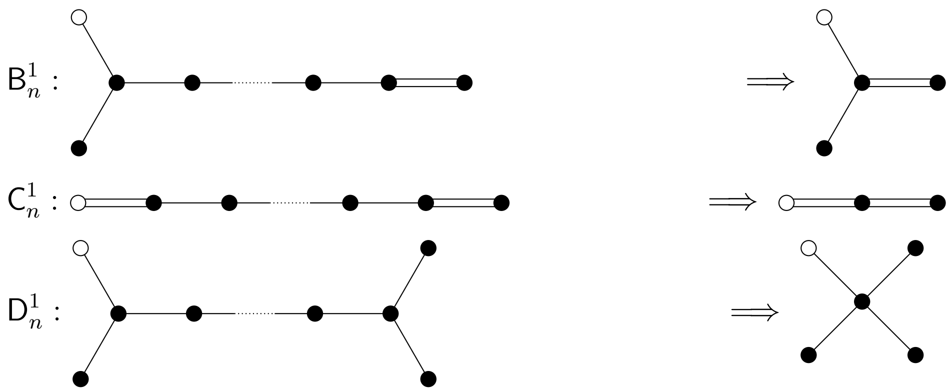
(0) 术语: 两顶点间连 n 条边, 称 n **重边**. 图的**简单化**, 指将其多重边改成普通边 (1 重) 得的图. 一条**链**指形如 A_n 的图, 一个**圈**指将链首尾相连得的图. 一棵**树**, 指无圈简单连通图.

(1) 首先指出 Coxeter 图的简单化是一棵树. 因连通只证无圈, 若不然, 设 $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_c$ 构成一个圈, 则考虑 $\epsilon = \sum_{i=1}^c \epsilon_i$. 展开 $(\epsilon, \epsilon) = c + 2\sum_{i<j}(\epsilon_i, \epsilon_j)$. 由**命题 5.78(2)** 知 $(\epsilon_i, \epsilon_j) \leq 0$. 若 ϵ_i, ϵ_j 连了边, 无论为 $1, 2, 3$ 重, 它贡献了一个负项, 绝对值最少也是 $1/2$. 由于圈已经有 c 条边, 故 $(\epsilon, \epsilon) \leq c - 2(c/2) = 0$. 然而线性无关性知这不可能发生.

(2) Coxeter 图的每个顶点至多连 3 条边. 若 ϵ 连了 $\eta_1, \cdots, \eta_n$, 由 (1) 知 η_i, η_j 之间没有边, 故它们两两垂直, 从而考虑 ϵ 往这些 η_i 方向投影得的 Parseval 不等式以及线性无关性, 不难验证 $\sum_{i=1}^n (\epsilon, \eta_i)^2 < 1$. 依定义两个点 ϵ, ϵ' 间连的边数为 $4(\epsilon, \epsilon')^2$. 写成 $\sum_{i=1}^n 4(\epsilon, \eta_i)^2 < 4$ 可得.

(3) 若 Coxeter 图中出现 3 重边, 则必为 G_2 的无向化. 这是 (2) 的立刻推论.

(4) Coxeter 图中不能出现如下左侧三种结构作为子图.



想象将中间的链“缩掉”得到右侧的图. 假设链为 $\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n$, 而链以外的那些叶节点的集合为 $\eta_1,\cdots,\eta_m$. 定义 $\epsilon=\sum_{i=1}^n\epsilon_i$. 仍对 $\epsilon,\eta_1,\cdots,\eta_m$ 重复 (2) 的步骤, 检查 $(\epsilon,\epsilon)=1$, 然后同样的原因, 边不能连出四条或更多, 这体现为左侧三者不能作为子图出现.

(5) 结合 (2)(3)(4), Coxeter 图的形状被限制在一下几类:

I. 一条链 A_r; II. 一条链, 其中恰一条边为 2 重边; III. G_2; IV. 从分叉点出发延申三条链.

(6) 上述 II. 类只能形如 $\mathsf{F}_4;\mathsf{B}_r,\mathsf{C}_r$. 设 $\epsilon_1,\cdots,\epsilon_p$ 为链, ϵ_p,η_q 连 2 重边, $\eta_q,\cdots,\eta_1$ 为另一侧的链. 记 $\epsilon=\sum_{i=1}^p i\epsilon_i,\eta=\sum_{j=1}^q j\epsilon_j$, 那么 $(\epsilon,\epsilon)=p(p+1)/2,(\eta,\eta)=q(q+1)/2,(\epsilon,\eta)=-pq/\sqrt{2}$. 因此 Schwarz 不等式结合线性无关得到 $p^2q^2/2<p(p+1)q(q+1)/4$ 化简即 $(p-1)(q-1)<2$. 于是解只有 $p=q=2$ 或者 p,q 中某一者为 1 而另一者任意. 分别对应 $\mathsf{F}_4;\mathsf{B}_r,\mathsf{C}_r$.

(7) 上述 IV. 类只能形如 $\mathsf{D}_r,\mathsf{E}_6,\mathsf{E}_7,\mathsf{E}_8$. 假设三条链为 $\epsilon_1,\cdots,\epsilon_{u-1};\eta_1,\cdots,\eta_{v-1};\zeta_1,\cdots,\zeta_{w-1}$, 而交叉点 ψ 连接 $\epsilon_{u-1},\eta_{v-1},\zeta_{w-1}$. 设 $\epsilon=\sum_{i=1}^{u-1}i\epsilon_i,\eta=\sum_{j=1}^{v-1}j\eta_j,\zeta=\sum_{k=1}^{w-1}k\zeta_k$. 现 ψ 对 ϵ,η,ζ 使用 Parseval 不等式, 结合线性无关, 以 ϵ 侧为例, $(\epsilon,\epsilon)=u(u-1)/2,(\epsilon,\psi)=-(u-1)/2$. 于是不等式作 $(u-1)/(2u)+(v-1)/(2v)+(w-1)/(2w)<1$, 即 $1/u+1/v+1/w>1$.

现在 $u,v,w\geq 2$ 否则情况退化为 I. 类, 不难解得它们只能是 $(u,2,2),(2,3,3),(2,3,4),(2,3,5)$. 对应的 Coxeter 图只能是 $\mathsf{D}_r,\mathsf{E}_6,\mathsf{E}_7,\mathsf{E}_8$, 至此 Coxeter 图分类完成.

(8) 注意到给 Coxeter 图的多重边定向的所有情况囊括在上述 Dynkin 图的分类中. 至此我们确定了 Dynkin 图的所有可能情况限于上诸类别. □

注 5.90. 尽管分类了 *Dynkin* 图, 但我们不确定它们是否真的能实现为李代数, 也还不曾清楚李代数的结构如何, 怎么对应回**例 5.2** 者. 但不管怎么说, 这已经是一个奇妙而深刻的证明, 分类之所以能做成得益于欧氏空间自身严格的限制.

这小节最后, 我们实现这些根系, 它们最终总能唯一还原为有限维的李代数, 过程较为复杂, 我们也不会使用到它们, 有兴趣的读者可以了解 Serre Relations 和 Serre's Theorem.

例 5.91 (所有的根系)**.** 读者回忆**例 5.2**. 它们的单性留给读者作为习题.

(1) 首先是 A_n, 对应李代数 $\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})$. 取 *Cartan* 子代数 $\mathfrak{h}$ 为迹 0 对角矩阵, 读者不难检查它是环面子代数而且中心化子是自己, 下 $\mathsf{B},\mathsf{C},\mathsf{D}$ 类同. 为便利, 记 $e_i\in\mathfrak{h}^*:\mathrm{diag}\{h_1,\cdots,h_{n+1}\}\mapsto h_i$, 容易发现根分解为 $\mathfrak{g}_{e_i-e_j}=\mathbb{C}E_{ij}(i\neq j)$. 因此它的根系由 $2\binom{n+1}{2}=n(n+1)$ 个根构成.

接下来 *Killing* 形式, 对 $\sum a_i=\sum b_i=0$ 计算得到 $K(\sum a_ie_i,\sum b_ie_i)=C\sum a_ib_i$. 于是现在取 $\epsilon>0$ 充分小, 半空间 $\{\sum a_ie_i:a_1\epsilon+a_2\epsilon^2+\cdots+a_n\epsilon^n>0\}$, 对应的单根为 $\{e_i-e_{i+1}\}_{i=1}^n$, $e_i-e_{i+1},e_{i+1}-e_{i+2}$ 夹角 $2\pi/3$. 从而不难检查对应的 *Dynkin* 图如此. 而 *Weyl* 群则是 S_{n+1}, 因为对应的单反射交换 e_i,e_{i+1} 的地位. 其生成的 *Weyl* 群为 $e_1,\cdots,e_{n+1}$ 的全体置换.

(2) 然后是 B_n, 李代数 $\mathfrak{o}(2n+1,\mathbb{C})$. 取 *Cartan* 子代数为 $\mathrm{diag}\left\{\begin{bmatrix}0&h_1\\-h_1&0\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}0&h_n\\-h_n&0\end{bmatrix},0\right\}$,

对应的 e_i 也是将上述元素打到 h_i. 于是根分解为 $\mathfrak{g}_{\mathbf{i}(e_i\pm e_j)}=\mathbb{C}(\tilde{E}_{2i-1,2j-1}\pm\mathbf{i}\tilde{E}_{2i-1,2j}+\mathbf{i}\tilde{E}_{2i,2j-1}\mp\tilde{E}_{2i,2j})(i<j)$, $\mathfrak{g}_{\mathbf{i}e_i}=\mathbb{C}(\tilde{E}_{2i-1,2n+1}+\mathbf{i}\tilde{E}_{2i,2n+1})$, 其中 $\tilde{E}_{ij}=E_{ij}-E_{ji}$. 然后将出现的全体复数 $\mathbf{i}$ 取共轭 $-\mathbf{i}$ 就得到全部的根, 合计 $4\binom{n}{2}+2n=2n^2$ 个.

Killing 形式仍是 $K(\sum a_ie_i,\sum b_ie_i)=C\sum a_ib_i$. 取 $\epsilon>0$ 充分小, 半空间 $\{\sum a_ie_i: a_1\epsilon+a_2\epsilon^2+\cdots+a_n\epsilon^n>0\}$ 对应单根 $\{e_i-e_{i+1}\}_{i=1}^{n-1},e_n$. 同样的 $e_i-e_{i+1},e_{i+1}-e_{i+2}$ 夹角 $2\pi/3$, 而 $e_{n-1}-e_n,e_n$ 夹角 $3\pi/4$. 而 *Weyl* 群除了交换 e_i,e_{i+1} 外, 还能将 e_n 变成 $-e_n$, 因此 *Weyl* 群是 $S_n\ltimes(\mathbb{Z}/2)^n$, 或者看作每行每列恰有一个 ±1 的矩阵构成的群. 包含 $2^n\cdot n!$ 个元素.

(3) 接下来是 C_n, 李代数 $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$. 取 *Cartan* 子代数为 $\operatorname{diag}\{h_1,\cdots,h_n,-h_1,\cdots,-h_n\}$, e_i 将之打到 h_i. 根分解 $\mathfrak{g}_{2e_i}=\mathbb{C}(E_{i,i+n}),\mathfrak{g}_{-2e_i}=\mathbb{C}(E_{i+n,i})$, 以及 $\mathfrak{g}_{e_i+e_j}=\mathbb{C}(E_{i,j+n}+E_{j,i+n}),\mathfrak{g}_{-e_i-e_j}=\mathbb{C}(E_{i+n,j}+E_{j+n,i}),\mathfrak{g}_{e_i-e_j}=\mathbb{C}(E_{i,j}-E_{j+n,i+n})(i\neq j)$, 共 $2n^2$ 个根. 比起 B_n, *Killing* 形式, 半空间相同, 单根 $\{e_i-e_{i+1}\}_{i=1}^{n-1},2e_n$, 夹角相同, 只是边的长短不同. *Weyl* 群相同.

(4) 再到 D_n, 李代数 $\mathfrak{o}(2n,\mathbb{C})$, 其实就是 B_n 去掉第 $2n+1$ 维. 根分解上少了 $\mathfrak{g}_{\pm\mathbf{i}e_i}$, 所以只剩下 $2n^2-2n$ 个根. 对应单根 $\{e_i-e_{i+1}\}_{i=1}^{n-1},e_{n-1}+e_n$, 夹角上 $e_{n-1}-e_{n-2}$ 与 $e_{n-1}\pm e_n$ 的夹角都是 $2\pi/3$. *Weyl* 群有少许区别, 只能一次把 e_{n-1},e_n 同时变负, 所以 *Weyl* 群是 $S_n\ltimes(\mathbb{Z}/2)^{n-1}$, 或者每行每列恰一个 ±1 的矩阵构成的群, 且 -1 有偶数个. 含 $2^{n-1}\cdot n!$ 个元素.

(5) 考察 $\mathsf{E}_6,\mathsf{E}_7,\mathsf{E}_8$. 实际上包含它们仨在内的五个例外根系, 只构造它们而不解释对应的李代数. 考虑 $\mathbb{R}^8$ 作为欧氏空间, 赋正常内积. 定义 $L:=L'+\mathbb{Z}\cdot\frac{1}{2}(e_1+\cdots+e_8)$, L' 是 e_i 前系数和偶数的 $\mathbb{Z}^8$ 的子格. 考虑所有长度为 $\sqrt{2}$ 的格点, 它们构成根系 E_8. 具体来说, 包含 $\pm e_i\pm e_j(i<j),\frac{1}{2}\sum_{i=1}^8\pm e_i$, 后者只能由偶数个正号. 合计 $4\binom{8}{2}+2^7=240$ 个根.

单根取成 $\frac{1}{2}(e_1-e_2-\cdots-e_7+e_8),e_1+e_2,e_2-e_1,\cdots,e_7-e_6$, 其半空间为 $\{\sum a_ie_i: a_1B+\cdots+a_8B^n>0\}$, $B\to+\infty$. 而对应的 *Weyl* 群 $O_8^+(2)$ 是一个单群, 我只在此声称其阶为 $8!\times6!\times4!$. 而 $\mathsf{E}_7,\mathsf{E}_6$ 只需取单根前 7,6 者生成根系. 不过具体来说 E_7 可以写成 $\pm e_i\pm e_j(1\le i<j\le 6),\frac{1}{2}(\pm e_1\pm\cdots\pm e_6\pm\sqrt{2}e_7)$ 恰含奇数个正号以及 $\pm\sqrt{2}e_7$ 共计 $4\binom{6}{2}+2^6+2=126$ 个根; E_6 则是 $\pm e_i\pm e_j(1\le i<j\le5),\frac{1}{2}(\pm e_1\pm\cdots\pm e_5\pm\sqrt{3}e_6)$ 恰含偶数个正号共计 $4\binom{5}{2}+2^5=72$ 个根. 另外对应的 *Weyl* 群分别是 $\mathsf{E}_7:\mathrm{Psp}_6(2),\mathsf{E}_6:\mathrm{Psp}_4(3)$, 阶数 $7!\times4!\times4!$ 和 $6!\times3!\times3!$. 实际上 $\mathsf{E}_8,\mathsf{E}_7,\mathsf{E}_6$ 对应的 *Weyl* 群作为单群都是该阶数唯一的.

(6) 考察 F_4. 它是 $\mathbb{Z}^4+\mathbb{Z}\cdot\frac{1}{2}(e_1+e_2+e_3+e_4)$ 中全体长度 $1,\sqrt{2}$ 的格点构成的. 因此它有 $4\binom{4}{2}=24$ 个长根 $\pm e_i\pm e_j(i<j)$ 和 $8+2^4=24$ 个短根 $\pm e_i,\frac{1}{2}(\pm e_1\pm e_2\pm e_3\pm e_4)$. 传统的半空间下单根取 $\frac{1}{2}(e_1-e_2-e_3-e_4),e_2-e_3,e_3-e_4,e_4$. 而 *Weyl* 群是一个 1152 阶的可解群.

(7) 最后 G_2 在**定理 5.73**, 留给读者作为练习, *Weyl* 群是 12 个元素的二面体群 D_6.

一个有趣的表格: GAP 计算的互不共轭的极大半单子代数表如下, 以备不时之需.

$$A_1 : []$$
$$A_2 : [A_1, A_1]$$
$$A_3 : [A_2, B_2, A_1A_1]$$
$$A_4 : [B_2, A_1A_2, A_3]$$
$$A_5 : [A_2, A_1A_2, A_3, C_3, A_2A_2, A_1A_3, A_4]$$
$$A_6 : [B_3, A_2A_3, A_1A_4, A_5]$$
$$A_7 : [A_1A_3, D_4, C_4, A_3A_3, A_2A_4, A_1A_5, A_6]$$
$$A_8 : [A_2A_2, B_4, A_3A_4, A_2A_5, A_1A_6, A_7]$$

$$B_2 : [A_1, A_1A_1]$$
$$B_3 : [G_2, A_1A_1A_1, A_3]$$
$$B_4 : [A_1, A_1A_1, A_1A_1B_2, A_1A_3, D_4]$$
$$B_5 : [A_1, A_3B_2, A_1A_1B_3, A_1D_4, D_5]$$
$$B_6 : [A_1, A_3B_3, B_2D_4, A_1A_1B_4, A_1D_5, D_6]$$
$$B_7 : [A_1, A_1B_2, A_3, B_3D_4, A_3B_4, B_2D_5, A_1A_1B_5, A_1D_6, D_7]$$
$$B_8 : [A_1, B_4D_4, B_3D_5, A_3B_5, B_2D_6, A_1A_1B_6, A_1D_7, D_8]$$

$$C_3 : [A_1, A_2, A_1A_1, A_1B_2]$$
$$C_4 : [A_1, A_1A_1A_1, A_3, B_2B_2, A_1C_3]$$
$$C_5 : [A_1, A_1B_2, A_4, B_2C_3, A_1C_4]$$
$$C_6 : [A_1, A_1B_2, A_1A_3, A_5, C_3C_3, B_2C_4, A_1C_5]$$
$$C_7 : [A_1, C_3, A_1B_3, A_6, C_3C_4, B_2C_5, A_1C_6]$$
$$C_8 : [A_1, B_2, A_1D_4, A_7, C_4C_4, C_3C_5, B_2C_6, A_1C_7]$$

$\mathsf{D}_4 : [\mathsf{A}_2, \mathsf{A}_1\mathsf{B}_2, \mathsf{A}_1\mathsf{B}_2, \mathsf{A}_1\mathsf{B}_2, \mathsf{B}_3, \mathsf{B}_3, \mathsf{B}_3, \mathsf{A}_1\mathsf{A}_1\mathsf{A}_1\mathsf{A}_1]$

$\mathsf{D}_5 : [\mathsf{B}_2, \mathsf{B}_2\mathsf{B}_2, \mathsf{A}_1\mathsf{B}_3, \mathsf{A}_4, \mathsf{B}_4, \mathsf{A}_1\mathsf{A}_1\mathsf{A}_3]$

$\mathsf{D}_6 : [\mathsf{A}_1\mathsf{C}_3, \mathsf{A}_1\mathsf{C}_3, \mathsf{B}_2\mathsf{B}_3, \mathsf{A}_5, \mathsf{A}_5, \mathsf{A}_1\mathsf{B}_4, \mathsf{B}_5, \mathsf{A}_3\mathsf{A}_3, \mathsf{A}_1\mathsf{A}_1\mathsf{D}_4]$

$\mathsf{D}_7 : [\mathsf{B}_2, \mathsf{G}_2, \mathsf{C}_3, \mathsf{B}_3\mathsf{B}_3, \mathsf{B}_2\mathsf{B}_4, \mathsf{A}_6, \mathsf{A}_1\mathsf{B}_5, \mathsf{B}_6, \mathsf{A}_3\mathsf{D}_4, \mathsf{A}_1\mathsf{A}_1\mathsf{D}_5]$

$\mathsf{D}_8 : [\mathsf{B}_2\mathsf{B}_2, \mathsf{B}_2\mathsf{B}_2, \mathsf{B}_4, \mathsf{B}_4, \mathsf{A}_1\mathsf{C}_4, \mathsf{A}_1\mathsf{C}_4, \mathsf{B}_3\mathsf{B}_4, \mathsf{A}_7, \mathsf{A}_7, \mathsf{B}_2\mathsf{B}_5, \mathsf{A}_1\mathsf{B}_6, \mathsf{B}_7, \mathsf{D}_4\mathsf{D}_4, \mathsf{A}_3\mathsf{D}_5, \mathsf{A}_1\mathsf{A}_1\mathsf{D}_6]$

$\mathsf{G}_2 : [\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \mathsf{A}_1\mathsf{A}_1]$

$\mathsf{F}_4 : [\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_1\mathsf{G}_2, \mathsf{A}_2\mathsf{A}_2, \mathsf{A}_1\mathsf{C}_3, \mathsf{B}_4]$

$\mathsf{E}_6 : [\mathsf{A}_2, \mathsf{G}_2, \mathsf{A}_2\mathsf{G}_2, \mathsf{C}_4, \mathsf{F}_4, \mathsf{D}_5, \mathsf{A}_2\mathsf{A}_2\mathsf{A}_2, \mathsf{A}_1\mathsf{A}_5]$

$\mathsf{E}_7 : [\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \mathsf{A}_1\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_1\mathsf{G}_2, \mathsf{C}_3\mathsf{G}_2, \mathsf{E}_6, \mathsf{A}_1\mathsf{D}_6, \mathsf{A}_7, \mathsf{A}_2\mathsf{A}_5, \mathsf{A}_1\mathsf{F}_4]$

$\mathsf{E}_8 : [\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_1, \mathsf{A}_1, \mathsf{B}_2, \mathsf{A}_1\mathsf{A}_2, \mathsf{F}_4\mathsf{G}_2, \mathsf{D}_8, \mathsf{A}_8, \mathsf{A}_4\mathsf{A}_4, \mathsf{A}_2\mathsf{E}_6, \mathsf{A}_1\mathsf{E}_7]$

本小节最后, 我们给出 [31] 上从给定李代数的 Dynkin 图同构恢复李代数同构的过程.

命题 5.92. *单李代数 $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ 的 Dynkin 图 $G_1 = G_2$, 则诱导李代数同构 $\mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$. 由此推出若半单李代数的 Dynkin 图是导出子图, 则诱导李代数上的嵌入.*

导出子图指给定顶点子集诱导的子图, 例如 $\mathsf{A}_2\mathsf{A}_2$ 并不是 A_4 的导出子图.

证明. 从 Dynkin 图恢复单根集 Π_1, Π_2 的等距, 再到所有根 R_1, R_2 的等距都是容易的. 于是得到对应的等距同构 $\mathfrak{h}_1^* \to \mathfrak{h}_2^*$, 进而复化再由 Killing 形式诱导 $f : \mathfrak{h}_1 \cong \mathfrak{h}_2$ 是 Cartan 子代数同构. 现在对 $i = 1, 2$ 任意取定一组 $0 \neq x_{i\alpha} \in \mathfrak{g}_{i\alpha}$, 定义 $f(x_{1\alpha}) = x_{2\alpha}$ 现得到 $f : \mathfrak{h}_1 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Pi_1} \mathfrak{g}_{1\alpha} \to \mathfrak{h}_2 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Pi_2} \mathfrak{g}_{2\alpha}$. 现在我们声称存在唯一的李代数同构 $\mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ 延拓线性同构 f.

唯一性显然, 因为**引理 5.64** 的计算得到存在唯一的 $y_{i\alpha} \in \mathfrak{g}_{i(-\alpha)}$ 使得 $[x_{i\alpha}, y_{i\alpha}] = h_{i\alpha}$, 由于 $f(h_{1\alpha}) = h_{2\alpha}$ 故唯一确定了 $f(y_{1\alpha}) = y_{2\alpha}$. 结合**命题 5.78(1)** 知每个根都能写成有限个 $\pm\Pi$ 中根的和, 于是 $\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{g}_\alpha, \alpha \in \pm\Pi$ 生成了整个李代数, 所以 f 的像被完全确定.

为证明存在性, 考虑 $\overline{x}_\alpha := x_{1\alpha} \oplus x_{2\alpha} \in \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, 由**命题 5.78(4)** 取极大 $\beta \in R$ 和 $0 \neq x_i \in \mathfrak{g}_{i\beta}$, 类似定义 $\overline{y}_\alpha, \overline{h}_\alpha, \overline{x}$. 设 $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ 为全体 $\mathrm{ad}\, \overline{y}_{\alpha_{i_1}} \cdots \mathrm{ad}\, \overline{y}_{\alpha_{i_m}} \overline{x} \in \mathfrak{g}_{1(\beta - \sum \alpha_{i_j})} \oplus \mathfrak{g}_{2(\beta - \sum \alpha_{i_j})}$ 生成的线性子空间. 检查它与 $\mathfrak{g}_{1\beta} \oplus \mathfrak{g}_{2\beta}$ 交只有一维知它是真子空间.

设 $\mathfrak{k}$ 是 $\overline{x}_\alpha, \overline{y}_\alpha, \overline{h}_\alpha$ 生成的李子代数, 我们声称 $[\mathfrak{k}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$, 只需检查作用 $\mathfrak{k}$ 的生成元. 利用**引理 5.64** 的计算 $[h, y_\alpha] = -\alpha(h) y_\alpha$ 得知从而可以将 $\overline{h}_\alpha$ 的作用挪到最先而在 $\overline{x}$ 上数乘. 然后是 $\overline{x}_\alpha$,

对单根 $\alpha_1 \neq \alpha_2$ 由于 $\alpha_1 - \alpha_2 \notin R$ 故 $[x_{\alpha_1}, y_{\alpha_2}] = 0$ 另一边 $[x_\alpha, y_\alpha] = h_\alpha$ 因此也可将 $\overline{x}_\alpha$ 挪到最先而由 β 的极大性得到 0. 于是 $[\mathfrak{k}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ 从而 $\mathfrak{k}$ 是真李子代数, 否则 $\mathfrak{m}$ 将是 $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ 的真理想而只能是 $\mathfrak{g}_1$ 或 $\mathfrak{g}_2$, 这不可能, 回忆它与 $\mathfrak{g}_{1\beta} \oplus \mathfrak{g}_{2\beta}$ 交并不含于 $\mathfrak{g}_1$ 或 $\mathfrak{g}_2$.
我们声称 $\mathfrak{k}$ 中不含形如 $z \oplus 0, z \neq 0$ 的元素, 否则 $\mathfrak{g}_1 \oplus 0 \subset \mathfrak{k}$ 进而 $0 \oplus \mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{k}$ 而得到整个 $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, 同理 $\mathfrak{k}$ 不含 $0 \oplus z, z \neq 0$ 者. 所以 $\mathfrak{k} \to \mathfrak{g}_i$ 的投影都是同构, 而且 $\overline{x}_\alpha, \overline{h}_\alpha$ 分别打到 $x_{1\alpha} \oplus f(x_{1\alpha}), h_{1\alpha} \oplus f(h_{1\alpha})$ 从而它诱导的 $\mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ 是 f 的延拓.
最后对于导出子图诱导嵌入, 只需取子图生成根的子集所诱导的李子代数证明同构即可. □

5.5 半单李代数的表示理论

本节我们沿用 $\mathfrak{g}$ 有限维复半单, Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_R \mathfrak{g}_\alpha$ 的设定, 也会用到不少前文根系相关的记号, 例如用 $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$ 记取定的单根集. 另外, 选定 $(-,-)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的非退化不变对称双线性型. 如无额外说明, 表示都考虑复有限维的. 主要参考 [24] 和 [31].

5.5.1 权分解、特征（Characters）、最高（Highest）权和 Verma 模

定理 5.93. 对 $\mathfrak{g}$ 的表示 V, 这里的权是指一个 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ 使得存在 $v \in V\backslash\{0\}$ 使 $hv = \lambda(h)v$ 对任意 $h \in \mathfrak{h}$ 成立. 给定 λ 记全体符合上式的 $v \in V$ 的集合为权空间 $V[\lambda]$. 用 $P(V)$ 记权构成的集合, 则总有**权空间分解** $V = \bigoplus_{\lambda \in P(V)} V[\lambda]$. 而且这些权含于权格中, 即 $P(V) \subset P \subset \mathfrak{h}^*$. 权格中的权称**整权**. 另外, 对 $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ 有 $xV[\lambda] \subset V[\lambda + \alpha]$, 直接使用定义可验证.

证明. 权空间分解是将整个 $\mathfrak{h}$ 作为 $V \to V$ 的线性映射同步对角化. 对 $\alpha \in R$, 由**引理 5.64(3)** 考虑标准 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 对应 $e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha$. 将 V 通过此视作 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-模. 由定义 $h_\alpha v = \lambda(h_\alpha)v$ 以及 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 表示的性质**命题 5.54**, $\lambda(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$, 从而由 $\alpha \in R$ 的任意性 $\lambda \in P$. □

接下来引入生成函数, 用来便捷处理维数计算.

定义 5.94. 记 $\mathbb{C}[P] := \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{e^\lambda : \lambda \in P\}$. 这样形式地定义环结构 $e^\lambda \cdot e^\mu = e^{\lambda+\mu}, e^0 = 1$. 实际上可以把 $\mathbb{C}[P]$ 视作 $T := \mathfrak{h}/2\pi i Q^\vee$ 上取值的多项式环, 定义 $e^\lambda(t) := e^{\lambda(t)}; \lambda \in P, t \in T$. 记表示 V 的**特征 (多项式)** 为 $\mathrm{ch}(V) := \sum(\dim V[\lambda])e^\lambda$.

例 5.95. 以 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 为例, $P = \mathbb{Z}\alpha/2$. 记生成元 $x := e^{\alpha/2}$, 则 $\mathbb{C}[P] = \mathbb{C}[x, x^{-1}]$ 且 $n+1$ 维不可约表示的特征为 $x^n + x^{n-2} + \cdots + x^{-n} = (x^{n+1} - x^{-n-1})/(x - x^{-1})$. 还有一些一般结论, $\mathrm{ch}(\mathbb{C}) = 1, \mathrm{ch}(V_1 \oplus V_2) = \mathrm{ch}(V_1) + \mathrm{ch}(V_2), \mathrm{ch}(V_1 \otimes V_2) = \mathrm{ch}(V_1)\,\mathrm{ch}(V_2), \mathrm{ch}(V^*) = \overline{\mathrm{ch}(V)}$.

命题 5.96. 有限维 V, 对任意 $w \in W$ 是 *Weyl* 群中元素, $\dim V[\lambda] = \dim V[w(\lambda)]$. 换而言之, 设 W 在 $\mathbb{C}[P]$ 上按照 $w(e^{\lambda}) = e^{w(\lambda)}$ 作用, 那么 $w(\mathrm{ch}(V)) = \mathrm{ch}(V)$.

证明. 只对 $w = s_i$ 是 α_i 反射进行证明. 记 $n = \alpha_i^{\vee}(\lambda) \geq 0$, 回忆**命题 5.54**, $y_i^n : V[\lambda] \to V[\lambda - n\alpha_i]; x_i^n : V[\lambda - n\alpha_i] \to V[\lambda]$ 是同构. 因此 $\lambda - n\alpha_i = s_i\lambda, \dim V[\lambda] = \dim V[s_i\lambda]$. □

这样特征多项式都位于 $\mathbb{C}[P]^W$ 即 $\mathbb{C}[P]$ 的 W-不变子空间. 后面会证明所有不可约表示的特征多项式构成上述空间的一组基. 至少 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的情况已明了.

定义 5.97. 记 $\mathfrak{n}_{\pm} = \bigoplus_{\alpha \in R_{\pm}} \mathfrak{g}_{\alpha}$. 这样得到一个分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$. 若（不一定有限维的）表示 V 被一个 $v \in V_{\lambda}$ 生成, 而且 $xv = 0$ 对一切 $x \in \mathfrak{n}_+$, 则称 V 为一个**最高权表示**, v 为**最高权向量**, λ 为 V 的**最高权**. 马上读者会发现这个概念是 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 中最大特征值的推广.

命题 5.98. 每个不可约表示都是最高权表示.

证明. 设 $\lambda \in P(V)$ 满足对任意 $\alpha \in R_+$ 都有 $\lambda + \alpha \notin P(V)$. 显然这样的 λ 存在. 任取 $v \in V[\lambda]$ 非零. 于是 $x_{\alpha}v = 0$ 对一切 $\alpha \in R_+$. 现在考虑 $V' \subset V$ 是 v 生成的子表示, 由不可约性 $V = V'$, 由定义, $V = V'$ 现在是一个最高权表示. □

于是对最高权表示 V, $hv_{\lambda} = \lambda(h)v_{\lambda}$ 对任意 $h \in \mathfrak{h}$ 而 $xv_{\lambda} = 0$ 对 $x \in \mathfrak{n}_+$. 于是想到定义一个 λ 的所谓的万有最高权表示, 也就是 Verma 模:

定义 5.99. 对 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, 称 $M_{\lambda} := U\mathfrak{g}/I_{\lambda}$ 为 **Verma 模**, 其中 I_{λ} 是 $\mathfrak{n}_+$ 中者和 $(h - \lambda(h)), h \in \mathfrak{h}$ 者生成的左理想. 等价的, 考虑 $\mathfrak{b} := \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$. 我们用 $\mathbb{C}_{\lambda}$ 表示 $hv_{\lambda} = \lambda(h)v_{\lambda}, h \in \mathfrak{h}$ 而 $xv_{\lambda} = 0, x \in \mathfrak{n}_+$ 定义的 $\mathfrak{b}$ 的一维表示. 则 *Verma* 模可定义为 $M_{\lambda} = \mathrm{ind}_{U\mathfrak{b}}^{U\mathfrak{g}} \mathbb{C}_{\lambda} = U\mathfrak{g} \otimes_{U\mathfrak{b}} \mathbb{C}_{\lambda}$.
注意 **PBW 定理**告诉我们 $U\mathfrak{g} \cong U\mathfrak{n}_- \otimes_{\mathbb{C}} U\mathfrak{b}$ 是一个自由左 $U\mathfrak{b}$-模, 于是 $M_{\lambda} = U\mathfrak{n}_- \otimes_{\mathbb{C}} U\mathfrak{b} \otimes_{U\mathfrak{b}} \mathbb{C}_{\lambda} = U\mathfrak{n}_- \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\lambda}$. 从而 $U\mathfrak{n}_- \to M_{\lambda}$ 的自然映射 $u \mapsto u \otimes v_{\lambda}$ 是线性空间的同构. 例如 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 上, $\mathfrak{h}^* \cong \mathbb{C}$ 按照 $\lambda \mapsto (h, \lambda)$ 同构者, 于是 $\alpha \mapsto 2$, 则 M_{λ} 是记号 $v^0, v^1, \cdots$ 生成的无穷维线性空间, 按 $hv^k := (\lambda - 2k)v^k, yv^k := (k+1)v^{k+1}, xv^k := (\lambda - k + 1)v^{k-1}(k > 0), xv^0 := 0$.
不难检查任何一个 λ 为最高权的表示 V 一定同构 M_{λ}/W, 其中 W 是一个子表示. 这是因为可以将 $1 \otimes v_{\lambda}$ 打到 V 的最高权向量, W 可自然取作映射的核.

引理 5.100. 若 $\mathfrak{h}$ 是有限维交换李代数, M 是不一定有限维的 $\mathfrak{h}$-模, 它的权分解 $M = \bigoplus_{\mu} M[\mu]$, 则它的任意子模和商都有自然诱导的权分解.

证明. 技巧在于对任意互不相同的 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in P(V)$, 存在 $p \in U\mathfrak{h} = S\mathfrak{h}$ 使 $p(\lambda_1) = 1, p(\lambda_i) = 0(i > 1)$. 于是任意子模 $N \subset M$, 其上元素权分解的分量都含于 N. □

性质 5.101. (1) M_λ 具有权分解 $\bigoplus_\mu M_\lambda[\mu]$, 其中每个 $M_\lambda[\mu]$ 都是有限维线性空间, 且 $P(M_\lambda)=\lambda-\operatorname{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}\Pi$. 另外 $\dim M_\lambda[\lambda]=1$. (2) 若 V 是不一定有限维的 λ 为最高权的表示, 则每个 $v\in V$ 均可写作 $v=uv_\lambda, u\in U\mathfrak{n}_-$. (3) V 也有权分解 $V=\bigoplus_\mu V[\mu]$, 其中每个 $V[\mu]$ 都是有限维线性空间, 且 $P(V)\subset\lambda-\operatorname{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}\Pi$. 另外 $\dim V[\lambda]=1$. (4) 最高权表示有唯一的最高权和差一个常数的最高权向量.

5.5.2 有限维不可约表示的分类: 利用最高权

定理 5.102. 任意 $\lambda\in\mathfrak{h}^*$, 存在唯一的不可约 λ 为最高权的表示. 不过它不一定有限维, 我们将此表示记作 L_λ.

证明. 只需研究 M_λ 的极大 (真) 子表示 W_0, 下面证明它存在唯一. 由**引理 5.100**, 子表示 W 是真子表示当且仅当 $W[\lambda]=0$, 于是 W_0 取作全体 $W[\lambda]=0$ 的 W 的求和. □

现在每个有限维不可约表示都形如一个 L_λ, 于是只需研究何时它有限维.

定义 5.103. 一个权 $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ 称为**主整权**当且仅当对一切 $\alpha\in R_+$ 有 $\lambda(\alpha)\in\mathbb{Z}_+$. 所有的主整权构成的集合记为 P_+. 回顾正 *Weyl* 腔 $C=\{\lambda\in\mathfrak{h}^*:\lambda(\alpha)>0,\alpha\in\Pi\}$, 立刻写出 $P_+=P\cap\overline{C}$.

引理 5.104. 对每个 $\lambda\in P$, 它的 *Weyl* 群轨道 $W\lambda$ 与 P_+ 的交恰有一个元素.

证明. 显然 $W\overline{C}=\mathfrak{h}^*$, 因此交非空. 设 $\lambda\in\overline{C}, w\in W$ 使 $w\lambda\in\overline{C}$. 那么 $\lambda\in\overline{C}\cap w^{-1}\overline{C}$. 于是由**性质 5.82** 知 λ 在某些墙的交上, 而 w 在这些 Weyl 腔置换保护这些墙的交不动, 进而 $w\lambda=\lambda$. (取 λ 的小邻域, 观察涉及的 Weyl 房, 然后用固定 λ 不动的 Weyl 群元作用) □

本小节的主要目的即证明如下的定理.

定理 5.105. $\dim L_\lambda<+\infty$ 当且仅当 $\lambda\in P_+$.

证明. 首先看较易的一侧: L_λ 有限维推 $\lambda\in P_+$. 回顾**引理 5.64**, 设 $\alpha\in\Pi$, 将 L_λ 视作 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\alpha$-模, 则 $x_\alpha v_\lambda=0, h_\alpha v_\lambda=\lambda(h_\alpha)v_\lambda$. 这生成了一个最高权有限维 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\alpha$-模, 由**命题 5.54** 分类得 $\lambda(h_\alpha)\in\mathbb{Z}_+$, 从而 $\lambda\in P_+$. 而另一侧较为困难, 故需分成下面几步:

(1) 首先观察 $U\mathfrak{g}$ 中的两个恒等式.

$$(a)\ [x_\beta,y_\alpha^{k+1}]=0,\alpha\neq\beta,$$

$$(b)\ [x_\alpha,y_\alpha^{k+1}]=-(k+1)y_\alpha^k(k-h_\alpha).$$

本质上计算都能在 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 中归纳完成, 此处略去细节. 由 (a) 和 (b) 我们得到 $x_\beta y_\alpha^k v_\lambda = x_\alpha y_\alpha^{\lambda(h_\alpha)+1} v_\lambda = 0$. 所以 $y_\alpha^{\lambda(h_\alpha)+1} v_\lambda$ 将生成某子模 $N \subsetneq L_\lambda$, 由不可约知 $N = 0$ 故 $y_\alpha^{\lambda(h_\alpha)+1} v_\lambda = 0$.
(2) 现在每个 $\alpha \in \Pi$, $v_\lambda, y_\alpha v_\lambda, \cdots, y_\alpha^{\lambda(h_\alpha)} v_\lambda$ 是有限维 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\alpha$-模, 现在给定 α, 用 N 表示所有的 V_λ 的有限维 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_\alpha$-子模的和, 显然它非空且在 $\mathfrak{g}$ 下不动, 因为若 N' 是这么一个子模则 $\mathfrak{g}N'$ 也是, 故每个元素作用 $\mathfrak{g}$ 者仍在其中, 因此 $N = L_\lambda$.
(3) 于是 x_α, y_α 作用在 L_λ 的任何一个元素上都幂零. 考虑如下的算子

$$\tau_\alpha := (\exp x_\alpha)(\exp -y_\alpha)(\exp x_\alpha).$$

由**命题 5.54**, 我们考虑 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的一个不可约表示, 实现为 $\mathbb{C}[x,y]$ 的 $m+n$ 次齐次者, x_α 和 y_α 在其上按照 $x\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial x}$ 作用在其上, 得

$$(\exp x_\alpha) x^m y^n = \sum_{i \geq 0} \frac{x^{m+i}}{i!} \cdot n \cdots (n-i+1) y^n = x^m (x+y)^n.$$

算得 $(\exp x_\alpha)(\exp -y_\alpha)(\exp x_\alpha) x^m y^n = (-y)^m x^n$. 故 $\tau_\alpha L_\lambda[\mu] = L_\lambda[s_\alpha \mu]$. 由此对一切 Weyl 群的元素 w 都有 $\dim L_\lambda[w\mu] = \dim L_\lambda[\mu] < \dim M_\lambda[\mu] < +\infty$. 实际上利用 $U\mathfrak{n}_- \to M_\lambda$ 的线性同构, 它的维数就是 R_+ 中元素无序求和得到 $\lambda - \mu$ 的方法数.
(4) 由**引理 5.104**, 注意对任意 μ 存在唯一 $w\mu \in P_+$. 因此我们只需证明存在有限多个 P_+ 中的元素在 $\lambda - \mathrm{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi$. 现在 $\lambda + \mu \in P_+$, 另一方面具体写出 $\lambda - \mu = \sum_{\alpha_i \in \Pi} k_i \alpha_i, k_i \geq 0$, 得

$$(\lambda, \lambda) - (\mu, \mu) = (\lambda + \mu, \lambda - \mu) = \sum_{\alpha_i \in \Pi} k_i (\lambda + \mu, \alpha_i) \geq 0.$$

故 μ 在一个格与一个有界集的交中, 有限性得证. □

> **推论 5.106.** 对每个 $\lambda \in P_+$, L_λ 总是一个有限维不可约表示. 一方面不同的 λ 对应到不同构的 L_λ, 另一方面每个有限维不可约表示都同构于它们之一.

现在我们知道任意有限维表示总能写成 $V = \bigoplus_{\lambda \in P_+} n_\lambda L_\lambda$. 下研究 n_λ 的确定.

> **定理 5.107.** 集合 $\{\mathrm{ch}(L_\lambda) : \lambda \in P_+\}$ 构成 $\mathbb{C}[P]^W$ 作为 $\mathbb{C}$-线性空间的一组基.

证明. 首先对 $\lambda \in P_+$ 记 $m_\lambda = \sum_{\mu \in W\lambda} e^\mu$. 由于**引理 5.104** 知它们构成 $\mathbb{C}[P]^W$ 的一组基. 由于 $\mathrm{ch}\, L_\lambda$ 等于 m_λ 加上 m_μ 的一些线性组合, 其中 $\mu \in P_+ \cap (\lambda - \mathrm{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi_+)$ 者, 注意是可逆上三角变换, 结论得证. □

5.5.3 又一个简短的小节：涉及 Casimir 元的计算

为了研究表示的特征多项式, 我们需要做一些准备. 回忆在**定义 5.43** 中 Killing 形式对应的 Casimir 元 $C_K \in Z(U\mathfrak{g})$, 设 $\{h_i\} \subset \mathfrak{h}$ 是一组基, $\{k_i\}$ 为 $\{h_i\}$ 在 Killing 形下的对偶基, 结合**命题 5.60**, 设 $z_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}, \alpha \in R_+$ 使 $K(x_\alpha, z_\alpha) = 1$. 于是 $C_K = \sum_i h_i k_i + \sum_\alpha (x_\alpha z_\alpha + z_\alpha x_\alpha)$.

另一方面 C_K 作用在任意最高权表示 V_λ 总是常数倍作用, 注意 $C_K v_\lambda$ 仍是常数倍 v_λ, 利用可交换性以及 v_λ 生成整个 V_λ 可知, 现在记这个常数 χ_λ. 现计算 $C_K v_\lambda = (\sum_i \lambda(h_i)\lambda(k_i) + \sum_{\alpha\in R_+}[x_\alpha, z_\alpha])v_\lambda$. 而由**引理 5.64** 知 $[x_\alpha, z_\alpha] = (x_\alpha, z_\alpha)H_\alpha = H_\alpha$, 故定义 $\rho := \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in R_+}\alpha$. 再由 $\{h_i\},\{k_i\}$ 是正交基, 取它们在 $\mathfrak{h}^*$ 的对偶, 容易用纯线性代数的技巧计算得到 $\sum_i \lambda(h_i)\lambda(k_i) = (\lambda,\lambda)$. 于是 $\chi_\lambda := (\lambda+\rho,\lambda+\rho)-(\rho,\rho)$.

回忆 Casimir 元在研究不可约表示时发挥的奇效, 在此我们故技重施, 指出:

> **命题 5.108.** 设 $\lambda \in P$, V_λ 是一个 λ 为最高权的表示. 则它作为 $U\mathfrak{g}$-模具有有限长的合成列 (检查**定义 2.151** 到**推论 2.153** 适用一般的 *Abel* 范畴), 而且商出的单模分别是 L_μ 中的一些, 其中 $\lambda-\mu \in \operatorname{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}\Pi$ 且 $(\mu+\rho,\mu+\rho) = (\lambda+\rho,\lambda+\rho)$, 记这样的 μ 构成集合 $\mathscr{M}_\lambda$, 注意这是一个有限集. 更准确地说, 有 $\ell(V_\lambda) \leq d := \sum_{\mu\in\mathscr{M}_\lambda}\dim V_\lambda[\mu]$.

证明. 归纳. 若 $d=1$ 则 $\mathscr{M}_\lambda = \{\lambda\}$, 我们需指出此时 V_λ 不可约. 否则有真子模 W, 是 V_λ 一些权空间的直和, 考虑用某个极高权生成的子模来代替 W 可设它是以某 μ 为最高权的表示, 现在 C_K 在 V_λ 按 χ_λ 作用, 因此在 W 亦然, 必有 $\chi_\mu = \chi_\lambda$, 从而 $\mu = \lambda$ 而知不可约. 一般的 V_λ 对子模 W 检查 $d_{V_\lambda} = d_W + d_{V_\lambda/W}$ 以及 V_λ 合成列的商模来自 W 和 V_λ/W. □

注 5.109. 注意两个细节, 第一是 $\mathscr{M}_\lambda$ 中者不一定在 P_+ 进而一些 L_μ 可以无限维, 第二是可能取不到等因为有些 $\mathscr{M}_\lambda$ 中的权空间的维数是更高权的不可约子模贡献的.

为了研究有限的特征多项式, 形式幂级数的引入是必要的. 具体的为了处理诸如 Verma 模的特征多项式, 需要允许形如 $\mathscr{P}_\lambda := \{e^\mu : \mu \in \lambda - \operatorname{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}\Pi\}$ 单项式构成的 $\mathbb{C}$-系数形式幂级数.

引理 5.110. 有 $\operatorname{ch}(M_\lambda) = e^\lambda / \prod_{\alpha\in R_+}(1-e^{-\alpha})$.

证明. 注意 $u \mapsto uv_\lambda$ 在线性空间上提供 $U\mathfrak{n}_- \cong M_\lambda$, 因为 $\prod_{\alpha\in R_+} f_\alpha^{n_\alpha}$ 构成 $U\mathfrak{n}_-$ 的一组基, 所以 $\dim M_\lambda[\mu]$ 正是 $\sum_{\alpha\in R_+} n_\alpha\alpha = \lambda-\mu$ 的非负整数解数. □

按照**命题 5.108**, 我们可以用 $(\lambda+\rho,\lambda+\rho)$ 的值来分类权空间, 现在 Verma 模 M_λ 是有限长的, 于是 $\operatorname{ch}(M_\lambda)$ 可以写成线性组合 $\sum_{\mu\in\mathscr{M}_\lambda} a_{\lambda\mu}\operatorname{ch}(L_\mu)$. 注意 $a_{\lambda\lambda} = 1$ 以及 $a_{\lambda\mu} \neq 0$ 只在 $\lambda-\mu \in \operatorname{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}\Pi$ 时可能成立, 于是由线性代数知这是可逆上三角变换, 从而我们希望反过来研究 $\operatorname{ch}(L_\lambda) = \sum_{\mu\in\mathscr{M}_\lambda} b_{\lambda\mu}\operatorname{ch}(M_\mu)$ 的表出, 而下一小节介绍的 Weyl 特征公式就是干这个的.

5.5.4 Weyl 特征公式（Weyl Character Formula）及其应用

> **命题 5.111.** $\lambda \in P_+$. 延续上节记号, $\mu \in \mathscr{M}_\lambda$ 只有在 $\mu+\rho = w(\lambda+\rho)$ 对某 $w \in W$ 时才有 $b_{\lambda\mu} \neq 0$, 此时 $b_{\lambda\mu} = (-1)^w := \det w$ 即 *Weyl* 群自然嵌入 $\mathrm{O}(E)$ 按照定向确定的 ± 1.

证明. 我们把证明分成下面的几步. (1) 先设 $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in\Pi}$ 为 Π 的对偶基. 注意对 $\alpha\in\Pi$ 有 $s_\alpha\alpha=-\alpha$, 且检查其他正根仍变成正根, 这是因为只改变了其线性组合中 α 的系数, 这表明对 $\alpha\in\Pi$ 有 $s_\alpha\rho=\rho-\alpha$. 因此 $(\rho,\alpha)=1$ 故 $\rho=\sum_{\alpha\in\Pi}\lambda_\alpha$.
(2) 再设 $q=\prod_{\alpha\in R_+}(e^{\alpha/2}-e^{-\alpha/2})$. 由 (1) 不难检查 $wq=(-1)^w q$ 因为只让 $\alpha,-\alpha$ 交换而在其余正根置换. 另外结合**引理 5.110** 有 $q\operatorname{ch}(M_\lambda)=e^{\lambda+\rho}$. 现在 $q\operatorname{ch}(L_\lambda)=\sum_{\mu\in\mathscr{M}_\lambda}b_{\lambda\mu}e^{\mu+\rho}$.
(3) 注意**命题 5.96** 和**定理 5.105**, 知此时 $w\operatorname{ch}L_\lambda=\operatorname{ch}L_\lambda$. 于是

$$(-1)^w q\operatorname{ch}(L_\lambda)=\sum_{\mu\in\mathscr{M}_\lambda}b_{\lambda\mu}e^{w(\mu+\rho)}.$$

这表明使得系数非零的 $\mu+\rho$ 在 W 下稳定, 且 $\lambda+\rho$ 轨道者的系数依 $b_{\lambda\mu}=(-1)^w$, 同时也知道了 $W(\lambda+\rho)\subset\mathscr{M}_\lambda$. 现在只要证明 $\mathscr{M}_\lambda$ 中非形如 $w(\lambda+\rho)$ 者系数皆为 0 即可.
(4) 运用**引理 5.104**, 得知 $W(\lambda+\rho)\cap P_+$ 非空, 我们声称若 $\mu\in\mathscr{M}_\lambda$ 使 $\mu+\rho\in P_+$ 则 $\mu=\lambda$. 为此设 $\pi:=\lambda-\mu\in\operatorname{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}\Pi$, 于是

$$\begin{aligned}0&=(\lambda+\rho,\lambda+\rho)-(\lambda+\rho-\pi,\lambda+\rho-\pi)\\&=(\lambda+\rho,\pi)+(\mu+\rho,\pi)\geq(\lambda+\rho,\pi)\geq 0.\end{aligned}$$

这取等必须在 $\pi=0$ 时发生, 因为由 (1) 知 $\rho=\sum_{\alpha\in\Pi}\lambda_\alpha$. 至此命题得证. □

推论 5.112 (Weyl 特征公式)**.** 设 $\lambda\in P_+$ 则

$$\operatorname{ch}(L_\lambda)=\frac{\sum_{w\in W}(-1)^w e^{w(\lambda+\rho)}}{\prod_{\alpha\in R_+}(e^{\alpha/2}-e^{-\alpha/2})}=\frac{\sum_{w\in W}(-1)^w e^{\mu}}{\prod_{\alpha\in R_+}(1-e^{-\alpha})}.$$

证明. 只需检查对不同的 $w\in W$, $w(\lambda+\rho)$ 互不相同, 这是因为所有正根与 $\lambda+\rho$ 的内积为正数, 故它严格在一个 Weyl 腔的内部, 从而在 Weyl 群作用下自由. □

推论 5.113 (Weyl 分母公式)**.** 代入 $\lambda=0$, 注意 L_λ 是平凡一维表示, 故

$$\prod_{\alpha\in R_+}\left(e^{\alpha/2}-e^{-\alpha/2}\right)=\sum_{w\in W}(-1)^w e^{w\rho}.$$

于是为了便利, 常记 $A_\mu:=\sum_{w\in W}(-1)^w e^{w\mu}$. 这样 $\operatorname{ch}L_\lambda=A_{\lambda+\rho}/A_\rho$.

利用一些 q-模拟的技巧, Weyl 的公式可以帮助我们便捷地计算 L_λ 的维数.

推论 5.114 (Weyl 维数公式)**.** 设 $\lambda\in P_+$ 则

$$\dim L_\lambda=\frac{\prod_{\alpha\in R_+}(\lambda+\rho,\alpha)}{\prod_{\alpha\in R_+}(\rho,\alpha)}.$$

证明. 定义同态 $\pi_\mu : \mathbb{C}[P] \to \mathbb{C}[q, q^{-1}]$ 为 $\pi_\mu(e^\lambda) = q^{2(\lambda,\mu)}$, 这样

$$\pi_\rho(\mathrm{ch}(L_\lambda)) = \frac{\sum_w (-1)^w q^{2(w(\lambda+\rho),\rho)}}{\prod_{\alpha\in R_+}(q^{(\alpha,\rho)-q^{-(\alpha,\rho)}})}.$$

注意 W 是等距群, 故分子可以写开计算, 而写成和分母类似的形状.

$$\begin{aligned}\sum_w (-1)^w q^{2(w(\lambda+\rho),\rho)} &= \sum_w (-1)^w q^{2(\lambda+\rho,w(\rho))} \\ &= \pi_{\lambda+\rho}\left(\sum_w (-1)^w e^{w(\rho)}\right) \\ &= \pi_{\lambda+\rho}\left(\prod_{\alpha\in R_+}\left(e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}\right)\right) = \prod_{\alpha\in R_+}\left(q^{(\lambda+\rho,\alpha)} - q^{-(\lambda+\rho,\alpha)}\right).\end{aligned}$$

于是令 $q \to 1$, 由 $\lim_{q\to 1}\frac{q^x-1}{q^y-1} = \frac{x}{y}$ 立刻计算得到结论. □

这计算也告诉我们不可约表示的维数随着 λ 变大按照多项式速率增长.

5.5.5 例子: $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ 的表示理论和 Schur 多项式

回忆**例 5.91**, 整理如下. 注意 A_n 对应李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})$, Cartan 子代数 $\mathfrak{h} = \mathrm{diag}\{h_i\}$, 记 $e_i \in \mathfrak{h}^*$, $R_+ = \{e_i - e_j : i > j\}, \Pi = \{e_i - e_{i+1}\}_i$. Killing 形式 $K(\sum a_i e_i, \sum b_i e_i) = C\sum a_i b_i$. 计算权格, 注意差一个常数下 $e_1 = (1,0,\cdots,0), e_1+e_2 = (1,1,0,\cdots,0), \cdots, e_1+\cdots+e_n = (1,1,\cdots,1,0)$ 为 $e_1 - e_2, \cdots, e_n - e_{n+1}$ 的对偶基, 而后商掉 $\mathrm{span}_{\mathbb{C}}(e_1+\cdots+e_{n+1})$. 现 P 包含所有 $\lambda = (\lambda_1,\cdots,\lambda_n,0), \lambda_i \in \mathbb{Z}$ 者而 P_+ 是其中 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$ 者.

于是每个表示都可实现为一个 Young 图, 即所有行左对齐, 每行分别放着数目 λ_i 个方格的图案. 简单计算表明典范表示 $V = \mathbb{C}^{n+1} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{v_i\}_{i=1}^{n+1}$ 的最高权为 $(1,0,\cdots,0)$, 而 $S^kV(k \geq 1), \wedge^k V(1 \leq k \leq n)$ 不可约, 它们的最高权为 $(k,0,\cdots,0)$ 和 $(1,\cdots,1,0,\cdots,0)$, 后者有 k 个 1. 具体的计算, 只需注意 S^kV 的最高权 v_1^k, $\wedge^k V$ 的最高权 $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$.

我们也能具体计算 Weyl 群和 $\mathbb{C}[P]$. Weyl 群是 S_{n+1}, 它置换 $\{e_1,\cdots,e_{n+1}\}$, 于是记 $\mathbb{C}[P] = \mathbb{C}[x_1^{\pm 1},\cdots,x_n^{\pm 1}] = \mathbb{C}[x_1,\cdots,x_{n+1}]/(x_1\cdots x_{n+1}-1)$, 其中 x_i 对应 e^{ce_i}, $\{ce_i\}$ 为 $\{e_i\}$ 在 Killing 形式下对偶者. 这样 $\mathbb{C}[P]^W$ 是 $n+1$ 元对称多项式, 于是可以用 Weyl 特征公式进行计算.

定理 5.115. 设 $\lambda = (\lambda_1,\cdots,\lambda_n,0) \in P_+$ 为 $\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})$ 的主整权, 则

$$\mathrm{ch}(L_\lambda) = \frac{A_{\lambda_1+n,\lambda_2+n-1,\cdots,\lambda_n+1,0}}{A_{n,n-1\cdots,1,0}},\ \dim L_\lambda = \frac{\prod_{1\leq i<j\leq n+1}(\lambda_i - \lambda_j + j - i)}{\prod_{1\leq i<j\leq n+1}(j-i)}.$$

$$A_{\mu_1,\cdots,\mu_n,\mu_{n+1}} := \det\left(x_i^{\mu_j}\right)_{(n+1)\times(n+1)} = \sum_{\sigma\in S_{n+1}}(\mathrm{sgn}\,\sigma)x_{\sigma(1)}^{\mu_1}\cdots x_{\sigma(n+1)}^{\mu_{n+1}}.$$

证明. 由**命题 5.111** 知 $\rho = \sum_{\alpha\in\Pi}\lambda_\alpha = (n,n-1,\cdots,1,0)$, 结合**推论 5.113**, **推论 5.114**. □

在**定理 5.115** 中定义的 $\mathrm{ch}(L_\lambda)$ 即所谓 λ 的 Schur 多项式, 它在表示论的其他场合也会发挥作用. 关于它还有不少奇妙事实, 例如 Cauchy 恒等式, 其证明并不显然.

5.6 $U\mathfrak{g}$ 的中心 *

回忆我们多次运用 Casimir 元对不可约表示进行处理, 于是一个重要的任务就是研究 $Z(U\mathfrak{g})$, 实际上其结构将被 Harish-Chandra 同构确定, 而 Chevalley 定理则告诉我们它是个 $\dim\mathfrak{h}$ 维的多项式环. 这两个定理帮助我们建立了对 $Z(U\mathfrak{g})$ 的基础认知.

5.6.1 准备工作：一些回顾

回忆 **PBW 定理**, 我们取 $U\mathfrak{g}$ 的一组基为 $y_1^{i_1}\cdots y_m^{i_m}h_1^{j_1}\cdots h_l^{j_l}x_1^{k_1}\cdots x_m^{k_m}$, 其中 x_i,y_i 为全体正根负根, h_i 为全体单根. 于是作为线性空间我们写出分解 $U\mathfrak{g}=U\mathfrak{h}\oplus(U\mathfrak{g}\mathfrak{n}_++\mathfrak{n}_-U\mathfrak{g})$, 即按照是否含 x_i,y_i 来分类基, 记投影 $\gamma:U\mathfrak{g}\to U\mathfrak{h}$. 令记 $\sigma:\mathfrak{h}\to U\mathfrak{h}=S\mathfrak{h}$ 定义为 $h\mapsto h-\rho(h)$, 这自然地延拓为 $U\mathfrak{h}$ 的自同构, 下面先陈述定理:

定理 5.116 (Harish-Chandra)**.** *映射 $\gamma_H:=\sigma\circ\gamma$ 诱导 $Z(U\mathfrak{g})\to(U\mathfrak{h})^W$ 代数同构.*

定义 5.117. *设 V 是有限维 k-线性空间, 若 $F\in\mathrm{GL}(V)$ 满足 $\mathrm{rank}(F-\mathrm{id}_V)=1$, 则称它为一个**伪反射**, 若还有 $F^2=1$ 则称反射. 例如 $s_\alpha,\alpha\in\Pi$ 在 $\mathfrak{h}^*$ 上反射.*

定理 5.118 (Chevalley–Shephard–Todd, 一侧)**.** *设 G 是一个有限群, k 是特征 0 的域, V 是 k-有限维线性空间. G 作用在 V 上进而作用在多项式环 $S[V]$ 上. G 由一些伪反射生成则 $S[V]^G$ 是多项式环, 且 Krull 维数为 $\dim V$.*

首先 $S[V]^G\subset S[V]$, 我们声称是一个整扩张. 因为对任意 $f\in S[V]$, 它满足系数在 $S[V]^G$ 的首一方程 $\prod_{g\in G}(x-gf)=0$, 结合 $S[V]$ 在 $S[V]^G$ 有限生成可知. 于是由**命题 2.72** 得知 $\dim S[V]^G=\dim S[V]$ 总成立. 所以我们只需关心何时是多项式环.
回忆 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 上的 $C_K=H^2/8+(XY+YX)/4$, 利用 $XY=YX+H$ 我们算出 $\gamma C_K=H^2/8+H/4$, 结合 $\rho(H)=1$ 得 $\gamma_H C_K=(H^2-1)/8$. 而 Weyl 群作用将 H 变成 $-H$, 不难检查 $(U\mathfrak{h})^W=\mathbb{C}[H^2]$, 这表明 $Z(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$ 是 C_K 的多项式环, 维数确为 $\dim\mathfrak{h}=1$.

引理 5.119. *映射 γ_H 是代数同态且像在 $(S\mathfrak{h})^W=(U\mathfrak{h})^W$.*

证明. 推广**涉及 Casimir 元的计算**一小节思路, 考虑 Verma 模 $M_{\lambda-\rho}$ 与最高权向量 v_+. 对 $h\in\mathfrak{h},z\in Z(U\mathfrak{g})$ 有 $hzv_+=zhv_+=(\lambda-\rho)(h)zv_+$ 且 $x_izv_+=zx_iv_+=0$, 因此 zv_+ 也是 $\lambda-\rho$ 权向量从而是 v_+ 的常数倍, 设常数 $\chi_\lambda(z)$. 注意 $z-\gamma(z)\in U\mathfrak{g}\mathfrak{n}_++\mathfrak{n}_-U\mathfrak{g}$, 故 $z,\gamma(z)$ 作用在 v_+ 上效果一样, 故 $\chi_\lambda(z)=(\lambda-\rho)\gamma(z)$, 依定义它等于 $\lambda(\gamma_H(z))$.

接下来不妨设 $\lambda-\rho\in P_+$, 则对 $\alpha\in\Pi$, 记 $m=m_\alpha=(\lambda-\rho)(h_\alpha)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 则回顾**定理 5.105** 的计算得知 $y_\alpha^m v_+\in M_{\lambda-\rho}[s_\alpha\lambda-\rho]$, 且 $f_\alpha^m v_+\neq 0$ 在 $\mathfrak{g}$ 作用下生成一个最高权 $s_i\lambda-\rho$ 的子表示 M. 由此观之 $\chi_{s_\alpha\lambda}(z)=\chi_\lambda(z)$. 现在我们得知 $\lambda\in\rho+P_+, w\in W$ 总有 $\lambda(\gamma_H(z))=(w\lambda)(\gamma_H(z))$, 这相当于多项式在无穷多组 $W\lambda$ 处取值相同, 故 $\gamma_H(z)\in(U\mathfrak{h})^W$.
最后检查对 $z_1,z_2\in Z(U\mathfrak{g})$ 总有 $z_1z_2-\gamma(z_1)\gamma(z_2)=z_2(z_1-\gamma(z_1))+\gamma(z_1)(z_2-\gamma(z_2))$ 不难检查仍在 $U\mathfrak{g}\mathfrak{n}_++\mathfrak{n}_-U\mathfrak{g}$, 因此 $\gamma(z_1z_2)=\gamma(z_1)\gamma(z_2)$. □

5.6.2 Harish-Chandra 同构的证明

证明. 整个证明分为如下诸步骤. 根据**引理 5.117** 我们只需证明 γ_H 是双射.
(1) 首先我们研究 $S(\mathfrak{g}^\vee)$, 即 $\mathfrak{g}$ 上的多项式. 它是 $\mathfrak{g}$ 的表示, 实际上 $\mathfrak{g}^\vee$ 是 $\mathfrak{g}$ 的对偶表示, 进而 $S(\mathfrak{g}^\vee)$ 上有 $\mathfrak{g}$-作用, 对 $f_1,\cdots,f_k\in\mathfrak{g}^\vee, x,y\in\mathfrak{g}$ 有

$$yf_1(x)\cdots f_k(x):=-f_1([y,x])f_2(x)\cdots f_k(x)-\cdots-f_1(x)\cdots f_{k-1}(x)f_k([y,x]).$$

为研究 $S(\mathfrak{g}^\vee)$, 对其中齐 k 次者我们引入它在 $S^k\mathfrak{g}$ 上的作用, 称为极化. 定义

$$f_1\cdots f_k(x_1,\cdots,x_k)=\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}f_1(x_{\sigma(1)})\cdots f_k(x_{\sigma(k)}).$$

注意它代入 $x_1=\cdots=x_k=x$ 时则回到一元者, 实际上 $\mathfrak{g}$ 的作用也能计算

$$yP(x_1,\cdots,x_n)=-P([y,x_1]x_2,\cdots,x_n)-\cdots-P(x_1,\cdots,x_{n-1},[y,x_n]).$$

所以对于一个 $\mathfrak{g}$ 上的多项式, 为了计算 $\mathfrak{g}$ 在它上的作用, 我们可以先把它极化, 作用 $\mathfrak{g}$ 后, 再代入 $x_1=\cdots=x_k=x$ 回到一元者. 我们马上在具体的情形中进行实践.
(2) 设 τ 是 $\mathfrak{g}$ 的某有限维表示, 我们声称 $S(\mathfrak{g}^\vee)$ 中的映射 $X\mapsto\mathrm{Tr}(\tau X)^k$ 被 $\mathfrak{g}$ 作用零化, 即我们声称它位于 $S(\mathfrak{g}^\vee)^{\mathfrak{g}}$ 中. 按照 (1) 中计算得知极化为 $(X_1,\cdots,X_k)\mapsto\frac{1}{k!}\sum\mathrm{Tr}(\tau X_{\sigma(1)}\cdots\tau X_{\sigma(n)})$, 于是对一个单项计算 $\mathfrak{g}$ 的作用, 而后利用 Tr 的基本性质得知它是 0.
注意 $\mathfrak{h}\hookrightarrow\mathfrak{g}$ 故对偶的 $\mathfrak{g}^\vee\hookrightarrow\mathfrak{h}^*$ 从而有自然的限制 $r:S(\mathfrak{g}^\vee)\to S(\mathfrak{h}^*)$. 若 $F\in S(\mathfrak{g}^\vee)^{\mathfrak{g}}$ 则它在 $\tau_\alpha=(\exp x_\alpha)(\exp -y_\alpha)(\exp x_\alpha)$ 下不变, 这是因为这个展开中只有常数项 1 会产生作用, 其余部分被零化, 而熟知其常数项为 1. 从而回忆**定理 5.105** 的计算得知 $rF\in S(\mathfrak{h}^*)^W$.
(3) 接下来我们指出 $r:S(\mathfrak{g}^\vee)^{\mathfrak{g}}\to S(\mathfrak{h}^*)^W$ 是双射. 首先它单, 若一个 $S(\mathfrak{g}^\vee)^{\mathfrak{g}}$ 中者在 $\mathfrak{h}$ 处处取 0, 类似 (2) 注意到它在任意 $\exp x$ 下不变, 于是由**命题 5.67**, **定理 5.69** 得知 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的任意共轭内, 即在 $\mathfrak{g}$ 的一个开稠集 $\mathfrak{g}^{\mathrm{reg}}$ 内, 其值为 0. 由多项式连续知它只能是 $0\in S(\mathfrak{g}^\vee)^{\mathfrak{g}}$.
其次它满, 由 (2) 的讨论只需 $X\mapsto\mathrm{Tr}(\tau X)^k$ 者打满 $S(\mathfrak{h}^*)^W$ 者即可. 对权 $\lambda\in P_+$, $\lambda^k\in S(\mathfrak{h}^*)$ 且它们生成整个 $\lambda^k\in S(\mathfrak{h}^*)$, 于是 $\mathcal{A}\lambda^k$ 生成 $S(\mathfrak{h}^*)^W$, 其中 $\mathcal{A}$ 即用全体 $w\in W$ 作用取平

均 (为什么?). 于是只需证明每个 $\mathcal{A}\lambda^k$ 都能写成 $\operatorname{Tr}\tau^k$ 的线性组合, 取 τ 为 λ 最高权的不可约表示, 于是 $\operatorname{Tr}\tau^k$ 是 $\mathcal{A}\mu^k$ 们的整 (权空间维数) 系数线性组合, 且 $\mathcal{A}\lambda^k$ 者系数为 1, 其中 $\mu \in (\lambda - \operatorname{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Pi) \cap P_+$, 于是用可逆上三角技巧得证.
(4) 现在我们知道 $r : S(\mathfrak{g}^\vee)^{\mathfrak{g}} \to S(\mathfrak{h}^*)^W$ 是双射, 注意 Killing 形式诱导了同构 $\mathfrak{g}^\vee \to \mathfrak{g}, \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}$, 于是这诱导了 $i : S\mathfrak{g} \to S(\mathfrak{g}^\vee), j : S\mathfrak{h} \to S(\mathfrak{h}^*)$. 于是诱导如下的交换图表

$$\begin{tikzcd} S\mathfrak{g} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\tilde{r}"'] & S(\mathfrak{g}^\vee) \arrow[d, "r"] \\ S\mathfrak{h} \arrow[r, "j"'] & S(\mathfrak{h}^*) \end{tikzcd} .$$

为了计算 $\tilde{r}$, 设 J 为 $S\mathfrak{g}$ 中由 $\mathfrak{n}_+, \mathfrak{n}_-$ 生成的理想, 于是 $S\mathfrak{h} \cong S\mathfrak{g}/J$. 设 r' 为 $S\mathfrak{g} \to S\mathfrak{g}/J$, 我们检查 $r' = \tilde{r}$. 只需检查 $\mathfrak{g}$ 中的元素, 设 $x \in \mathfrak{g}, h \in \mathfrak{h}$ 则 $ri(x)(h) = i(x)(h) = (h, x) = (h, r'x) = jr'(x)(h)$, 这里用到了 $\mathfrak{h}$ 与 $\mathfrak{n}_+ + \mathfrak{n}_-$ 在 Killing 形下正交.
(5) 鉴于 Killing 形是 W-不变的, 于是 $\tilde{r} = r'$ 从 r 诱导了同构 $(S\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \to (S\mathfrak{h})^W$. 映射是 $S\mathfrak{g} \to S\mathfrak{g}/J \cong S\mathfrak{h}$ 诱导的. 定义 $\mathcal{A} : S\mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}$ 为 $X_1 \cdots X_k \mapsto \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} X_{\sigma(1)} \cdots X_{\sigma(k)}$. 由 PBW 定理易知它是同构, 于是 $P \in (S\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ 当且仅当 $\mathcal{A}P \in Z(U\mathfrak{g})$, 这是因为对 $x \in \mathfrak{g}$ 有 $\mathcal{A}[x, X_1 \cdots X_k] = [x, \mathcal{A}(X_1 \cdots X_k)]$. 所以现在观察 $\mathcal{A} : (S\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \to Z(U\mathfrak{g}), \tilde{r} : (S\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \to (S\mathfrak{h})^W$ 是同构, 只需检查诱导的 $\tilde{r}A^{-1} : Z(U\mathfrak{g}) \to (S\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \to (S\mathfrak{h})^W$ 与 γ_H 一致. 鉴于已验证了 γ_H 的像总在 $(S\mathfrak{h})^W$ 中, 而且 γ_H 和 γ 相比首项一致, 只需检查 $\gamma_H = \gamma = r'\mathcal{A}^{-1} \bmod S_{k-1}\mathfrak{h}$, 而这显然.
准确地说, 当我们知道二者的像都位于 $(S\mathfrak{h})^W$ 时, 可以减掉 $(S\mathfrak{h})^W$ 中首项的原像来归纳地验证. 倘若不事先知道 γ_H 像在其中, 则无法利用 $r'\mathcal{A}^{-1}$ 是同构来过渡. □

5.6.3 Chevalley 定理的证明

仍考虑 Chevalley 定理的语境. k 是特征 0 的域, V 是 k-有限维线性空间, 设 $G \subset \mathrm{GL}(V)$ 是有限群. G 作用在 V 上进而作用在多项式环 $S[V]$ 上. 定义 $I := I(G, V)$ 为 $S[V]$ 中由 $S[V]^G$ 中全体齐次的多项式生成的理想.

引理 5.120. 设 I 由齐次的 $f_1, \cdots, f_r \in S[V]^G$ 生成, 则 $S[V]^G$ 作为 k-代数由它们生成.

证明. 设 $h \in S[V]^G$ 齐 d 次, 我们对 d 归纳证明 $h \in k[\{f_i\}]$, 奠基 $d = 0$ 显然. 递推时注意 $h \in I$ 故 $h = \sum p_i f_i$. 左右作用平均算子 $\frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} g$ 可设 $p_i \in S[V]^G$, 进一步考虑其齐 k 次的部分可设诸 p_i 齐次, 从而由诸 $\dim f_i \geq 1$ 结合归纳假设知 $p_i \in k[\{f_i\}]$ 故 $h \in k[\{f_i\}]$. □

我们回到定理的证明.

证明. 我们把定理的证明分成如下若干步骤.

(1) 设 I 作为理想由齐次的 $f_1,\cdots,f_r \in S[V]^G$ 生成, r 极小. 由**引理 5.120** 知它们代数生成 $S[V]^G$. 现只需证明它们代数无关. 若不然设非零多项式 h 使得 $h(f_1,\cdots,f_r)=0$. 观察代入 f_i 后 h 的齐次部分, 可设 h 只包含 $X_1^{e_1}\cdots X_r^{e_r}$ 者, 使诸 $d=\sum e_i \dim f_i$ 相同.

(2) 接下来考虑 $h_i := \frac{\partial h}{\partial X_i}|_{(f_1,\cdots,f_r)}$. 于是 $h_i \in S[V]^G$ 是齐 $d-\dim f_i$ 次的. 设 J 是 h_i 在 $S[V]$ 中生成的理想, 记 $h_1,\cdots,h_m$ 是 J 的极小生成元组, 故对 $i>m$ 有 $h_i=\sum_{j=1}^m g_{ij}h_j$. 仍考察齐次设 g_{ij} 是齐 $\deg f_i - \deg f_j$ 次者.

(3) 对 $h(f_1,\cdots,f_r)=0$ 取 X_k 微分得 $0=\sum_{i=1}^r h_i\frac{\partial f_i}{\partial X_k}=\sum_{i=1}^m h_i\frac{\partial f_i}{\partial X_k}+\sum_{j=m+1}^r\sum_{i=1}^m g_{ji}h_i\frac{\partial f_j}{\partial X_k}$. 不妨把 i 的求和放在一起, 设 $p_i := \frac{\partial f_i}{\partial X_k}+\sum_{j=m+1}^r g_{ji}\frac{\partial f_j}{\partial X_k}$. 得到方程 $h_1p_1+\cdots+h_mp_m=0$, 且 p_i 都齐 $\deg f_i - 1$ 次者. 如果我们能由此证明 $p_1 \in I$, 则下声称命题成立.

(4) 记 $p_1=\frac{\partial f_1}{\partial X_k}+\sum_{j=m+1}^r g_{j1}\frac{\partial f_j}{\partial X_k}=\sum_{i=1}^r f_i q_i$. 注意到 Euler 齐次恒等式 $\sum X_k\frac{\partial f}{\partial X_k}=(\deg f)f$, 将 p_1 式乘 X_k 再对 k 求和得 $(\deg f_1)f_1+\sum_{j=m+1}^r(\deg f_j)g_{j1}f_j=\sum_{i=1}^r f_i r_i$. 根据 r_i 的构造, 它不能是非零常数, 于是 f_1 位于 $f_2,\cdots,f_r$ 在 $S[V]$ 生成的理想中, 与 r 的极小性矛盾.

(5) 现在只需利用 G 是伪反射生成的来证明: 若齐次 $h_1,\cdots,h_m \in S[V]^G$ 满足 h_1 不在 $h_2,\cdots,h_m$ 在 $S[V]$ 生成的理想中, 且齐次 $p_i \in S[V]$ 使 $h_1p_1+\cdots+h_mp_m=0$ 则 $p_1 \in I$. 我们将对 p_1 的次数进行归纳, $p_1=0$ 则显然, p_1 不能为非零常数否则 h_1 在剩余者的理想中.

(6) 现设 $s\in G$ 是一个伪反射, H 是它固定的超平面, 于是 H 上 $sp_i=p_i$. 不妨令 H 为 $\operatorname{Ker} X_n$ 对应的超平面, 计算 sp_i-p_i 得知它形如 $X_nr_i, r_i\in S[V]$, 现令 $s-\mathrm{id}_V$ 作用 $h_1p_1+\cdots+h_mp_m=0$ 上得 $X_n(h_1r_1+\cdots+h_mr_m)=0$. 显然诸 r_i 齐次, 于是由归纳假设知 $r_1\in I$, 这表明 $sp_1-p_1\in I$. 考虑到诸 s 生成 G 故 $gp_1-p_1\in I$ 对一切 $g\in G$, 取平均得到 $p_1 \in I$. □

5.7 附加内容 *

5.7.1 Levi 定理

定理 5.121 (Levi)**.** 特征 0 代数闭域 F, 设 $\mathfrak{g}$ 是 F-有限维李代数, $\mathfrak{s}$ 是 F-半单李代数, 若 $\alpha:\mathfrak{g}\to\mathfrak{s}$ 是满李同态, 则存在单李同态 $\beta:\mathfrak{s}\to\mathfrak{g}$ 使 $\alpha\beta=\mathrm{id}_{\mathfrak{s}}$. 换言之, 下正合列分裂:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}\alpha \longrightarrow \mathfrak{g} \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \mathfrak{s} \longrightarrow 0\,.$$

直接的推论是考虑 $\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}/\operatorname{rad}(\mathfrak{g})$. 一般地, 这个分裂的正合列总给出一个半直积的关系 $\mathfrak{g}=\operatorname{Ker}\alpha\rtimes\mathfrak{s}$, 其中 $\mathfrak{s}$ 在理想 $\operatorname{Ker}\alpha$ 上的作用能决定 $\mathfrak{g}$ 的结构.

证明. 我们将证明分为如下数个步骤.

(1) 首先归约到 $I=\operatorname{Ker}\alpha$ 为单 $\mathfrak{g}$-模的情形, 对 $\dim_F I$ 归纳. 若存在理想 $0\subsetneq J\subsetneq I$, 则由归纳假设 $\alpha':\mathfrak{g}/J\to\mathfrak{s}$ 分裂. 于是存在 β' 使 $\mathfrak{g}/J=\beta'(\mathfrak{s})\oplus(I/J)$. 设 $\mathfrak{h}$ 为 $\beta'(\mathfrak{s})$ 在 $\mathfrak{g}$ 的原像, 它是 $\mathfrak{g}$ 的子代数, 且存在对应的满射 $\mathfrak{h}\to\mathfrak{s}$ 使核为 J, 再由归纳假设可得.

(2) 可要求 I 可交换且 $I=\operatorname{rad}\mathfrak{g}$. 注意 $\alpha(\operatorname{rad}\mathfrak{g})=0$ 故 $\operatorname{rad}\mathfrak{g}\subset I$, 由 I 无真理想故 $\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ 为 0 或 I. 0 的情况即 $\mathfrak{g}$ 半单, 由**定理 5.26** 易证, $\operatorname{rad}\mathfrak{g}=I$ 的情况, $[I,I]\subsetneq I$ 知 $[I,I]=0$.

(3) 若 $[\mathfrak{g},I]=0$, 则它约化, 而划归为熟知情形**命题 5.51**. 可设 $\mathfrak{g}$ 在 I 上不平凡地作用. 接下来试图找一个 $\mathfrak{g}$ 的表示 W 和一个 $w\in W$ 使 $\operatorname{Stab}(w)=\{x\in\mathfrak{g}:xw=0\}=\beta(\mathfrak{s})$ 符合题意. 为此需要线性 $f:\mathfrak{g}\to W, f(x)=xw$ 满足 $f|_I$ 是单射且 $f(\mathfrak{g})=f(I)$. 这样 $\mathfrak{g}\to\operatorname{Ker}\alpha$ 一侧正合列分裂则自然有另一侧分裂, 对 $x\in\mathfrak{g}$ 可具体令 $\beta(\alpha x):=x-f^{-1}f(x)$.

(4) 现考虑 $W:=\operatorname{End}_F(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}^\vee$ 上的自然表示, 定义三个子表示 (检查)

$$
\begin{aligned}
P:=&\{\operatorname{ad}(x)\in W:x\in I\},\\
Q:=&\{\phi\in W:\phi(\mathfrak{g})\subset I;\phi(I)=0\},\\
R:=&\{\phi\in W:\phi(\mathfrak{g})\subset I;\phi|_I=\lambda\cdot\operatorname{id}_I\}.
\end{aligned}
$$

现在我们具有正合列 $0\to Q\to R\to F\to 0$ 以及 $0\to Q/P\to R/P\to F\to 0$. 现在利用 $[I,I]=0$ 计算得 I 在 $Q/P,R/P$ 上平凡作用, 于是这是 $\mathfrak{s}$-模短正合列, 由**定理 5.45** 熟知半单李代数的有限维表示正合列总分裂, 故存在 $\overline{w}\in R/P$ 使 $R/P=(Q/P)\oplus k\overline{w}$ 且 $\lambda=1$. 任取原像 $w\in R$, 总有 $\mathfrak{g}w\subset P$, 这是因为 $\mathfrak{g}$ 在 $F\cong R/Q$ 平凡作用.

(5) 下证明 w 符合条件. 首先 $w\in R$ 且由上述直和, 故 $w(\mathfrak{g})\subset I$ 且 $w|_I=\operatorname{id}_I$. 现在每个 $x\in\mathfrak{g}$ 按照定义作用在 w 上得 $(\operatorname{ad}x)w-w(\operatorname{ad}x)=[\operatorname{ad}x,w]\in W$. 现在验算 (3) 中的两个要求, 首先对 $a\in I$, $a(w)=-\operatorname{ad}a$; 因此 $a(w)=0$ 当且仅当 $[a,\mathfrak{g}]=0$, 这结合 I 是单模和 $\mathfrak{g}$ 不平凡作用得 $a=0$. 最后对 $x\in\mathfrak{g}$, $x(w)\in P$ 故 $x(w)=\operatorname{ad}a_x=(-a_x)(w), a_x\in I$, 则 $f(\mathfrak{g})=f(I)$. □

5.7.2 准备工作：幂零根

定义 5.122. 对有限维李代数 $\mathfrak{g}$, 用 $\operatorname{nil}(\mathfrak{g})$ 记 $\mathfrak{g}$ 最大的幂零理想（这个理想它作为李子代数是幂零的, 在这个条件下最大）, 称为 $\mathfrak{g}$ 的**幂零根**.

> **性质 5.123.** 设 $\mathfrak{g}$ 是特征 0 域上的有限维李代数. (1) 若 I,J 为 $\mathfrak{g}$ 的幂零理想, 则 $I+J$ 亦然. 故 $\operatorname{nil}\mathfrak{g}$ 良定. (2) $[\mathfrak{g},\operatorname{rad}\mathfrak{g}]\subset\operatorname{nil}\mathfrak{g}$. (3) 设 $I\subset\mathfrak{g}$ 是理想, 则 $\operatorname{rad}(I)=\operatorname{rad}(\mathfrak{g})\cap I$. (4) 设 $I\subset\mathfrak{g}$ 是理想, 则 $\operatorname{nil}(I)=\operatorname{nil}(\mathfrak{g})\cap I$.

证明. (1) 注意理想计算得 $(I+J)^{2m}\subset I^m+J^m$.

(2) 我们证明更一般的结论, 对 $\mathfrak{g}$ 的任意有限维表示 (ρ, V), 总有 $\rho([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\cap\operatorname{rad}\mathfrak{g})$ 中的元素是幂零线性映射. 首先考虑子商关系只需 V 不可约, 而后用 ρ 的像代替 ρ 可设 ρ 是单射, 我们证明此时 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\cap\operatorname{rad}\mathfrak{g}=0$. 设 $\operatorname{rad}\mathfrak{g}\neq 0$ 及 k 为最大整数使 $I=(\operatorname{rad}\mathfrak{g})^{(k)}\neq 0$ 者. 只需证明 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\cap I=0$, 因为如果 $k>0$ 则 $I\subset[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. 注意如下结论:

$(*)$ J 是 $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{gl}(V)$ 的任意只含有 V 中幂零线性映射的理想, 则 $J=0$. 这是因为 J 在 V 的公共零点集是 V 的子 $\mathfrak{g}$-模, **命题 5.8** 知它非空, 因此 $JV=0$ 故 $J=0$.

现在我们证明 $[\mathfrak{g},I]=0$, 对 $x\in\mathfrak{g}, y\in I$ 有 $[x,y]\in I$, 因 I 交换, 故 y 与 $[x,y]$ 可交换. 因此对一切 n, 考虑 $z=[x,y]^{n-1}$ 总有 $\operatorname{Tr}_V([x,y]z)=\operatorname{Tr}_V(x[y,z])=0$. 于是 $\operatorname{Tr}_V[x,y]^n=0$ 从而由特征 0 知 $[x,y]$ 幂零, 因此对 $[\mathfrak{g},I]$ 用 $(*)$ 知 $[\mathfrak{g},I]=0$. 回到 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\cap I=0$ 的证明, 设 $x,y\in\mathfrak{g}$ 使 $[x,y]\in I$, 那么 $[y,[x,y]]=0$, 故 y 与 $[x,y]$ 可交换, 由上面一样的技巧知 $[x,y]$ 幂零, 从而对 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\cap I$ 用 $(*)$ 得知它是 0. 至此更一般的结论得到证明.

那么对于原本的 (2), 考虑 $[\mathfrak{g},\operatorname{rad}\mathfrak{g}]\subset[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\cap\operatorname{rad}\mathfrak{g}$ 并考虑伴随表示即得所需结论.

(3) 显然 $\operatorname{rad}\mathfrak{g}\cap I$ 是 I 中的可解理想, 反过来注意对一切 $x\in\mathfrak{g}$, 李同态 $\operatorname{ad}x: I\to I$ 将 $\operatorname{rad}(I)$ 映到一个可解理想, 因此 $[\mathfrak{g},\operatorname{rad}I]\subset\operatorname{rad}I$, 故 $\operatorname{rad}I$ 也是 $\mathfrak{g}$ 中的理想从而含与 $\operatorname{rad}\mathfrak{g}$.

(4) 首先 $\operatorname{nil}(\mathfrak{g})\cap I$ 由 **Engel 定理**知它是 I 的一个幂零理想. 反过来由 (2),(3) 知 $[\mathfrak{g},\operatorname{nil}I]\subset[\mathfrak{g},\operatorname{rad}I]\subset[\mathfrak{g},\operatorname{rad}\mathfrak{g}]\subset\operatorname{nil}\mathfrak{g}$. 因此 $\operatorname{nil}I$ 在 $\mathfrak{g}$ 中生成的理想含于 $\operatorname{nil}I+\operatorname{nil}\mathfrak{g}\cap I=\operatorname{nil}I$. □

推论 5.124. *设 $\mathfrak{g}$ 是特征 0 域上的有限维李代数. 若 $d\in\operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ 则 $d(\operatorname{rad}\mathfrak{g})\subset\operatorname{nil}\mathfrak{g}$.*

证明. 考虑 $\mathfrak{g}':=\mathfrak{g}\oplus Fd$, 对 $x\in\mathfrak{g}$ 定义 $[d,x]:=d(x)$, 不难检查 $\mathfrak{g}'$ 是李代数且 $\mathfrak{g}$ 为其理想. 用**性质 5.123(2)(3)(4)** 可知 $d(\operatorname{rad}\mathfrak{g})=[d,\operatorname{rad}\mathfrak{g}]\subset[\mathfrak{g}',\operatorname{rad}\mathfrak{g}']\cap\mathfrak{g}\subset\operatorname{nil}\mathfrak{g}'\cap\mathfrak{g}\subset\operatorname{nil}\mathfrak{g}$. □

5.7.3 Ado 定理

如下的内容来自 [32] 的附录.

定理 5.125 (Ado)**.** *特征 0 代数闭域 F, 设 $\mathfrak{g}$ 是 F-有限维李代数, 则它是线性李代数. 换言之, 存在有限维 F-线性空间 V, 使得 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{gl}(V)$ 的一个李子代数同构.*

这个定理的证明并不容易, 首先交换李代数本身具有显然的忠实表示, 每个维数取 $\begin{bmatrix}0 & F\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ 直和起来即可. 对一般的 $\mathfrak{g}$ 取一列

$$Z(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}_0\subsetneq\cdots\subsetneq\mathfrak{g}_p=\operatorname{nil}(\mathfrak{g})\subsetneq\cdots\subsetneq\mathfrak{g}_q=\operatorname{rad}(\mathfrak{g})\subsetneq\mathfrak{g}_{q+1}=\mathfrak{g}.$$

相邻两项中, 前者是后者的理想, 且 $\dim(\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i-1})=1$ 对 $i\leq q$. 由**推论 5.14** 让 $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}/\operatorname{nil}(\mathfrak{g})$ 伴随作用在自己上可得. 计划是从 $\mathfrak{g}_{i-1}$ 的忠实表示归纳构造 $\mathfrak{g}_i$ 的忠实表示.

定义 5.126. 称 $\mathfrak{g}$ 的一个表示 (ρ, V) 是**幂零表示**, 指对一切 $x \in \mathrm{nil}(\mathfrak{g})$, $\rho(x)$ 幂零.

我们即将证明一个比 Ado 定理强的结论.

定理 5.127 (Ado, 强形式)**.** 特征 0 代数闭域上的有限维李代数总有有限维忠实的幂零表示.

为了完成 Ado 定理强形式的证明, 我们声称只需如下的递推核心步骤:

命题 5.128. 设 $\mathfrak{g}$ 是李代数, 作为线性空间它是 $I \oplus \mathfrak{h}$, 其中 I 是可解理想, $\mathfrak{h}$ 是李子代数, 设 σ 是 I 的幂零表示, 则存在 $\mathfrak{g}$ 的表示 ρ 使得 $I \cap \operatorname{Ker}\rho \subset \operatorname{Ker}\sigma$. 若还有 $\mathrm{nil}(\mathfrak{g}) = \mathrm{nil}(I)$ 或 $\mathrm{nil}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, 则 ρ 可取作幂零表示.

检查 $i \le p$ 时 $\mathrm{nil}(\mathfrak{g}_i) = \mathfrak{g}_i$, $p < i \le q+1$ 时 $\mathrm{nil}(\mathfrak{g}_i) = \mathrm{nil}(\mathfrak{g}_{i-1}) = \mathrm{nil}(\mathfrak{g})$. 这样总保证是幂零表示, 而 I 上的忠实性则是 $I \cap \operatorname{Ker}\rho \subset \operatorname{Ker}\sigma = 0$ 归纳地保证的. 注意 $i \le q$ 时 $\mathfrak{h}$ 只需随意取成一个一维补空间, 而 $i = q+1$ 时补空间的存在性是 **Levi 定理**保证的. 现在利用交换或者半单李代数具有忠实表示, 将前述 I 上忠实的表示直和上 $\mathfrak{g}/I \cong \mathfrak{h}$ 上的忠实表示即得所需.

现在观察万有包络代数 UI, 自然地, 有表示 $\mu_I : I \to \mathfrak{gl}(UI)$ 伴随作用在其上, 由此自然考虑定义 $\mu : \mathfrak{g} = I \oplus \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(UI)$ 按照 Leibnitz 法则计算:

$$\mu(y,x)(z_1 \cdots z_m) := y z_1 \cdots z_m + \sum_{i=1}^{n} z_1 \cdots [x, z_i] \cdots z_n.$$

通过 Jacobi 恒等式可检查 μ 确实是 $\mathfrak{g}$ 的表示.

引理 5.129. I 是特征 0 有限维可解李代数, 设 J 是 UI 的双边理想, 使 (1) UI/J 有限维且 (2) $\mathrm{nil}\, I$ 中的元素在 UI/J 中的像 ad-幂零. 则我们能把 J 换成另一个双边理想 $J' \subset J$, 不仅满足 (1)(2), 而且满足 (3) 对任意 $d \in \mathrm{Der}(I)$, 诱导在 UI 中有 $d(J') \subset J'$.

先假设这引理成立, 我们来证明**命题 5.128**. 由 (σ, V) 诱导 $\sigma : UI \to \mathfrak{gl}(V)$, 我们利用上述引理处理 $J = \operatorname{Ker}\sigma$ 构造 UI 中的理想 J', 很显然 $\operatorname{Ker}\sigma$ 满足 (1)(2), 故不妨设 J' 满足 (3). 这样一来, 自然地对 $x \in \mathfrak{h}$ 考虑 $d = \operatorname{ad} x \in \mathrm{Der}(I)$. $d(J') = J'$ 故 UI/J' 是 $\mathfrak{g}$ 的有限维表示. 若 $y \in I$ 使 $\rho(y) = 0$, 由 $\mathfrak{g}$ 在 UI 上作用的定义知是左乘. 那么 $\rho(y) = 0$ 表明 $y \cdot UI \subset J' \subset J$ 故 $y \in J \subset \operatorname{Ker}\sigma$, 这表明 $I \cap \operatorname{Ker}\rho \subset \operatorname{Ker}\sigma$.

于是需要证明在题述条件下 ρ 是幂零表示. $\mathrm{nil}\,\mathfrak{g} = \mathrm{nil}\, I$ 的情形是容易的. 对 $x \in \mathrm{nil}\, I = \mathrm{nil}\,\mathfrak{g}$, 由 J' 满足 (2) 知 x 的像在 UI/J' 中是 ad-幂零的, 于是 $\rho(\mathrm{nil}\,\mathfrak{g})$ 的像是幂零线性映射.

然后是 $\mathfrak{g}$ 幂零的情形, 此时 I 也幂零. 和上面一样 $\rho(x), x \in I$ 都是幂零线性映射. 我们指出如下结论, 设 $A \subset \mathrm{End}(UI/J')$ 是 $\rho(\mathfrak{g})$ 全体生成的结合 F-代数, $P \subset A$ 是 A 中 $\rho(I)$ 者生成的双边理想, 那么 P 是一个幂零理想: 首先由 I 幂零, 由 **Engel 定理**知存在一个正整数 k 使得 $\rho(I)$ 中任 k

者相乘都是 0, 我们声称 $P^k=0$. 这是因为 I 是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 故利用 $\rho(x)\rho(y)=\rho(y)\rho(x)+\rho([x,y])$ 可将 P^k 中每项都换出连续 k 个 $\rho(I)$ 中元素的乘积来.

接着, 注意到对 $z\in\mathfrak{h}$, $\operatorname{ad}z$ 是 $I\subset\mathfrak{g}$ 的幂零线性变换, 故由 Leibnitz 法则的计算, 也存在一个正整数 l 使 $z\in\mathfrak{h}$ 作用在 UI 中的元素上 l 次也总是 0. 这样对 $x=y+z, y\in I, z\in\mathfrak{h}$ 考虑 $\rho(x)^{kl}=(\rho(y)+\rho(z))^{kl}$ 的展开中, 一个单项要么出现 $\rho(z)^l$, 要么在乘积中出现 k 个 $\rho(y)$, 这表明 $\rho(\mathfrak{g})$ 总是幂零线性变换. 这样两种情况都讨论完成了.

于是现在万事俱备, 只欠**引理 5.129**. 具体的证明如下:

证明. 设 Q 是代数 UI/J 中 $\operatorname{nil}I$ 元素像生成的双边理想, 因为 UI/J 由 I 元素的像生成, 故与上面 $\mathfrak{g}$ 幂零的情形一样的方法讨论知存在 k 使 $Q^k=0$. 设 $Q=K/J$, 其中 K 是 UI 的理想, 再令 $J'=K^k\subset J$, 我们声称这样构造的 J' 符合条件 (1)(2)(3).

首先证明 (1) 即 UI/J' 有限维. 我们考虑 I 在 UI 像的一组基 $x_1,\cdots,x_n$, 并由整相关性取首一多项式 p_i 使得 $p_i(x_i)\in K$, 因为 UI/K 有限维所以这总能做到, 于是 $p_i(x_i)^k\in J'$, 这样 UI/J' 由有限多个 $x_1^{i_1}\cdots x_r^{i_r}$ 线性张成. 然后证明 (2), 考虑 $\operatorname{nil}I$ 中某元素在 UI 中的像 x, $x^p\in J$ 对某 p 故 $x^{pk}\in J^k\subset K^k=J'$. 最后证明 (3), 考虑 $d\in\operatorname{Der}(I)$, 由于 I 可解, 由**推论 5.124** 知 $d(I)\subset\operatorname{nil}I$, 故 $d(UI)\subset K$, 所以 $d(K^k)\subset d(UI)^k\subset K^k$. □

最后, 我们声称即便去掉代数闭的条件, 仍能证明 Ado 定理 (和很多先前的定理). 一个简单的例子是 $\mathfrak{g}$ 是实李代数的情形, 此时 $\mathfrak{g}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ 具有一个忠实复表示, 然后遗忘复结构而看作实线性空间可得 $\mathfrak{g}$ 的忠实实表示. 实际上, 对一般特征 0 的域, 我们的证明依赖于 **Cartan 子代数和根空间**一节前的一些结论, 如果能将代数闭域的条件稍微减弱一些, 例如证明总能基变换到一个有限扩张后使这些结论仍成立那么问题也能解决. 诸如**注 5.13** 和**注 5.20** 告诉我们代数闭的条件往往是不需要的, 类似的问题留给读者思考. 实际上对于 Ado 定理而言就连特征 0 的条件最后也被 Iwasawa 和 Harish-Chandra 去掉了, 当然这些都是后话了.

Chapter 6

幕间休息

6.1 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ 的表示理论速通

有限域上的典型群理论深刻而复杂, 阅读本节前我们假设读者熟知基础的有限群线性表示理论和有限域的知识, 一个好的参考是 [25]. 另外我们参考了 [1] 的有限群表示论一节和 [27].
本节中, 我们固定 $q = p^\alpha > 2$ 表示一个素数幂. 记 $G := \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_q)$.

6.1.1 共轭类的刻画

分类表示就要先计算特征标, 为此需要确认共轭类, 因为 $\mathbb{F}_q$ 不是代数闭域, 所以讨论需要稍加留意. 根据 Jordan 标准型的理论, 我们很容易得到下面的结果.

性质 6.1. *群 G 中的元素共轭类有以下四大种.*
(1) 中心元, $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}; a \in \mathbb{F}_q^\times$, 共有 $q-1$ 类, 每类大小为 1.
(2) 非半单元, $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}; a \in \mathbb{F}_q^\times$, 共有 $q-1$ 类, 每类大小为 $(q-1)(q+1)$.
(3) 分裂元, $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}; a \neq d \in \mathbb{F}_q^\times$, 共有 $(q-1)(q-2)/2$ 类, 每类大小为 $q(q+1)$.
(4) 非分裂元, $\begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix}$, 使 $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \in \mathbb{F}_q[\lambda]$ 不可约,
共有 $q(q-1)/2$ 类, 每类大小为 $q(q-1)$.

证明. 根据特征多项式在 $\mathbb{F}_q$ 分裂与否先作分类. 后者对应 (4) 不可约多项式 $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ 和非分裂元; 前者按是否有重根细分, 无重根则是 (3) 分裂元, 根为 a, d; 若有二重根 a, 再细分 Jordan 块有一块或者两块的情况, 分别对应了 (2) 非半单元和 (1) 中心元.

再计数四种情况下类的数量, 前三者都是显然的, 最后一者只需计数首一, 常数项非零的可约多项式的数量, 按照有无重根求和为 $(q-1)+(q-1)(q-2)/2$, 再用总量 $q(q-1)$ 作差即得.
最后是每类的元素数, 计算中心化子的元素数再用群的阶数 $(q^2-1)(q^2-q)$ 商之. (1) 显然, (2) 的中心化子是对角线相同的上三角, 共 $q(q-1)$ 个元素, (3) 的中心化子是对角阵, 共 $(q-1)^2$ 个元素. 这样一来还剩下 $q^2(q-1)^2/2$ 个元素归于 (4) 中合计 $q(q-1)/2$ 个类.
这时的技巧是, 假设这矩阵是 A, 容易验证 $rA+sI; r,s\in\mathbb{F}_q$ 只要可逆, 都在其中心化子里. 而只要 r,s 不同时为 0, 若记 A 的特征值 $\lambda,\lambda'\in\mathbb{F}_{q^2}\backslash\mathbb{F}_q$ 显然就有 $rA+sI$ 的特征值是 $r\lambda+s, r\lambda'+s$, 从而不可能是 0. 那么这时中心化子的大小至少 q^2-1, 从而每个类的大小至多 $q(q-1)$, 这时恰好取等, 因此这样确定下来. □

在诱导特征标前, 先进行一些说明, 首先注意到 G 有两类值得注意的极大交换子群, 分别包含了一些分裂元和非分裂元. 按照代数群的术语, 称之为 **Cartan 子群**. 具体描述如下, 记 $C_1 := \left\{\begin{bmatrix} a & 0\\ 0 & d\end{bmatrix} : a,d\in\mathbb{F}_q^\times\right\}$ 相当于取某分裂元的中心化子, 含 $(q-1)^2$ 个元素; 再记 $C_2 := C_G(X)$ 是任取非分裂元 X 的中心化子, 含 q^2-1 个元素. C_2 的一种看法是, 设 X 的一特征值 λ, 扩域 $\mathbb{F}_{q^2}=\mathbb{F}_q(\lambda)$ 是 $\mathbb{F}_q$ 上的二维线性空间. 这时 X 相当于一组基 $1,\lambda$ 下域 $\mathbb{F}_{q^2}$ 中乘 λ 这一线性映射的矩阵. 中心化子 C_2 对应了所有的可逆元 $\mathbb{F}_{q^2}^\times$ 们构成的乘法循环群.
这解释了为什么可以选取 (4) 类中的任何一个元素, 因为 q^2 元域是唯一的, 而取不同的元素可以通过线性空间的同构, 即通过共轭, 能得到不同元素定义出的 C_2. 另外有一重要引理:

引理 6.2. $q>2$ 时, 对 $i=1,2$ 有 $[N_G(C_i):C_i]=2$.

证明. 注意 $[N_G(C_G(g)):C_G(g)]$ 等于 $C_G(g)$ 中和 g 在 G 中同一个共轭类的 g', 且使得 $C_G(g)=C_G(g')$ 这样 g' 的个数. 考察 $h\in N_G(C_G(g))$ 将 g 共轭到自己, 则 $h\in C_G(g)$; 一般的 $C_G(hgh^{-1})=hC_G(g)h^{-1}$, 于是每个符合条件的 g' 一一对应 $N_G(C_G(g))$ 中 $C_G(g)$ 的陪集. 回到 C_1,C_2 的情形, 两个特征值不同的元素, 它在 $C_G(g)$ 中恰有两个共轭元, 就是自身或交换两个特征值对应者, 不难检查交换特征值后的元素, 其中心化子仍然是一样的. □

于是以后我们设 w_i 是 $N_G(C_i)\backslash C_i$ 中的一个元素. 特别的, 其实 w_2 可以看作是 $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q)$ 中非平凡的那个元素, 或者说取 q 次幂, 这种看法在后面会用上.

6.1.2 特征标的诱导

一维不可约特征标是平凡的, 称之第一类特征标. 接下来, 乃至在一般的代数群理论中, 构造特征标的一大技巧是**抛物诱导**. 考虑 $U := \left\{\begin{bmatrix} 1 & b\\ 0 & 1\end{bmatrix} : b\in\mathbb{F}_q\right\}$ 是一个极大的由幂幺元素构成的子

群, 则它的中心化子 $B := N_G(U)$ 即全体可逆上三角矩阵被称为 G 上的一个 **Borel 子群**, 反过来导群 $[B,B]=U$. 这些事实应该从李代数的角度看, 给定一组 (极大环面, Borel 子群, 幂幺子群) 的信息其实相当于确定了一个根分解和全体正根. 我们将从 B 上的特征标诱导构造出第二和第三类不可约特征标, 这两类一般被叫做主序列表示 (Principal Series Representations). 在一般的代数群理论中, **Borel 子群**指极大连通可解的闭子群, **抛物子群**指含 Borel 子群的闭子群, 这等价于商是一个完备代数簇. 而第四类特征标则是从 C_2 诱导而来, 称剩余序列表示 (Complementary Series Representations).

考虑域上的 $\mu : \mathbb{F}_q^\times \to \mathbb{C}^\times$, 因为是 $q-1$ 阶循环群, 容易得到这样的 μ 恰有 $q-1$ 个.

第一类特征标

显然 $\chi = \mu\circ\det : G \to \mathbb{C}^\times$ 构造了一族一维表示, 也是对应的特征标. 一个不重要的事实: 它们是所有的一维特征标, 因为一定穿过 G/G', 而 $G' = \mathrm{SL}(2,\mathbb{F}_q)$, 商掉 G' 等价于取行列式.

$$\chi\begin{bmatrix} a & 0\\ 0 & a\end{bmatrix} = \mu(a)^2,\qquad \chi\begin{bmatrix} a & 1\\ 0 & a\end{bmatrix} = \mu(a)^2,\qquad \chi\begin{bmatrix} a & 0\\ 0 & d\end{bmatrix} = \mu(ad),\qquad \chi\begin{bmatrix} 0 & -a_0\\ 1 & -a_1\end{bmatrix} = \mu(a_0).$$

最后一类相当于是取特征值在 $\mathbb{F}_{q^2}/\mathbb{F}_q$ 下的范数再取 μ. 现因为 μ 有 $q-1$ 个, 检查它们是互不相同的一维表示, 由此我们得到了 $q-1$ 个不可约表示.

第二类特征标

注意到 $B/U = C_1$, 考虑 $\psi_\mu := \mathrm{Res}^B_{C_1}(\mu\circ\det) : B \to C_1 \to \mathbb{C}^\times$, 这样 $\psi_\mu\begin{bmatrix} a & b\\ 0 & d\end{bmatrix} = \mu(ad)$. 接下来考虑 $\psi_\mu^G = \mathrm{Ind}_B^G\,\psi_\mu$. 于是从 **Frobenius 互反律**得到

$$\langle \mathrm{Ind}_B^G\,\psi_\mu, \mu\circ\det\rangle_G = \langle \psi_\mu, \mu\circ\det\rangle_B = \frac{1}{\#B}\sum_{g\in B}|\mu\circ\det g|^2 = 1.$$

于是 $\chi = \psi_\mu^G - \mu\circ\det$, 根据**诱导表示特征标公式**,

$$\chi\begin{bmatrix} a & 0\\ 0 & a\end{bmatrix} = q\mu(a)^2,\qquad \chi\begin{bmatrix} a & 1\\ 0 & a\end{bmatrix} = 0,\qquad \chi\begin{bmatrix} a & 0\\ 0 & d\end{bmatrix} = \mu(ad),\qquad \chi\begin{bmatrix} 0 & -a_0\\ 1 & -a_1\end{bmatrix} = -\mu(a_0).$$

一些说明, 因为 $[G:B]=q+1$, 而后注意 B 中这四个矩阵含 $1, q-1, 2q, 0$ 个共轭类. 因此 ψ_μ^G 等于 $[G:B]$ 乘上在 B 中共轭类占全部共轭类的比例乘上行列式. 最后

$$\langle\chi,\chi\rangle = \frac{1}{\#G}\left((q-1)\cdot q^2 + \frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{2}\cdot 1 + \frac{q^2(q-1)^2}{2}\cdot 1\right) = 1.$$

结合 μ 不同时 χ 不同, 由此得到 $q-1$ 个 q 维不可约表示.

第三类特征标

比起第二类, 考虑一般的 $\psi : C_1 \to \mathbb{C}^\times$. 现记 $A = \begin{bmatrix} a & 0\\ 0 & d\end{bmatrix}, A' = w_1 A w_1^{-1} = \begin{bmatrix} d & 0\\ 0 & a\end{bmatrix}$, 考虑 $(w_1\psi)(A) := \psi(w_1 A w_1^{-1}) = \psi(A')$ 是共轭特征标. 若详细写出 $\psi(A) = \psi_1(a)\psi_2(d)$ 则 $(w_1\psi)(A) =$

$\psi_1(d)\psi_2(a)$. 当 $\psi_1=\psi_2$ 时, 相当于作用在行列式上, 这将变成第二类. 于是要求 $w\psi\neq\psi$ 或者说 $\psi_1\neq\psi_2$, 而交换它们即取共轭特征标会诱导出相同的 G 上特征标, 故这一类中我们期待诱导出 $(q-1)(q-2)/2$ 个互不相同的特征标. 考虑 $\chi=\psi^G:=\operatorname{Ind}_B^G\operatorname{Res}_{C_1}^B\psi$.

$$\chi\begin{bmatrix}a&0\\0&a\end{bmatrix}=(q+1)\psi(a),\quad \chi\begin{bmatrix}a&1\\0&a\end{bmatrix}=\psi(a),\quad \chi\begin{bmatrix}a&0\\0&d\end{bmatrix}=\psi(A)+\psi(A'),\quad \chi\begin{bmatrix}0&-a_0\\1&-a_1\end{bmatrix}=0.$$

这和上一类的计算是一样的, 无非注意分裂元会共轭到 A 还是 A', 然后在 χ 和自己做内积的计算中, $|\psi(A)+\psi(A')|^2=2+\psi(A^{-1}A')+\psi(A(A')^{-1})=2+(\psi_1/\psi_2)(d/a)+(\psi_1/\psi_2)(a/d)$, 我们需要对这式子关于全体分裂元 A 求和再乘上每类大小 $q(q+1)$. 简单转化为对 $a\neq d\in\mathbb{F}_q^\times$ 求和再乘上 $q(q+1)/2$. 这样 a/d 取遍 $\mathbb{F}_q^\times\backslash\{1\}$ 恰 $q-1$ 次, 而 $\psi_1/\psi_2,\psi_2/\psi_1$ 非平凡, 因此对 a/d 取遍 $\mathbb{F}_q^\times\backslash\{1\}$ 求和一次得到 $-1,-1$, 而 2 求和了 $(q-1)(q-2)$ 次, 从而计算得到

$$\langle\chi,\chi\rangle=\frac{1}{\#G}\left((q-1)\cdot(q+1)^2+(q+1)(q-1)^2\cdot 1+\frac{(q+1)q}{2}\cdot 2(q-1)(q-3)\right)=1.$$

仍需确认互不相同, 考虑 $\psi'(A)=\psi_3(a)\psi_4(d)$, 下声称 $\psi\neq\psi'$ 限制在 C_1 内积是 0.

$$\begin{aligned}&(\psi(A)+\psi(A'))(\psi'(A^{-1})+\psi'((A')^{-1}))\\=&(\psi_1/\psi_3)(a)(\psi_2/\psi_4)(d)+(\psi_1/\psi_4)(a)(\psi_2/\psi_3)(d)+(\psi_1/\psi_3)(d)(\psi_2/\psi_4)(a)+(\psi_1/\psi_4)(d)(\psi_2/\psi_3)(a).\end{aligned}$$

因为 $\psi_1/\psi_3\neq 1,\psi_2/\psi_4\neq 1$ 至少其一成立, 同理 $\psi_1/\psi_4\neq 1,\psi_2/\psi_3\neq 1$ 也至少其一成立, 于是对 a,d 分别取遍 $\mathbb{F}_q$ 求和得 0. 这样又得到了 $(q-1)(q-2)/2$ 个 $q+1$ 维不可约表示.

第四类特征标

选定非分裂元 X, 记它的特征值 λ,λ', 记 $C_2=C_G(X)$ 以及 $K=\mathbb{F}_{q^2}=\mathbb{F}_q(\lambda)$.

现考虑 $\theta:K^\times\cong C_2\to\mathbb{C}^\times$ 的特征标, 我们同样对 $A\in C_2$ 考虑 $A'=w_2Aw_2^{-1}$ 以及 $(w_2\theta)(A):=\theta(w_2Aw_2^{-1})=\theta(A')$, 于是定义 $\theta^G:=\operatorname{Ind}_{C_2}^G\theta$. 而后再取 $\mu:\mathbb{F}_q^\times\to\mathbb{C}^\times$ 和非平凡 $\lambda:\mathbb{F}_q^+\to\mathbb{C}^\times$. 定义 $(\mu,\lambda):H=\mathbb{F}_q^\times U\to\mathbb{C}$ 为 $(\mu,\lambda)\begin{bmatrix}a&b\\0&a\end{bmatrix}=\mu(a)\lambda(b/a)$. 记 $(\mu,\lambda)^G=\operatorname{Ind}_H^G(\mu,\lambda)$.

$$\chi=\theta^G,\ \chi\begin{bmatrix}a&0\\0&a\end{bmatrix}=(q^2-q)\theta(a),\ \chi\begin{bmatrix}a&1\\0&a\end{bmatrix}=0,\ \chi\begin{bmatrix}a&0\\0&d\end{bmatrix}=0,\ \chi(A)=\theta(A)+\theta(A').$$

$$\chi=(\mu,\lambda)^G,\ \chi\begin{bmatrix}a&0\\0&a\end{bmatrix}=(q^2-1)\mu(a),\ \chi\begin{bmatrix}a&1\\0&a\end{bmatrix}=-\mu(a),\ \chi\begin{bmatrix}a&0\\0&d\end{bmatrix}=0,\ \chi(A)=0.$$

这二者特征标的计算都不困难, 而第二者与非平凡的 λ 的选择无关. 注意它们取值具有相似性, 立刻想到定义 $\chi:=(\operatorname{Res}_{\mathbb{F}_q^\times}^{C_2}\theta,\lambda)^G-\theta^G$. 不难检查 $\theta,w_2\theta$ 诱导相同者. 写出

$$\chi\begin{bmatrix}a&0\\0&a\end{bmatrix}=(q-1)\theta(a),\quad \chi\begin{bmatrix}a&1\\0&a\end{bmatrix}=-\theta(a),\quad \chi\begin{bmatrix}a&0\\0&d\end{bmatrix}=0,\quad \chi(A)=-\theta(A)-\theta(A').$$

这时计算内积, $|\theta(A)+\theta(A')|^2=2+(\theta/w_2\theta)(A)+(w_2\theta/\theta)(A)$. 额外要求 $\theta\neq w_2\theta$, 由此 A 取遍非分裂元后乘上每类大小 $q(q-1)$, 相当于取遍 $\mathbb{F}_{q^2}^\times\backslash\mathbb{F}_q^\times$ 中者乘上 $q(q-1)/2$. 对整个 $\mathbb{F}_{q^2}^\times$ 求和当然是 0, 而每个 $\mathbb{F}_q^\times$ 者是 1, 从而这部分的和是 $2(q^2-q)-2(q-1)$. 故

$$\langle\chi,\chi\rangle=\frac{1}{\#G}\left((q-1)\cdot(q-1)^2+(q+1)(q-1)^2\cdot 1+\frac{q(q-1)}{2}\cdot 2(q-1)^2\right)=1.$$

注意 $\theta\neq w_2\theta$ 当且仅当 $\theta(A^{q-1})\neq 1$ 对某 A, 不满足这个条件的 θ 相当于 $q-1$ 阶循环群的特征, 从而满足条件的特征有 $(q^2-1)-(q-1)=q^2-q$ 个. 而 $\theta,w_2\theta$ 诱导相同者因此还要砍掉一半, 检查不相同也是自然地考虑在 C_2 上限制计算内积为 0.

$$\begin{aligned}&(\theta(A)+w_2\theta(A))(\theta'(A^{-1})+w_2\theta'(A^{-1}))\\=&(\theta/\theta')(A)+(\theta/w_2\theta')(A)+(w_2\theta/\theta')(A)+(w_2\theta/w_2\theta')(A).\end{aligned}$$

从上面看出求和四项都是非平凡特征. 这样又构造 $q(q-1)/2$ 个 $q-1$ 维不可约特征标.

检查已构造所有特征标

现在四类特征标的数量总和为

$$(q-1)+(q-1)+\frac{(q-1)(q-2)}{2}+\frac{q(q-1)}{2},$$

这与共轭类的数量相同. 根据特征标理论我们确实得到了全体不可约表示的特征标.

6.1.3 应用, 和一些茶余饭后的谈资

得到特征标表后最直接的应用是计算所有的正规子群. 假设 N 是正规子群, 考虑 G/N 的正则表示, 通过限制 $G\to G/N$, 可得到 G 的一个核恰为 N 的表示. 利用完全可约性, G 的全体子群一定是若干个 $\operatorname{Ker}\rho$ 的交, 其中 ρ 是不可约表示. 现在注意 $q>3$ 时, 表示的维数会两极分化, 除了一维表示, 就是 $q-1,q,q+1$ 维的表示, 都至少是 3 维的. 而特征标表中, 除了中心元外, 其余元素的特征标绝对值不超过 2, 因此 $\operatorname{Ker}\rho$ 只有两种情况, 要么穿过 $\operatorname{Ker}\det=\mathrm{SL}(2,\mathbb{F}_q)$, 要么含于中心 $\mathbb{F}_q^\times$.

> **推论 6.3.** $q>3$, $\mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_q)$ 的正规子群要么包含 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F}_q)$, 要么含于中心 $\mathbb{F}_q^\times$.

由此得 $q>3$ 时 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{F}_q)$ 是单群. 另外, 我们虽然知道 $\mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_q)$ 的导群是 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F}_q)$, 但是并不知道导群中的每个元素是否都能写成交换子的形式, 而写出特征标表后, 可以证明:

> **命题 6.4.** $q>3$, 子群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{F}_q)$ 的每个元素都形如 $[g,h]=ghg^{-1}h^{-1};g,h\in\mathrm{GL}(2,\mathbb{F}_q)$.

证明. 首先指出元素 $y\in G$ 是交换子当且仅当 $\sum_\chi\chi(y)/\chi(1)\neq 0$, 求和对全体不可约特征标 χ 进行. 这基于如下观察, 幺元示性函数是个类函数, $\mathbf{1}_e(x)=\frac{1}{\#G}\sum_\chi\chi(x)\chi(1)$. 于是 $y\in G$ 是一个

交换子当且仅当 $S=\sum_{g,h\in G}\mathbf{1}_e(ghg^{-1}h^{-1}y)\neq 0$. 设 (ρ,V) 是不可约表示, 计算得

$$f:=\sum_{g\in G}\rho(ghg^{-1}),F:=\sum_{g,h\in G}\rho(ghg^{-1}h^{-1});\ f\cdot\rho(x)=\rho(x)\cdot f,\ F\cdot\rho(x)=\rho(x)\cdot F,\ \forall x\in G.$$

$$\Longrightarrow (\text{Schur 引理, 取迹})\ f=\frac{\chi(h)\#G}{\chi(1)}\mathrm{id}_V\ \Longrightarrow \sum_{g,h\in G}\rho(ghg^{-1}h^{-1})=\frac{\#G^2}{\chi(1)^2}\mathrm{id}_V$$

$$\Longrightarrow \#G\cdot S=\sum_{g,h,\chi}\chi(ghg^{-1}h^{-1}y)\chi(1)=\#G^2\sum_{\chi}\frac{\chi(y)}{\chi(1)}.$$

原题中四类元素, 行列式 1 的有 (1) $\begin{bmatrix}\pm1 & 0\\ 0 & \pm1\end{bmatrix}$, (2) $\begin{bmatrix}\pm1 & 1\\ 0 & \pm1\end{bmatrix}$, (3) $\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{bmatrix}$; $a\in\mathbb{F}_q^\times$,

(4) $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -a_1\end{bmatrix}$, 使 $\lambda^2+a_1\lambda+1\in\mathbb{F}_q[\lambda]$ 不可约.

观察 (2)(3)(4) 元素的特征标, 第一类特征标贡献了至少 $q-1$, 而剩下的三类中, 特征标求和用类似单位根求和的方法, 检查到发生了大量的相消, 经过不需特别仔细的估计, 分别贡献的量不小于 $-(q-1)/q,-(q-1)/(q+1),-(q-1)/(q-1)$, 它们的和不到 -3. 唯一的问题是 (1) 中的 $-I$. 前三类特征标它和 I 的情况一样, 而第四类中它即便全取 -1 求和仍正. □

另外, 我们可以从这个特征标表便捷地得到 $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{F}_q)$ 的表示, 因为是商群, 只需丢掉不穿过核的不可约表示再缩并一些列即可.

一些相关的评注是, 从 2 阶的矩阵群中, 我们能看到一般代数群理论的一些端倪. 一方面我们注意到除了一维的和抛物诱导的, 剩下的 (在这里就是第四类) 也被叫做尖的 (cuspidal). 在更大的情况 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)$ 中体现如下: 抛物诱导将从所谓的 Levi 子群上进行, 容易观察到有自然的对角线嵌入 $\mathrm{GL}(n_1,\mathbb{F}_q)\times\cdots\times\mathrm{GL}(n_k,\mathbb{F}_q)\hookrightarrow\mathrm{GL}(n_1+\cdots+n_k,\mathbb{F}_q)$, 这样确实能归纳地诱导定义出一大类表示, 但最后仍需处理尖的.

实际上这个问题还能从另一个极端考虑, 如果我们形式地让 $q=1$ 会怎么样呢. 答案是 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q)$ 会退化成置换群 S_n, 一些可能不那么使人信服的解释是所谓的 q-模拟, 这其中发生的对应关系是 $\mathbb{F}_q^n$ 的 k 维子空间个数的表达式, 令 $q\to1$ 确实得到 n 元集中 k 元子集的数量. 而且 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{F}_q),S_n$ 确实也分别贡献了两类单群 $\mathrm{PSL}(n,\mathbb{F}_q)(n>2$ 或 $n=2,q>3),A_n(n>4)$. 这些并不是巧合, 除了用大而空的, 目前还完全没建立起确凿理论的一个代数几何奇思妙想 "函数域类比" 来解释, 在这个特殊情况下, 我们是有证据的. 如果读者学过 Young 图的理论, 会发现从子群 $S_{n_1}\times\cdots\times S_{n_k}\subset S_{n_1+\cdots+n_k}(n_1\geq\cdots\geq n_k)$ 的置换表示 (不是正则表示, 另外最好考虑它商掉一维得到的不可约者) 诱导出 S_n 的特征标, 正好对应 $(n_1,\cdots,n_k)$ 的 Young 图带来的不可约表示, 这样一来, 所谓从 Levi 子群诱导的表示, 确实能得到所有的表示.

事情还没有结束, 如果读者仔细看了该笔记先前李代数的部分, 则立刻明白和约化的 $\mathfrak{gl}(n,F)$ 关系最大的是其中的半单部分 $\mathfrak{sl}(n,F)$. 它对应的 Weyl 群正是 S_n, 一个巨大的提示是, 它在单根

间置换, 这体现在我们给定一个 Cartan 子代数后, 它把 Borel 子群共轭到一些奇怪的地方, 实际上对应了取不同子空间顺序构造旗的置换. 至于它们对应的一族有限单群, 也确实按照 Dynkin 图被分为和 $\mathfrak{sl}(n, F)$ 对应的 A_n 类中.

当故事发展到这一步的时候, 在我们面前, 一幅倾墨表示论、有限群论、代数几何、组合数学的宏大画卷正徐徐展开. 待我们手头的工具丰富起来时, 再对这些上好的原料细致琢磨亦不迟.

6.2 土法炼钢的典范：Abhyankar–Moh 定理

这节中, 依照 [29] 的方法, 我们耗费亿点功夫来证明 Abhyankar–Moh 定理.

定理 6.5. *域 $\operatorname{char} k = 0$, 若 $f, g \in k[t] \backslash k$ 使 $k[f, g] = k[t]$. 则 $\deg f, \deg g$ 间有整除关系.*

习题 6.6. 注意 t 在 $A := k[g]$ 上整. 于是 f 在 A 上整, 实际上 $A[f]$ 是自由有限生成 A-模, 一组基为 $1, f, \cdots, f^{N-1}$, 记 $K := \operatorname{Frac} A$, 则 $N := [K(f) : K]$. 只需取 P 是 f 在 K 的最小多项式, 检查 P 的系数都是在 A 上整的, 结合 A 正规得 $P(X) \in A[X]$. （见**引理 2.75**）

当然 $N = 1$ 时 $A[f] = A$ 而显然 $\deg g | \deg f$, 所以设 $N \geq 2$, 对 $0 \leq n \leq N-1$ 记

$$K[f]_n := \sum_{i=0}^{n} K f^i, \qquad K_n := f^n + \sum_{i=0}^{n-1} K f^i;$$

$$A[f]_n := \sum_{i=0}^{n} A f^i, \qquad A_n := f^n + \sum_{i=0}^{n-1} A f^i.$$

那么由先前的练习不难得知 $K_n \cap A[f] = A_n$. 然后我们再引入两个定义

定义 6.7. 若 $h_0, \cdots, h_{N-1}$ 是 $K(f) \subset k(t)$ 的序列, 满足 $h_n \in K_n$ (resp. $h_n \in A_n$) 对 $1 \leq n \leq N-1$. 且 $h_0 = 1$, $\deg h_0, \cdots, \deg h_{N-1}$ 是模 $\deg g$ 两两不同余者, 则称 $h_0, \cdots, h_{N-1}$ 为一个**α 序列** (resp. **β 序列**). 不难验证对 $0 \leq n \leq N-1$,

$$\text{若 } h_0, \cdots, h_{N-1} \text{ 是 } \alpha \text{ 序列, 则 } K[f]_n = \sum_{i=0}^{n} K h_i;$$

$$\text{若 } h_0, \cdots, h_{N-1} \text{ 是 } \beta \text{ 序列, 则 } A[f]_n = \sum_{i=0}^{n} A h_i.$$

习题 6.8. 若非零 $p_1, \cdots, p_m \in k(t)$ 次数模 $\deg g$ 互不相同.
现 $0 \neq w \in \sum K p_i$, 则 $\deg w = \deg g^s p_j$ 对某 $s \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. 若 $w \in \sum A p_i$ 则可要求 $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

定理 6.9. *若 β 序列存在, 则 Abhyankar–Moh 定理成立.*

证明. 记 $d = \gcd(\deg f, \deg g)$, $\deg f = ad$, $\deg g = bd$, $am + bn = 1$, $0 \leq m < b$, (1) 现设 β 序列 $h_0, \cdots, h_{N-1}$. 由前习题不难检查 $k[f, g] = A[f]_{N-1}$, 由于 $t^d \in k[t] = k[f, g]$ 故设 $d = \deg t^d =$

$\deg g^s h_r$ 对某 $s \geq 0, 0 \leq r \leq N-1$, 同样的设 $\deg f^m = \deg g^{s_1} h_{r_1}$, $s_1 \geq 0, 0 \leq r_1 \leq m$. (2) 于是 $\deg g^s h_r \equiv \deg g^{s_1} h_{r_1} [\deg g]$ 得到 $r = r_1 \leq m < b$ 从而 $h_r \in A[f]_{b-1}$, 结合 $1, f, \cdots, f^{b-1}$ 模 $\deg g$ 两两不同, 因此 $\deg h_r = \deg g^q f^i$ 对某 $q \geq 0, 0 \leq i \leq b-1$. 从而 $d = s \deg g + \deg h_r = (s+q)\deg g + i \deg f$, 其中 $s, q, i \geq 0$. 故 $d \geq \min\{\deg f, \deg g\} \geq \gcd(\deg f, \deg g) = d$, 得到 $\min\{\deg f, \deg g\} = \gcd(\deg f, \deg g)$. □

6.2.1 α 序列的存在性

证明 β 序列的存在性绝非易事, 我们将先从 α 序列的存在性开始, 然后逐渐把结果变强. 类似 Gröbner 基讨论时定义的形式正规化, 在这个问题中先给出如下的定义:

设 $S \subset k[t] \backslash \{0\}$ 使其中元素次数互不相同, 记 $\deg S = \{\deg s : s \in S\}$. 对 $0 \neq h \in k[t]$ 使 $\deg h \in \deg S$. 设 $h - as$ 消去首项, $s \in S, a \in k$, 这样 $\deg(h - as) < \deg h$. 于是定义 $R_S : k[t] \to k[t]$, 不断消去首项直至变成 0 或得到次数不在 $\deg S$ 者, 补充定义 $R_S(0) = 0$.

命题 6.10. *存在 α 序列.*

证明. (1) 取 $h_0 := 1$, $h_1 := R_S(f)$, 其中 $S := \{g^m : m \geq 0\}$, 则 $h_1 \in A[f]_1 \backslash A[f]_0$ 否则 $f \in A$. 假设 $h_0, \cdots, h_n$ 已构造好, 记 $S_0 := \{h_r g^i : 0 \leq r \leq n, i \geq 0\}$, 定义 $y_0 := R_{S_0}(f^{n+1})$, 取 $S_1 := \{y_0\} \cup S_0$, 再取 $y_1 := R_{S_1}(g f^{n+1})$, 从而 $y_1 \in (g+k) f^{n+1} + A[f]_n$, 现在 $y_1 \neq 0, \deg y_1 \notin \deg S_1$. 归纳地 $y_i = R_{S_i}(g^i f^{n+1})$, $S_i := S_{i-1} \cup \{y_{i-1}\}$, 这样得到一列 $y_i \in (g^i + k g^{i-1} + \cdots + k) f^{n+1} + A[f]_n$, $y_i \in A[f]_{n+1} \backslash A[f]_n$.

(2) 下证明存在 $\deg y_j$ 与 $\deg h_0, \cdots, \deg h_n$ 模 $\deg g$ 互不相同. 若不然设 $0 \leq s \leq n$ 使 $\deg y_j \equiv \deg h_s [\deg g]$ 对无穷多 j 成立. 记 $\deg y_j + p_j \deg g = \deg h_s$ 倘若某 $p_j \leq 0$ 则 $\deg y_j \in \deg S_0$ 矛盾, 因此 $p_j \geq 0$ 从而 $\deg y_j < \deg h_s$ 但它们次数互不相同而与无穷性矛盾. 因此取 h_{n+1} 为某个取新余数的 y_j. 取 h_n' 为 h_n 除掉 f^n 的系数, 得 α 序列 h_i'. □

设 $h_0, \cdots, h_{N-1}$ 是如上构造的 α 序列, 设 $K[f]_n$ 中非零元次数在 $\mathbb{Z}$ 生成理想 G_n, 熟知 $G_n = (\deg g, \deg h_1, \cdots, \deg h_n)$, 于是 $G_0 \subset \cdots \subset G_{N-1}$, 假设 $G_0 \subsetneq G_{c(1)} \subsetneq \cdots \subsetneq G_{c(p)}$, 其中 $c(i)$ 为序列中第一次发生真包含者, 补充定义 $c(p+1) = N$. 从构造看出 $c(1) = 1$. 更进一步地, 记 $D_j := (\deg g, \deg h_1, \cdots, \deg h_{c(j)})$, 注意 $\deg h_{c(s)} \notin D_{s-1}$, 用 e_s 记最小的正整数 n 使 $n \deg h_{c(s)} \in D_{s-1}$, 故 $e_s \geq 2$ 对一切 s. 接下来这个推论对改进 α 序列是重要的.

命题 6.11. *对 $1 \leq s \leq p$ 有 $e_s c(s) = c(s+1)$.*

为此先看几个结果, 记 $B_s := \{h_n h_{c(s)}^j : 0 \leq n < c(s), 0 \leq j < e_s\}$.

习题 6.12. (1) B_s 中者的次数模 $\deg g$ 互不相同. 考虑 $\deg h_n h_{c(s)}^j \equiv \deg h_m h_{c(s)}^i [\deg g]$, 倘若 $i = j$ 则由 α 序列定义得 $m = n$, 不然设 $i > j$, $(i-j)\deg h_{c(s)} \in D_{s-1}$, 但 $0 < i-j < e_s$ 与 e_s 的最小性矛盾. (2) B_s 是 $K[f]_{e_s c(s)-1}$ 的一组 K-基, 于是 $e_s c(s) \leq N$.

推论 6.13. (1) 对 $1 \leq s \leq p$, 有 $e_s c(s) \leq c(s+1)$. (2) 记 $B_0 := \{1\}$. 对 $0 \leq s \leq p$, 若 $w \in D_s$ 则 $w \equiv \deg b [\deg g]$ 对某 $b \in B_s$.

证明. (1) 只看 $s < p$, 须证 $m < e_s c(s)$ 则 $\deg h_m \in D_s$. 此时 $h_m \in K[f]_{e_s c(s)-1}$ 所以由诸习题 $\deg h_m = \deg g^i b = i \deg g + \deg b$ 对某 $i \in \mathbb{Z}, b \in B_s$, 易知 $\deg b \in D_s$, 故得.
(2) 对 s 归纳, $s = 0$ 显然. 由于 $D_{s+1} = D_s + (\deg h_{c(s+1)})$, 于是 $w \in D_{s+1}$ 总能写成 $w' + m \deg h_{c(s+1)}, w' \in D_s$, 不妨设 $0 \leq m < e_{s+1}$. 由归纳假设记 $w' \equiv \deg b' [\deg g], b' \in B_s$. 于是

$$b' \in B_s \subset K[f]_{e_s c(s)-1} \subset K[f]_{c(s+1)-1}.$$

所以 $\deg b' \equiv \deg h_r [\deg g]$ 对某 $0 \leq r < c(s+1)$, 从而令 $b = h_r h_{c(s+1)}^m \in B_{s+1}$ 即得. □

$e_s c(s) = c(s+1)$ 的证明. 记 $n := e_s c(s)$, 现在 $n \leq N$. 先看 $n = N$, 若 $s < p$ 则 $N = e_s c(s) \leq c(s+1) \leq c(p) \leq N-1$ 矛盾. 接下来只需证明 $n < N$ 时 $\deg h_n \notin D_s$. 若不然 $\deg h_n \in D_s$ 由先前推论 $\deg h_n \equiv \deg b [\deg g]$ 对某 $b \in B_s$, 结合 $B_s \subset K[f]_{e_s c(s)-1} = \sum_{i=0}^{n-1} K h_i$ 从而 $\deg b \equiv \deg h_j [\deg g]$ 对某 $0 \leq j < n$, 故 $\deg h_n \equiv \deg h_j [\deg g]$ 而与 α 序列的定义矛盾. □

推论 6.14. 归纳可证, 对 $1 \leq s \leq p$ 有 $c(s+1) = e_1 \cdots e_s$.

现在 B_s 是 $K[f]_{c(s+1)-1}$ 的一组 K-基, 所以任意 $w \in K[f]_{c(s+1)-1}$ 总能被唯一写成 $w_1 h_{c(s)}^{e_s - 1} + \cdots + w_{e_s - 1} h_{c(s)} + w_{e_s}$, 其中 $w_i \in K h_0 + \cdots + K h_{c(s)-1} = K[f]_{c(s)-1}$.

定理 6.15. 若存在 α 序列 $h_0, \cdots, h_{N-1}$ 使 $h_{c(s)} \in A_{c(s)}$ 对一切 s, 则 β 序列存在.

证明. 设 $H' := \{h_{c(1)}^{j_1} \cdots h_{c(p)}^{j_p} : 0 \leq j_s < e_s \text{ 对 } 1 \leq s \leq p\}$, 易知 $h_{c(1)}^{j_1} \cdots h_{c(p)}^{j_p} \in A_{j_1 c(1) + \cdots + j_p c(p)}$. 为证明 H' 是 β 序列, 需 H' 中者的次数模 $\deg g$ 互不相同及 $J := \{j_1 c(1) + \cdots + j_p c(p) : 0 \leq j_s < e_s \text{ 对 } 1 \leq s \leq p\} = \{0, 1, \cdots, N-1\}$, 前者只需 $c(s)$ 的定义而后者由前一推论显然. □

6.2.2 α 序列的改进

现在我们迫切地希望 $h_{c(s)} \in A_{c(s)}$, 为此考虑使用特征 0 的条件:

习题 6.16. 设环的包含关系 $\mathbb{Q} \subset R \subset S$. 设 $P = X^n + p_{n-1} X^{n-1} + \cdots + p_0 \in S[X]$, $n \geq 1$. 对 $e \geq 1$, 展开 $P^e = X^{ne} + s_{ne-1} X^{ne-1} + \cdots + s_0$. 若 $s_{ne-1}, s_{ne-2}, \cdots, s_{ne-n} \in R$ 则 $P \in R[X]$. 证明不难, 只需归纳地检查 $p_{n-1}, \cdots, p_0$ 能写成 $s_{ne-1}, s_{ne-2}, \cdots, s_{ne-n}$ 的多项式即可.

推论 6.17. 若 $1, h_1, \cdots, h_{N-1}$ 是 α 序列, 且 $h_{c(s)}^{e_s} - h_{c(s+1)} \in K[f]_{c(s)e_s - c(s)-1}$ 对一切 $1 \le s \le p$, 其中 $h_{c(p+1)} := 0$, 那么 $h_{c(s)} \in A_{c(s)}$ 对一切 $1 \le s \le p$.

证明. 对 $p-s$ 归纳, $p = s$ 时取 $n := c(p), e := e_p$ 以及 $P(f) := h_{c(p)}, R := A, S := K$. 现在 $0 = h_{c(p+1)} = f^N + \sum_{i=0}^{N-1} a_i f^i =: T(f), a_i \in A, T(X) \in A[X]$. 于是 $(P^e - T)(f) \in K[f]_{c(p)e_p - c(p)-1}$ 得 $ne-1, \cdots, ne-n$ 次者系数为 0 从而由前习题得 $h_{c(p)} = P(f) \in A[f] \cap K_{c(p)} = A_{c(p)}$. 然后对 $1 \le s \le p-1$ 类似. □

命题 6.18. 设 $1, h_1, \cdots, h_{N-1}$ 是 α 序列, 记 $h_N := 0$, 取 $1 \le s \le p$.

(1) 存在唯一 $w_1, \cdots, w_{e_s} \in K[f]_{c(s)-1}$ 使 $h_{c(s)}^{e_s} - h_{c(s+1)} = w_1 h_{c(s)}^{e_s - 1} + \cdots + w_{e_s-1} h_{c(s)} + w_{e_s}$.

(2) $\deg w_1 < \deg h_{c(s)}$.

证明. 记 $v = h_{c(s)}^{e_s} - h_{c(s+1)}$, 只需检查 $v \in K[f]_{c(s+1)-1}$ 然后利用前面 B_s 是 K-基的描述即得 (1). (2) 的处理较为具体, 设 $B_s = \{b_1, \cdots, b_r\}$ 及 $v = \sum a_i b_i$, 显见 $w_1 h_{c(s)}^{e_s-1} = \sum a_j b_j$, 诸 b_j 形如 $h_n h_{c(s)}^{e_s-1}$ 对某 $0 \le n < c(s)$ 且诸 $\deg b_j \notin D_{s-1}$, 否则与 e_s 的最小性矛盾.

现在我们声称若 $\deg b_j \notin D_{s-1}$ 则 $\deg a_j b_j < e_s \deg h_{c(s)}$, 这将推出 $\deg w_1 + (e_s - 1)\deg h_{c(s)} < e_s \deg h_{c(s)}$ 从而 $\deg w_1 < \deg h_{c(s)}$. 因为 B_s 者次数模 $\deg g$ 互不相同, 故设 $\deg v = \deg a_q b_q$ 且 $\deg v > \deg a_i b_i$ 对 $i \ne q$, 于是 $\deg v = \deg a_q + \deg b_q \in D_s$, 且 $\deg h_{c(s)}^{e_s} \in D_s, \deg h_{c(s+1)} \notin D_s$. 于是由 $v = h_{c(s)}^{e_s} - h_{c(s+1)}$ 得知 $\deg h_{c(s+1)} < \deg h_{c(s)}^{e_s} = \deg v$. 所以 $\deg a_i b_i < \deg a_q b_q = e_s \deg h_{c(s)}$ 对 $i \ne q$. 现利用 $\deg b_j \notin D_{s-1}, \deg b_q = \deg a_q b_q - \deg a_q \in D_{s-1}$ 故 $j \ne q$. □

于是我们把 α 序列 $H := (1, h_1, \cdots, h_{N-1})$ 按上述命题确认的和 s 有关的 w_1 记作 $w(H, s)$, 如果 $w(H, s) = 0$ 则立刻得出 $h_{c(s)}^{e_s} - h_{c(s+1)} \in K[f]_{c(s)e_s - c(s)-1}$, 从而原定理得证. 于是立刻想到定义 $\overline{h}_n := h_n$ 对 $n \ne c(s)$ 对一个给定的 s 以及 $\overline{h}_{c(s)} := h_{c(s)} - w(H, s)/e_s$.

习题 6.19. 检查 $\overline{H} := (1, \overline{h}_1, \cdots, \overline{h}_{N-1})$ 是 α 序列, 只需注意 $\deg w(H, s) < \deg h_{c(s)}$.

引理 6.20. 设 $1 \le s \le p$, $u := a_2 h_{c(s)}^{e_s-2} + \cdots + a_{e_s}$, $a_i \in K[f]_{c(s)-1}$. 则存在唯一 $\overline{a}_2, \cdots, \overline{a}_{e_s} \in K[f]_{c(s)-1}$ 使 $u = \overline{a}_2 \overline{h}_{c(s)}^{e_s-2} + \cdots + \overline{a}_{e_s}$.

证明. 存在唯一 $\overline{a}_1, \cdots, \overline{a}_{e_s} \in K[f]_{c(s)-1}$ 使 $u = \overline{a}_1 \overline{h}_{c(s)}^{e_s-1} + \cdots + \overline{a}_{e_s}$ 故只需证 $\overline{a}_1 = 0$. 若不然记 $K[f]_{-1} := 0$ 则 $\overline{a}_1 \in K[f]_n \backslash K[f]_{n-1}$ 对某 $0 \le n < c(s)$, 再记 $V := K[f]_{n+(e_s-1)c(s)-1}$, 则 $\overline{a}_1 \overline{h}_{c(s)}^{e_s-1} \in K[f]_{n+(e_s-1)c(s)} \backslash V$. 记 $\overline{u} = \overline{a}_2 \overline{h}_{c(s)}^{e_s-2} + \cdots + \overline{a}_{e_s} \in K[f]_{(e_s-1)c(s)-1} \subset V$, 由定义 $\overline{a}_1 \overline{h}_{c(s)}^{e_s-1} = u - \overline{u} \notin V$ 以及 $u - \overline{u} \in V$ 得到矛盾. □

命题 6.21. 设 H 是 α 序列, $1 \le s \le p$, 假设 $w(H,s) \neq 0$.
(1) 若 $w(H,s) \in K[f]_0 = K$ 则 $w(\overline{H},s) = 0$. (2) 若 $w(H,s) \in K[f]_j \backslash K[f]_{j-1}$ 对某 $1 \le j < c(s)$, 则 $w(\overline{H},s) \in K[f]_i$ 对某 $i < j$.

证明. 现在 $\overline{h}_{c(s)}^{e(s)} - \overline{h}_{c(s+1)} = (h_{c(s)}^{e_s} - \overline{h}_{c(s+1)}) - w(H,s)h_{c(s)}^{e_s-1} + R = \sum_{i=2}^{e} w_i h_{c(s)}^{e_s-i} + R$, 其中 $R = \sum_{r=0}^{e_s-2}\binom{e_s}{r}h_{c(s)}^r(-w(H,s)/e_s)^{e_s-r}$. 于是由前一引理, 存在唯一 $\overline{a}_2,\cdots,\overline{a}_{e_s} \in K[f]_{c(s)-1}$ 使 $\overline{h}_{c(s)}^{e(s)} - \overline{h}_{c(s+1)} = \overline{a}_2\overline{h}_{c(s)}^{e_s-2} + \cdots + \overline{a}_{e_s} + R$.
下面研究 R, 设 $w(H,s) \in K[f]_j$ 对某 $0 \le j < c(s)$, 那么对 $0 \le r \le e_s - 2$ 有 $h_{c(s)}^r w(H,s)^{e_s-r} \in K[f]_{rc(s)+j(e_s-r)}$, 不难检查 $rc(s) + j(e_s - r) \le (e_s - 1)c(s) + j - 1$, 从而 $h_{c(s)}^r w(H,s)^{e_s-r} \in K[f]_{(e_s-1)c(s)+j-1} \subset K[f]_{c(s+1)-1}$. 于是存在 $z_1,\cdots,z_{e_s} \in K[f]_{c(s)-1}$ 使 $R = z_1\overline{h}_{c(s)}^{e_s-1} + \cdots + z_{e_s}$. 从定义知 $w(\overline{H},s) = z_1$ 以及 $z_2\overline{h}_{c(s)}^{e_s-2} + \cdots + z_{e_s} \in K[f]_{(e_s-1)c(s)-1}$, 由此立刻得出 $w(\overline{H},s)\overline{h}_{c(s)}^{e_s-1} \in K[f]_{(e_s-1)c(s)+j-1}$. 现在我们准备好证明 (1) 和 (2) 了. 假设 $w(\overline{H},s) \neq 0$ 则设 $w(\overline{H},s) \in K[f]_i \backslash K[f]_{i-1}$, 于是 $w(\overline{H},s)\overline{h}_{c(s)}^{e_s-1} \in K[f]_{(e_s-1)c(s)+i} \backslash K[f]_{(e_s-1)c(s)+i-1}$, 故非零时 $i \le j - 1$. □

推论 6.22. 存在一个 α 序列 H 使 $w(H,s) = 0$ 对全体 $1 \le s \le p$.

证明. 首先对 $s = p$ 反复使用上述命题得 α 序列 H' 使 $w(H',p) = 0$, 紧接着对 $s = p - 1$ 反复使用命题得到 H'' 使 $w(H'',p) = w(H'',p-1) = 0$, 如此递减 s, 因每次只改变 $h_{c(s)}$ 故已调好的 $w(H,s)$ 不再动. □

至此我们完成了 Abhyankar–Moh 定理的证明.

6.2.3 应用, 漫谈 Abhyankar–Moh 定理和代数几何

当然第一个要说明的事实是, 定理条件的 $\operatorname{char} k = 0$ 是重要的, 检查特征 p 时, $k[t^{p^2}, t^{p(p+1)} + t] = k[t]$ 而没有次数整除关系. 第二个也很容易发现的事实是, 我们立刻得到了一个算法, 用于检查 $k[f,g]$ 什么时候等于 $k[t]$, 倘若某时刻次数没有整除关系了, 铁定失败, 否则用低次者的某个幂次消掉高次者的首项, 即可归纳. 类似的事实用代数的语言可如此叙述:

定理 6.23. 域 $\operatorname{char} k = 0$, 对 $\mathbb{A}_k^1 \to \mathbb{A}_k^2$ 的任何闭浸入都在差 $\mathbb{A}_k^2$ 的一个自同构下相同.

证明. 由**命题 3.41**, 仿射概形间 $\operatorname{Spec} R \to \operatorname{Spec} S$ 是闭浸入当且仅当 R 同构于 S 的一个商环. 即 $k[X,Y] \to k[t]$ 是满射, 于是次数具有整除关系, 从而不断作 $(X,Y) \mapsto (X, Y - cX^n)$ 或线性变换这样的自同构可使得最后变成标准嵌入 $X = t, Y = 0$. □

实际上我们稍微用点心, 就能弄明白 $\mathbb{A}_k^2$ 的自同构群. 定义 $\operatorname{Aff}(k,n)$ 指 k^n 上全体可逆线性者加常数得到的变换群. 而记 $J(k,n)$ 记全体 $(X_1,\cdots,X_n) \mapsto (a_1X_1 + f_1(X_2,\cdots,X_n), a_2X_2 +$

$f_2(X_3,\cdots,X_n),\cdots+a_nX_n+f_n)$ 者, 其中 $a_i\in k^\times$. 首先记 $B_n=\mathrm{Aff}(k,n)\cap J(k,n)$, 于是我们能定义一个群自由积 $T(k,2)=\mathrm{Aff}(k,n)*_{B_n}J(k,n)$.

定理 6.24. 域 $\mathrm{char}\,k=0$, 则 $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}_k^2)=T(k,2)$.

证明. 首先, $T(k,2)$ 能在 $\mathbb{A}_k^2$ 上自同构作用, 我们须证明对非平凡的 $T(k,2)$ 中元素, 它非平凡作用. 注意 $g\in T(k,2)$ 能被唯一写成 $g=h_0k_1h_1\cdots k_\ell h_\ell$, 其中 $h_i\in\mathrm{Aff}(k,2),k_i\in J(k,2)$ 且除两头外的项不位于 B_n. 归纳检查作用 $k_1h_2\cdots k_\ell h_\ell$ 使两个分量的次数为 $\deg k_1\cdots\deg k_\ell$ 与 $\deg k_2\cdots\deg k_\ell$ 从而非平凡. 故只需检查任何自同构都形如 $T(k,2)$ 者, 为此对 $(F_1,F_2)\in\mathrm{Aut}\,k[X,Y]$, 依 $\deg F_1+\deg F_2$ 归纳. 奠基 2 的情形显然. 一般情况下作线性变换使 $\deg F_i=\deg_X F_i(X,0)$ 对 $i=1,2$, 注意到 $k[F_1(X,0),F_2(X,0)]=k[X]$, 我们声称作 $(X,Y)\mapsto(X,Y-cX^n)$ 者使两多项式的次数和变得更小. 实际上只要说明最高次齐次项差一个幂次线性关系.
首先注意 Jacobi 行列式作为多项式 $J(F_1,F_2)\in k^\times$, 这是链式法则的直接推论, 于是对 F_1,F_2 的最高次齐次项 h_1,h_2 总有 $J(h_1,h_2)=0$. 于是结合它们的次数具有整除关系, 设 $d=\deg h_1/\deg h_2$ 则 h_1,h_2^d 只差一个常数. 容易检查次数相同的 $J(h_1,h_2^d)=0$,
基变换到代数闭包后 $\det\begin{bmatrix}\sum\frac{1}{X-\alpha_iY} & \sum\frac{1}{X-\beta_iY}\\ \sum\frac{\alpha_i}{X-\alpha_iY} & \sum\frac{\beta_i}{X-\beta_iY}\end{bmatrix}=0$ 从而第一行的 X 倍减第二行的 Y 倍, 从而 $\sum\frac{1}{X-\alpha_iY}=\sum\frac{1}{X-\beta_iY}$, 得两多项式的根一致. 故 $(X,Y)\mapsto(X,Y-cX^n)$ 消去最高次齐次者. □

于是根据 Kurosh 子群定理 (或者见习题关于树的部分), 我们有立刻的推论:

推论 6.25. 域 $\mathrm{char}\,k=0$, 设 $g\in\mathrm{Aut}(\mathbb{A}_k^2)$ 是有限阶元, 则存在 $\varphi\in\mathrm{Aut}(\mathbb{A}_k^2)$ 使 $\varphi^{-1}g\varphi\in\mathrm{Aff}(k,2)$ 是有限阶元. 这是因为 $J(k,2)$ 中元素 g 的阶如果是有限的, 通过调整 Y 的不动点, 可共轭为 $(\zeta X+f(Y),\omega Y)$, 其中 ζ,ω 是单位根. 现在 $\sum\zeta^{-n}f(\omega^nY)=0$, 这等价于使 $\zeta=\omega^m$ 的那些 m 对应 f 的 Y^m 系数为 0. 而我们考虑用 $(X+F(Y),Y)$ 来共轭而消掉 f, 即需 $\zeta F(Y)-F(\omega Y)+f(Y)=0$, 容易看出 $\zeta\neq\omega^m$ 的 m 对应 F 的 Y^m 系数非 0.

特别的, 研究阶为 2 的元素可以帮我们处理一些特殊问题.

推论 6.26. 若 Y 是 k-概形, 使得 $Y\times_k\mathbb{A}_k^1=\mathbb{A}_k^2$, 则 $Y\cong\mathbb{A}_k^1$.

证明. 考虑 $Y\times_k\mathbb{A}_k^1$ 中 $\mathbb{A}_k^1$ 的自同构 $k[t]\to k[t],t\mapsto -t$. 这样将得到 $\mathbb{A}_k^2$ 的阶 2 的 k-自同构, 根据前一推论, 可在自同构共轭下变成仿射的, 于是不动点恰为 $\mathbb{A}_k^d$, 只需检查取不动点和纤维积可交换, 而这是标准的. □

6.3 Skolem-Mahler-Lech 定理和奇妙的算术动力系统

6.3.1 线性递推

作为引入, 本小节我们先研究一个看似可以出现在高中数学竞赛的问题.

定理 6.27 (Skolem-Mahler-Lech). 考虑 $\operatorname{char} K = 0$ 域取值和系数的线性递推序列, 即存在一个正整数 $k, c_1, \cdots, c_k \in K$ 和序列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \subset K$ 使 $n \geq k$ 时总有 $a_n = c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k}$. 那么 $\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : a_n = 0\}$ 总形如

$$\bigcup_{i=1}^{m} \{j_i + r_i q : q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}; j_i, r_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

换言之, 线性递推的零点集总是有限个等差数列 (单个点被视作公差 0) 的并.

不过在考虑它之前, 先观察如下一个结果. 读者需要对 p-进分析有一些基本认知.

定理 6.28 (Strassmann). 考虑 K 是 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张, $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \in K[\![X]\!]$ 在任意 $X \in \mathcal{O}_K$ 处收敛, 不难检查这等价于 K 中 $a_n \to 0$. 我们定义 $N(f)$ 为 $|a_N|_p$ 最后一次出现 $\{|a_n|_p\}_n$ 中的最大值时的 N. 那么若 f 不恒为 0, 则它在 $\mathcal{O}_K$ 中的零点数量至多为 $N(f)$.

证明. 对 $N(f)$ 归纳证明. 首先 $N(f) = 0$ 时 $|f(X)|_p = |a_0 + \sum_{n>0} a_n X^n|_p = |a_0|_p > 0$, 奠基可得. 现在考虑一般的 $N(f) =: N$, 若没有根则结论显然, 否则设 $\alpha \in \mathcal{O}_K$ 为根, 记 $f(x) = g(x)(x - \alpha)$, 一方面 $g \in K[\![X]\!]$ 良定且也在全体 $\mathcal{O}_K$ 处收敛 (解析性, 在 α 处 Taylor 展开), 另一方面设 $g = \sum_{n\geq 0} b_n X^n$, 我们声称 $N(g) = N - 1$. 为此只需检查

$$|b_n|_p \leq |b_{N-1}|_p, \forall n;\ \ |b_n|_p < |b_{N-1}|_p, n \geq N.$$

只需注意按照 $(X - \alpha)\sum_{n\geq 0} b_n X^n = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ 展开得:

$$b_n = a_{n+1} + b_{n+1}\alpha = a_{n+1} + a_{n+2}\alpha + b_{n+2}\alpha^2 = \sum_{k=1}^{m} a_{n+k}\alpha^{k-1} + b_{n+m}\alpha^{m-1}.$$

故对任意 n, $|b_n|_p \leq \max_{k\geq 1} |a_{n+k}|_p \leq |a_N|_p$ 且 $n \geq N$ 时不等号严格; $|b_{N-1}|_p = |a_N|_p$. □

这给我一些解决原问题的启示, 最关键的一点是很多在的欧氏拓扑下无法解决的问题, 应在 p-进拓扑中研究. 首先线性递推计算只涉及有限个元素, 根据递推数列的结论, 可设 $a_n = f_1(n)\alpha_1^n + \cdots + f_m(n)\alpha_m^n$, 考虑把递推多项式的特征值增加到域中可设 $f_i \in K[X], \alpha_i \in K$. 于是利用 $\operatorname{char} K = 0$, 只需研究 $K/\mathbb{Q}$ 是有限生成扩张, 然后考虑如下的引理:

引理 6.29 (Lech). 设 $K/\mathbb{Q}$ 是有限生成扩域, $\mathcal{S} \subset K$ 是有限子集. 那么存在一个 p 使得 K 可以嵌入 $\mathbb{Q}_p$ 并且全体 $\mathcal{S}$ 元素都落到 $\mathbb{Z}_p$.

证明. 平移一个整数不妨设 $0 \notin \mathcal{S}$, 由单生成记 $K = \mathbb{Q}(T_1, \cdots, T_d)(\theta)$ 其中诸 T_i 在 $\mathbb{Q}$ 代数无关而 θ 在 $\mathbb{Q}(T_1, \cdots, T_d)$ 上代数. 设 $f(T_1, \cdots, T_d; X) \in \mathbb{Z}[T_1, \cdots, T_d][X]$ 是 θ 的极小多

项式. 用 $\Delta(T_1,\cdots,T_d)\in\mathbb{Z}[T_1,\cdots,T_d]$ 记 f 关于 X 的判别式, 对每个 $s\in\mathcal{S}$ 设 $g_s(x)\in\mathbb{Q}(T_1,\cdots,T_d)[X]$ 使 $g_s(\theta)=s$, 设 $B_s(T_1,\cdots,T_d)\in\mathbb{Z}[T_1,\cdots,T_d]$ 使 $B_sg_s\in\mathbb{Z}[T_1,\cdots,T_d][X]$, 记 $A_s=\mathrm{Res}_X(f,B_sg_s)$ 为 f,B_sg_s 的结式, 这样取是为了让下面证明中的某些分母非 0.

现选整数 $a_1,\cdots,a_d$ 使代入 $T_1,\cdots,T_d$ 后 $\Delta,B_s,A_s\neq 0$, $f(x)$ 是非常值的多项式. 于是根据 **Chebotarev 密度定理**, 存在素数 p 使得 Δ,A_s,B_s 模 p 不同余 0 且 $f(x)$ 模 p 有根. 这样取 $\mu_1,\cdots,\mu_d$ 为 $\mathbb{Z}_p$ 中的 $\mathbb{Q}$ 上代数无关的元素 (因为 $\mathbb{Z}_p$ 不可数所以这总能做到), $\Delta\not\equiv 0\bmod p$ 以及 $f(x)\equiv 0\bmod p$ 有解结合 **Hensel 引理**得 $f(a_1+p\mu_1,\cdots,a_d+p\mu_d;x)$ 有解 $\tilde{\theta}$. 然后不难检查 A_s,B_s 的条件推出 $T_i\mapsto a_i+p\mu_i,\theta\mapsto\tilde{\theta}$ 能得到我们所需的一切. □

注 6.30. 实际上我们可以用 $\mathbb{Q}_p$ 的一个有限扩张代替 $\mathbb{Q}_p$ 来避开 **Chebotarev 密度定理**, 这样带来的麻烦（其实并不是很大的麻烦）是需要对下面的定理证明做一些小调整.

现在回到定理证明, 根据前文讨论, 可设 $a_n=f_1(n)\alpha_1^n+\cdots+f_m(n)\alpha_m^n$ 中的 $\alpha_i\in Z_p^\times,f_i\in Z_p[X]$ (即我们考虑 $\mathcal{S}$ 取作 α_i,α_i^{-1} 和全体 f_i 系数构成的集合). 我们企图在 $n\in\mathbb{Z}_p$ 范围内解该方程, 准确地说, 由 Fermat 小定理 $|\alpha_i^{p-1}-1|_p\leq 1/p$ 于是 $|\log(\alpha_i^{p-1})|_p<p^{-1}$. 这样 $\exp(n\log(\alpha_i^{p-1}))=\alpha_i^{(p-1)n}$ 对一切 $n\in\mathbb{Z}_p$. 于是考虑 $a_{(p-1)n},\cdots,a_{(p-1)n+(p-2)}$ 这样 $p-1$ 个序列, 根据 **Strassmann 定理**每个序列要么恒 0, 要么只有有限多 $n\in\mathbb{Z}_p$ 的解, 结论得证.

实际上 **Strassmann 定理**还有一些非常具体的应用, 因为我们常常能利用它精确计算出零点的数量. 例如递推数列 $a_m=2a_{m-1}-3a_{m-2},a_0=a_1=1$, 它仅在 $m=0,1,2,5$ 时取到 ±1, 这一点可以在 $\mathbb{Q}_{11}$ 中讨论得到. 作为推论 $3^m=1+2x^2$ 的整数解只有 $(0,0),(1,\pm1),(2,\pm2),(5,\pm11)$. 只需在 $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ 中观察即可.

6.3.2 代数推广

这一小节来自 [33].

然而我们对 **Skolem-Mahler-Lech 定理**还是不很满意, 因为在更加现实的问题中, 我们不只关心线性的递推序列, 还关心更高次数者, 如何用更加代数的语言来刻画数列递推呢? 注意线性递推 $\{a_n\}$ 从初值后一项开始总能写作 $a_i=v^{\mathrm{T}}M^iw$ 的形式, 其中 M 是可逆矩阵. 因此 M 左乘是 $\mathbb{A}_K^n$ 上的一个线性自同构, 记之为 σ, 而 $W=\{x:v^{\mathrm{T}}x=0\}$ 是一个闭线性子空间, 于是要研究的集合变成了 $\{m:\sigma^m(w)\in W\}$. 第一个目标是:

> **定理 6.31.** 设 K 是特征 0 的域, $\mathfrak{q}\in\mathbb{A}_K^n$ 为一 K-点. 设 $\sigma\in\mathrm{Aut}_{\mathsf{Sch}}\,\mathbb{A}_K^n$, X 是 $\mathbb{A}_K^n$ 的一个闭子簇, 则 $\{m\in\mathbb{Z}:\sigma^m(\mathfrak{q})\in X\}$ 是有限个等差数列的并.

首先我们对记号做一点说明. 该定理的证明中, 对 $f,g\in\mathbb{Z}_p[X_1,\cdots,X_n]$ 我们用 $f\equiv g\bmod p$ 指 f,g 在任意 $\mathbb{Z}_p^n$ 点上取值的差都位于 $p\mathbb{Z}_p$ 中, 若对其他对象用此记号则表示每个分量都如此. 例

如 $x^p - x \equiv 0 \bmod p$ 成立.

引理 6.32. 设 $\sigma = (F_1, \cdots, F_n) : \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}_p} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}_p}$ 为多项式环满射, 用 J 表示映射的 *Jacobi* 矩阵. 若 $\det J(\sigma) \in \mathbb{Z}_p^\times$, 那么存在正整数 j 使 σ^j 满足 $\sigma^j \equiv \mathrm{id}_{A^n_{\mathbb{Z}_p}}, J(\sigma^j) \equiv \mathrm{id}_{n\times n} \bmod p$.

证明. 显然 σ 将 $\mathbb{Z}_p^n$ 中相差在 $(p\mathbb{Z}_p)^n$ 的两个点映为相差 $(p\mathbb{Z}_p)^n$ 的两个点, 于是 σ 诱导了 $\mathbb{F}_p^n \to \mathbb{F}_p^n$. 总存在正整数 $k > l > 0$ 使 $\sigma^k \equiv \sigma^l \bmod p$, 我们声称 $\tau = \sigma^{k-l}$ 符合 $\tau \equiv \mathrm{id}_{A^n_{\mathbb{Z}_p}} \bmod p$, 这依赖于 σ^l 是多项式环的满射, 进而是 $\mathbb{Z}_p^n, \mathbb{F}_p^n$ 到自身的点满射.
记 $m = \#\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$, 我们证明 $\tau^m = \sigma^{m(k-l)}$ 符合条件, 只需注意对一切 K-点 $\mathfrak{s}$, $J(\tau^m)|_{\mathfrak{s}} = J(\tau)|_{\tau^{m-1}\mathfrak{s}} \cdots J(\tau)|_{\tau\mathfrak{s}} J(\tau)|_{\mathfrak{s}} \equiv (J(\tau)|_{\mathfrak{s}})^m \equiv \mathrm{id}_{n\times n} \bmod p\mathbb{Z}_p$, 注意一个 Jacobi 矩阵在 $\mathfrak{s}$ 的取值指把未定元代入该点得到的矩阵. □

引理 6.33. 设 $N \geq 1$ 是自然数, 我们考虑如下两个集合:

$$S_N := \left\{ c + \sum_{i=1}^{N} p^i h_i(z) : c \in \mathbb{Z}_p, h_i \in \mathcal{R}, \deg(h_i) \leq 2i - 1 \right\},$$
$$T_N := S_N + \left\{ \sum_{i=1}^{M} p^i h_i(z) : M \in \mathbb{Z}_+, h_i \in \mathcal{R}, \deg(h_i) \leq 2i - 2 \right\}.$$

其中 $\mathcal{R} := \mathrm{span}_{\mathbb{Z}_p}\{\binom{z}{k}\} \subset \mathbb{Q}_p[z]$ 是子环 (请验证), 那么 $\mathbb{Z}_p[S_N] \subset T_N$.

证明. 只需证明 $S_N T_N \subset T_N$, 而这是简单的验证. □

为处理原定理, 像引入 $\exp(n \log(\alpha_i^{p-1}))$ 那样, 我们需要用 p-进工具处理多项式映射.

> **定理 6.34.** 素数 $p \geq 5$. 记 $\mathfrak{s} = (s_1, \cdots, s_d) \in \mathbb{Z}_p^n$, $\tau = (H_1, \cdots, H_n) : \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}_p} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}_p}$ 满足 $\tau \equiv \mathrm{id}_{A^n_{\mathbb{Z}_p}}, J(\tau) \equiv \mathrm{id}_{n\times n} \bmod p$, 那么存在 $f_1, \cdots, f_n \in \mathbb{Q}_p[\![z]\!]$ 在 $\mathbb{Z}_p$ 收敛 (于是解析) 满足 $f_i(z+1) = H_i(f_1(z), \cdots, f_n(z))$ 对一切 $z \in \mathbb{Z}_p$ 与 $1 \leq i \leq n$ 且 $f_i(0) = s_i$ 对 $1 \leq i \leq n$.

证明. 归纳地构造. 考虑 $g_{i,0}(z) := s_i, 1 \leq i \leq n$ 以及 $g_{i,j}(z) := s_i + \sum_{k=1}^{j} p^k h_{i,k}(z), j \geq 1$, 其中 $h_{i,j} \in \mathcal{R}$, 符合下列条件: (1) $h_{i,j}(0) = 0$, (2) $\deg h_{i,j}(z) \leq 2j - 1$, (3) 成立着:

$$g_{i,j}(z+1) \equiv H_i(g_{1,j}(z), \cdots, g_{n,j}(z)) \bmod p^{j+1}\mathcal{R}.$$

对 j 归纳, 条件 $\tau \equiv \mathrm{id}_{A^n_{\mathbb{Z}_p}}$ 保证奠基. 关于递推, 沿用前述引理的记号, (2) 推出 $g_{i,k} \in S_k$ 对 $0 \leq k \leq j-1$, 现在归纳假设是

$$(3)\ g_{i,j-1}(z+1) - H_i(g_{1,j-1}(z), \cdots, g_{n,j-1}(z)) = p^j Q_{i,j}(z),\ Q_{i,j} \in \mathcal{R}.$$

于是前述引理推出 $p^j Q_{i,j} \in T_{j-1}$. 于是可写 $p^j Q_{i,j}(z) = c_{i,j} + \sum_{k=1}^{M} p^k q_{i,j,k}(z)$ 使 $c_{i,j} \in \mathbb{Z}_p$, $q_{i,j,k}(z) \in \mathcal{R}$ 使 $k \leq j-1$ 时次数不超过 $2k-1$ 而 $k \geq j$ 时次数不超 $2k-2$.

于是为了验证 j 时的性质 (3), 只需成立着

$$g_{i,j-1}(z+1)+p^j h_{i,j}(z+1)-H_i(g_{1,j-1}(z)+p^j h_{1,j}(z),\cdots)\in p^{j+1}\mathcal{R}.$$

这样利用 Taylor 展开并模 $p^{j+1}\mathcal{R}$, 上述要求被转化为:

$$p^j\left(Q_{i,j}(z)+h_{i,j}(z+1)-\sum_{l=1}^{n}h_{l,j}(z)\left.\frac{\partial H_i}{\partial x_l}\right|_{(g_{1,j-1}(z),\cdots)}\right)\equiv 0 \bmod p^{j+1}\mathcal{R}.$$

其中 $p^jQ_{i,j} \bmod p^{j+1}\mathcal{R}$, 可忽略 $q_{i,j,k}$ 中 $k\geq j+1$ 的项, 从而得知它关于 z 的次数至多 $2j-2$. 另外可以只研究 $\frac{\partial H_i}{\partial x_l}$ 在 $\mathfrak{s}=(s_1,\cdots,s_n)$ 的值, $J(\tau)\equiv \mathrm{id}_{n\times n} \bmod p$ 的条件告诉我们它同余 δ_{il}. 于是现在只需解方程 $Q_{i,j}(z)+h_{i,j}(z+1)-h_{i,j}(z)\equiv 0 \bmod p\mathcal{R}$. 因为 $Q_{i,j}$ 的次数至多 $2j-2$, 因此总有至多 $2j-1$ 次的, 没有常数项的 $h_{i,j}$ 符合条件. 这样 (1),(2),(3) 都符合.

现在我们取 $f_i(z):=s_i+\sum_{j=1}^{\infty}p^jh_{i,j}(z)$. 我们注意 $h_{i,j}$ 的次数至多 $2j-1$ 结合阶乘中 p 幂次的结论保证了 $h_{i,j}$ 可以乘上一个 p 的比 $\frac{2j-1}{p-1}$ 大的正整数幂次使之成为 $\mathbb{Z}_p[z]$ 中者. 因此只要 $\frac{2}{p-1}<1$ 就能保证 $f_i(z)\in\mathbb{Q}_p[\![z]\!]$ 在 $\mathbb{Z}_p$ 收敛, 而这在 $p\geq 5$ 时成立. 最后条件 (3) 保证了 $f_i(z+1)\equiv H_i(f_1(z),\cdots,f_n(z)) \bmod p^j\mathcal{R}$, 这可以推出 $f_i(z+1)=H_i(f_1(z),\cdots,f_n(z))$ 于 $\mathbb{Q}_p[\![z]\!]$ (为什么). 于是结论得证. □

利用这一系列工具很容易拼凑出原定理的证明:

证明. 首先对 $R=K[X_1,\cdots,X_n]$ 的理想 I, 和域嵌入 $K\subset L$ 总有 $(I\otimes_K L)\cap R=I$. 因为 L 在 K 上是平坦模, 于是 $S:=(R\otimes_K L)/(I\otimes_K L)\cong(R/I)\otimes_K L$, 从而 $R\to S$ 的核既是 $(I\otimes_K L)\cap R$ 又是 I. 现在我们令 $L=\mathbb{Q}_p$, 我们希望 $\sigma\in\mathrm{Aut}_{\mathsf{Sch}}\,\mathbb{A}^n_K$ 诱导 $\sigma\in\mathrm{Aut}_{\mathsf{Sch}}\,\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}_p}$ 而且 $\mathfrak{q}$ 的像在 $\mathbb{Z}_p^n$ 中, 这只需用**引理 6.29** 让 σ,σ^{-1} 所涉及的系数和 $\mathfrak{q}$ 的坐标都落在 $\mathbb{Z}_p$ 即可.

现在由**引理 6.32** 可考察 $\tau=\sigma^j$ 满足两个条件, 然后套用**定理 3.64**. 这样迭代 $\mathfrak{q}$ 何时包含某个理想 I 的问题可转化为迭代 $\mathfrak{q}\in\mathbb{Z}_p^n$ 何时包含 $I\otimes_K\mathbb{Q}_p$ 的问题, 于是结合 $I\otimes_K\mathbb{Q}_p$ 是诺特 $\mathbb{A}^n_{\mathbb{Q}_p}$ 中的理想, 只需检查它的有限个生成元 g_k 分别是否以 $\sigma^m\mathfrak{q}$ 为零点即可. 而这等价于研究 $g_k\tau^s(f_1(t),\cdots f_n(t))=0, 0\leq s<j$ 是否成立即可, 于是由 **Strassmann 定理**得证. □

这里为了能套用**引理 6.32**, σ 必须是自同构而不能是自同态.

6.4 Young 图

6.4.1 Young 图的定义和不可约表示

定义 6.35. 正整数 d, 定义**分拆数** $p(d)$ 为 $d=\lambda_1+\cdots+\lambda_k$ 的解数, 其中 $\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_k$ 为正整数, 那么 $p(d)$ 当然也是 $d=c_1+2c_2+\cdots+dc_d$ 的非负整数解数, 故生成函数

$$\sum_{d=0}^{\infty}p(d)t^d=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-t^n}=(1+t+t^2+\cdots)(1+t^2+t^4+\cdots)\cdots.$$

很明显我们可以将一个**分拆** $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)$ 对应为一个图表, 例如 $\lambda=(6,6,4,3,1)$ 对应

$\lambda_1=6$						
$\lambda_2=6$						
$\lambda_3=4$						
$\lambda_4=3$						
$\lambda_5=1$						

称此图表为 λ 的 **Young 图**. 在没有歧义的情况下也记之为 λ. 定义 λ 的**共轭**或说**转置** λ' 为 λ 如矩阵一般转置（沿主对角线翻转）, 例如上 λ 转置为 $(5,4,4,3,2,2)$.

而重要且令人惊叹的事实是, 每个 Young 图都给出一个 S_d 的不同的不可约表示:

定理 6.36 (从 Young 图构造 S_d 的不可约表示)**.** *给定一个 Young 图 λ, 如*

1	2	3	4
5	6	7	
8			

给方块标数, 定义 S_d 的两个子群 P,Q 分别为固定每个数所属行的 S_d 中的置换和固定每个数所在列的 S_d 中的置换, 如上图中 $P=S_4\times S_3\times S_1$. 定义 $\mathbb{C}[S_d]$ 中元素

$$a=a_\lambda=\sum_{g\in P}e_g,\quad b=b_\lambda=\sum_{g\in Q}\operatorname{sgn}(g)e_g,\quad c=c_\lambda=a_\lambda b_\lambda.$$

那么 $c_\lambda^2=n_\lambda c_\lambda$ 且 c_λ ***右乘****在 $\mathbb{C}[S_d]$ 上, 其像 $\mathbb{C}[S_d]c_\lambda$ 是 S_d 的一个不可约左表示, 记作 V_λ, 有 $\dim V_\lambda=d!/n_\lambda$. 对不同的 λ, V_λ 互不相同, 每个 S_d 的不可约表示都是这样得到的.*

证明. 依如下的步骤.

Step 1) 首先对 a,b,c 做一些观察. 因为 $P\cap Q=1$, 因此 $c=\sum_{g\in PQ}\pm e_g$, 我们指出对 $p\in P,q\in Q$, 自然地有 $pa=ap=a$, 有 $(\operatorname{sgn}(q)q)b=b(\operatorname{sgn}(q)q)=b$. 还有 $pc(\operatorname{sgn}(q)q)=c$, 而 c 差一个常数倍下是唯一使得这等式成立的元素. 细节叙述如下:

设 $\sum n_ge_g$ 符合条件, 则 $n_{pgq}=\operatorname{sgn}(q)n_g$. 特别地 $n_{pq}=\operatorname{sgn}(q)n_1$, 只需检查 $g\notin PQ$ 时 $n_g=0$, 对这样的 g 只需找 $(p,q)=(t,g^{-1}tg)$, 其中 t 为一个对换 (交换两个元素) 即可. 现在我们要找到 Young 图中同一行两个数, 使 g^{-1} 作用后这两个数在同一列, 若找不到需证明 $g^{-1}\in QP$. 现

在取 $q_1 \in Q$ 使 $q_1 g^{-1}$ 把第一行仍变到第一行, 因为 g^{-1} 的性质这总是可行的. 再取 $q_2 \in Q$ 使 $q_2 q_1 g^{-1}$ 把第二行仍变到第二行, 于是这样下去存在 $q \in Q$ 使 $qg^{-1} \in P$, 得证.

Step 2) 定义字典序 $\lambda > \mu$ 指 i 从小到大第一个非零的 $\lambda_i - \mu_i$ 为正. 任意分拆 $\lambda > \mu$ 和 $x \in \mathbb{C}[S_d]$ 有 $a_\lambda x b_\mu = 0$. 另外对任意分拆 λ 和 $x \in \mathbb{C}[S_d]$ 总有 $c_\lambda x c_\lambda$ 是 c_λ 的常数倍.

特别地 $\lambda > \mu$ 时总有 $c_\lambda c_\mu = 0$, 而 $c_\lambda^2 = n_\lambda c_\lambda$ 对某 $n_\lambda \in \mathbb{C}$.

先检查 $a_\lambda b_\mu = 0$, $\lambda > \mu$ 时存在两个数, 它们位于 λ 的同一行且位于 μ 的同一列. 取 t 为这两个数的对换, 那么 $a_\lambda t = a_\lambda, t b_\mu = -b_\mu$ 于是 $a_\lambda b_\mu = (a_\lambda t)(t b_\mu) = -a_\lambda b_\mu$. 一般地不妨取 $x = e_g$, 那么 $e_g b_\mu e_{g^{-1}}$ 无非是同一个 Young 图换了填数方式的 b_μ, 上面的证明仍生效. 然后 $c_\lambda x c_\lambda$ 仍是 c_λ 常数倍的结果完全来自 Step 1) 中 c 的唯一性.

Step 3) $n_\lambda = d!/\dim V_\lambda$. 另外 V_λ 是不可约表示, 若 $\lambda \neq \mu$, 则 V_λ 和 V_μ 并不同构.

观察 c_λ 右乘在 V_λ 相当于左乘常数 n_λ, 而 c_λ 中 e_1 的系数为 1, 故 $e_g c_\lambda$ 中 e_g 的系数为 1, 这表明 c_λ 右乘在 $\mathbb{C}[S_d]$ 的迹为 $d!$, 结合幂等性得 c_λ 右乘在 V_λ 的迹也为 $d!$, 故 $n_\lambda \dim V_\lambda = d!$. 然后是检查表示不可约, 若 W 是 V_λ 不可约真子表示则 $c_\lambda W \subset \{c_\lambda x c_\lambda : x \in \mathbb{C}[S_d]\}$ 为 $\mathbb{C}c_\lambda$ 或 0. 如果前者为真则 $V_\lambda = \mathbb{C}[S_d]c_\lambda = \mathbb{C}[S_d]c_\lambda W \subset W$ (用到 W 是子表示). 最后检查 $\lambda > \mu$ 时 $c_\lambda V_\lambda = \mathbb{C}c_\lambda \neq 0$, $c_\lambda V_\mu = c_\lambda \mathbb{C}[S_d] c_\mu = 0$, 故它们不能是同构的 $\mathbb{C}[S_d]$-模.

Step 4) 注意不同分拆的数量 $p(d)$ 也等于 S_d 的共轭类数, 也等于互不同构的不可约表示的数量, 由于 Step 3) 检查了不同的 λ 对应不同构的表示, 故诸 V_λ 穷尽所有不可约表示. □

6.4.2 诱导表示和 Frobenius 公式

回忆在上一小节定理中引入了群 $P = P_\lambda$, 即保护行的 S_d 子群. 我们引入 $U_\lambda = \mathrm{Ind}_{P_\lambda}^{S_n} \mathbb{C}$. 不难得知 $U_\lambda = \mathbb{C}[S_d]a_\lambda$, 因为 a_λ 左乘总得到诸陪集中元素的和. 而我们有

命题 6.37. 对 $\mu < \lambda$ 有 $\mathrm{Hom}_{S_n}(U_\lambda, V_\mu) = 0$, 而 $\mathrm{Hom}_{S_n}(U_\lambda, V_\lambda) = \mathbb{C}$.

证明. 直接计算得到

$$\mathrm{Hom}_{S_n}(U_\lambda, V_\mu) = \mathrm{Hom}_{S_n}(\mathbb{C}[S_n]a_\lambda, \mathbb{C}[S_n]a_\mu b_\mu) = a_\lambda \mathbb{C}[S_n] a_\mu b_\mu.$$

第二个等号是因为 a_λ 是幂等元, 实际上对环 A 幂等元 e 和左模 M, $\mathrm{Hom}_A(Ae, M) \cong eM$, 对 $x \in eM$ 定义 $f_x : Ae \to M$ 为 $f_x(a) = ax$. 由此结论得证. □

定义 6.38. 由上面的命题 $U_\lambda = \bigoplus_{\mu \geq \lambda} K_{\mu\lambda} V_\mu$, 这些非负整数 $K_{\mu\lambda}$ 称 **Kostka 数**, $K_{\lambda\lambda} = 1$.

构造出了表示, 要问怎么计算其特征标. 记 U_λ 的特征标为 χ_{U_λ}. 设 $C_{\mathbf{i}}$ 表示 $\mathbf{i} = (i_1, \cdots, i_d)$ 对应的共轭类, 其中 $\sum_{k=1}^d k i_k = d$, 换言之有 i_k 个长度 k 的圈.

命题 6.39. 记 p 为 λ 的行数, 对 $N \geq p$, 有

$$\chi_{U_\lambda}(C_{\mathbf{i}}) = [X^\lambda] \prod_k (X_1^k + \cdots + X_N^k)^{i_k}.$$

即乘积中单项式 $x^\lambda = X_1^{\lambda_1} \cdots X_p^{\lambda_p}$ 的系数.

证明. 由 **Mackey 公式**, 该特征标是 $\#\{x \in S_d : xgx^{-1} \in P_\lambda\}/\#P_\lambda$, 其中 $g \in C_{\mathbf{i}}$ 任意元素. 分子是中心化子 $\#Z_g$ 的元素个数乘上共轭类中在 P_λ 的元素数 $\#(C_{\mathbf{i}} \cap P_\lambda)$. 计算得

$$\chi_{U_\lambda}(C_{\mathbf{i}}) = \frac{\#Z_g \cdot \#(C_{\mathbf{i}} \cap P_\lambda)}{\#P_\lambda} = \frac{\prod_{k=1}^d k^{i_k} i_k!}{\prod_{j=1}^p \lambda_j!} \cdot \sum_{r_{jk}} \prod_{j=1}^p \frac{\lambda_j!}{\prod_{k=1}^d k^{r_{jk}} r_{jk}!}.$$

其中 $\sum_{r_{jk}}$ 表示对全体满足下条件者求和:

$$\sum_{k=1}^d k r_{jk} = \lambda_j,\ \sum_{j=1}^p r_{jk} = i_k.$$

这是因为 P_λ 中的 $C_{\mathbf{i}}$ 元素需要在 S_{λ_j} 中取一个元素, 其长度 k 的圈安排 r_{jk} 个. 于是结合上面这些内容, 化简上述 $\chi_{U_\lambda}(C_{\mathbf{i}})$ 表达式立刻得到

$$\chi_{U_\lambda}(C_{\mathbf{i}}) = \sum_{r_{jk}} \prod_{k=1}^d \frac{i_k!}{\prod_{j=1}^p r_{jk}!} = [X^\lambda] \prod_k (X_1^k + \cdots + X_N^k)^{i_k}.$$

至此命题得证. □

至此, 我们已经准备好计算 V_λ 的特征标 χ_λ.

定理 6.40 (Frobenius)**.** 记 p 为 λ 的行数, 设 $\rho = (N-1, N-2, \cdots, 0)$, 则 $N \geq p$ 有

$$\chi_\lambda(C_{\mathbf{i}}) = [X^{\lambda+\rho}] \prod_{1 \leq i < j \leq N} (X_i - X_j) \prod_k (X_1^k + \cdots + X_N^k)^{i_k}.$$

或者换成不使用 ρ 的等价写法, 即

$$\chi_\lambda(C_{\mathbf{i}}) = [X^\lambda] \prod_{1 \leq i < j \leq N} \left(1 - \frac{X_j}{X_i}\right) \prod_k (X_1^k + \cdots + X_N^k)^{i_k}.$$

证明. 记等式右边为 θ_λ, 注意

$$\theta_\lambda = \sum_{\sigma \in S_N,\ \lambda+\rho-\sigma(\rho) \geq 0} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \chi_{U_{\lambda+\rho-\sigma(\rho)}}.$$

这里 $\lambda + \rho - \sigma(\rho)$ 需经过重排重新成为不增整数列, 而且需舍弃其中带负数的, 即求和中 ≥ 0 的条件. 这条等式是前一个命题的推论, 这是因为展开 $\prod(1 - X_j/X_i)$, 利用 Vandermonde 行列式自然就会得到 $X^{\rho-\sigma(\rho)}$ 系数者, 舍弃负项也是因为 $\prod_k (X_1^k + \cdots)^{i_k}$ 不会贡献负项.

现在为了证明 $\theta_\lambda = \chi_\lambda$, 注意两件事: 第一是注意到 $\theta_\lambda = \sum_{\mu\geq\lambda} L_{\mu\lambda}\chi_\mu$, 其中 $L_{\mu\lambda}$ 都是整数且 $L_{\lambda\lambda}=1$. 这是因为 ρ 是 $\sigma(\rho)$ 中唯一的递减者, 因此 $\lambda+\rho-\sigma(\rho)$ 的重排 $\geq\lambda$, 取等当且仅当 $\sigma=\mathrm{id}$, 从而前一小节 **Kostka 数**的性质告诉我们这件事. 第二是, 在这基础上只要证明内积 $\langle\theta_\lambda,\theta_\lambda\rangle=1$, 那么结论得证. 为此计算

$$\langle\theta_\lambda,\theta_\lambda\rangle = \frac{1}{d!}\sum_{\mathbf{i}}\#C_{\mathbf{i}}\cdot\theta_\lambda(C_{\mathbf{i}})^2 = [X^{\lambda+\rho}Y^{\lambda+\rho}]S(X,Y)\prod_{1\leq i<j\leq N}(X_i-X_j)\prod_{1\leq i<j\leq N}(Y_i-Y_j),$$

$$S(X,Y) := \sum_{\mathbf{i}}\prod_k \frac{(\sum_j X_j^k)^{i_k}(\sum_j Y_j^k)^{i_k}}{k^{i_k}i_k!} = \prod_k \exp\left(\sum_{j,j'}\frac{X_j^kY_{j'}^k}{k}\right) = \exp\left(-\sum_{j,j'}\log(1-X_jY_{j'})\right)$$

$$\prod_{1\leq i<j\leq N}(X_i-X_j)(Y_i-Y_j)\prod_{i,j}(1-X_iY_j)^{-1} = \det\left(\frac{1}{1-X_iY_j}\right)_{i,j}$$

这里最后一行是著名的 **Cauchy 行列式**, 即

$$\frac{\prod_{i<j}(Z_j-Z_i)(Y_i-Y_j)}{\prod_{i,j}(Z_i-Y_j)} = \det\left(\frac{1}{Z_i-Y_j}\right)_{i,j}.$$

代入 $Z_i=X_i^{-1}$, 观察其中 $X^{\lambda+\rho}Y^{\lambda+\rho}$ 系数为 1 只需将行列式展开为 $N!$ 项乘积的和, 除了主对角线乘积, 其他乘积对这单项贡献 0. 由此我们证明了 Frobenius 公式. □

6.4.3 Schur 多项式的相关组合话题

回忆我们曾在李代数表示论节**定理 5.115** 定义了 Schur 多项式, 给定 $\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_d)$ (注意现在下标是 d, 要补足 0, 即研究 d 元多项式), 并令 $\rho=(d-1,d-2,\cdots,0)$, 记

$$A_\lambda(X) := \det\left(X_i^{\lambda_j}\right)_{d\times d} = \sum_{\sigma\in S_d}\operatorname{sgn}\sigma\cdot X_{\sigma(1)}^{\lambda_1}\cdots X_{\sigma(d)}^{\lambda_d}.\quad S_\lambda(X) := \frac{A_{\lambda+\rho}}{A_\rho}.$$

这里的 s_λ 为 λ 的 **Schur 函数**或称 **Schur 多项式**, 首先最简单的事实是这些多项式总是齐次对称的, 因为交换 X_i, X_j 会让分子分母的 A 都变成负的. 接下来是一个基本事实:

> **定理 6.41** (Cauchy 恒等式). 记求和 $\sum_\lambda$ 表示枚举所有 d 项分拆, 即 $\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_d\geq 0$, 有
>
> $$\prod_{1\leq i,j\leq d}(1-X_iY_j)^{-1} = \sum_\lambda S_\lambda(X)S_\lambda(Y) = \sum_\lambda H_\lambda(X)M_\lambda(Y).$$
>
> 其中 $H_\lambda := H_{\lambda_1}\cdots H_{\lambda_d}$, $H_j(X)$ 表示全体次数 j 的 $X_1,\cdots,X_d$ 的单项式求和. 另外 M_λ 表示对 X^λ 单项式的全体置换求和. 例如
>
> $$H_{(3,1)} = H_3H_1 = (X_1^3+X_1^2X_2+X_1X_2^2+X_2^3)(X_1+X_2),$$
>
> $$M_{(2,1,0)} = X_1^2X_2+X_2^2X_1+X_2^2X_3+X_3^2X_2+X_3^2X_1+X_1^2X_3.$$

证明. 证明只需展开 **Cauchy 行列式**, 我们在 **Frobenius 恒等式**处提到:

$$\prod_{1\le i<j\le N}(X_i-X_j)(Y_i-Y_j)\prod_{i,j}(1-X_iY_j)^{-1}=\det\left(\frac{1}{1-X_iY_j}\right)_{i,j}.$$

任取一个 $\mu=\lambda+\rho$, 等价地 $\mu_1>\cdots>\mu_d$, 注意到这行列式中 $[Y^\mu]$ 系数正是 $\det(X_i^{\mu_j})_{i,j}$, 这是因为 $Y_j^{\mu_j}$ 只能由对应的列提供, 系数在第 i 行正是 $X_i^{\lambda_j}$. 另一方面, $\mu_i=\mu_{i+1}$ 的 μ 对应的 $[Y^\mu]$ 系数为 0, 这是因为这系数在对换 Y_i,Y_{i+1} 下不变, 从而它等于自身相反数. 于是得到

$$A_\rho(X)A_\rho(Y)\prod_{i,j}(1-X_iY_j)^{-1}=\sum_\lambda A_{\lambda+\rho}(X)A_{\lambda+\rho}(Y).$$

这证明了 Schur 多项式的部分, 而第二个等号相对简单, 只需注意

$$\prod_{i=1}^d\frac{1}{1-X_iT}=\sum_{m=0}^\infty H_mT^m\implies\prod_{1\le i,j\le d}(1-X_iY_j)^{-1}=\prod_{j=1}^d\sum_{m=0}^\infty H_m(X)Y_j^m=\sum_\lambda H_\lambda(X)M_\lambda(Y).$$

于是我们证明了 Cauchy 恒等式. □

Cauchy 恒等式启发我们定义一些内积, 我们可以在 d 个变元的对称多项式空间中引入内积. 不难检查 $\{H_\lambda\}_\lambda,\{M_\lambda\}_\lambda$ 都构成对称多项式空间的一组基. 这是因为在 $\lambda>\mu$ 时 H_μ,M_μ 中没有 X^λ 单项, 而 H_λ,M_λ 中第一次出现这一单项, 系数 1, 因此上三角技巧保证这一点. 定义

$$\langle H_\lambda,M_\mu\rangle:=\delta_{\lambda\mu}=\mathbf{1}_{\lambda=\mu}.$$

对称性看起来不明显, 而检查它的关键正是如下的结果:

命题 6.42. 对分拆 λ,μ 我们有

$$\langle S_\lambda,S_\mu\rangle=\delta_{\lambda\mu}.$$

证明. 记 $S_\lambda=\sum a_{\lambda\gamma}H_\gamma=\sum b_{\gamma\lambda}M_\gamma$. 则依定义 $\langle S_\lambda,S_\mu\rangle=\sum_\gamma a_{\lambda\gamma}b_{\gamma\mu}$. 注意

$$\sum_\lambda S_\lambda(X)S_\lambda(Y)=\sum_{\lambda,\gamma,\mu}a_{\lambda\gamma}H_\gamma(X)b_{\mu\lambda}M_\mu(Y)=\sum_\lambda H_\lambda(X)M_\lambda(Y),$$

是 Cauchy 恒等式. 由此得知必须有 $\sum_\lambda b_{\mu\lambda}a_{\lambda\gamma}=\delta_{\mu\gamma}$. 注意到 $|\lambda|=\sum\lambda_i\ne|\gamma|$ 时 $a_{\lambda\gamma}=0$, $|\lambda|\ne|\mu|$ 时 $b_{\mu\lambda}=0$ 这样一种分块对角结构. 于是投影到 $N=|\lambda|$, 得到有限维矩阵 $B_NA_N=I$, 于是 $A_NB_N=I$, 这样就得到 $\langle S_\lambda,S_\mu\rangle=\delta_{\lambda\mu}$. □

全体初等对称多项式 $E_1=M_{(1,0,\cdots,0)},E_2=M_{(1,1,0,\cdots,0)},\cdots,E_d=M_{(1,\cdots,1)}$ 是对称多项式环 $\Lambda=\mathbb{C}[X_1,\cdots,X_d]^{S_d}$ 的代数无关的生成元. 定义环同态 $\omega:\Lambda\to\Lambda$ 为 $E_k\mapsto H_k$.

命题 6.43. 环自同态 ω 是对合, 即 $\omega^2 = \mathrm{id}_\Lambda$.

证明. 注意生成函数 $H(t) = \sum H_r(X)T^r = \prod(1-X_iT)^{-1}, E(t) = \sum E_r(X)T^r = \prod(1+X_iT)$. 于是 $H(T)E(-T) = 1$. 这表明 $\sum_{r=1}^{d}(-1)^r E_r H_{k-r} = 0$ 对一切 $k \le d$. 作用 ω 得到 $\sum_{r=1}^{d}(-1)^r H_r \omega(H_{k-r}) = 0$, 等价地 $\sum_{r=1}^{d}(-1)^r H_{k-r}\omega(H_r) = 0$. 注意满足上式对任意 $k \le d$ 成立的 $\{E_r\}_{r\ge 1} \subset \Lambda$ 是存在唯一的, 立刻得到 $\omega(H_r) = E_r$. □

引理 6.44. 记 p 为 λ 的行数, $n \ge p$ 个变元的 *Schur* 多项式, 有 $S_\lambda = \det(H_{\lambda_i - i + j})_{1\le i,j\le n}$. 记 q 为 λ' 的行数, $m \ge q$ 个变元的 *Schur* 多项式, 有 $S_\lambda = \det(E_{\lambda'_i - i + j})_{1\le i,j\le m}$.

证明. 设 $E_r^{(k)}$ 表示 $X_1, \cdots, X_{k-1}, X_{k+1}, \cdots, X_n$ 的 r 次初等对称多项式, 令

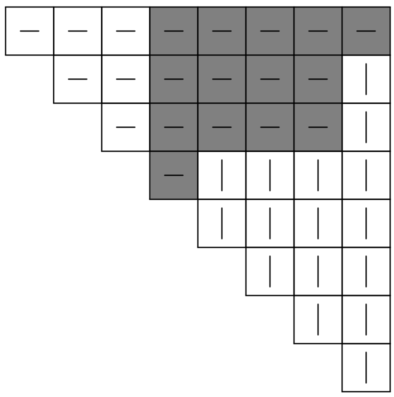
$$\mathbf{M} = ((-1)^{n-i}E_{n-i}^{(k)})_{1\le i,k\le n},\ \mathbf{A}_\alpha = (X_j^{\alpha_i})_{1\le i,j\le n},\ \mathbf{H}_\alpha = (H_{\alpha_i - n + j})_{1\le i,j\le n}.$$

其中 $\alpha \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^n$, 我们指出 $\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{H}_\alpha\mathbf{M}$. 设 $E^{(k)}(T)$ 记 $E^{(k)}$ 的生成函数则

$$H(T)E^{(k)}(-T) = (1 - X_kT)^{-1}.\ \sum_{j=1}^{n} H_{\alpha_i - n + j}(-1)^{n-j}E_{n-j}^{(k)} = X_k^{\alpha_i}$$

第二条等式是第一条等式两边的 T^{α_i} 系数, 得 $\mathbf{H}_\alpha\mathbf{M} = \mathbf{A}_\alpha$. 于是 $\det \mathbf{H}_\alpha \det \mathbf{M} = \det \mathbf{A}_\alpha$. 注意到 $\det \mathbf{M} = A_\rho, \det \mathbf{A}_\alpha = A_\alpha$, 于是 $\det \mathbf{H}_\alpha = A_\alpha / A_\rho$. 取 $\alpha = \lambda + \rho$ 即得所需.

然后为了证明第二个等式, 注意一个事实, $\lambda_i + n - i\ (1 \le i \le n)$, $n - 1 + j - \lambda'_j\ (1 \le j \le m)$ 是 $0, 1, \cdots, m+n-1$ 的置换, 以 $\lambda = (5, 4, 4, 1)$ 为例, 一个组合解释如下:



可以看出 λ 锯齿形的边依次提供了 $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. 现在回忆对于 N, $N+1$ 阶矩阵

$$\mathbf{H} := (H_{i-j}))_{0\le i,j\le N},\ \mathbf{E} := ((-1)^{i-j}E_{i-j})_{0\le i,j\le N}.$$

其中下标不在定义域者补充定义为 0, 于是对 $N = m + n - 1$, 我们有 $\mathbf{HE} = \mathbf{I}$ 且 $\mathbf{H}, \mathbf{E}$ 都是对角 1 的上三角矩阵故行列式为 1, 从而它们互为伴随矩阵. 这样一来对 $1 \le i \le n$ 选出 $\mathbf{H}$ 的 $\lambda_i + n - i$ 行和 $n - i$ 列构成的 $n \times n$ 子阵, 以及, $1 \le j \le m$ 选出 $\mathbf{E}$ 的那些 $\mathbf{H}$ 没选的行列, $n - 1 + j - \lambda'_j$ 行和 $n - 1 + j$ 列, 二者的行列式相等.

于是这就得到我们需要的 $\det(H_{\lambda_i - i + j})_{1\le i,j\le n} = \det(E_{\lambda'_i - i + j})_{1\le i,j\le m}$. □

回忆我们还见过典型的对合, 正是 $\lambda \mapsto \lambda'$. 这二者在足够多变元的 Schur 多项式上一致:

引理 6.45. 对 $n \geq |\lambda| = \sum \lambda_i$. n 个变元的 *Schur* 多项式 $\omega S_\lambda = S_{\lambda'}$.

证明. 记 p, q 为 λ 的行列数, 注意 S_λ 行列式表示的引理知对 $n \geq |\lambda| \geq \max\{p, q\}$, 有

$$\begin{aligned} S_\lambda &= \det(H_{\lambda_i - i + j})_{1 \leq i, j \leq n} \bmod (X_1, \cdots, X_n)^{|\lambda|+1}, \\ \omega(S_\lambda) &= \det(E_{\lambda_i - i + j})_{1 \leq i, j \leq n} \bmod (X_1, \cdots, X_n)^{|\lambda|+1} = S_{\lambda'}. \end{aligned}$$

第一和第三个等号是因为 S_λ 的齐 $|\lambda|$ 次, 然后第二个等号因为 $\{H_k\}_{k > |\lambda|}$ 在同余中可以直接丢弃, 然后 ω 是保护齐次性的, 而且在不超过 $|\lambda| \leq n$ 次时 $\omega(H_k) = E_k$. $\square$

然后是 Schur 多项式的组合定义, 借助 Young 图我们给出

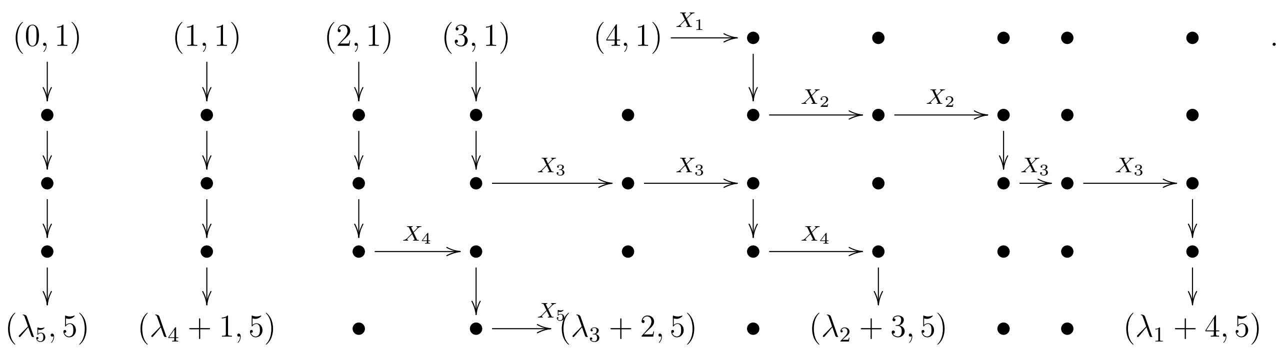
定理 6.46 (Schur 多项式的 Kostka 组合定义)**.** 分析 λ, $S_\lambda(X) = \sum_T X^T$. 求和项是在 *Young* 图中填 X_i 的乘积, 行的下标单调**不减**而列的下标单**增**. 例如 $\lambda = (3, 2, 1)$, 就有

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline x_1 & x_1 & x_1 \\ \hline x_2 & x_2 \\ \cline{1-2} x_3 \\ \cline{1-1} \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline x_1 & x_1 & x_2 \\ \hline x_2 & x_2 \\ \cline{1-2} x_3 \\ \cline{1-1} \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline x_1 & x_1 & x_3 \\ \hline x_2 & x_2 \\ \cline{1-2} x_3 \\ \cline{1-1} \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline x_1 & x_1 & x_1 \\ \hline x_2 & x_3 \\ \cline{1-2} x_3 \\ \cline{1-1} \end{array},$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline x_1 & x_1 & x_2 \\ \hline x_2 & x_3 \\ \cline{1-2} x_3 \\ \cline{1-1} \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline x_1 & x_1 & x_3 \\ \hline x_2 & x_3 \\ \cline{1-2} x_3 \\ \cline{1-1} \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline x_1 & x_2 & x_2 \\ \hline x_3 & x_3 \\ \cline{1-2} x_3 \\ \cline{1-1} \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_3 & x_3 \\ \cline{1-2} x_3 \\ \cline{1-1} \end{array}.$$

即 $S_\lambda = \sum_{\sigma \in S_3} X_{\sigma(1)}^3 X_{\sigma(2)}^2 X_{\sigma(3)} + 2X_1^2 X_2^2 X_3^2$. 上述填数方法也称**半标准**的.

证明. 对行数为 p 的 λ, 假设变量数为 $n \geq p$, 考虑如下资料: 一个 n 行的点阵. 从上到下称第 n 行到第 1 行. 记第 n 行的 $(i-1, 1)$ $(1 \leq i \leq n)$ 为出发点, 第一行的 $(\lambda_i + n - i, n)$ $(1 \leq i \leq n)$ 为结束点. 以 $n = 5, \lambda = (5, 3, 2, 0, 0)$ 为例, 其样式形如



对 $\sigma \in S_n$, 考虑对每个 $1 \leq i \leq n$, 给出发点 $(i-1, 1)$ 通过往下走和往右走连接结束点 $(\lambda_{\sigma(i)} + n - \sigma(i), n)$ 的一条路径 (**注意可以相交, 只是上面展示了一个不交的图**), 每个往右的路径若在

第 k 行就标记 X_k, 这样的 p 条路径称一个路径组. 考虑全体路径组构成的集合 $\mathscr{L}_\sigma$. 现在对 $L\in\mathscr{L}_\sigma$, 考虑标记的全体 X_k 的乘积, 记作 X^L. 考虑这样一个求和, 这里规定 $\operatorname{sgn}(\sigma_0)=1$, $\sigma_0(j-1):=n+1-j$ 对 $1\le j\le n$. 其他者表示它基础上差的置换的 sgn, 换言之也就是像上图不交路径展示的那样对应为准.

$$S:=\sum_{\sigma\in S_n,L\in\mathscr{L}_\sigma}(\operatorname{sgn}\sigma)X^L.$$

一方面我们说明它等于 $\sum_T X^T$. 因为对于相交的路径, 给交点任取定一个序, 该序下最大的交点可发现置换它们往后的路径会抵消掉, 因此只有不交的路径对 S 的和有贡献, 即 $\sigma=\sigma_0$ 者. 而我们沿着路径依次将经过的 X_k 填进 λ, 就会对应 $\sum_T$ 中的一个元素, 以上图为例, 得到:

x_1	x_2	x_2	x_3	x_3
x_3	x_3	x_4		
x_4	x_5			

另一方面我们指出, 对给定的 $\sigma\in S_n$, 对照先前 S_λ 用 H_k 表示的公式, 有

$$\sum_{L\in\mathscr{L}_\sigma}X^L=\prod_{i=1}^n H_{\lambda_{\sigma(i)}-\sigma(i)+i}.$$

这是因为固定 σ 后要求 $(n-i,1)$ 到 $(\lambda_{\sigma(i)}+n-\sigma(i),n)$ 的路径提供 $H_{\lambda_{\sigma(i)}+n-\sigma(i)}$. □

引理 6.47. *记 p 为 λ 的行数, 记 $n_1\ge n_2\ge p$ 则 n_1 个变元的 Schur 多项式 $S_\lambda(X_1,\cdots,X_{n_1})$ 代入 $X_{n_2+1}=\cdots=X_{n_1}=0$ 就得到 n_2 个变元的 Schur 多项式 $S_\lambda(X_1,\cdots,X_{n_2})$.*
另外行数为 p 的 Schur 多项式的每个单项, 其的乘积项中一定出现至少 p 个不同的下标.

证明. 就是上述 **Kostka 组合定义**的直接推论. □

推论 6.48 (Cauchy 第二恒等式)**.** *求和 $\sum_{\lambda\subset d\times d}$ 指含于 $d\times d$ 中的 Young 图, λ' 指转置, 有*

$$\prod_{1\le i,j\le d}(1+X_iY_j)=\sum_{\lambda\subset d\times d}S_\lambda(X)S_{\lambda'}(Y).$$

证明. 首先写出 X,Y 都含 d^2 个变量的 Cauchy 第一恒等式:

$$\prod_{1\le i,j\le d^2}(1-X_iY_j)^{-1}=\sum_\lambda S_\lambda(X)S_\lambda(Y).$$

求和 $\sum_\lambda$ 对行数不超过 d^2 者进行, 模 $(Y_1,\cdots,Y_{d^2})^{d^2+1}$ 并对 d^2 个 Y 变量作用 ω 得到

$$\prod_{1\le i,j\le d^2}(1+X_iY_j)\equiv\sum_{|\lambda|\le d^2}S_\lambda(X)S_{\lambda'}(Y)\bmod(Y_1,\cdots,Y_{d^2})^{d^2+1}$$

右边模 d^2 次 Y 变元后 $|\lambda| > d^2$ 的 Young 图消失, 这样先前的引理就保证 $S_\lambda(Y)$ 作用后一定得到 $S_{\lambda'}(Y)$. 然后再在左右两边对 $k > d$ 取 $X_k = Y_k = 0$, 得

$$\prod_{1\le i,j\le d}(1+X_iY_j) \equiv \sum_{\lambda\subset d\times d} S_\lambda(X)S_{\lambda'}(Y) \bmod (Y_1,\cdots,Y_d)^{d^2+1}$$

右边是因为 λ, λ' 中只要有至少 $d+1$ 行, 其 Schur 多项式至少涉及 $d+1$ 个不同变元, 然后利用了 Schur 多项式在一些变量上取 0 就得到更少变量者的事实. 此时注意两边的 Y 次数确实都不超过 d^2, 因此两边在不同余的意义下也相等, 故 Cauchy 第二恒等式得证. □

注 6.49. *考虑无穷个变元的环会让这些事情变得简单, 定义分次代数 $\Lambda := \bigoplus_{k\ge 0}\Lambda_k$, 而*

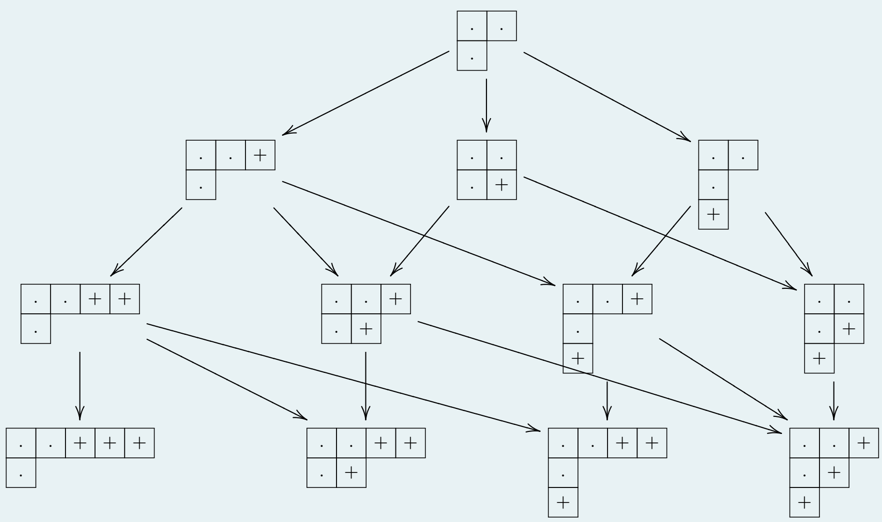
$$\Lambda_k := \operatorname*{colim}_{l\ge 0} \mathbb{C}[X_1,\cdots,X_l]^{S_l}.$$

这得到不同的分次. 现在 E_k, H_k, M_λ 都是 Λ 中良定的元素, 由上面的引理, Schur 多项式也是. 尽管 $\omega = \omega_l \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{C}[X_1,\cdots,X_l]^{S_l}$ 依赖于变元数量 l, 但是 ω 可以在 Λ 上良定义, 因为对足够多个变元的情况来说, $\omega : E_k \mapsto H_k$ 的定义也保持着一致性. 这样一来完全可以在 Λ 做完所有事. 先证明无穷个变元的 Cauchy 第一恒等式, 然后直接作用 ω 就得到无穷个变元的 Cauchy 第二恒等式, 这些恒等式对 $k > d$ 代入 $X_k = Y_k = 0$ 就得到传统的.

命题 6.50 (Pieri 法则)**.** *行数 p 的分拆 λ 和正整数 k, 考虑变元数 $n \ge p+1$, 有*

$$H_k(X)S_\lambda(X) = \sum_{\mu=\lambda+k} S_\mu(X).$$

*这里 $\lambda+k$ 取遍 λ 添加 k 个格得的 Young 图, 且同一列*不能*加超过一格. 如 $\lambda = (2,1), k \le 3$,*



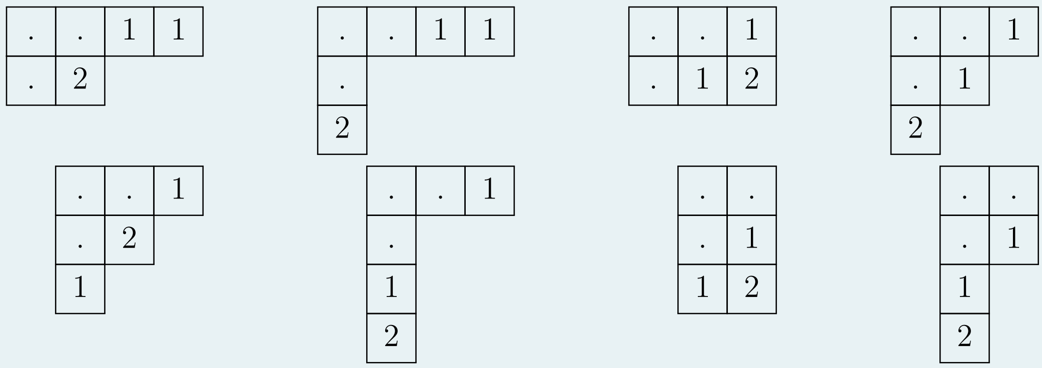
当然 H_m 正是 m 个方块一行 $\lambda = (m)$ 的 Schur 多项式.

适当将上述结论推广, 来看如下的一般版本:

命题 6.51 (Littlewood–Richardson 法则). 行数 p,q 的 μ,ν, 变元数 $n\geq p+q$, 则

$$S_\mu(X)S_\nu(X)=\sum_{\lambda=\mu+\nu}S_\lambda(X).$$

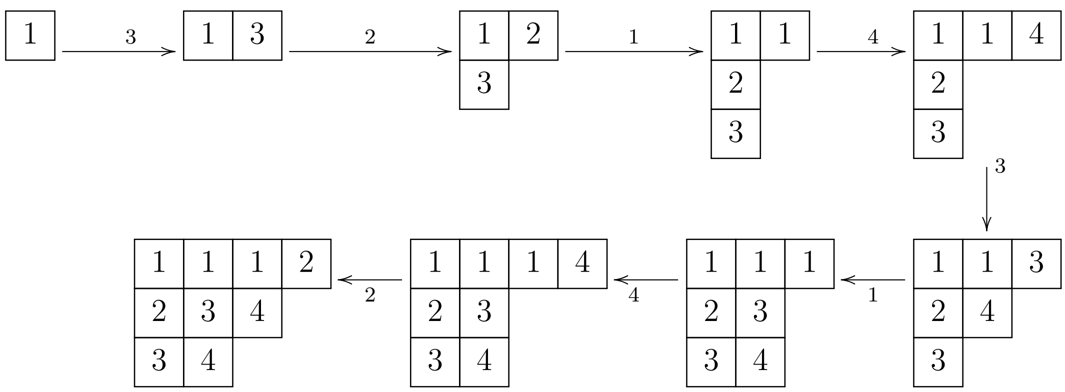
这里 $\mu+\nu$ 表示, 首先给 ν 编号, 第 j 行的 ν_j 个格编号 j. 然后给 μ 添加带编号的 $|\nu|=\sum\nu_j$ 个块得到一 *Young* 图, 满足两个条件, 首先它得从 S_μ 如 **Pieri 法则**逐步添加 $S_{(\nu_1)},S_{(\nu_2)},\cdots,S_{(\nu_q)}$ 得到; 其次从最上面的行开始扫描, 一次从右往左添加一格, 一行添加完了就往下一行, 直到扫描完整个表格 (阿拉伯语顺序) , 要求全程中 1 出现的次数不少于 2, 2 不少于 3, 依此类推, j 出现次数不少于 $j+1$. 例如 $\mu=(2,1),\nu=(2,1)$,



其中 $(3,2,1)$ 出现了两次, 但我们仍然把它们看作 $\sum_\lambda$ 中不同的求和项.

证明前, 先介绍 **Schensted 插入删除算法**和 **Robinson–Schensted–Knuth 对应**.

定义 6.52. 对每一位都是正整数构成的词 $w=a_1\cdots a_l$. 我们维护一个 *Young* 图半标准地填入前缀如下, 第一位 a_1 得到 $\boxed{a_1}$. 假设前 k 位已经完成, 现在插入 a_{k+1}. 我们首先把 a_{k+1} 插入 *Young* 图的第一行, 如果它比最后一位大, 则在第一行最末添一个 a_{k+1}. 否则在最右的大于 a_{k+1} 的数 c 处停下, 用 a_{k+1} 替代 c. 然后让 c 依上法插入 *Young* 图的第二行, 一直下去. 如 132143142 对应



这种填法记作 $P(w)$. 插入方式保证了一定从半标准填法得到半标准填法. 另外, 上面的图也能看出, 从最下行开始往上读, 342341112 一定对应图示填法. 这称为该半标准填法的**读法**. 在没

有歧义的语境下，一个半标准填法和一个读法被看作同一个对象讨论.

接下来是删除，假设现在我们知道最后一个出现的格子所在的行，我们将能还原出添加前的形状. 只需把该行最右边的数还回上一行，然后一行一行往上倒推回第一行即可.

引理 6.53 (Knuth 等价)**.** *对每位都在 $1, 2, \cdots, n$ 中的词，相邻三个字母定义关系 $(K_1), (K_2)$*

$$(K_1)\ xzy \equiv zxy \text{ 若 } x \le y < z,$$

$$(K_2)\ yzx \equiv yxz \text{ 若 } x < y \le z.$$

它们生成的等价关系称为 **Knuth 等价**（*一个词如果能经过有限次 (K_i) 操作得到的另一个词，则称它们为 Knuth 等价的*），*那么 w 和 $P(w)$ 读法 Knuth 等价.*

如果将 $(K_1), (K_2)$ 的 $\equiv$ 换成 $\prec$ 定义偏序，那么 Knuth 等价类在偏序关系下存在唯一的极小元（也就是最小元）正是 w 的读法.

证明. 归纳检查. 每次添加一个数字, (K_2) 操作若干次找到新数在该行插入位置, 到位后 (K_1) 在将被替代的数 c 逐渐挪到该行最前, 正是上一行最末. 且插入数的过程在偏序下不断变小.

$$\begin{tikzcd}
 & 1223344\mathbf{562} \arrow[r, "(K_2)"] & 1223344\mathbf{52}6 \arrow[r, "(K_2)"] & 12233\mathbf{442}56 \arrow[r, "(K_2)"] & 1223\mathbf{342}456 \arrow[r, "(K_2)"] & 122\mathbf{332}4456 \arrow[d, "(K_2)"] \\
 & & 3122234456 & \mathbf{132}2234456 \arrow[l, "(K_1)"'] & 1\mathbf{232}234456 \arrow[l, "(K_1)"'] & 12\mathbf{232}34456 \arrow[l, "(K_1)"']
\end{tikzcd}$$

接下来只需证明 Knuth 等价不改变读法, 以 (K_1) 为例, 只需检查从一个 Young 图半标准填数的读法后面插入 xzy 和 zxy 得到的结果一致, 为此只需观察它们在原先 Young 图的一行数上的情况, 也就是考察一列单调不减的数后面跟着 xzy, zxy. 实际上经过有限多种分类讨论 (讨论被替代的数的不同可能性) 得知, 它们被替代的数挪到该行最前, 要么相同, 要么形如 $c_x c_z c_y$ 与 $c_z c_x c_y$ 只差一个 Knuth 等价, 因此对 Young 图行数归纳可证.

得知 Knuth 等价不改变读法后, 任意对 w 作 Knuth 等价得到的结果经插入处理总得到相同的读法, 而读法是偏序下的极小元, 因此由得到读法的唯一性得知是最小元. □

引理 6.54 (Greene 不变量)**.** *给定每位都在 $1, 2, \cdots, n$ 中的词 $w = w_1 w_2 \cdots w_l$，其一个子词指下标集 $\{1, 2, \cdots, l\}$ 的一个子集对应的那些 w_i 顺序构成的词. 记 $l_k(w)$ 为，k 个互不相交单调不减子词的并具有元素数的上界，补充定义 $l_0(w) = 0$. 如 $w = 132143142$，$l_1(w) = 4, l_2(w) = 7, l_3(w) = 9$. 则 w 插入得到的 Young 图填法 $\lambda = P(w)$ 总满足 $\lambda_i = l_i(w) - l_{i-1}(w)$.*

证明. 检查 Greene 不变量在 Knuth 等价下不变的工作留给读者. 现只需证明 $P(w)$ 读法满足 $\lambda_i = l_i(w) - l_{i-1}(w)$, 为此只需注意一个事实, 读法中的任意一个单调不减子词, 它对应 Young 图上的数所在的列号一定严格增加. 由此立刻得到我们需要的结论. □

上述引理实则是 Erdös–Szekeres 定理的一个推广.

命题 6.55 (RSK 对应). 给定两个数组 $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_m), \nu = (\nu_1, \cdots, \nu_n)$, 满足 $|\mu| = |\nu|$. 用 $\mathbf{M}_{\mu\nu}$ 表示 $m \times n$ 的满足行和为 μ, 列和为 ν 的非负整系数矩阵构成的集合. 对 *Young* 图 $|\lambda| = |\mu| = |\nu|$, 用 $\mathrm{Tab}(\lambda, \mu)$ 表示 λ 中半标准地填写 i 个 μ_i 的填数方法. 集合上

$$\mathbf{M}_{\mu\nu} \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \bigsqcup_{\lambda} \mathrm{Tab}(\lambda, \mu) \times \mathrm{Tab}(\lambda, \nu).$$

将左边到右边的典范映射记作 $(\mathrm{RSK}_X, \mathrm{RSK}_Y)$. 而且转置矩阵 M, 将会交换 X, Y, 即

$$\mathrm{RSK}_X(M) = \mathrm{RSK}_Y(M^{\mathrm{T}}), \mathrm{RSK}_Y(M) = \mathrm{RSK}_X(M^{\mathrm{T}}).$$

证明. 这是 Cauchy 第一恒等式的 Kostka 组合定义, 看系数 $[X^\mu Y^\nu]$. $\mathbf{M}_{\mu\nu}$ 中的一个元素 (M_{ij}) 对应 $\prod (X_i Y_j)^{M_{ij}}$. 而 $\mathrm{Tab}(\lambda, \mu) \times \mathrm{Tab}(\lambda, \nu)$ 对应了 $S_\lambda(X) S_\lambda(Y)$ 中 $X^\mu Y^\nu$ 的系数.
下面是一个具体的对应流程, 展示了如何从 $m \times n$ 矩阵对应到一个 λ 的两种填数方法, 记作 X 和 Y. 逐行归纳地进行, 每次将新的一行对应一个词 $1^{M_{r1}} 2^{M_{r2}} \cdots n^{M_{rn}}$ 用前面的插入算法把这个词插入 Y, 然后 X 就对应在 Y 新出现的格子中填 r. 例如

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\qquad
\begin{array}{ccc}
 & \mathrm{RSK}_Y(M_{ij}) & \mathrm{RSK}_X(M_{ij}) \\
\mathrm{INSERT}(23) & \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \\
\mathrm{INSERT}(122) & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 3 \\ \cline{1-2} \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 2 \\ \cline{1-2} \end{array} \\
\mathrm{INSERT}(1113) & \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 2 \\ \cline{1-3} 3 \\ \cline{1-1} \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 3 \\ \cline{1-3} 3 \\ \cline{1-1} \end{array}
\end{array}$$

从右边得到左边只需每次从 X 中读出哪些部分是新一行对应的格子, 然后再在 Y 中作删除算法, 注意到删除的行的选择是从第一行开始逐渐向下进行的. 于是由有限集元素数量相同时, 单射等价于满射等价于双射的事实, 现在两侧的信息被良好对应起来.
接下来是关于转置的事实, 我们只需检查一个矩阵和它的转置用逐行插入的方法计算出的 Young 图形状一致, 假设这一事实已证, 对加一行归纳, 从 n 行到 $n+1$ 行的 $\mathrm{RSK}_Y(M^{\mathrm{T}})$ 首先形状和 $\mathrm{RSK}_X(M)$ 一样, 而且依照 RSK_Y 的定义以及插入在去掉最大的数字下的相容性, 多出的格子里只能填 $n+1$, 这就和 RSK_X 的定义一致. 这样 $\mathrm{RSK}_Y(M^{\mathrm{T}}) = \mathrm{RSK}_X(M)$.
于是只需证明矩阵和转置对应词的 Greene 不变量相同. 而对矩阵来说, 其任意单调不减子词每一步要么向下走, 要么向右走, 这一点和它转置后完全一致, 故不会影响 Greene 不变量. □

Littlewood–Richardson 法则的证明. 首先看 $S_\mu(X)$ 和 $S_\nu(X)$, 任取 t_μ, t_ν 为 p, q 个不同变元的一

种 μ,ν 的半标准填法, 则根据 **RSK 对应**, 我们有

$$S_\mu(X)=\sum_{\mathrm{RSK}_X(A)=t_\mu}X^{C(A)},S_\nu(X)=\sum_{RSK_Y(B)=t_\nu}X^{C(B)}.$$

其中 A,B 分别取遍 $p\times n,q\times n$ 的非负整系数矩阵, $R(M),C(M)$ 表示 M 的行和与列和. 于是自然地, 考虑 $C_{\mu\nu}:=\left\{C=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}:\mathrm{RSK}_X(A)=t_\mu,\mathrm{RSK}_X(B)=t_\nu\right\}$, 定义 π_p,π_q 分别把 $\{1,2,\cdots,p+q\}$ 构成的词映为丢弃所有后 q 个数和前 p 个数得到的子词. $p+q$ 个数构成词的 Knuth 偏序 $w_1\equiv w_2$ 在投影 π_p,π_q 后还保持, 即 $\pi_p(w_1)\equiv\pi_p(w_2),\pi_q(w_1)\equiv\pi_q(w_2)$.
C 的读法记作 $\gamma=\mathrm{RSK}_X(C)$. 那么 $t_\mu=\mathrm{RSK}_X(A)\equiv A=\pi_p(C)\equiv\pi_p(\gamma)$ 是 Knuth 等价. 而且有 $t_\mu=\pi_p(\gamma)$, 因为这是 RSK_X 丢掉较大数的相容性. 类似地 $t_\nu\equiv\pi_q(\gamma)$, 因此

$$\begin{aligned}C_{\alpha\beta}&=\{C\in M_{(p+q)\times n}(\mathbb{Z}_{\geq0}):\pi_p(\gamma)=t_\mu,\pi_q(\gamma)\equiv t_\nu\}\\&=\bigsqcup_{\pi_p(t)=t_\mu,\pi_q(t)\equiv t_\nu}\{C\in M_{(p+q)\times n}(\mathbb{Z}_{\geq0}):\mathrm{RSK}_X(C)=t\}.\end{aligned}$$

其中求无交并枚举全体 t 为使用 $\{1,\cdots,p+q\}$ 中数的填法中使 $\pi_p(t)=t_\mu,\pi_q(t)\equiv t_\nu$ 者. 现在我们只需取一些特殊的 t_μ,t_ν, 令 t_μ,t_ν 是在第 i,j 行填 $i,p+j$ 的标准填法, 那么这时阿拉伯语阅读顺序的要求就是 $\pi_q(t)\equiv t_\nu$, 注意到 $\pi_q(t)$ 其实顺序恰好是阿拉伯语顺序的颠倒 (见本段后), 而如 Pieri 法则逐步添加的要求也是 RSK_X 丢掉较大数的相容性. 这样无交并对应物恰为 Littlewood–Richardson 法则对应的两个要求.
具体来说: 一个满足阿拉伯语阅读顺序要求的 $1,\cdots,q$ 构成的词 $w_1\cdots w_l$, 对长度归纳证明插入后得的读法单调不增, 利用 Knuth 等价不改变插入读法, 先对 $w_2\cdots w_l$ 作插入算法可假设其是单调不增的读法, 然后检查 $\mathbf{k}q\cdots q(q-1)\cdots(q-1)\cdots1\cdots1$ 插入后会得到

$$q\cdots q(q-1)\cdots(q-1)\cdots\mathbf{k}k\cdots k\cdots1\cdots1.$$

这样如果整个词中 $a-1$ 出现的次数不少于 a, 那么它仍然是一个单调不增的读法.
反过来如果词 w 插入得到的读法单调不增, 先只看 $1,2$, 如果某后缀中的 1 比 2 少, 第一行必残留 2 矛盾. 第一行最后必只有 1, 结合最后第一行全是 1 说明第一行所有其他数都被替代, 它们会被依次弹到第二行末, 因此去掉 w 所有 1, 从 2 开始观察对问题没有影响, 可归纳. □

6.4.4 对称多项式理论与 S_n 表示论间的联系

通过 **Frobenius 特征公式**, 以 S_5 为例, 特征标表的 Young 图版本如下:

例 6.56. *如图所示, 第一列表示一个 Young 图 λ 的逐行信息. 其中 U 是平凡表示 $U'=\mathrm{sgn}$ 表示. 然后从典范的表示 V 开始, $V,\wedge^2V,\wedge^3V=V',\wedge^4V=U'$ 都是不可约表示, 发生的事情是逐*

渐将第一行的方块添加到第一列. 此外还有一个现象, U, V, W 到 U', V', W' 都是与 sgn 表示取张量, 发生的事情是 *Young* 图转置.

数量 共轭类	1 (1)	10 (12)	20 (123)	30 (1234)	24 (12345)	15 (12)(34)	20 (12)(345)
$U = 5$	1	1	1	1	1	1	1
$U' = 11111$	1	-1	1	-1	1	1	-1
$V = 41$	4	2	1	0	-1	0	-1
$V' = 2111$	4	-2	1	0	-1	0	1
$\wedge^2 V = 311$	6	0	0	0	1	-2	0
$W = 32$	5	1	-1	-1	0	1	1
$W' = 221$	5	-1	-1	1	0	1	-1

本小节的目的就是将先前关于多项式的理论和 S_n 的表示论建立联系.

自然地将 S_λ 和 V_λ 对应起来, 这么做的依据是对 $|\lambda| = |\mu|$ 有 $\langle S_\lambda, S_\mu \rangle = \langle \chi_\lambda, \chi_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$. 第一个内积是在 Cauchy 恒等式处定义的, 第二个内积是不可约表示的特征. 另一个依据是由 Frobenius 特征公式, 变量数 N, 利用 $S_\lambda = A_{\lambda+\rho}/A_\rho$, 和 A 的反对称性, 对 S_n 的共轭类 $C_{\mathbf{i}}$,

$$\prod_m (X_1^m + \cdots + X_N^m)^{i_m} = \sum_{p \le N, |\lambda| = n} \chi_\lambda(C_{\mathbf{i}}) S_\lambda(X).$$

右边的求和对全体行数 $p \le N$ 的 n 个格子的 Young 图 λ 进行. 这条等式启发我们证明如下的命题, 这里我们明确地构造出类函数和对称多项式空间的同构关系, 且保护了分次代数:

命题 6.57. 设 S_n 的 $\mathbb{C}$ 值类函数空间为 R_n, 由 S_m, S_n 的类函数 f, g 可诱导 S_{m+n} 的函数

$$f \bullet g := \mathrm{Ind}_{S_m \times S_n}^{S_{m+n}} (f \boxtimes g) \in R_{m+n}.$$

这里 $f \boxtimes g$ 是在 $(\sigma_m, \sigma_n) \in S_m \times S_n$ 上取 $f(\sigma_m) g(\sigma_n)$ 的类函数, 定义类函数 $\psi : S_n \to \Lambda_n$ 把 $C_{\mathbf{i}}$ 映到 $\prod (X_1^k + X_2^k + \cdots)^{i_k}$. 那么

$$\mathrm{ch} : R_n \to \Lambda_n, \ \mathrm{ch}(f) := \langle f, \psi \rangle_{S_n} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma) \psi(\sigma^{-1})$$

定义了分次 $\mathbb{C}$-代数 $(R = \bigoplus R_n, \bullet)$ 和 $\Lambda = \bigoplus \Lambda_n$ 间的同构. 特别地, 不可约表示 V_μ 的特征标 χ_μ 映到 *Schur* 多项式 S_μ, 故保护内积.

证明. 依定义, 展开诱导与 ⊠, 得到

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(f\bullet g)&=\langle \operatorname{Ind}_{S_m\times S_n}^{S_{m+n}}(f\boxtimes g),\psi_{m+n}\rangle_{S_{m+n}}=\langle f\boxtimes g,\operatorname{Res}_{S_m\times S_n}^{S_{m+n}}\psi_{m+n}\rangle_{S_m\times S_n}\\&=\langle f,\operatorname{Res}_{S_m}^{S_{m+n}}\psi_{m+n}\rangle_{S_m}\langle g,\operatorname{Res}_{S_n}^{S_{m+n}}\psi_{m+n}\rangle_{S_n}\\&=\langle f,\psi_m\rangle_{S_m}\langle g,\psi_n\rangle_{S_n}=\operatorname{ch}(f)\operatorname{ch}(g).\end{aligned}$$

然后为了证明 $\operatorname{ch}(\chi_\mu)=S_\mu$, 记 $|\mu|=n$, 利用命题前的恒等式.

$$\operatorname{ch}(\chi_\mu)=\left\langle \chi_\mu,\sum_{p\le N,|\lambda|=n}\chi_\lambda\cdot S_\lambda\right\rangle_{S_n}=\sum_{p\le N,|\lambda|=n}\langle\chi_\mu,\chi_\lambda\rangle S_\lambda=S_\mu.$$

于是由于两侧都是单位正交基, 立刻得到内积同构. □

现在我们检查题述的两个现象. 首先是 $\wedge^kV$, 技巧是使用 **Pieri 法则**. 设 V_n 为 S_n 的 $n-1$ 维标准表示. 我们先考虑 $\wedge^kV_n$ 作为 $\mathbb{C}[S_n]$ 的一组基

$$\{(e_1-e_{i_1})\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}:2\le i_1<\cdots<i_k\le n\}.$$

倘若限制 S_n 到前 $n-1$ 个分量上得到 S_{n-1}, 并考虑 $\wedge^kV_n$ 的 S_{n-1}-子表示, 由

$$\{(e_1-e_{i_1})\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}:2\le i_1<\cdots<i_k\le n-1\}.$$

作为基生成, 则会发现它是 $\wedge^kV_{n-1}$, 即要求含 e_n 的项系数为 0 者. 再看

$$\{(e_1-e_{i_1})\wedge e_{i_2}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}\wedge e_n:2\le i_1<\cdots<i_k\le n-1\}.$$

作为 S_{n-1}-表示, 发现它同构于 $\wedge^{k-1}V_{n-1}$. 这样我们得知

$$\operatorname{Res}_{S_n}^{S_{n-1}}\wedge^kV_n\cong\wedge^kV_{n-1}\oplus\wedge^{k-1}V_{n-1}.$$

于是对 $n=|\lambda|$ 进行归纳. 假设小于 n 的时候表示对应的 Young 图都是那样, 根据 **Pieri 法则**, 限制到 S_{n-1} 相当于去掉一个方块. 而去掉一个方块后得到 $(n-k,1^{k-1})$ 和 $(n-1-k,1^k)$ 者必然从形状上形如它们的并, 即形如 $(n-k,1^k)$.

然后是检查转置 λ,λ' 导致表示间差一个 sgn, 在定义 a_λ,b_λ 时也用转置的填数方法. 这样

$$c_\lambda=\sum_{\sigma\in P,\tau\in Q}e_\sigma e_\tau\cdot\operatorname{sgn}\tau,\ \ c_{\lambda'}=\sum_{\sigma\in P,\tau\in Q}e_\sigma e_\tau\cdot\operatorname{sgn}\sigma.$$

这样为了证明命题, 只需检查对一族 $a_g\in\mathbb{C}$

$$\sum a_g g c_\lambda=0\iff\sum a_g\operatorname{sgn}g\cdot gc'_\lambda=0$$

而技巧是定义群同态 $\phi:\mathbb{C}[S_n]\to\mathbb{C}[S_n]$ 为 $e_\sigma\mapsto\operatorname{sgn}\sigma\cdot e_\sigma$. 则作用 ϕ 就转换上述式子.

然后下一个话题是**钩长**和表示的维数, 我们希望直接从 Young 图得出维数来.

定义 6.58. 对一个 *Young* 图中的格 $x \in \lambda$, 定义 x 的**钩长** $h(x)$ 为包括该格在内, 只往右或只往下能到达的格子数量, 我们以前面的 $\lambda = (6,6,4,3,1)$ 为例, 其钩长如下图示.

10	8	7	5	3	2
9	7	6	4	2	1
6	4	3	1		
4	2	1			
1					

而整个 *Young* 图的**钩长**指每格钩长的乘积, 记作 $h(\lambda)$. 而若 x 在第 i 行第 j 列, 则定义 $c(x) := j - i$ 为 x 的**内容**, 它是 *content* 的翻译, 笔者想不到更好的翻译了.

然后我们引入数个恒等式.

引理 6.59. 设 λ 行数 p, 对 $n \geq p$ 记 $\rho = (n-1, n-2, \cdots, 0), \mu = \lambda + \rho$, 下面求和 $x \in \mathrm{YD}(\lambda)$ 指对 λ 全体格子进行:

$$\sum_{x \in \mathrm{YD}(\lambda)} t^{h(x)} + \sum_{i<j} t^{\mu_i - \mu_j} = \sum_{i \geq 1} \sum_{j=1}^{\mu_i} t^j.$$

证明. 这其实就是观察第 i 行中 $1, 2 \cdots, \mu_i$ 的哪些数字在钩长 $h(x)$ 中出现, 我们声称 $\mu_i - \mu_j$ 对 $j > i$ 恰是那些没出现的. 这是因为一行中从右往左, 如果出现跨过了某个正整数, 必然是在底下不平整, 也就是碰到了其他行. 于是现在通过统计其他行带来的影响, 第 j 行会让 $\lambda_i - \lambda_j + (i - j) = \mu_i - \mu_j$ 不出现在钩长中, 于是得证. □

然后考虑用 t^n 代替 t 然后将式子除以 n, 这样对 n 求和就会得到

$$\prod_{x \in \mathrm{YD}(\lambda)} (1 - t^{h(x)}) = \frac{\prod_{i \geq 1} \prod_{j=1}^{\mu_i} (1 - t^j)}{\prod_{i<j} (1 - t^{\mu_i - \mu_j})}.$$

用类似的手法我们也能得到类似的恒等式,

$$\prod_{x \in \mathrm{YD}(\lambda)} (1 - t^{n+c(x)}) = \prod_{i \geq 1} \frac{\prod_{j=1}^{\lambda_i + n - i} (1 - t)}{\prod_{j=1}^{n-i} (1 - t)}.$$

于是由 Vandermonde 行列式, Schur 多项式就有一个全新的表示

$$S_\lambda(1, q, \cdots, q^{n-1}) = \frac{A_{\lambda+\rho}(1, q, \cdots, q^{n-1})}{A_\rho(1, q, \cdots, q^{n-1})} = q^{\sum_{i \geq 1} (i-1)\lambda_i} \prod_{x \in \mathrm{YD}(\lambda)} \frac{1 - q^{n+c(x)}}{1 - q^{h(x)}}.$$

于是令 $q \to 1$ 就会得到 S_λ 代入 n 个 1 的表达式

$$S_\lambda(\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{n}) = \prod_{x \in \mathrm{YD}(\lambda)} \frac{n + c(x)}{h(x)}.$$

推论 6.60 (钩长维数公式)**.** 对任意 λ 有 $\dim V_\lambda = |\lambda|!/h(\lambda)$.

证明. 在 $\infty \times n$ 的 **Cauchy 第二恒等式**中代入 $Y_1 = \cdots = Y_n = T/n$, 得到

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1+X_iT/n)^n = \sum_{p\leq n} S_\lambda(X_1,\cdots)S_{\lambda'}(\underbrace{T/n,\cdots,T/n}_{n},0,\cdots).$$

于是利用 S_λ 代入一堆 1 的计算以及齐次性, 我们立刻得到

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1+X_iT/n)^n = \sum_{p\leq n} S_\lambda(X)\left(\frac{T}{n}\right)^{|\lambda|}\prod_{x\in\mathrm{YD}(\lambda)}\frac{n+c(x)}{h(x)}.$$

观察它的 $T^{|\lambda|}$ 系数, 令 $n\to+\infty$, 就得到奇妙的结果

$$\frac{H_1^{|\lambda|}}{n!} = \sum_{|\mu|=|\lambda|}\frac{1}{h(\mu)}S_\mu(X).$$

因为 $H_1^{|\lambda|}$ 对应 $S_{|\lambda|}$ 上幺元取 1 其他处取 0 的类函数. 于是它和 S_λ 的内积就是 $\dim V_\lambda$ 除以 $|\lambda|!$, 从右边的求和看出这内积正是 $1/h(\lambda)$. □

6.4.5 一些应用

【Schur Weyl 的补充】

Chapter 7

环簇（Toric Variety）

本章我们介绍代数几何的一些具体应用. 环簇是例子学的重要组成部分, 它们是一类很小但也很漂亮的代数簇, 也是所谓一般理论的肥沃试验田, 提供几何直观. 本章主要参考 [35], [36].

7.1 基础知识

7.1.1 代数环面与环簇的定义

定义 7.1. 仿射簇 $(\mathbb{C}^*)^n = \operatorname{Spec}\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \cdots, X_n^{\pm 1}]$ 在逐分量乘法下构成群概形, 称**环面**. $\mathbb{C}$-群概形 G 上的**特征**指一个群同态 $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$, 所有特征在乘法下构成一个交换群, 记作 $X^*(G)$. 通过计算不难检查 $(\mathbb{C}^*)^n \to \mathbb{C}^*$ 的同态与 $(\mathbb{Z}^n, +)$ 是一一对应的, 具体来说, 对 $m = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$, 相应的 $\chi^m := X_1^{a_1} \cdots X_n^{a_n}$, 为了验证这些是所有的特征, 只需检查 $\mathbb{C}[X^{\pm 1}] \to \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \cdots, X_n^{\pm 1}]$ 的乘法同态只能是 X 打到单项式, 若有多个项则考虑字典序前两大的单项乘积消不掉. 环面的所有特征构成与环面维数相同维数的自由交换群.

对仿射群概形 G, $X^*(G)$ 可看作 $\mathcal{O}_G(G)$ 的子集. 对环面 T, 验证 $\mathcal{O}_T(T)$ 等于群环 $\mathbb{C}[X^*(T)]$. 实际上任意群 G 上特征的集合总是线性无关的, 利用特征乘积是特征, 考虑最小的线性相关组即可推出矛盾. 环面上一个特征的核总是 $\mathcal{V}(X_1^{a_1} \cdots X_n^{a_n} - 1)$. 那么根据有限生成交换群的知识, 对于一族特征的交, 我们总可以取另一组基 $Y_1, \cdots, Y_n$（即 $\{Y_i\}$ 乘法上和 $\{X_i\}$ 可以互相表出）是 X_i 的单项式从而把这交写为 $\mathcal{V}(Y_1^{d_1} - 1, \cdots, Y_n^{d_n} - 1)$. 其中不可约者只有子环面, 即 d_i 只取 $0, 1$ 者, 这里利用了 $\mathbb{C}$ 是代数闭域的性质, 因为其中的 $Y^d - 1$ 总分裂.

> **命题 7.2.** (1) 两个环面间的群同态 $\Phi : T_1 \to T_2$ 将 T_1 的映为 T_2 中的闭环面.
>
> (2) T 是环面, $H \subset T$ 是不可约闭子簇, 且是子群, 则 H 是环面.

证明. 对于 (1), 注意对三个 $\mathbb{C}$-概形, $\operatorname{Mor}_{\mathsf{Sch}}(Z, X \times_{\mathbb{C}} Y) = \operatorname{Mor}_{\mathsf{Sch}}(Z, X) \times \operatorname{Mor}_{\mathsf{Sch}}(Z, Y)$ 于是容

易计算 Φ 和一个 $\dim T_1 \times \dim T_2$ 的整系数矩阵一一对应.

对于 (2), 考虑自然闭浸入 $H \hookrightarrow T$ 诱导商映射 $\varphi : \mathcal{O}_T(T) \to \mathcal{O}_H(H)$ 是满射. 我们来证明 $\mathcal{O}_H(H)$ 是一系列特征核的交, 映射 φ 限制在 $X^*(T) \subset \mathcal{O}_T(T)$ 上满射 $X^*(H)$, 因为 $\mathcal{O}_T(T) = \mathbb{C}[X^*(T)]$, 故 $X^*(H)$ 线性张成 $\mathcal{O}_H(H)$ 且由无关得 $\mathcal{O}_H(H) = \mathbb{C}[X^*(H)]$, 于是 $\operatorname{Ker}\varphi$ 是 $K = \operatorname{Ker}(X^*(T) \to X^*(H))$ 中特征的核的交. 一方面 $(\chi : \mathbb{C}[X^{\pm 1}] \to \mathcal{O}_H(H)) \in K$ 有 $(\chi(X) - 1) \in \operatorname{Ker}\varphi$ 因为 χ 在 H 上恒 1, 另一方面对 $s \in \operatorname{Ker}\varphi$ 说明它是 $\chi - 1$ 的线性组合, 其中 $\chi \in K$. □

定义 7.3. $\mathbb{C}$-群概形 G 上的**单参子群**指一个群同态 $\chi : \mathbb{C}^* \to G$, 所有单参子群在乘法下构成一个交换群, 记作 $X_*(G)$. 有自然双线性**配对映射** $\langle -, - \rangle = X_*(G) \times X^*(G) \to \mathbb{Z}$, 即复合 $\mathbb{C}^* \to G \to \mathbb{C}^*$, 然后自然地视 $X \mapsto X^n$ 为 $n \in \mathbb{Z}$. 容易检查对 $G = T$, 这即矩阵乘法.

定义 7.4. 考虑环面 T 作用在有限维 $\mathbb{C}$-线性空间 W 上, 准确地说, 给定群同态 $T \to \mathrm{GL}(W)$, 则对 $m \in X^*(T)$, 定义 $W_m := \{w \in W : tx = \chi^m(t)w\}$, 称为 W 的m-**特征子空间**.

命题 7.5. 环面 T 作用在有限维 $\mathbb{C}$-线性空间 W 上, 则总有 $W = \bigoplus_{m \in X^*(T)} W_m$.

证明. 设 $T = \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \cdots, X_n^{\pm 1}]$, $f(X_1, \cdots, X_n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} A_m X^m$, 其中 $A_m \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ 满足 $f(X_1Y_1, \cdots, X_nY_n) = f(X_1, \cdots, X_n) f(Y_1, \cdots, Y_n)$, 于是检查 $A_m^2 = A_m$ 对全体 m 以及 $A_m A_n = 0$ 对全体 $m \neq n$. 于是全体 A_m 可同时对角化为对角线上只有 $0, 1$ 的矩阵. 而且注意到 $f(1, \cdots, 1) = \mathrm{id}_W$ 因此 $\sum A_m = \mathrm{id}_W$ 而且分别为对应特征子空间的投影. □

准备工作完成, 现在我们可以定义环簇了.

定义 7.6. 一个**环簇**是指一个不可约 $\mathbb{C}$-代数簇 X, 一给定的 $\mathbb{C}$-环面 T 和开浸入 $i : T \hookrightarrow X$. 使得 T 在 T 自身的左乘作用 $m : T \times T \to T$ 可穿过 i 诱导 T 在 X 的作用 $\alpha : T \times X \to X$. 即如下两个图表交换（省略了 T 作用在 T 上的数据 m 需要符合的群条件）

$$\begin{tikzcd} T \times T \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\mathrm{id}_T \times i"'] & T \arrow[d, "i"] \\ T \times X \arrow[r, "\alpha"'] & X \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} T \times T \times X \arrow[r, "m \times \mathrm{id}_X"] \arrow[d, "\mathrm{id}_T \times \alpha"'] & T \times X \arrow[d, "\alpha"] \\ T \times X \arrow[r, "\alpha"'] & X \end{tikzcd}.$$

换言之, 能将 T 在 $T \hookrightarrow X$ 上的作用延拓为在整个 X 上的作用.

例 7.7. 我们来看数个仿射的例子.

(1) $C = \mathcal{V}(x^3 - y^2) \subset \mathbb{C}^2$, 其上的环面是 $\{(t^2, t^3) : t \in \mathbb{C}^\times\} = C - \{(0,0)\}$.

(2) $V = \mathcal{V}(xy - zw) \subset \mathbb{C}^4$, 其上的环面是 $\{(t_1, t_2, t_3, t_1 t_2 t_3^{-1} : t_i \in \mathbb{C}^\times)\}$.

(3) 一个稍不显然的例子. 考虑映射 $\Phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^{d+1}$ 为 $(s,t) \mapsto (s^d, s^{d-1}t, \cdots, st^{d-1}, t^d)$. 对于 $\mathbb{C}^{d+1}$ 中由 $\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{d-1} \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_d \end{bmatrix}$ 中所有二阶子式生成的理想 I, 不难观察有 $\Phi(\mathbb{C}^2) = \mathcal{V}(I)$, 由此

检查得知 Φ 是闭浸入. 其中的环面是 $\Phi((\mathbb{C}^*)^2) = \operatorname{Im}\Phi \cap (\mathbb{C}^*)^{d+1} \cong (\mathbb{C}^*)^2$. 后面我们会从射影的视角再观察这个例子.

上诸例中, 左乘 $(s^2, s^3), (s_1, s_2, s_3, s_1 s_2 s_3^{-1}), (p^d, p^{d-1}q, \cdots, q^d)$ 的作用总能延拓.

7.1.2 为严谨性献上礼炮: 来自凸分析的一些常识

考虑带内积 $(-,-)$ 的欧氏空间 V 和其中自对偶的完备格 $\Lambda = \Lambda^\vee$, 换言之要求 Λ 是 V 中一组单位正交基生成的格. 例如, 对环面 $T = (\mathbb{C}^*)^n$ 考虑典范的 $X^*(T) \cong X_*(T) \cong \mathbb{Z}^n$ 张成 $\mathbb{R}^n$.

定义 7.8. 有限子集 $S \subset V$, 定义 $\operatorname{Cone}(S) := \{x = \sum_{s\in S} \lambda_s s : \lambda_s \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ 为 S 生成的**锥**, $\operatorname{Conv}(S) := \{x = \sum_{s\in S} \lambda_s s : \lambda_s \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \sum_{s\in S} \lambda_s = 1\}$ 为 S 的**凸包**. 若锥 σ 满足 $\sigma \cap (-\sigma) = 0$ 则称 σ 是一个**强凸锥**. 若锥 $\sigma = \operatorname{Cone}(S)$ 对某 $S \subset \Lambda$, 则称 σ 是一个**Λ-有理锥**. 对 $v \in V$, 定义 $H_v := \{u \in V : (u, v) \geq 0\}$ 为一个**半空间**. 若 $v \in \Lambda$ 则称 H_v 为一个**Λ-有理半空间**.

引理 7.9 (Hahn-Banach)**.** 凸集 $C \subset V$ 以 0 内点, $x \notin C$. 则存在 $v \neq 0$ 使 $C - x \subset H_v$.

证明. 对 $y \in V$ 定义 Minkowski 泛函 $p(y) := \inf\{y/t \in C : t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$. 对非负实数 λ 显然有 $p(\lambda y) = \lambda p(y)$. 另外由凸性知 $p(y_1 + y_2) \leq p(y_1) + p(y_2)$, 任意 $\varepsilon > 0$ 总有 $(y_1 + y_2)/(p(y_1) + p(y_2) + 2\varepsilon)$ 是 $y_i/(p(y_i) + \varepsilon) \in C$ 系数 1 的凸组合.

现研究子空间 $V_x = \mathbb{R}x$ 上的线性函数 $f_x(x) = p(x)$ 那么 $f_x \leq p$ 在 V_x 上成立. 我们声称存在 V 上的线性函数 f 满足 $f|_{V_x} = f_x$ 且 $f \leq p$ 成立. 我们对 V 的维数归纳地定义此事, 一维显然, 对一般的可考虑包含 x 的余一维子空间 W, 归纳假设告诉我们已经有 W 上 f_W 是不超过 p 的 f_x 延拓, 对 $v \in V \backslash W$, 不妨取 $f(\lambda v + w) := c\lambda + f_W(w), w \in W$. 需符合的条件为

$$c\lambda + f_W(w) \leq p(\lambda v + w),\ \lambda \neq 0.$$

两边除以 $|\lambda|$, 记 $w' = w/|\lambda| \in W$, 得 $c + f_W(w') \leq p(v + w')$ 以及 $-c + f_W(w') \leq p(-v + w')$. 于是 $c \in \mathbb{R}$ 存在只需如下的不等式满足:

$$\sup_{w'\in W} f_W(w') - p(-v + w') \leq \inf_{w'\in W} -f_W(w') + p(v + w').$$

为此只需对任意 $w_1, w_2 \in W$ 成立着 $f_W(w_1) - p(-v + w_1) \leq -f_W(w_2) + p(v + w_2)$, 注意 $f_W(w_1) + f_W(w_2) = f_W(w_1 + w_2) \leq p(w_1 + w_2) \leq p(-v + w_1) + p(v + w_2)$ 即得证.

显然 $f \neq 0$, 于是设 $v \neq 0$, $f(y) = (-v, y)$, 这样 $(-v, x) = f_x(x) = p(x)$. 因为 $x \notin C$ 故 $p(x) \geq 1$. 那么 $(-v, x) \geq 1$ 且 $(-v, y) > 1$ 的区域与 C 不交, 故 $(-v, C - x) \leq 0$. □

引理 7.10. 设 σ 是锥且是闭集, 若 $x \notin \sigma$, 则存在 $v \neq 0$ 使 $\sigma \subset H_v, x \notin H_v$.

证明. 记 $W := \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \sigma$, 如果 $x \notin W$ 则结论显然, 否则可设 σ 有内点.
记 $C := \{y - z : y \in \sigma, \operatorname{dist}(x,z) \le \operatorname{dist}(x,\sigma)/2\}$ 是两个凸集的逐点差所以是凸集, 注意 $0 \notin C$ 且 C 有内点, 用 **Hahn-Banach** 取 $v \neq 0$ 使 $C \subset H_v$. 因为 $\{z : \operatorname{dist}(x,z) \le \operatorname{dist}(x,\sigma)/2\}$ 有界, 由此不难证明 $\sigma \subset H_v$, 由 $-x$ 中心的一个小球含于 H_v 立刻推出 $x \notin H_v$, 结论得证. □

定义 7.11. 对集合 $S \subset V$ 定义**对偶** $S^\vee := \{y \in V : (y,s) \ge 0, s \in S\}$.

命题 7.12. 若 S 是有限集, 记 $\sigma = \operatorname{Cone}(S)$, 则 $\sigma^{\vee\vee} = \sigma$ 且 $\sigma^\vee$ 也是有限生成的锥.

证明. 首先证明两次对偶是自己, 依定义不难证明 $\sigma \subset \sigma^{\vee\vee}$. 注意到 σ 是锥且是闭集, 若存在 $x \in \sigma^{\vee\vee}\backslash\sigma$, 则由**引理 7.10** 可取 v 使 $v \in \sigma^\vee$ 但是 $(x,v) < 0$ 这样 $x \notin \sigma^{\vee\vee}$ 矛盾.
然后是 $\sigma^\vee$ 有限生成, 首先用 $\operatorname{span}_{\mathbb{R}} \sigma$ 代替 V, 而且可要求 $\sigma \neq V$. 这样对 $x \in \sigma^\vee\backslash\{0\}$ 如果定义 $S_x := \{s \in S : (s,x) = 0\}$, 即哪些 s 真正起到了限制 x 的作用, 总有 $S_x \subsetneq S$ 且由**引理 7.10** 知 $\sigma^\vee$ 非零. 现 $\{S_x : x \in \sigma^\vee - \{0\}\}$ 在包含下构成偏序, 考察全体极大元的有限集 $\mathcal{S}$.
首先指出对任意 $S' \in \mathcal{S}$, 使得 $S' = S_x$ 的 x 都只差一个正常数倍, 而且这个一维子空间正是 $I_{S'} := \bigcap_{s' \in S'} \{y : (y,s') = 0\}$. 实际上若不共线的 x_1, x_2 使 $S_{x_1} = S_{x_2} = S'$, 则考察 $x(\lambda) = x_1 + \lambda x_2$, 显然 $(x(\lambda), s') = 0, s' \in S'$. 总存在一个合适的 λ 使存在 $s_0 \in S - S'$ 满足 $(x(\lambda), s_0) = 0$ 且 $(x(\lambda), s'') \ge 0$ 对其他 $s'' \in S - S'$, 显然 $0 \neq x(\lambda) \in \sigma^\vee$ 从而与 S' 的极大性矛盾. 而且若 $I_{S'}$ 的维数大于 1, 则 x_1 存在一个邻域使其中的点 x_2 总成立着 $(x_2, s'') > 0$ 对 $s'' \in S - S'$, 于是 $I_{S'}$ 与该邻域的交总存在与 x_1 不共线的 x_2 而矛盾.
其次我们指出这有限多个满足 $S' = S_x$ 对 $S' \in S$ 的 x 生成的锥是 $\sigma^\vee$. 倘若它们无法张成, 说明存在一个 $x' \in \sigma^\vee$ 不是它们的非负线性组合, 不妨设 x' 是符合上述条件中 $S_{x'}$ 极大的, 取 $S_{x'} \subsetneq S_x \in \mathcal{S}$, 那么 x' 与 x 不共线, 于是考察 $x(\lambda) = x' + \lambda x$, 用与先前一样的技术, 可推出与 $S_{x'}$ 不极大而矛盾. 于是 $\sigma = \sigma^{\vee\vee}$ 正是这有限多个 H_x 的交. □

定义 7.13. 在 $\operatorname{span}_{\mathbb{R}} \sigma = V$ 且 $\sigma \neq V$ 时, 称使得 $S' = S_x \in \mathcal{S}$ 的这有限多个 $(\mathbb{R}x)^\perp \cap \sigma$ 为 σ 的**面**. 实际上从构造看出没有 x 能由其他 $\sigma^\vee$ 中者生成, 换而言之这组 x 是 $\sigma^\vee$ 的最小（唯一极小）生成元组. 所以去掉任意 x 都严格使得 $\sigma^\vee$ 变小, $\sigma^{\vee\vee} = \sigma$ 变大.

推论 7.14. (1) V 的子集 σ 是有限生成的锥当且仅当它是有限个半空间的交.
(2) 有限生成的有理锥 σ 是一组有理半空间的交.
(3) 若有限生成锥 $\sigma \neq 0$ 强凸则 σ 有最小生成元组. 称生成元为 σ 的**棱**.

证明. (1) 若 σ 是有限生成的锥, 则它是 $\sigma^\vee$ 生成元对应半空间的交. 反之若 σ 是有限个半空间的交, 则 $\sigma = \tau^\vee$, 其中 τ 是有限生成的锥, 于是 $\tau^\vee$ 是有限生成的锥. (2) 不妨设 $\operatorname{span}_{\mathbb{R}} \sigma = V$. 如果锥 $\sigma = V$ 则显然, 否则按照**命题 7.12** 中 $I_{S'}$ 的构造知 $\sigma^\vee$ 可取一组生成元, 对应解 $\mathbb{Z}$ 系数

齐次线性秩 $n-1$ 方程组, 从而可要求半平面有理. (3) σ 强凸, 不妨用 $\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\sigma$ 代替 V, 只需证明此时 $\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\sigma^\vee = V$, 否则 $\sigma^{\vee\vee}=\sigma$ 含 V 的真子空间矛盾. 另外 $\sigma^\vee$ 不会是全空间否则 $\sigma^{\vee\vee}=0$ 矛盾, 于是由**定义 7.13** 中的叙述, $\sigma^{\vee\vee}=\sigma$ 有极小生成元组, 结论得证. □

定义 7.15. 对有限生成锥 σ, 考虑 $\sigma^\vee$ 的一个生成元组 $\{v_1,\cdots,v_r\}$, 对任意 $I\subset\{1,\cdots,r\}$ 定义 $\sigma_I=\{y:(y,v_i)=0,i\in I;(y,v_j)\geq 0,\forall j\}$ 称 σ 的一个**物件**, σ 全体物件构成的集合称为 σ 的**骨架**, 记 $S(\sigma)$. 显然骨架是有限的, 且任意 $\sigma_I,\sigma_J\in S(\sigma)$ 有 $\sigma_I\cap\sigma_J=\sigma_{I\cup J}\in S(\sigma)$.

命题 7.16. σ 的骨架和 $\sigma^\vee$ 的生成元组选取无关.

证明. 记 $\sigma_v=\{y\in\sigma:(y,v)=0\}$, 我们声称 $S(\sigma)=\{\sigma_v:v\in\sigma^\vee\}$, 由此立刻看出与生成元的选取无关. 对每个 I 令 $v=\sum_{i\in I}v_i$ 则利用 $\sigma^{\vee\vee}=\sigma$ 易证 $\sigma_I=\sigma_v$. 反过来对每个 $v\in\sigma^\vee$, 将 v 写成 $\{v_i\}_{i=1}^r$ 固定的线性组合, 取 v_i 系数正者对应的指标 i 构成集合 I, 则 $\sigma_I=\sigma_v$. □

定义 7.17. 定义锥的**内部**, **边界**为它张成的欧氏子空间的子拓扑下的内点, 边界点集.

引理 7.18. 若 $\sigma=\operatorname{Cone}(\{v_i\}_{i=1}^r)$, 则一个点在 σ 内部当且仅当能写成 $\{v_i\}_{i=1}^r$ 的正线性组合.

证明. 不妨设 $V=\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\sigma$. 一个点能写成正线性组合那么它的一个邻域也在锥内. 反过来, 能写成正系数组合者是 σ 内部 (一个开凸集) 的一个稠密凸子集, 这只能是整个内部. □

命题 7.19. 对一个有限生成锥 σ. (1) σ 的面都是物件, 且骨架中恰低一维的物件都是面, 每个非 σ 的物件都含于某个面. (2) σ 的边界是它所有面的并. (3) 对每个 $y\in\sigma$, 存在包含 y 的 (包含关系下) 最小的物件 σ_I, 只需取 $I=\{i:(y,v_i)=0\}$. (4) 对每个 $\sigma_v\in S(\sigma)$ 有 $S(\sigma_v)=\{\sigma_w\in S(\sigma):\sigma_w\subset\sigma_v\}$. (5) 给定一个 $\sigma_I\in S(\sigma)$, $y\in\sigma$ 使包含 y 的最小物件为 σ_I 的那些 y 恰好构成 σ_I 的内部. (6) $S(\sigma^\vee)$ 和 $S(\sigma)$ 按照 $(\sigma^\vee)_w\in S(\sigma^\vee)$ 的内部任一点 v, 取 $\sigma_v\in S(\sigma)$ 的方式一一对应起来. 实际上这是两个偏序集的反同构.

证明. (1) 不妨设 $\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\sigma=V\neq\sigma$, 注意 σ 的面和 $\sigma^\vee$ 的棱是一一对应的. 注意到 $\sigma^\vee$ 中不能由非共线者生成的向量对应 σ 余一维的物件. 而任一个非零的 $v\in\sigma^\vee$, 考虑它写成棱的非负线性组合, 某个系数正的棱 w 能使 $\sigma_v\subset\sigma_w$. (2) 注意一个点在边界上当且仅当与某个 $\sigma^\vee$ 的非零向量内积为 0, 从而落在一个余一维的物件上, 于是由 (1) 得知当且仅当在某个面上. (3) 显然. (4) 注意 $\sigma_v^\vee$ 相当于比 $\sigma^\vee$ 多一个生成元 $-v$, 另外 $\sigma_v=\sigma_I$ 的物件 $(\sigma_v)_J$ 可要求 $\{v_j\}_{j\in J}$ 不含 $-v$ (若包含就去掉, 不影响), 于是 $(\sigma_v)_J=\sigma_{I\cup J}$. 反过来 σ 含于 σ_v 的物件 $\sigma_J=(\sigma_v)_J$. (5) 一方面由 (2) 知非内部的点都在面上, 另一方面由 (1) 和 (4) 知 σ 物件的面也是 σ 的物件. (6) 对 $(\sigma^\vee)_w$ 的两个内部点 v_1,v_2, 由**引理 7.18** 知它们都是 $(\sigma^\vee)_w$ 某生成元组的正线性组合, 因此一个点在 σ_{v_i} 当且仅当与整个 $(\sigma^\vee)_w$ 内积为 0, 于是对应相同的 σ_v, 从而映射良定. 然后只需由 (3) 和 (5) 检查

v 能取遍整个 $S(\sigma^\vee)$, 从而是满射, 并且映射两次后的物件显然包含自身, 且将序反转. 对于两个有限偏序集的一对映射, 满足这些条件容易证明同构. □

接下来是一种奇妙但是重要的看法, 把锥和幺半群联系起来.

定义 7.20. **幺半群**指带有二元运算 $+$ 的集合 S, 满足交换律, 结合律, 消去律和有零元.

命题 7.21 (Gordan 引理). 若 σ 是有限生成有理锥, 则 $\sigma\cap\Lambda$ 是有限生成幺半群.

证明. 设 σ 的一个生成元组 $u_1,\cdots,u_r\in\Lambda$. 考虑区域 $U=\mathrm{span}_{[0,1)}\{u_i\}$ 有界, 显然 $\Lambda_U:=U\cap\Lambda$ 是有限集. 任意 $v\in\sigma\cap\Lambda$ 考虑取整, 总能写作某 $w_1\in\mathrm{span}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}\{u_i\}$ 加上某 $w_2\in\Lambda_U$ 的形式 (注意 $v,w_1\in\Lambda$ 故 $v-w_1\in\Lambda$). 于是全体 $\{u_i\}$ 和 Λ_U 生成 $\sigma\cap\Lambda$. □

于是该定理告诉我们一个格中的有限生成幺半群和有限生成有理锥是一一对应的.
至此我们完成了必要的准备.

7.1.3 仿射环簇及各种等价定义方式

定义 7.22. 设环面 T, $\mathscr{A}=\{m_1,\cdots,m_s\}\subset X^*(T)$ 是有限子集, 定义 $\Phi_{\mathscr{A}}:T\to\mathbb{A}^s_{\mathbb{C}}$ 为 $\Phi_{\mathscr{A}}(t)=(\chi^{m_1}(t),\cdots,\chi^{m_s}(t))$, 则仿射环簇 $Y_{\mathscr{A}}$ 定义为 $\Phi_{\mathscr{A}}$ 像在 *Zariski* 拓扑下的闭包.

命题 7.23. 如上的 $Y_{\mathscr{A}}$ 是仿射环簇, 环面的特征格 $\mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\mathscr{A}$, 于是 $\dim Y_{\mathscr{A}}=\mathrm{rank}\,\mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\mathscr{A}$.

证明. 首先由**命题 7.2** 视 $\Phi_{\mathscr{A}}$ 作 $T\to(\mathbb{C}^*)^s$ 的群同态, 因此 T 的像是环面, 左乘自然地作用在其上. 注意到 **Chevalley 定理**告诉我们 $\mathrm{Im}\,\Phi_{\mathscr{A}}$ 是可构造集, 于是存在开集 $U\subset\mathbb{A}^s_{\mathbb{C}}$ 使得 $U\cap\mathrm{Im}\,\Phi_{\mathscr{A}}$ 是 U 中闭集, 这样 $U\cap\overline{\mathrm{Im}\,\Phi_{\mathscr{A}}}=U\cap\mathrm{Im}\,\Phi_{\mathscr{A}}$. 换言之 $\mathrm{Im}\,\Phi_{\mathscr{A}}$ 在 $\overline{\mathrm{Im}\,\Phi_{\mathscr{A}}}$ 中存在开子集, 结合闭点上的观察知 T 作用可迁, 即任意一个点总能迁入一个给定开集, 得知 $\mathrm{Im}\,\Phi_{\mathscr{A}}$ 在 $\overline{\mathrm{Im}\,\Phi_{\mathscr{A}}}$ 中是开集. 另外由 $\mathrm{Im}\,\Phi_{\mathscr{A}}$ 是环面不可约, 其闭包亦然. 从而 $Y_{\mathscr{A}}$ 是环簇. 其上的环面特征格由**命题 7.2** 的计算知显然是 $\mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\mathscr{A}$, 环面的 Krull 维数熟知是特征格的秩. □

定义 7.24. 对格 $L\subset\mathbb{Z}^s$, 我们定义它生成的**格理想**为全体 $l=(l_1,\cdots,l_s)\in L$ 对应的 $\prod_{l_i>0}X_i^{l_i}-\prod_{l_i<0}X_i^{-l_i}$ 在 $\mathbb{C}[X_1,\cdots,X_s]$ 生成的理想.

命题 7.25. 给定 $T,Y_{\mathscr{A}}$. 我们定义**环面理想**为 $\mathcal{I}(Y_{\mathscr{A}})\subset\mathbb{C}[X_1,\cdots,X_s]$. 注意 $T\to(\mathbb{C}^*)^s$ 自然诱导了 $\hat{\Phi}_{\mathscr{A}}:\mathbb{Z}^s\to X^*(T)$. 设它的核为 L, 我们声称 $\mathcal{I}(Y_{\mathscr{A}})$ 为 L 的格理想.

证明. 首先不难证明 $\mathcal{I}(Y_{\mathscr{A}})$ 包含全体 $b_l=\prod_{l_i>0}X_i^{l_i}-\prod_{l_i<0}X_i^{-l_i}$, 反过来沿用 **2.7 计算交换代数初探**中的术语和记号, 考虑 $\mathbb{C}[X_1,\cdots,X_s]$ 上不同单项式不相等的一个序, 若 $f\in\mathcal{I}(Y_{\mathscr{A}})$ 是不

在由诸 b_l 生成的理想中领项最小的. 考虑 f 代入 $X_i = t^{m_i}$ 是 0, 因此 $\mathrm{LT}(f) = X^\alpha$ 在代入过程中被消掉了, 这说明存在比 $\mathrm{LT}(f)$ 小的项 X^β, 它和 X^α 代入 $X_i = t^{m_i}$ 得到了相同结果, 注意到 $X^\alpha - X^\beta$ 在 b_l 生成的理想中, 这与 f 的最小性矛盾. □

命题 7.26. 若某格理想 I 是素的, 且由形如 $X^\alpha - X^\beta$ 者生成, 则它是某个 $Y_{\mathscr{A}}$ 的环面理想.

证明. 观察 $\mathcal{V}(I) \cap (\mathbb{C}^*)^s$ 是 $(\mathbb{C}^*)^s$ 的子群, 且不可约, 从而**命题 7.2** 推出 $T = \mathcal{V}(I) \cap (\mathbb{C}^*)^s$ 是环面. 投影到 $(\mathbb{C}^*)^s$ 的第 i 分量定义了 $\chi^{m_i} : T \hookrightarrow (\mathbb{C}^*)^s \to \mathbb{C}^*$, 不难检查对 $\mathscr{A} = \{m_1, \cdots, m_s\}$ 有 $\mathcal{V}(I) = Y_{\mathscr{A}}$ 于是由 **Hilbert 零点定理**得 $I = \sqrt{I} = \mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \mathcal{I}(Y_{\mathscr{A}})$. □

接下来我们来看从幺半群怎么定义环簇

命题 7.27. 给定环面 T, 设 $\mathsf{S} \subset X^*(T)$ 是有限生成幺半群. (1) 幺半群环 $\mathbb{C}[\mathsf{S}]$ 是有限生成 $\mathbb{C}$-代数且是整环. (2) $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\mathsf{S}])$ 是仿射环簇, 特征格为 $\mathrm{span}_{\mathbb{Z}} \mathsf{S}$. 若 S 的一个有限生成元组 $\mathscr{A} = \{m_1, \cdots, m_s\}$, 则 $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\mathsf{S}]) = Y_{\mathscr{A}}$.

证明. 考虑 $\pi : \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_s] \to \mathbb{C}[X^*(T)]$ 为 $X_i \mapsto \chi^{m_i}$, 检查映射的核为 $\mathcal{I}(Y_{\mathscr{A}})$, 像为 $\mathbb{C}[\mathsf{S}]$, $Y_{\mathscr{A}}$ 的坐标环 $\mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]/\operatorname{Ker}\pi \cong \operatorname{Im}\pi = \mathbb{C}[\mathsf{S}]$. 特征格由**命题 7.23** 知. □

命题 7.28. 每个仿射环簇都形如某个有限生成幺半群 $\mathsf{S} \subset X^*(T)$ 对应的 $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\mathsf{S}])$.

证明. 设 V 是含环 T 的仿射环簇, 含入 $T \hookrightarrow V$ 诱导了 $A = \mathcal{O}_V(V) \to \mathbb{C}[X^*(T)]$, 显然这是单射因为 T 在 V 中稠密. 现在作用 $T \times V \to V$ 表明子代数 $A \subset \mathbb{C}[X^*(T)]$ 在 T 的作用下稳定, 我们声称存在直和分解 $A = \bigoplus_{\chi \in A} \mathbb{C}\chi$. 记等式右边者为 A'. 显然 $A' \subset A$, 对于反过来者考虑 $0 \neq f \in A$, 记 $f = \sum_{m \in \mathscr{B}} c_m \chi^m$ 其中 $c_m \neq 0, |\mathscr{B}| < +\infty$. 考虑 $B = \mathrm{span}(\chi^m : m \in \mathscr{B})$, 于是 $f \in B \cap A$. 另一方面 $t \cdot \chi^m = \chi^m(t^{-1})\chi^m$, 这表明 B 是 T 作用下不变的进而 $B \cap A$ 亦然. 由**命题 7.5** 得知有特征子空间分解, 从而 $B \cap A$ 是特征张成的, 故 $f \in B \cap A$ 推出 $f \in A'$.
于是 $\mathcal{O}_V(V) = \mathbb{C}[\mathsf{S}]$ 其中 S 是 $\chi^m \in \mathcal{O}_V(V)$ 者生成的半群. 最后, 因为 $\mathcal{O}_V(V)$ 是 $\mathbb{C}$ 上有限生成的代数, 这些生成元只涉及 S 中有限多项, 因此 S 是有限生成的. □

至此我们可以总结, 如上各种方式都等价地定义了仿射环簇.

定理 7.29. 设 V 是仿射簇, 如下几个定义是等价的: (1) V 是仿射环簇, (2) $V = Y_{\mathscr{A}}$ 对某环面 T 和有限集 $\mathscr{A} \subset X^*(T)$, (3) V 是由形如 $X^\alpha - X^\beta$ 者生成的素格理想定义的仿射簇, (4) 某有限生成幺半群 $\mathsf{S} \subset X^*(T)$ 对应的 $V = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\mathsf{S}])$.

证明. **命题 7.23** 证明了 (2) $\implies$ (1); **命题 7.25** 证明了 (2) $\implies$ (3); **命题 7.26** 证明了 (3) $\implies$ (2); **命题 7.27** 证明了 (4) $\implies$ (2); **命题 7.28** 证明了 (1) $\implies$ (4). 具体的对应和作用方式按照前各个命题给出. □

注 7.30. 这里的 T 实际上不需要是预先给定好的, 任意格 Λ, $\mathbb{C}[\Lambda]$ 自然是环面.

7.1.4 仿射环簇的性质及态射

首先是一些涉及闭点的看法.

命题 7.31. $V = \operatorname{Spec}\mathbb{C}[\mathsf{S}]$, 那么下二者一一对应: (1) V 中的闭点, (2) 半群同态 $\mathsf{S} \to \mathbb{C}^\times$.

证明. 给定闭点 $p \in V$, 考虑将 $m \in \mathsf{S}$ 送到 $\chi^m(p) \in \mathbb{C}^\times$ 即可. 反过来给定 $\gamma : \mathsf{S} \to \mathbb{C}^\times$ 自然诱导非零 $\mathbb{C}$-代数同态 $\mathbb{C}[\mathsf{S}] \to \mathbb{C}$, 从而其核是一个闭点 $p \in V$. 具体的构造, 设 $\mathscr{A} = \{m_1, \cdots, m_s\}$ 生成 S, 记 $V = Y_{\mathscr{A}} \subset \mathbb{C}^s$. 检查 $p = (\gamma(m_1), \cdots, \gamma(m_s)) \in V$. 利用**命题 7.27** 不难检查 (1) 与 (2) 的构造形成了一一对应关系. □

这允许我们内蕴地定义环面在 V 的作用而无需放到某个 $\mathbb{A}^s_{\mathbb{C}}$ 中, 对 $t \in T$ 和闭点对应的 $\gamma : \mathsf{S} \to \mathbb{C}^\times$, 作用后得到的闭点对应的是 $\mathsf{S} \to \mathbb{C}^\times$ 的映射 $m \mapsto \chi^m(t)\gamma(m)$. 于是从此观点出发, 作用 $\alpha : T \times V \to V$ 诱导了 $\mathbb{C}[\mathsf{S}] \to \mathbb{C}[X^*(T)] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\mathsf{S}]$ 为 $\chi^m \mapsto \chi^m \otimes \chi^m$.

推论 7.32. V 是仿射环簇, (1) 若记 $V = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[\mathsf{S}])$, 则环面作用有不动闭点当且仅当 $\mathsf{S} \cap (-\mathsf{S}) = 0$. 此时有唯一不动点 $\mathsf{S} \to \mathbb{C}$ 定义为 $m \mapsto \begin{cases} 1, & m = 0; \\ 0, & m \neq 0 \end{cases}$. (2) 若记 $V = Y_{\mathscr{A}} \subset \mathbb{C}^s$, $0 \notin \mathscr{A}$, 则环面作用有不动闭点当且仅当 $0 \in Y_{\mathscr{A}}$. 此时有唯一不动点 0.

接下来是正规性.

定义 7.33. 一个格中的幺半群 $\mathsf{S} \subset \Lambda$ 称为**饱和的**, 指 $k \in \mathbb{Z}_+, m \in \Lambda, km \in \mathsf{S}$ 推出 $m \in \mathsf{S}$. 如下检查它饱和当且仅当 $\operatorname{span}_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \mathsf{S} \cap \Lambda = \mathsf{S}$. 假设饱和, 则对 $m \in \operatorname{span}_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \mathsf{S} \cap \Lambda$, 考虑 m 表示为 S 中尽量少元素的正线性组合, 那么涉及的元素一定线性无关. 注意考虑的点皆在某格中, 故系数皆正有理数, 从而 m 的一个正整数倍数落在 S 中, 于是由饱和可证 $m \in \mathsf{S}$.

命题 7.34. V 是仿射环簇, 环面 T, 则 **TFAE**:
(1) V 正规, (2) $V = \operatorname{Spec}\mathbb{C}[\mathsf{S}]$ 其中 $\mathsf{S} \subset X^*(T)$ 是饱和有限生成幺半群.

证明. 先看 (1) $\implies$ (2), 此时 $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[\mathsf{S}]$ 在其分式域 $\mathbb{C}(V)$ 中整闭. 假设 $km \in \mathsf{S}$ 对某正整数 k, 则 χ^m 是环面上的多项式函数从而由稠密性知是 V 上有理的函数, 从而 $f = \chi^m$ 满足 $f^k = \chi^{km}$ 而由整闭知 $\chi^m \in \mathbb{C}[\mathsf{S}]$, 故 S 饱和. 再看 (2) $\implies$ (1), 因为 S 有限生成饱和, 故它是有限生成锥与格的交, 通过考虑它的面可以把它写成一系列半空间 H_v 的交, 设 $\mathsf{S} = \bigcap_{i=1}^r \mathsf{S}_i$, 其中 $\mathsf{S}_i = H_{v_i} \cap X^*(T)$, 则 $\mathbb{C}[\mathsf{S}] = \bigcap_{i=1}^r \mathbb{C}[\mathsf{S}_i]$, 因为分式域都是 $\mathbb{C}(T)$, 不难发现只需检查 $\mathbb{C}[\mathsf{S}_i]$ 皆整闭. 而不难得知它们都同构 $\mathbb{C}[Z_1, Z_2^{\pm 1}, \cdots, Z_n^{\pm 1}]$. □

实际上, 一个面对应的半空间 $\mathbb{C}[\mathsf{S}_i]$ 是 $\mathbb{C}[\mathsf{S}]$ 在任意一个该面内部的多项式处的局部化 (这是组合上容易检查的). 注意到正规性是局部检查的, 所以上述命题其实是自然的.

推论 7.35. 仿射环簇的完备化即取该幺半群的饱和化, 即生成一个锥然后再与格相交.

然后是比正规性更强的条件光滑性, 于是只需研究饱和者.

引理 7.36. 一个强凸, 维数满的有理锥 $\sigma \subset \mathbb{R}\Lambda$, 则它对应的环簇在环面作用下有唯一的不动 $\mathbb{C}$-点, 设它对应着极大理想 $\mathfrak{m} = \langle \chi^m : m \in \mathsf{S}\backslash\{0\}\rangle$, 那么此时 $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 等于 $\mathsf{S} - 0$ 中不能写成 $\mathsf{S} - 0$ 中两个元素和形式的元素数量.

命题 7.37. 一个强凸, 维数满的有理锥 $\sigma \subset \mathbb{R}\Lambda$ 对应的环簇光滑当且仅当它的棱的生成元构成 Λ 的 $\mathbb{Z}$-基, 该环簇必同构于 $\mathbb{C}^d$. 注意到 $\mathbb{C}$-有限型代数 R 对应仿射簇光滑当且仅当 $R[X]$ 对应的仿射簇光滑. 故一般的锥对应的环簇光滑当且仅当它同构于 $\mathbb{C}^m \times (\mathbb{C}^\times)^n$.

证明. 对强凸的 d 维满维数情形, $\mathsf{S} - 0$ 中不能写成两个元素和形式的元素会包含所有棱的格点生成元. 说明棱的生成元恰有 d 个且线性无关, 它们将是全部的非两个元素和者. 倘若它们不是 Λ 的一组 $\mathbb{Z}$-基, 则它们不生成 S 但是非两个元素和者会生成 S 故矛盾. □

接下来研究态射.

定义 7.38. 两个环簇 V_1, V_2, 假设它们的环面是 T_1, T_2. 则它们间的态射 $\phi : V_1 \to V_2$ 指的是一个 $\mathbb{C}$-代数簇态射, 满足 $\phi(T_1) \subset T_2$ 且 $\phi|_{T_1}$ 是一个 $\mathbb{C}$-代数群同态.

命题 7.39. (1) 对仿射环簇而言, 设 $V_i = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\mathsf{S}_i])$, 则 $\phi : V_1 \to V_2$ 是环簇映射当且仅当它是半群间同态 $\mathsf{S}_2 \to \mathsf{S}_1$ 诱导的环同态.
(2) 环簇态射是等变的, 即 T_1 在 V_1 上的作用被 ϕ 拉到 T_2 在 V_2 上作用.

证明. 对 (1), 因为环面正是 S_i 在 $\mathbb{Z}$-张成的格, 对应环面是群同态当且仅当格之间是态射, 所以当且仅当是 S_i 间半群同态. 对 (2), 注意 $T_1 \times T_1$ 在 $T_1 \times V_1$ 稠密, 故不难检查. □

最后我们观察环簇在取有限指数子格下的表现, 正规的情形是值得关心的. 设格 $\Lambda' \supset \Lambda$ 有限指数. $\sigma \subset \mathbb{R}\Lambda' = \mathbb{R}\Lambda$ 是满维数的锥, 于是 $R' = \mathbb{C}[\sigma \cap \Lambda'] \supset R = \mathbb{C}[\sigma \cap \Lambda]$, 对应环簇 $U' = \mathrm{Spec}(R'), U = \mathrm{Spec}\, R$. 这时设对偶群 $G := \mathrm{Hom}(\Lambda'/\Lambda, \mathbb{C}^\times)$, 再记 $T = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\Lambda]), T' = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\Lambda'])$ 我们就得到一个有趣的看法:

命题 7.40. (1) 有自然同构 $G \cong \mathrm{Ker}(T' \to T)$, (2) G 在 R' 上自然作用, $(R')^G = R$, (3) 由 (2) 诱导出 G 在 U' 上的作用和环簇态射 $U' \to U$, 得到 $\mathbb{C}$-点 G 轨道下 $U'/G \cong U$.

证明. 看 (1), 对正合列 $0\to\Lambda\to\Lambda'\to\Lambda'/\Lambda\to 0$ 作用 $\mathrm{Hom}(-.\mathbb{C}^\times)$ 得群正合列 $1\to G\to T'\to T\to 1$. 再看 (2), 现在 G 在 T' 自然左乘, 自然地在 R' 作用, 因为 $(\Lambda')^G=\Lambda$ 于是 $(R')^G=R$. 最后是 (3), 注意 $\mathbb{C}$-点对应 $\mathsf{S}\to\mathbb{C}^\times$ 的映射即可. □

实际上更加一般地, 上述 $U'/G\cong U$ 是所谓的 GIT 商. 我们可以简单观察一个具体的例子, σ 是第一象限, Λ' 是标准的格, Λ 是其中偶点, 此时 $R'=\mathbb{C}[s,t], R=\mathbb{C}[s^2,st,t^2]$, $G=\{\pm1\}$, G 作用在 R' 上为 $(s,t)\mapsto(-s,-t)$.

7.2 射影环簇, 凸多面体和扇

7.2.1 基本定义

很自然地, 我们用齐次理想定义射影簇, $\mathbb{P}^n$ 是自然的环簇, 其上具有环面 $[1:t_1:\cdots:t_n], t_1\cdots t_n\neq 0$. 而更加对称的写法是考虑 $\mathscr{M}_n:=\{(a_0,\cdots,a_n):a_0+\cdots+a_n=0\}$. 回忆仿射环簇的章节, 对 $\mathscr{A}=\{m_1,\cdots,m_s\}\subset X^*(T)$ 我们定义 $\Phi_{\mathscr{A}}:T\to\mathbb{C}^s$ 为 $t\mapsto(\chi^{m_1}(t),\cdots,\chi^{m_s}(t))$, $Y_{\mathscr{A}}$ 为它的像的闭包. 于是我们给出一个射影版本.

定义 7.41. 给定 $\mathscr{A}\subset X^*(T)$, 记仿射环簇 $X_{\mathscr{A}}$ 为 $T\overset{\Phi_{\mathscr{A}}}{\to}(C^\times)^s\overset{\pi}{\to}T_{\mathbb{P}^{s-1}}\subset\mathbb{P}^{s-1}$ 的像的闭包, 其中 π 为 $\mathbb{C}^s\backslash 0\to\mathbb{P}^{s-1}$ 诱导的自然投影. 类似仿射情形, 可定义环面理想为在 $\mathbb{C}^s$ 中的 $\mathcal{I}(X_{\mathscr{A}})\subset\mathbb{C}[X_1,\cdots,X_s]$, 而为了良定, 或者等价地 $\mathcal{I}(X_{\mathscr{A}})$ 齐次, 详见下面引理的条件.

> **命题 7.42.** 理想 $\mathcal{I}(X_{\mathscr{A}})$ 齐次当且仅当存在 $u\in X(T)$ 和正整数 $k>0$ 使得 $\langle m_i,u\rangle=k$ 对一切 $i=1,\cdots,s$. 我们已经得知 $\mathcal{I}(X_{\mathscr{A}})$ 是 $\mathbb{Z}^s\to X^*(T)$ 的核, 所以它对应的格理想齐次当且仅当核与 $(1,\cdots,1)$ 正交, 或者说 $\sum_{i=1}^s a_im_i=0$ 推出 $\sum a_i=0$, 取 $X(T)$ 一组基 $e_1,\cdots,e_n$. 现在 $(1,\cdots,1)$ 是 $(\langle m_1,e_j\rangle,\cdots,\langle m_s,e_j\rangle)$ 的有理线性组合. 即 $1=\langle m_i,\sum a_je_j\rangle$ 对一切 $i=1,\cdots,s$, 通分即得. 此条件下原问题良定, $\dim X_{\mathscr{A}}=\dim\mathbb{Z}\mathscr{A}-1$.

对上述射影环簇的一些仿射局部进行考察. 设 $U_i=\mathbb{P}^{s-1}\backslash\mathcal{V}(X_i)$ 含环面, 则 $V_i:=X_{\mathscr{A}}\cap U_i$ 显然是环簇, 进而是仿射环簇. 那么给定 $\mathscr{A}$, 记 $\mathscr{A}_i=\mathscr{A}-m_i$, 则不难检查 V_i 同构于 $\mathscr{A}_i$ 对应的环簇. 现在注意到 $\langle m,u\rangle=k$ 的条件告诉我们 $\mathscr{A}$ 的格点位于一个超平面上, 而且因为定义出的射影环簇只与上述映射的核有关, 因此一个射影环簇唯一对应一个超平面上的有理系数的点集. 而且不难检查对这个点集作平移与仿射变换不会改变我们定义出的环簇.

7.2.2 凸几何和射影环簇

定义 7.43. 一个**凸多面体**是欧氏空间中有限个点的凸包. 类似锥的棱, 面和物件, 我们也能自然地定义凸多面体的**顶点**, **面**和**物件**. 而且不难检查和定义它所用的锥的选择无关, 而且具有类

似的性质, 细节从略. 此外对格 Λ, 它 $\mathbb{R}$-张成的 d 维欧氏空间中的凸多面体 P, 我们引入一些定义. P 的顶点若都是格点则称**格点凸多面体**, P 只有 $d+1$ 个顶点则称**d-单形**, P 的面都是 $(d-1)$-单形则称**单纯多面体**, P 的顶点都由 d 个面交出则称**单多面体**.

实际上, 对欧氏空间中的凸多面体 $P \subset V$, 构建 V' 为 $V \times \mathbb{R}$, V' 的内积自然定义为 V 和 $\mathbb{R}$ 上标准内积相加, 考虑 $V = V \times \{1\} \subset V \times \mathbb{R}$, 锥 $C(P)$ 定义为 $P \times \{1\}$ 张成的锥, 这样一来 $V \times \{1\}$ 空间中的 $\langle x, y\rangle \gtreqless -1$ 的关系一瞬转化为 V 上内积 $\langle x, y\rangle \gtreqless 0$.

定义 7.44. 对一个含有原点 0 作为内点的 Λ 格点的凸多面体 P, 定义 P 的**对偶**为 $\Lambda^\vee$ 中的凸多面体 $P^\circ = \{u \in \Lambda^\vee : \langle m, u\rangle \geq -1, \forall m \in P\}$, 易知 $(P^\circ)^\circ = P$. 若 P° 也是格点凸多面体, 则称 P 是**反身**的.

定义 7.45. 格点凸多面体 P. 若对任意正整数 k, $k(P \cap \Lambda) = (kP) \cap \Lambda$ 则称 P 为**正规**的. 一个等价的描述是考虑锥 $C(P)$. 则 $C(P) \cap (\Lambda \times \mathbb{Z})$ 由 $P \times \{1\}$ 生成当且仅当 P 正规. 若对任意 P 的顶点 m, $(P \cap \Lambda) - m$ 是饱和的, 则称 P 为**极丰沛**的. 读者检查正规推出极丰沛.

命题 7.46. 假设格点凸多面体 P 维数为 $n \geq 2$, 则 $(n-1)P$ 总是正规的.

证明. 只需检查若 P 是无内点的 n-单形时, 命题成立. 对于一般的 P, 首先它的任一格点总在某 $n+1$ 个顶点形成的单形中, 技巧无非是考察正系数线性组合中元素数最少的, 于是化归到单形. 接下来注意有内点的单形可以利用内点分为 $n+1$ 个更小的单形, 于是对体积归纳即可.
对无内点单形 P, 记顶点 $m_0, \cdots, m_n$, 下检查 $k \geq n-1$ 时 $((k+1)P) \cap \Lambda = ((kP) \cap \Lambda) + (P \cap \Lambda)$. 对左式中的 m, 写 $m = \sum_{i=0}^n \mu_i (k+1) m_i$, 其中 $\mu_i \geq 0$ 且 $\sum \mu_i = 1$. 如果存在 $(k+1)m_i \geq 1$ 者则 $(m - m_i) + m_i$ 符合题意, 否则 $k = n-1$, $m_0 + \cdots + m_n - m$ 是内点矛盾. □

现在是时候将凸多面体的理论和射影环簇联系起来了.

定义 7.47. 对一个凸多面体 P, 任取其内部一点为原点 O 定义对偶 P°, 则 P° 的全体物件 O 张成的锥构成的集合被称为 P 的**法扇**, 记作 Σ_P. 不难检查 P° 的物件和 P 的物件在包含下反偏序, P° 中一个物件的 O 张成的锥其实同构于 P 中对应物件上任取一内点 O', P 由 O' 张成的锥的对偶. 由此得知 Σ_P 不依赖于 O 的选择.

上述定义中的细节具体计算检查如下, 设 P 中某物件 A 对应 P° 中的 B, 那么实则对 A 上任意点 v, $B = \{w \in \partial P^\circ : \langle w, v\rangle = -1\}$. 这时候 B 由 O 张成的锥为 $\{cw : w \in \partial P^\circ, c \geq 0, \langle w, v\rangle = -1\}$, 而 P 由 v 张成的锥为 $\{c(w-v) : w \in \partial P, c \geq 0\}$. 它对偶的锥包含了所有的 x 使 $\langle x, w\rangle \geq \langle x, v\rangle$, 若额外要求 $x \in \partial P^\circ$ 那么 x 与整个 ∂P 上点的内积, 与 v 要最小, 因为值域的最小值恰是 -1, 于是 $x \in \partial P^\circ$ 在对偶锥当且仅当与 v 内积为 -1.

定义 7.48. 那么对满维数 d 的格点凸多面体 $P \subset \Lambda$, 定义 P 关联的环簇为 $X_P := X_{(kP)\cap\Lambda}$, 其中正整数 k 使得 kP 极丰沛. 注意到 $\Sigma_{kP} = \Sigma_P$, 我们马上指出只要两个凸多面体的扇一样, 那么它们定义相同的环簇, 这样就检查了良定性. 显然这样定义出的环簇也是 d 维的.

引理 7.49. 对 $\mathscr{A} = \{m_1, \cdots, m_s\} \subset \Lambda$, 记 $P = \mathrm{Conv}(\mathscr{A})$ 为其凸包, J 为 P 的顶点指标集, 回忆我们用 U_j 记仿射片 $\mathbb{P}^{s-1} \backslash \mathcal{V}(X_i)$. 那么 $X_{\mathscr{A}} = \bigcup_{j\in J} X_{\mathscr{A}} \cap U_j$.

证明. 只需证明任意 i, $X_{\mathscr{A}} \cap U_i \subset X_{\mathscr{A}} \cap U_j$ 对某 $j \in J$ 即可. 注意到 m_i 都是 m_j 的非负有理系数和为 1 线性组合, 于是不妨设 $\sum_{j\in J} k_j(m_j - m_i) = 0$ 其中 k_j 都是非负整数. 这样对 $k_j > 0$ 有 $k_j(m_i - m_j) \in \mathsf{S}_i$, 于是取这样一个 j, $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\mathsf{S}_i]_{\chi^{m_j - m_i}} = \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\mathsf{S}_i]$, 计算得左边对应 $X_{\mathscr{A}} \cap U_i \cap U_j$, 右边对应 $X_{\mathscr{A}} \cap U_i$, 二者相等可得 $X_{\mathscr{A}} \cap U_i \subset X_{\mathscr{A}} \cap U_j$. □

定义 7.50. 一个一般的**扇** Σ 指欧氏空间中有限多个锥构成的集合, 满足 Σ 中每个锥都是强凸的有理锥, 而且 Σ 中每个锥的物件仍在 Σ 中, Σ 中两个锥的交必须是它们的物件. 我们用 $|\Sigma|$ 记 $\bigcup_{\sigma\in\Sigma} \sigma$ 称 Σ 的**支集**, 用 $\Sigma(r)$ 记 Σ 中 r 维物件的集合.

命题 7.51. 扇 Σ 按照如下分式决定一个环簇 X_Σ, 对锥 $\sigma \in \Sigma$, 定义仿射环簇 $U_\sigma = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap \Lambda]) = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\mathsf{S}_\sigma])$. 对 σ 的物件 τ, U_τ 是 U_σ 的局部化, 这些仿射簇粘出一个代数簇, 若 $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$, $\mathsf{S}_\tau = \mathsf{S}_{\sigma_1} + \mathsf{S}_{\sigma_2}$. 检查 $X_{\Sigma_P} \cong X_P$ 且是一个可分正规环簇.

证明. 只要检查 $\mathsf{S}_\tau = \mathsf{S}_{\sigma_1} + \mathsf{S}_{\sigma_2}$, 就会自然地得到概形的粘接. 右边含于左边是 $\sigma_1^\vee + \sigma_2^\vee = (\sigma_1 \cap \sigma_2)^\vee = \tau^\vee$, 左边含于右边是因为可取 $\tau^\vee$ 的内点 m, 对 $p \in \mathsf{S}_\tau$, 可设 $p = q - km$ 其中 $q \in \mathsf{S}_{\sigma_1}, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, 而 $-m \in \sigma_2^\vee$, 因此 $p \in \mathsf{S}_{\sigma_1} + \mathsf{S}_{\sigma_2}$. 然后可分性和正规性都是显然的, 前者因为有一系列仿射集使两两的交仍仿射, 后者是局部检查的. 最后 $X_{\Sigma_P} \cong X_P$ 是因为对极丰沛的 P, 半群仅依赖于它张成的锥, 于是这一粘接方式和射影的粘接方式完全一致. □

命题 7.52. 格点凸多面体 P, X_P 光滑当且仅当扇的每个锥都同构于一组基张成的锥.

习题 7.53. 对两个凸多面体 $P_1 \subset \mathbb{R}\Lambda_1, P_2 \subset \mathbb{R}\Lambda_2$. 自然地定义 $P_1 \times P_2 \subset \mathbb{R}\Lambda_1 \times \mathbb{R}\Lambda_2$ 是它们的笛卡尔积. 实际上若 P_1, P_2 极丰沛, 则 $P_1 \times P_2$ 也极丰沛, 而且 $X_{P_1\times P_2} \cong X_{P_1} \times X_{P_2}$, 对应的 $\Sigma_{P_1\times P_2} = \Sigma_{P_1} \times \Sigma_{P_2}$. 读者可以使用证明 *Segre* 嵌入类似的技巧直接证明此事.

7.2.3 一般正规环簇 *

回忆我们研究了一般的扇决定环簇的方法, 凸多面体定义的扇支集总是全空间, 实际上我们将证明这对应着环簇是射影的, 而一般的扇对应了全体一般的正规环簇.

7.3 环簇的除子和线丛

7.3.1 Weil 除子

7.3.2 Cartier 除子

7.3.3 射影环簇上的丰沛除子

7.3.4 典范除子

7.4 环簇的上同调理论

Chapter 8

局部类域论

8.1 Lubin–Tate 形式群理论

8.2 来点局部类域论

Chapter 9

习题

这里的习题只能算是一些补充内容, 它们并不是被精心编排的. 这些习题包含对正文内容的一些补完, 一些常见而有趣的现象和一些莫名其妙的碎碎念, 读者请慎重阅读.

9.1 交换代数

习题 9.1. 域 k, 未定元 X. (1) 证明 $k[\![X]\!]$ 不是有限生成 $k[X]$-代数. (2) 证明 $k(\!(X)\!)$ 中在 k 上代数的元素只有 k. (3) 检查当 $\operatorname{char} k = 0$ 时 $1+X$ 可以开 n 次方. (4) 检查当 $\operatorname{char} k = 0$ 时有拓扑群同构 $(Xk[\![X]\!], +) \cong (1 + Xk[\![X]\!], \times)$.

提示 9.2. (1) $k[\![X]\!]$ 作为 k-线性空间不可数维. (2) 不能有负项, 而考察最小系数非零项得 $Xk[\![X]\!]$ 中的元素也在 k 上超越. (3) 计算 $\left(\sum_k \binom{1/n}{k} x^k\right)^n = 1 + x$. (4) 考虑 $\exp, \ln$.

习题 9.3. 一个环的每个素理想都等于包含它的极大理想的交, 则称之 **Jacobson 环**.

(1) 证明一个环是 *Jacobson* 的当且仅当极大理想（闭点）集在素谱的任意闭子集上稠密.

(2) 若 R 不是 *Jacobson* 的, 则存在非极大素 $\mathfrak{p}$ 和 $f \notin \mathfrak{p}$ 使 $\mathcal{V}(\mathfrak{p}) \cap D(f) = \{\mathfrak{p}\}$, 于是 $(R/\mathfrak{p})_f$ 是域. 若 R 是 *Jacobson* 的, 任意非极大素 $\mathfrak{p}$ 和 $f \notin \mathfrak{p}$ 都有 $\mathcal{V}(\mathfrak{p}) \cap D(f)$ 是无限集.

(3) 若 R 是 *Jacobson* 环, f 不在其根理想, 则 R_f 也是 *Jacobson* 环, 且它的极大理想在局部化素理想对应下, 双射到 R 中不含 f 的极大理想.

(4) *Jacobson* 整环 R 上的有限生成代数 K 是域则 R 是域. 且生成元在 R 代数.

(5) *Jacobson* 环 R, A 是 R 有限生成代数, 则 A 是 *Jacobson* 的. 对 A 素理想 $\mathfrak{q}$, 记 $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R$. 则 $\mathfrak{q}$ 在 A 极大 $\iff K = \operatorname{Frac}(A/\mathfrak{q})$ 是 $k = \operatorname{Frac}(R/\mathfrak{p})$ 有限扩域 $\implies \mathfrak{p}$ 在 R 极大.

(6) 一个有无穷多素理想的一维 *Noether* 整环 R 是 *Jacobson* 的.

提示 9.4. **(1)** R 是 *Jacobson* 的当且仅当对每个根理想 I 和 $f \notin I$, 存在极大 $\mathfrak{m}$, $I \subset \mathfrak{m} \not\ni f$. **(2)** 非 *Jacobson* 者, 考虑根理想 I 使 $\mathcal{V}(I) \cap D(f)$ 不含闭点, 则 $(R/I)_f$ 的任意极大理想在 R

的原像, 是符合条件的 $\mathfrak{p}$. *Jacobson* 者, 设 $\mathcal{V}(\mathfrak{p})\cap D(f)=\{\mathfrak{p},\mathfrak{q}_1,\cdots,\mathfrak{q}_n\}$, 取 $a\in\bigcap_i\mathfrak{q}_i-\mathfrak{p}$ 于是 $\mathcal{V}(\mathfrak{p})\cap D(fa)=\{\mathfrak{p}\}$ 无闭点而与 (1) 相矛盾. **(3)** 前者由 (1) 显然, 后者设 $\mathfrak{q}=\mathfrak{p}R_f$ 在 R_f 极大, 若 $\mathfrak{p}$ 不极大则 $\mathcal{V}(\mathfrak{p})\cap D(f)$ 有无限多元素, 但是 $\mathfrak{q}$ 极大要求其只能为 $\{\mathfrak{p}\}$ 而矛盾.
(4) 引理 2.1 知没有超越元. 从而生成元都在 R 代数, 设 $f\in R$ 使整环 R_f 上的整扩张是域, 于是 R_f 是域, 由 (3) 知 R 是域. **(5)** 先看后者, 若 $\mathfrak{q}$ 极大, 域 K 是有限生成 $R/\mathfrak{p}$ 代数, 而 $R/\mathfrak{p}$ 是 *Jacobson* 的, 因此由 (4) 知. 反过来 $\operatorname{trdeg}_k((R-\mathfrak{p})^{-1}(A/\mathfrak{q}))=0$, 超越维数等于 *Krull* 维数说明 $\mathfrak{q}$ 在 A 极大. 再看前者, 若 A 不是 *Jacobson* 的, 由 (2) 取非极大素 $\mathfrak{q},f\notin\mathfrak{q}$ 使 $K=(A/\mathfrak{q})_f$ 是域, 且在 $R/\mathfrak{p}$ 上作为代数有限生成, 所以由 (4) 知 K/k 代数, 于是 $\mathfrak{q}$ 在 A 极大而矛盾. **(6)** 实际上对每个 $0\neq x\in R$, 包含它的极小素理想只有有限多个.

习题 9.5 (Grothendieck 广泛自由)**.** 设 R 是固定的非零既约环, 称一个 R-有限生成代数 A 是好的, 指对一切有限生成 A-模 M, 存在非零 $r\in R$ 使 A_r 是有限表现 R_r-代数, M_r 是有限表现 A_r-模且是自由 R_r-模. 通过下面数个步骤, 我们来证明每个有限生成 A-代数都是好的.

(0) 证明非零既约环局部化一个非零元还是非零既约环.

(1) 只需证明 R 好, 还有 A 好则 $A[x]$ 好即可推出命题. 对一般的有限生成 A, 设 $S=R[x_1,\cdots,x_n]$ 满射 A. 由于 S 好, 视 A 为 S-模, 局部化把 A 变成有限表现的. 再对 S-模 M 用条件, 设 M 是有限表现 S-模, 在 R 自由, 利用张量积正合检查 M 也是有限表现 A-模.

(2) 一个引理. 环 R 模 M 是一列子模升链 M_n 的并. 记 $M_0=0$. 对每个 n 有 M_{n+1}/M_n 自由, 则 M 自由. 考虑 $\bigoplus_n(M_n/M_{n-1})\to M$ 的自然映射. 归纳地证明它既单又满.

(3) R 好, 取 M_k 是前 k 者生成的子模, 对单生成情形, 若 $am=0,a\neq0$ 局部化 a 让 m 平凡.

(4) A 推 $A[x]$. 设 M 作为 $A[x]$-模生成元 $m_1,\cdots,m_n$. 设 $M_1:=Am_1+\cdots+Am_n,M_{k+1}:=M_k+xM_k$. 由 A 好, 局部化设 M_1/M_0 是有限表现 A-模, 自由 R-模. 现在考虑 A-模列

$$M_1/M_0\xrightarrow{\cdot x}M_2/M_1\xrightarrow{\cdot x}\cdots$$

显然每个映射都满, 取余极限 $N=\operatorname{colim}M_k/M_{k-1}$. 于是 $M_1/M_0\to N$ 满, N 有限生成, 用条件局部化 R 设 N 有限表现, 即 $\operatorname{Ker}(M_1/M_0\to N)=\bigcup_k\operatorname{Ker}(M_1/M_0\to M_k/M_{k-1})$ 有限生成. 故存在正整数 ℓ 使并到第 ℓ 步开始即相等, 这样从 $M_\ell/M_{\ell-1}$ 开始乘 x 都是同构.

(5) 现在 $M_1/M_0,\cdots,M_\ell/M_{\ell-1}$ 都是有限生成 A-模, 局部化 R 设它们是有限表现 A-模, 自由 R-模. 于是 M 是自由 R-模, 只需证明再局部化能让 M 成为有限表现 $A[x]$-模. 有限表现拿有限表现扩张还是有限表现, 可设 M 在 $A[x]$ 单生成. 只需验证 $A[x]$ 的任意理想在局部化后有限生成, 再取 $I=\operatorname{Ann}_{A[x]}(m)$, 这样 I 的生成元表现了 m 在模中的关系.

(6) 类似 *Hilbert* 基定理, 考虑 I 中元素首项系数的理想 $J\subset A$, 对 A/J 用 A 好, 局部化设 $J=(a_1,\cdots,a_m)$. 设 $f_i\in A[x]$ 最高次项为 $a_ix^{n_i}$, 再令 $N=\max\{n_i\},I_{\deg<N}=A[x]_{\deg<N}\cap I$.

于是对 $A[x]_{\deg<N}/I_{\deg<N}$ 用 A 好，局部化设 $I_{\deg<N}$ 作为 A-模有限生成，设生成元 $g_1,\cdots,g_c$ 于是 $I=(f_1,\cdots,f_m,g_1,\cdots,g_c)$，命题得证.

习题 9.6 (有限表现的内蕴性)**.** 假设 A 是有限表现 R-代数，换言之，A 是 R 上多项式环商掉有限生成理想. 证明任意 R 的多项式环 B 打满 A，映射的核都是 B 中的有限生成理想.

作为推论，B 是有限生成 R-代数都能证明核有限生成，因为可以再拿多项式环打满 B.

提示 9.7. 设 $\phi: R[X_1,\cdots,X_n]\to A$ 满射，核有限生成. 现在另一 $\psi: R[Y_1,\cdots,Y_m]\to A$ 满射 A，我们构造 $\alpha: R[X_1,\cdots,X_n,Y_1,\cdots,Y_m]\to R[X_1,\cdots,X_n]$ 为 $X_i\mapsto X_i$，而 Y_j 打到 $\psi(Y_j)$ 在 ϕ 下的任意一个原像，取定 α 后 $\lambda=\phi\circ\alpha: R[X_1,\cdots,X_n,Y_1,\cdots,Y_m]\to A$ 满射. 现在 $\operatorname{Ker}\alpha$ 由 $Y_j-\alpha(Y_j)$ 者生成，于是 $\operatorname{Ker}\lambda$ 由它们和 $\operatorname{Ker}\phi$ 者生成. 最后 $\operatorname{Ker}\lambda$ 打满 $\operatorname{Ker}\psi$，只需取 $\phi(X_i)$ 在 ψ 下的任意一个原像，就将 $\operatorname{Ker}\lambda$ 中的 X_i 打到这些原像来满射 $\operatorname{Ker}\psi$.

直观来说，设 $y_j:=\psi(Y_j), x_i:=\phi(X_i), y_j=g_j(x_1,\cdots,x_n)$，$x_i=f_i(y_1,\cdots,y_m)$，

倘若 $h_k(X_1,\cdots,X_n)$ 是 $\operatorname{Ker}\phi$ 的一组生成元，则 $h_k(f_1(Y_1,\cdots,Y_m),\cdots,f_m(Y_1,\cdots,Y_m))$，$y_j-g_j(f_1(Y_1,\cdots,Y_m),\cdots,f_m(Y_1,\cdots,Y_m))$ 就是 $\operatorname{Ker}\psi$ 的一组生成元.

习题 9.8. 设 M 是有限生成 A-模，$T: M\to M$ 是 A-模满自同态，证明 T 是同构.

从两种角度看待这个问题，第一，将 M 看作 $A[X]$-模，其中 $Xm:=Tm$ 于是 $M=XM$，然后使用 **Nakayama 引理**. 第二，首先设 A 是 *Noether* 环，那么 $\operatorname{Ker}T^n$ 是一列上升理想，设从 n 起相等. 假设 $f(x_1)=0$，那么 $x_1=f(x_2)=f^{(2)}(x_3)=\cdots=f^{(n)}(x_{n+1})$，现在 $x_{n+1}\in\operatorname{Ker}T^{n+1}=\operatorname{Ker}T^n$ 于是 $x=f^{(n)}(x_{n+1})=0$. 一般环 A 的情况，现在假设 $f(y_0)=0$，设 $x_1,\cdots,x_g$ 是 M 的生成元，由满射取 $f(y_i)=x_i$，记 $f(x_i)=\sum a_{ij}x_j, y_i=\sum b_{ij}x_j$. 现在 $B=\mathbb{Z}[a_{ij},b_{ij}]$ 是 *Noether* 环，$P=\operatorname{Span}_B\{x_1,\cdots,x_g\}$ 是有限生成 B-模且有满自同态 $P\to P$，从而 $y_0=0$. 第二个证明中的技巧也被称为 *Noether* 归约.

思考 A 是有限生成 R-代数，$T: A\to A$ 是 R-代数满自同态，此时 T 是否为同构？

习题 9.9 (Ax–Grothendieck)**.** 上一习题中的 *Noether* 归约技巧还能证明如下有趣的结果.

$P:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ 是一个多项式映射，若 P 是单的，证明 P 是满的. 首先将条件转化，$P:\mathbb{C}[Y_1,\cdots,Y_n]\to\mathbb{C}[X_1,\cdots,X_n]$，则 P 单射等价于 $P(Y)-P(Z)$ 在 $\mathbb{C}^{2n}$ 的零点不在不可约的 $x=y$ 以外，换言之 $(P(Y)-P(Z))$ 诸分量生成的理想的根理想，包含 $(Y-Z)$ 诸分量生成者，从而用简练的记号写，$(P(Y)-P(Z))\cdot Q(Y,Z)=(Y-Z)^s$；而不满等价于存在一个 $C\in\mathbb{C}^n$ 使 $(P(Y)-C)\cdot R(Y)=1$. 现在考虑环 A 是 $\mathbb{Z}$ 添加 P,Q,R,C 中涉及的有限多个复系数. 则 A 是 *Jacobson* 环（见**习题 9.3**），考虑 A 的任意极大理想 $\mathfrak{m}$，总有 $k:=A/\mathfrak{m}$ 是有限域. 把这些恒等式过渡到 $A/\mathfrak{m}$ 再解释回去，说明 $P: k^n\to k^n$ 是有限个点间单而不满的映射而矛盾.

习题 9.10 (线性不交扩域)**.** (1) 设域扩张 $E/k, F/k$. A) 存在域扩张 Ω/k 和嵌入 $k \hookrightarrow E, F \hookrightarrow \Omega$, 使得 $E \otimes_k F \to \Omega$ 是单射, 当且仅当 $E \otimes_k F$ 是整环, 此时称**线性不交**. B) 任意域扩张 Ω/k 和嵌入 $k \hookrightarrow E, F \hookrightarrow \Omega$, 总有 $E \otimes_k F \to \Omega$ 是单射, 当且仅当 $E \otimes_k F$ 是域.
(2) 若 E/k 或 F/k 是代数扩张, 则 A) 与 B) 等价, 否则 B) 总不成立.
(3) 检查 $\mathbb{Q}(x^2, x+\sqrt{2})$ 和 $\mathbb{Q}^a$ 在 $\mathbb{Q}$ 上并非线性不交, 检查 $\mathbb{Q}(x, \sqrt{1-x^2})$ 和 $\mathbb{Q}^a$ 在 $\mathbb{Q}$ 上线性不交, 两者非 $\mathbb{Q}$ 的元素都在 $\mathbb{Q}$ 上超越. 再观察 $E = \mathbb{Q}(2^{1/8}), F = \mathbb{Q}(2^{1/12})$, 证明它们对于 $\Omega = \mathbb{R}$ 的朴素嵌入和到 $\mathbb{C}$ 的嵌入 $2^{1/8} \mapsto 2^{1/8}e^{2\pi i/8}, 2^{1/12} \mapsto 2^{1/12}$ 得到完全不同构的 EF.

提示 9.11. (1) 域的子环是整环, 反过来若 $E \otimes_k F$ 是整环, 考虑 $\Omega = \mathrm{Frac}(E \otimes_k F)$. 域到域的非平凡映射总单, 反过来若 $E \otimes_k F$ 不是域, 设非平凡极大理想 $\mathfrak{m}$ 对应商域 Ω 即矛盾. (2) 对代数扩张只需检查 A) 推 B), 实际上单射只需检查比如 E/k 是有限代数扩张的情形. 现在 $E \otimes_k F$ 是有限维 F-线性空间且是整环从而是域, 因为不难检查乘法都是 F-单射. 对非代数扩张, 设 $t_1 \in E, t_2 \in F$ 是超越元, 考虑 $k(t) = k(t_1) = k(t_2)$ 认作同一个域, 取 Ω 为 $E \otimes_{k(t)} F$ 商一个极大理想, 即得矛盾.

下面数个习题和交换代数并无关系, 只是一些拓扑小练习. 谱空间, 谱映射定义见**定义 2.234**, 可构造集的定义见**定义 3.97**. 在 Stacks Project[10] 的第五章有较为完整的介绍.

习题 9.12 (可构造拓扑)**.** X 是谱空间. 我们定义 X_{cons} 为 X 考虑所有可构造集作为开集生成的拓扑, 称为可构造拓扑. 那么 (1) X_{cons} 比 X 更精细. (2) X 的可构造集恰好是 X_{cons} 中既开又闭的集合. (3) 对开集 $U \subset X$ 则 $U \hookrightarrow X_{\text{cons}}$ 诱导的拓扑正是 U_{cons}. (4) X_{cons} 是 *qcqs*（拟紧拟分离）, *Hausdorff*（即 T_2 分离）的, 而且它局部紧且完全不连通.

习题 9.13 (谱映射的刻画)**.** 设 $f : X \to Y$ 是谱空间的连续映射, 则 **TFAE**: (1) f 是谱映射, (2) $f : X_{\text{cons}} \to Y_{\text{cons}}$ 连续, (3) 每个可构造集的原像都可构造.

然后是两个技术性的习题.

习题 9.14. 设 X 拟紧且 *Kolmogorov*（T_0 分离）, 有在相交下封闭的拟紧拓扑基. 则 **TFAE**: (1) X 是谱空间, (2) X_{cons} 紧 *Hausdorff* 且有一个既开又闭的拓扑基, (3) X_{cons} 拟紧.

习题 9.15. 设 X 拟紧, $\mathcal{U}$ 是 X 的一族既开又闭的子集, 记 $X_{\mathcal{U}}$ 指 $\mathcal{U}$ 作为开集生成的 X 上的拓扑. 若 $X_{\mathcal{U}}$ 是 *Kolmogorov* 的, 那么 $X_{\mathcal{U}}$ 是谱空间且 $\mathcal{U}$ 中者拟紧, 且 $X_{\text{cons}} = X$.

提示 9.16. 首先是**习题 9.14** 中的三个等价. (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) 显然, 现在看 (3) $\Longrightarrow$ (1). 因为 X_{cons} 比 X 更精细, 因此 X 也拟紧. 然后是 *Sober*, 若 Z 无一般点, 则对任意 $z \in Z$, $\overline{\{z\}} \subsetneq Z$ 是真闭子集, 由题意取拟紧开 U_z 与 $\overline{\{z\}}$ 不交, 那么 $Z = \bigcup_{z \in Z}(Z \backslash U_z)$. Z_{cons} 下: $Z \backslash U_z$ 都是开集, 由 Z_{cons} 拟紧, 不难推出只需有限多个盖住而与 Z 的不可约性相矛盾.

然后是**习题 9.15**. 首先用 $\mathcal{U}$ 的所有有限交代替 $\mathcal{U}$, 因为 $X_{\mathcal{U}}$ 比 X 拓扑粗, 故 X 中拟紧者在 $X_{\mathcal{U}}$ 中亦然. 那么 $X_{\mathcal{U}}$ 已经拟紧而且 $\mathcal{U}$ 是拟紧拓扑基, 而且 *Kolmogorov*, 自然用**习题 9.14**, 只需证明 $(X_{\mathcal{U}})_{\mathrm{cons}} = X$ 就万事大吉. 不难验证 *Kolmogorov* 空间的可构造拓扑是 *Hausdorff* 的而且比 X 更粗, 因此 $\mathrm{id} : X \to (X_{\mathcal{U}})_{\mathrm{cons}}$ 是拟紧到 *Hausdorff* 的连续映射, 从而是同胚.

这几个习题完整了**定理 2.236** 证明 $\mathrm{Spv}\,A$ 是谱空间的证明.

接下来我们研究忠实平坦下降. 首先观察有限投射模的若干等价刻画:

习题 9.17 (有限投射)**.** 环 R 模 M, **TFAE**: (1) M 是有限生成的投射模, (2) 它是有限表现平坦模, (3) M 是一个有限生成自由 R-模的直和分量, (4) M 有限表现且对所有素理想 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ 有 $M_{\mathfrak{p}}$ 是自由 $R_{\mathfrak{p}}$-模. (5) 存在 R 中若干个主理想生成整个, 即 $f_1R + \cdots + f_nR = R$, 使诸 M_{f_i} 都是有限生成 R_{f_i}-自由模（思考代数几何意义）.

提示 9.18. 首先 (1) $\implies$ (3) $\implies$ (2) 显然. 对 (2) $\implies$ (5), 考虑 $\mathfrak{p}$, 需证明存在 f 使 $f \notin \mathfrak{p}$ 满足 M_f 是 R_f 自由的. 取 $x_1, \cdots, x_r \in M$ 映为 $M \otimes_R k(\mathfrak{p})$ 一组基, 由 **Cayley–Hamilton 技巧**, 存在 $g \in R \backslash \mathfrak{p}$ 使它们生成 M_g, 那么有限表现和平坦表明 $\varphi : R_g^{\oplus r} \to M_g$ 满足 $\mathrm{Ker}\,\varphi$ 是有限生成 R_g-模且 $\mathrm{Ker}\,\varphi \otimes k(\mathfrak{p}) = 0$. 一样取 $g' \in R_g$ 使 $(\mathrm{Ker}\,\varphi)_{g'} = 0$, 即 $M_{gg'}$ 自由.

这里的 **Cayley–Hamilton 技巧**: 设 $m_1, \cdots, m_d$ 为 M 的生成元组, 理想 I, 乘集 S 使得 $x_1, \cdots, x_r \in M$ 是 $S^{-1}(M/IM)$ 作为 $S^{-1}(R/I)$-模的生成元组, 则存在 $f \in S + I$ 使 $x_1, \cdots, x_r$ 是 M_f 作为 R_f-模的生成元组. 若 $I = 0$ 则取 m_i 用 x_i 表示的全体分母乘积即可. 对一般的 I, 由 $I = 0$ 情况取 $s \in S$ 使 $x_1, \cdots, x_r$ 生成 $(R/I)_s$-模 $(M/IM)_s$. 设 $N = Rx_1 + \cdots + Rx_r$ 则 $N_s + IM_s = M_s$, 于是 $I(M/N)_s = (M/N)_s$, 从而在这里左右观察 $m_1, \cdots, m_s$ 被 I 系数矩阵作用, 故存在 $a \in I$ 使 $1 + a$ 零化 $(M/N)_s$, 那么 $f = (1 + a)s$ 符合条件.

然后 (5) $\implies$ (4) 只需检查有限表现, 只需注意 $0 \to K \to A^r \to M \to 0$ 局部化得 $0 \to K_f \to A_f^r \to M_f \to 0$ 分裂, 因此诸 K_f 都有限生成, 故 K 有限生成. 最后是 (4) $\implies$ (1), 只需证投射, 即 $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ 正合, 注意 $N \to N' \to N''$ 正合等价于 $N_{\mathfrak{p}} \to N'_{\mathfrak{p}} \to N''_{\mathfrak{p}}$ 正合对所有 $\mathfrak{p}$. 有限投射条件由**引理 2.149** 推出 $\mathrm{Hom}_R(M, N)_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, N_{\mathfrak{p}})$, 而自由模是投射的.

习题 9.19 (忠实平坦下降)**.** 设 $R \to S$ 是忠实平坦环同态, 设 M 是 R-模, 那么 S-模 $M \otimes_R S$ 是有限生成的 (resp. 平坦的, 有限表现的, 有限投射的) 当且仅当 R-模 M 是有限生成的 (resp. 平坦的, 有限表现的, 有限投射的). 注意已知有限投射等价于有限表现平坦.

接下来观察一些关于平坦性的事实.

习题 9.20 (平坦的等价刻画)**.** 设 M 是 R-模, 则 **TFAE**:

(1) M 是平坦 R-模, (2) 对每个单射 $N \hookrightarrow N'$ 有 $N \otimes_R M \hookrightarrow N' \otimes_R M$ 也是单射, (3) 对每个理想 $I \subset R$ 有 $I \otimes_R M \to R \otimes_R M = M$ 是单射, (4) 把 (3) 中 I 改为全体有限生成理想.

作为推论, 平坦能局部检查: R-模 M 平坦当且仅当对每个 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ 都有 $M_{\mathfrak{p}}$ 是平坦 $R_{\mathfrak{p}}$ 模. 只需证 $I \otimes_R M \hookrightarrow M$, 等价于 $(I \otimes_R M)_{\mathfrak{p}} = I \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \hookrightarrow M_{\mathfrak{p}}$ 对每个 $\mathfrak{p}$, 而局部化平坦.

提示 9.21. 显然 (1) 推 (2) 推 (3) 推 (4), 我们只解释为何能用有限生成理想算一般的单射, 为证明 $\operatorname{Ker}(N \otimes_R M \to N' \otimes_R M) = 0$, 取其中元素, 只涉及有限项故设 N, N' 都有限生成. 设 $N' = R^{\oplus n}/L, N = L'/L$ 对某 $L \subset L' \subset R^{\oplus n}$, 若能证明 $L \otimes_R M \to M^{\oplus n}, L' \otimes_R M \to M^{\oplus n}$ 是单射, 则 $N \otimes_R M = (L' \otimes_R M)/(L \otimes_R M) \to M^{\oplus n}/(L \otimes_R M)$ 是单射.

只需证明 R-模 $L \subset R^{\oplus n}$ 诱导单射 $L \otimes_R M \hookrightarrow M^{\oplus n}$, $n = 1$ 是理想, 用余极限 (与张量积可交换) 从有限生成者过渡到一般的, 对 $n > 1$ 定义 $L_1 = L \cap (R \oplus 0^{\oplus(n-1)}), L_2 = L/L_1$ 则

$$\begin{tikzcd}
 & L_1 \otimes_R M \arrow[r] \arrow[d] & L \otimes_R M \arrow[r] \arrow[d] & L_2 \otimes_R M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & M^{\oplus n} \arrow[r] & M^{\oplus(n-1)} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

由归纳假设, 两边竖向箭头是单射, 于是由**蛇引理**中间的箭头也是单射.

习题 9.22. 诺特局部环 $(R, \mathfrak{m})$, M 是有限生成平坦 R-模, 则 M 是有限生成自由 R-模.

首先我们证明平坦的方程刻画, 对一般的环 R 模 M, 平坦等价于对 $r_i \in R, x_i \in M$ 使 $\sum_{i=1}^n r_i x_i = 0$, 存在有限族 $a_{ij} \in R$ 和 $y_j \in M$ 使 $\sum_{i=1}^n r_i a_{ij} = 0, \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j = x_i$. 记理想 $I = (r_1, \cdots) \subset R$, 考虑正合列 $0 \to K \to R^n \to I \to 0$, 张量 M 得 $0 \to K \otimes_R M \to M^n \to I \otimes_R M \to 0$. 由于 $I \otimes_R M \hookrightarrow M$, $\sum r_i \otimes x_i = 0$, 故由正合性 $(x_1, \cdots, x_n)$ 在 $K \otimes_R M$ 中.

上述刻画将零映射 $R \to R^n \to M$ 分解为零映射 $R \to R^n \to R^m$ 复合 $R^m \to M$. 换言之, 任意有限表现模 F 到 M 的映射穿过有限自由模. 详见下图表:

$$\begin{tikzcd}
R^p \arrow[r] \arrow[dr, "0"'] & R^n \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "\exists!"'] & 0 \\
 & R^m \arrow[r] & M &
\end{tikzcd}$$

反过来, 如果一个模满足此性质, 则有限自由模到 M 的映射在有限表现模到 M 的映射这滤系统中共尾, 由 M 是有限表现子模的滤余极限, 所以 M 是有限自由模的滤余极限而平坦.

两个小 *Remark*, 一是引出所谓的 **Lazard 判据**, 模平坦当且仅当它是有限自由模的滤余极限, 二是注意到上述刻画也能通过分解恒同映射证明有限表现平坦模是有限生成投射的.

回到原问题, 设 $n = \dim_{R/\mathfrak{m}} M/\mathfrak{m}M$. 设线性空间一组基在 M 原像为 $x_1, \cdots, x_n$, 则 **Nakayama 引理**保证 $f : R^n \to M$ 满, 只需证明 M 单. 若不然说明存在非零映射 $h : R \to R^n$ 使 $fh = 0$, 那么由方程刻画, 将 f 分解为 $\tilde{f} : R^n \to R^m$ 和 $g : R^m \to M$ 使 $f = g\tilde{f}, \tilde{f}h = 0$. 现在由于 R^m 自由且 f 满, 存在 $\tilde{g} : R^m \to R^n$ 使 $\tilde{g}\tilde{f} : R^n \to R^n$ 商 $\mathfrak{m}$ 后是同构, 于是 **Nakayama 引理**及习

题 9.8 保证 $\tilde{g}\tilde{f}$ 是同构，这样 $\operatorname{Ker}\tilde{f}$ 既是零（$\tilde{g}$）又非零（h）而矛盾.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend left, "0"] & R^n \arrow[r, shift left, "\tilde{f}"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & R^m \arrow[l, shift left, "\tilde{g}"] \arrow[r, "g"] & M \end{tikzcd}$$

而令人惊叹的事实在于，条件中的有限生成和诺特能去掉，即局部环上平坦模都是自由的. 所需的技巧为 *Kaplansky dévissage*（拧螺丝），本质上是超限归纳，详见 [10] 的 *10.85* 节.

习题 9.23. 证明 $n \geq 3$ 时 $A = \mathbb{R}[X_1, \cdots, X_n]/(X_1^2 + \cdots + X_n^2 - 1)$ 是 *UFD*.
首先指出 *Nagata* 判据，回忆环中元素 $a \in A$ 被称为素元指理想 (a) 是素的. 设整环 A 中乘集 S 全由素元生成，则对不可约元 $x \in A$, (1) $x \in S^{-1}A$ 是不可约元或单位，而且 (2) $x \in A$ 是素元当且仅当 $x \in S^{-1}A$ 是素元或单位. 作为推论 A 是 *UFD* 当且仅当 A 的任意元素能分解为不可约元的乘积（回忆此条件加上不可约元都是素元就能推出 *UFD*），且 $S^{-1}A$ 是 *UFD*.
Nagata 判据的证明朴素，留给读者. 原题 $X_n \in A$ 是素元，考虑 $A_{X_n} = \mathbb{R}[Y_1, \cdots, Y_n, Y_n^{-1}]/(Y_1^2 + \cdots + Y_{n-1}^2 - Y_n^2 + 1)$，其中 $Y_i = X_i/X_n, Y_n = 1/X_n$. 故只需证明 $B = \mathbb{R}[Y_1, \cdots, Y_n]/(Y_1^2 + \cdots + Y_{n-1}^2 - Y_n^2 - 1) \cong \mathbb{R}[Y_1, \cdots, Y_{n-2}, Z_{n-1}, Z_n]/(Y_1^2 + \cdots + Y_{n-2}^2 - Z_{n-1}Z_n - 1)$ 是 *UFD*，等价于 $B_{Z_{n-1}}$ 是 *UFD*，而这就是 $\mathbb{R}[Y_1, \cdots, Y_{n-2}, Z_{n-1}, Z_{n-1}^{-1}]$，命题得证.

习题 9.24. 若 *Noether* 环 R 中有理想 I 使得 $I^2 = I$，则 I 是主理想. 可以使用 **Krull 交定理**，$(1-r)I = 0$ 则 r 生成 I. 当然 R 不 *Noether* 时也有 I 不是主理想的例子，例如值群不离散的局部域，如 $\mathbb{Q}_p^a$ 的整数环，其中极大理想满足 $I^2 = I$ 但不是主理想. 若一般环 R 带有理想 $I^2 = I$，则称 R 为一个几乎代数.
接下来引入更多几乎数学

9.2 代数几何

习题 9.25. 若 $n > 2$，证明不存在 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ 打到 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ 中的曲线 $x^n + y^n = z^n$ 的支配有理映射.
同样的问题，考虑 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ 打到 $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ 中的 $y^2 = (x-a)(x-b)(x-c)$，其中 $a, b, c \in \mathbb{C}$ 互异.

引理 9.26 (Mason)**.** 设 $f, g, h \in K[X]$，用 $R(f)$ 表示 f 不同的不可约因子乘积，则对满足 $f + g + h = 0$ 的互素多项式，有 $\max\{\deg f, \deg g, \deg h\} \leq \deg R(f) + \deg R(g) + \deg R(h) - 1$.

提示 9.27. 对 *Mason* 引理，注意一个重要的等式 $\deg f = \deg\gcd(f, f') + \deg R(f)$，现在对 f, g, h 不妨设其中 h 次数最大，对 $f(f+g+h) = 0$ 求导得到 $f(f' + g' + h') = f'(f+g+h)$，变

形得 $P := g'f - f'g = h'f - f'h$. 由 f, g, h 互素, $\gcd(f, f'), \gcd(g, g'), \gcd(h, h')$ 都整除 P 且互素, 由此得到 $\deg\gcd(f, f') + \deg\gcd(g, g') + \deg\gcd(h, h') \leq \deg P \leq \deg f + \deg g - 1$. 于是应用重要的等式, 立刻得到欲证的结果. 接下来观察原习题:

转化为它们上不存在非平凡 $\mathbb{C}(t)$-点, 即不存在非常值有理多项式 $f(t), g(t), h(t)$ 使 $f(t)^n + g(t)^n = h(t)^n$, 不存在非常值的 $x(t), y(t)$ 使 $y(t)^2 = (x(t) - a)(x(t) - b)(x(t) - c)$, 前者对 $f^n, g^n, -h^n$ 使用 **Mason 引理**, 得到矛盾. 后者通过因子分析, 找到两个多项式 p, q, 得到 $q, p - aq, p - bq, p - cq$ 都是多项式的平方. 稍稍换元设 $q = u^2, p = v^2, p - q, p - cq$ 是平方, 于是 $u, v, u \pm \sqrt{c}v$ 还是平方, 从而无穷递降. 实际上这些多项式处理的技巧原本就是数论中解一些特殊 *Diophantine* 方程的技巧. 感谢多项式环是个 *Euclid* 整环, 这让问题变得容易.

习题 9.28. 由**命题 3.89** 知 $\mathbb{C}$-代数簇的支配有理映射与 $\mathbb{C}$-有限生成扩域的对偶范畴等价. 首先证明如下的引理, 然后观察后面的四个小问.

引理 9.29. 设 $u = r/s \in k(X)$ 使 $r, s \in k[X]$ 互素. 设 Z, W 是未定元, 证明 $P(Z, W) := r(Z) - Ws(Z)$ 不可约, 继而由 **Gauss 引理**, $P(Z, u) \in k(u)[Z]$ 不可约.

(1) 首先证明 $\mathrm{Aut}(k(X)/k) = \mathrm{PGL}(2, k)$. 即全体线性分式变换 $X \mapsto \frac{aX+b}{cX+d}, ad - bc \neq 0$. 提示是, 假设 $X \mapsto Y = r(X)/s(X)$, 其中 r, s 中有超过一次的多项式, 检查 $[k(X) : k(Y)] > 1$.

(2) 另一边观察到, 这些个自同构其实可以实现为 $\mathbb{P}^1_k$ 到自身的概形同构而无需取开子集, 实际上这样得到了 $\mathbb{P}^1_k$ 所有的自同构. 一种方法是用**命题 3.77** 证明两个整概形间的态射相同当且仅当作为有理映射等价, 化归为有理函数域的映射.

(3) 其次, 我们试图观察 $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ 的有限子群. 结合 $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\{\pm I\}$, 因此我们研究 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. 使用群表示中的求平均技巧, 总可以假设有一个 G-不变的内积, 这样在一个相似下转化为 $\mathrm{SU}(2)$ 的含 $\pm I$ 子群, 商掉后转化为 $SO(3)$ 的子群研究了, 于是根据 ADE 分类, 得知仅有 C_n, D_n, A_4, S_4, A_5 这些. 实际上 $\mathrm{SU}(2)$ 的有限子群只有 $C_n, \mathrm{Dic}_n, \mathrm{SL}(2, 3), \mathrm{SL}(2, 5)$ 和正方体的对称群. 既然 $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ 是 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ 挖掉一个点, 那么有限群只会将这个点迁移到有限个地方, 这意味着我们可以比如说, 在 $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ 上挖掉一些点, 让剩下的区域被一个有限群作用.

(4)(Lüroth) 考虑 $k \subsetneq K \subset k(X)$, 证明 K/k 是纯超越的, 即 $K = k(u)$ 对某超越的 $u \in k(X)$. 几何上, 即如果存在从 $\mathbb{P}^1_k$ 打到某 k-整代数簇 X 的支配有理映射, 则 X 必须双有理等价于 $\mathbb{P}^1_k$, 对于特征 0 的代数闭域 $k = \mathbb{C}$ 的情形说, 这在一维和二维是对的, 三维开始不然.

一维的提示是, 设 X 在 K 的极小多项式 $Q(Z) = Z^n + u_{n-1}Z^{n-1} + \cdots + u_0; u_i \in K$. 取下标 i 使 $u_i = r/s \notin k$, 其中 r, s 在 $k[X]$ 中互素, 检查 $Q(Z) | P(Z) = r(Z) - u_i s(Z)$, 同时 $P(Z) \in k(u_i)[Z]$ 不可约, 因此 $\deg P = \deg Q$, 从而 $k(u_i) \subset K, [k(X) : K] = [k(X) : k(u_i)]$.

(5) 与之相关的有一道有趣的 *Yau* 赛题, 对域 $\mathbb{F}_p \subset K \subset \mathbb{F}_p(X) =: E$ 满足 E/K 是 *Galois* 扩张（这里指有限可分正规）, 证明这些 K 都包含某最小者 K_0, 研究 $\mathrm{Gal}(E/K_0), [E : K_0]$ 及 K_0 的

具体形式. 实际上, 注意到 (1) 可知只有分式线性者才能是域自同构, 而 E 在全体分式线性变换构成的群 $G := \mathrm{PGL}(2, \mathbb{F}_p)$ 下的不动域一定包含在全体 K 中, 而且熟知对域 E 和有限自同构群 G 总有 E/E^G 是 *Galois* 的, 所以 $K = E^G$. 首先我们考虑元素

$$Y = \frac{((X^p - X)^{p-1} + 1)^{p+1}}{(X^p - X)^{p^2-p}} = \frac{(X^{p(p-1)} + X^{(p-1)(p-1)} + \cdots + X^{(p-1)} + 1)^{p+1}}{X^{p^2-p}(X^{p-1} - 1)^{p^2-p}},$$

因为它是关于 $X \mapsto aX + b$ 和 $X \mapsto 1/X$ 不变的（为什么）, 其中 $a \in \mathbb{F}_p^\times, b \in \mathbb{F}_p$, 从而由他们生成 $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{F}_p)$ 得知它含于 E^G. 其次注意次数得知 $[\mathbb{F}_p(X) : \mathbb{F}_p(Y)] = \#G = p(p^2 - 1)$ 故它只能是 E^G 而不能更小. 读者思考在一般的有限域上类似的结论是什么, 如何确定 K_0.

习题 9.30. 仿射概形间有限态射总射影. 检查单生成以及射影态射复合下封闭（*Segre* 嵌入）.

接下来我们考察一些和维数相关的话题.

习题 9.31. 考虑代数闭域 $k = k^a$, 证明对 $d > 3$, $\mathbb{P}_k^3$ 中的“大多数” d 次曲面（即由一条齐 d 次方程的零点切出的子射影概形）不包含直线. 准确地说, d 次曲线的参数空间是 $\mathbb{P}^{\binom{d+3}{3}-1}$, 存在其中一个 *Zariski* 开区域对应没有直线的曲面. 考虑

$$X := \left\{(H, \ell) : [\ell] \in \mathbb{G}(1,3), [H] \in \mathbb{P}^{\binom{d+3}{3}-1}, \ell \subset H\right\} \subset \mathbb{P}^{\binom{d+3}{3}-1} \times \mathbb{G}(1,3)$$

定义了一个闭子概形. 检查 X 是 $\mathbb{G}(1,3)$ 上的 $\mathbb{P}^{\binom{d+3}{3}-1-(d+1)}$-丛. 以 $x = y = 0$ 确定的直线为例, 曲面含它等价于曲面没有 $z^k w^{d-k}$ 的项, 换言之对 $d+1$ 个系数进行要求. 现在 $\dim \mathbb{G}(1,3) = 4$, $\dim X = \binom{d+3}{3} - 1 - (d+1) + 4$. X 投影到 $\mathbb{P}^{\binom{d+3}{3}-1}$, 只要 $d > 3$, X 像的维数小于等于 $\dim X$ 小于 $\dim \mathbb{P}^{\binom{d+3}{3}-1}$ 从而像只能真包含于一个 *Zariski* 闭集中.
上面的计算说明一次曲面上有至多二维的直线族, 二次曲面上有至多一维的直线族, 这些事实和代数闭域上光滑三次射影曲面上的 *27* 条直线遥相呼应.

习题 9.32 (纤维维数)**.** 交换代数中我们讲到几个涉及纤维维数的内容. 核心的定理是**定理 2.59(维数下界)**, **定理 2.81(下行条件下取等)**, 在这里我们有更加几何的观点.
(1) 对概形态射 $f : X \to Y$ 和 $x \in X$, 记 $\dim(x, f)$ 为 x 在纤维 $X_{f(x)}$ 中的高度.
(2) 现在我们能正确地翻译那两个交换代数定理了, 对**定理 2.59** 设 $f : X \to Y$ 为局部诺特概形间的映射, 那么对 $x \in X$, $\dim(x, f) \geq \operatorname{ht} x - \operatorname{ht} f(x)$. 对**定理 2.81** 用**定理 2.93**, 若存在 x 的一个开邻域（任意开邻域都存在其所有一般化）使 f 能素理想下行, 则上式可取等.
不过我们指出一点扩展, 当 X, Y 都是整 k-代数簇的时候任意 $y \in Y$ 纤维的不可约分支都至少 $\dim X - \dim Y$ 维的. 只需证明 y 纤维 X_y 的任意闭点 x 总有 $\operatorname{trdeg}_k k(x) = \operatorname{trdeg}_k k(y)$. 这是因为 X_y 是 $k(y)$-代数簇, 故由**习题 9.3(Jacobson 环)** 它的闭点 x 处 $k(x)$ 都是 $k(y)$ 的有限扩张, 故超越度一致, 再由**推论 2.88** 均维性可得此时 $\operatorname{ht} x - \operatorname{ht} y = \dim X - \dim Y$.

(3) 为观察一般的纤维维数, 我们先观察 $\pi : X \to Y$ 是整 k-代数簇间的 k-态射. 那么存在一个非空开集 $U \subset Y$ 使得任意 $\mathfrak{q} \in U$ 其纤维都是纯 $\dim X - \dim Y$ 维或空的.

先归约问题: 不妨依次设 $Y = \operatorname{Spec} B, X = \operatorname{Spec} A$ 仿射, π 支配 (不支配可取开集原像空). 此时整环间支配映射 $B \hookrightarrow A$ 诱导 $K(B) \hookrightarrow A \otimes_B K(B) \hookrightarrow K(A) \otimes_B K(B) = K(A)$. 再用维数理论: 现在由于 $K(A), K(B)$ 在 k 的超越度分别是 $\dim Y, \dim X$, 故 $K(A)$ 在 $K(B)$ 上的超越度为 $n = \dim X - \dim Y \geq 0$. 取一组超越基 $t_1, \cdots, t_n \in A \otimes_B K(B)$, 再从 B 局部化掉全体 t_i 分母乘积 t 得主开集 $U = \operatorname{Spec} B_t$ 代替 Y, $\pi^{-1}(U) = \operatorname{Spec} A_t$ 代替 X. 故得到 $f : X \to \mathbb{A}^n_k \times_k Y = \mathbb{A}^n_Y$ 以及 $g : \mathbb{A}^n_Y \to Y$. 下证明 $\pi : X \to Y$ 纤维总 n 维: 由**命题 2.71**, 知 f 拓扑满且满足素理想上行, 于是 π 的纤维维数完全对应于 g 的纤维维数 (可以证明 π 纤维中长度 ℓ 的链总能成为 g 纤维中长度 ℓ 者, 反之亦然, 因拓扑满故只需条件较弱的上行). 而 g 纤维纯 n 维是因为对应的环真的是域 $k(x)$ 上 n 元多项式环.

(4) 现在我们描述并证明纤维维数的上半连续定理. $\pi : X \to Y$ 是 k-代数簇间的态射, 则对任意 $\mathfrak{p} \in X$, $\pi(\mathfrak{p})$ 的 π 纤维在 $\mathfrak{p}$ 点的局部维数是在 X 上关于 $\mathfrak{p}$ 的上半连续函数, 换言之局部纤维维数小于 n 者构成 X 上的开区域.

只需证维数至少 n 者为闭集. 对 $d = \dim Y$ 归纳, $d = 0$ 即 Y 为离散点的情形显然. 一般地, 因为纤维是拓扑信息, 故**命题 3.73(4)** 知可取既约化而设 X, Y 既约. 然后因为闭集可以局部检查, 不妨设仿射, 取不可约分支 (因为只有有限多个) 故可设 X, Y 整. 然后因为 (3), 取 $U \subset Y$ 是开区域使原像均 n' 维, 结合 (2), 若 $n \leq \dim X - \dim Y$ 则得到整个 X, 否则注意到 $\dim(Y \backslash U)$ 是维数严格低于 Y 的闭集, 用 $Y \backslash U$ 代替 Y 从而可用归纳假设.

(5) 考虑 $\mathbb{A}^4_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ 映射 $(a, b, c, d) \mapsto (a, b, c) \times (b, c, d)$, 这里 $\times$ 表示外积. 这样 $(0, 0, 0)$ 纤维是二维的. 回忆**例 3.83**, 但是 $(1, 1, 1)$ 的纤维就形如 $c^2 + cd + d^2 = -1, b = -(c + d), a = d$.

习题 9.33. X 是诺特概形, $\mathcal{F}$ 是 X 上的拟凝聚层. 对每点 $x \in X$ 定义

$$\phi(x) := \dim_{\kappa(x)} \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \kappa(x).$$

试证明 (1) ϕ 关于 x 是上半连续函数. (2) 若 X 既约且 ϕ 是常函数, 检查 $\mathcal{F}$ 局部自由. (3) 给出非既约 X 和其上 $\mathcal{F}$, 使得 ϕ 是常数但 $\mathcal{F}$ 并不局部自由.

提示 9.34. (1) 需证对每个整数 n, $\{x : \phi(x) \geq n\}$ 是 X 中的闭集. 闭性是局部检查的, 故不妨设 $X = \operatorname{Spec} A$ 对应诺特环 A 而 $\mathcal{F}$ 对应一个有限表现 A-模 M. 对 $x = \mathfrak{p} \in X$, 有

$$\phi(x) = \dim_{\kappa(\mathfrak{p})} M \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}) = \dim_{\kappa(\mathfrak{p})} M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} \kappa(\mathfrak{p}) = \dim_{\kappa(\mathfrak{p})} M_{\mathfrak{p}} / \mathfrak{p} M_{\mathfrak{p}}.$$

由有限表现设 A-模短正合列 $A^s \to A^r \to M \to 0$. 其中 A^r 的 r 个分量分别打到 $m_1, \cdots, m_r$ 而 A^s 的 s 个分量分别打到 $(a_{1,1}, \cdots, a_{1,r}), \cdots, (a_{s,1}, \cdots, a_{s,r}) \in A^r$. 利用张量积右正合, 在上述正

合列中张量 $\kappa=\kappa(\mathfrak{p})$ 得 $\kappa^s\to\kappa^r\to M\otimes_A\kappa\to 0$ 正合, 那么 $\phi(x)\geq n$ 等价于 $m_1,\cdots,m_r$ 在 $M\otimes_A\kappa$ 中的像生成维数至少 n 的子空间. 换言之, κ^s 在 κ^r 中的像至多为 $r-n$ 维, 等价于矩阵 $(a_{i,j})$ 中的任意 $r-n+1$ 阶子 (行列) 式在 κ 中的像为 0, 或说位于 $\mathfrak{p}$ 中.

故 $\phi(x)\geq n$ 等价于 $\mathfrak{p}$ 含 $(a_{i,j})$ 的全体 $r-n+1$ 阶子式生成的理想, 即 x 位于某 X 中闭集.

(2) 给定 X 既约且 $\phi=c$ 为常数. 因结论是局部的不妨设 $X=\operatorname{Spec}A$ 对应既约诺特环 A 而 $\mathcal{F}$ 对应一个有限表现 A-模 M. 对 $x=\mathfrak{p}\in X$, 需找一个开邻域 $D(f)\ni x$ 使 M_f 是自由 A_f-模. 为此考虑 $M\otimes_A\kappa(\mathfrak{p})$ 的一族 $\kappa(\mathfrak{p})$-基 $m_1,\cdots,m_c$. 由 **Nakayama 引理**有 $\mathfrak{p}\in D(f)$ 使 M_f 由 $m_1,\cdots,m_c$ 的像作为 A_f-模生成元组. 用 A_f,M_f 代替 A,M, 现在 $A^c\to M\to 0$ 正合, 设核为 K. 我们利用 A_f 既约与常秩来证明 $K=0$. 若 K 中有非零元素 $(a_1,\cdots,a_c)$, 不妨设 $a_1\neq 0$ 则由既约得知存在 $\mathfrak{q}\in D(f)$ 使 $a_1\notin\mathfrak{q}$. 但在 $\kappa(\mathfrak{q})$ 处看得知 m_1 可由 $m_2,\cdots,m_c$ 表出而与秩为 c 矛盾.

(3) 对域 k 考虑环 $A=k[\epsilon]/(\epsilon^2)$ 及对应的模 $M=k$, ϵ 在 M 上零作用. 现在环 A 的谱只有一点 $x=(\epsilon)$ 故 ϕ 总是常数, 而此时局部自由等价于自由, 但是 M 显然不是 A-自由模, 因为有限生成 A-自由模的 k-维数总是偶数. 这个简单的例子体现出非既约带来的后果.

9.3 同调代数

习题 9.35 (滤替换)**.** 设 $\mathcal{I}$ 是滤 (小) 图表, 则存在一个滤偏序集 (小范畴) I 和函子 $H:I\to\mathcal{I}$, 满足: (1) 对任意范畴 $\mathcal{C}$ 和 $M:\mathcal{I}\to\mathcal{C}$ 若 $M\circ H$ 诱导的余极限 colim_I 存在, 则 M 诱导的余极限 $\operatorname{colim}_{\mathcal{I}}$ 存在且与之相等. (2) 对任意 $i\in I$, I 中打到 i 的元素只有有限多个.

若一个范畴 $\mathcal{F}$ 对象有限, 且可以由有限个箭头的复合生成, 则称之有限生成的, 若只有有限个箭头则称有限的. 设 ω 是有限序数构成的全序集, 乘积范畴 $\mathcal{I}\times\omega$ 显然也滤, 投影 $\Pi:\mathcal{I}\times\omega\to\mathcal{I}$. 若 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{I}\times\omega$ 中的有限子范畴, 容易给它补充一个终对象, 使它仍是有限的. 于是令 I 是所有 $\mathcal{I}\times\omega$ 中的有限子范畴在包含下构成的偏序, 对 $\mathcal{F}_1\subset\mathcal{F}_2\in I$, H 将 $\mathcal{F}_i$ 打到 $\mathcal{I}\times\omega$ 中的终对象再投影到 $\mathcal{I}$, 将 $\mathcal{F}_1\subset\mathcal{F}_2$ 打到 $\mathcal{F}_2$ 中两个终对象映射在 $\mathcal{I}$ 中的投影即可.

习题 9.36. 环 R 是整环但不是域, 证明 R-模 M 若同时是内射的和投射的, 则 $M=0$.

习题 9.37. 设 R 是一个 *PID*, 考虑任意 Mod_R 复形 $C_\bullet$, 证明总存在一个链 $D_\bullet$ 同时拟同构 $C_\bullet, H_\bullet(C)$, 其中 $H_\bullet(C)$ 为同调群按零链映射构成的链复形. 我们取 *Cartan–Eilenberg* 消解打到 $C_\bullet$, 由于是 *PID* 故消解只需取两项自由消解, 然后取 $D_\bullet$ 为消解的全复形. 现在 $D_\bullet$ 自由的条件就可以用上, 现在 $d_n:D_n\to D_{n-1}$ 是自由模打到自由模, 从而像自由然后分裂, 记有

$\operatorname{Im} d_n \to D_n$ 单射像为 P_n. 那么 $D_n = P_n \oplus K_n$, 其中 $K_n = \operatorname{Ker} d_n$. 这样就得到图表

$$\begin{array}{ccccc} P_{n+1} & & P_n & & P_{n-1} \\ \oplus & \searrow & \oplus & \searrow & \oplus \\ K_{n+1} & & K_n & & K_{n-1} \end{array}.$$

这样 $D_\bullet$ 就是一系列两项非零链复形的直和, 而对两项链复形来说这平凡. 于是导出范畴里, 设 K 是 $D^b(\mathsf{Mod}_R)$ 中的对象, 那么 $K \cong \oplus H^i(K)[-i]$. 见 *Stacks project* 0GM4.

9.4 其他话题

习题 9.38. 这是华老典型群一书 [28] 中介绍的奇妙技术, 我们研究 $\mathrm{SL}(2,K)$ 的自同构, 结论是其必形如 $A \mapsto P\sigma(A)P^{-1}$, 其中 $P \in \mathrm{GL}(2,K)$ 而 σ 是 K 的自同构 (逐分量作用).

(1) 首先证明一个引理, 两个非交换的幂幺 (特征值只有 1) 矩阵在 $\mathrm{GL}(2,K)$ 的相似下总能同时化到 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{bmatrix}$. 若已经化到 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, P\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}P^{-1}$. 设 $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}(2,K)$. 检查 $c \neq 0$ 否则二者交换. 其次 $a = 0$ 则符合条件. 否则用 $\begin{bmatrix} 1 & -c^{-1}a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 同时相似作用二者, 则转化为 $a = 0$ 的情形. 因此我们设该自同构将 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 分别映到 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{bmatrix}$.

(2) 设子群 $\Gamma_1 := \left\{\begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : s \in K\right\}, \Gamma_2 := \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix} : t \in K\right\}$. 因为此二者是 (1) 中两矩阵的中心化子, 所以它们在自同构下也不变. 现在考察 $W = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 在自同构下的像, 因为它的共轭作用互换 Γ_1, Γ_2, 而满足者条件的元素形如 $\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b^{-1} & 0 \end{bmatrix}$, 所以 W 的像必如此形. 注意

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

计算得 $b = \gamma = 1$. 现在矩阵群的自同构诱导了 $\Gamma_1 \cong K^+$ 的自同构. 设 $\sigma \in \mathrm{Aut}(K^+)$ 使

$\begin{bmatrix}1 & x\\0 & 1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}1 & \sigma(x)\\0 & 1\end{bmatrix}$, 用 W 共轭作用得 $\begin{bmatrix}1 & 0\\x & 1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}1 & 0\\\sigma(x) & 1\end{bmatrix}$. 于是

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}1 & -x\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\x^{-1} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\x & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x & 0\\0 & x^{-1}\end{bmatrix}\\ \Longrightarrow &\begin{bmatrix}1 & -\sigma(x)\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\\sigma(x^{-1}) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\\sigma(x) & 1\end{bmatrix} = A.\end{aligned}$$

因为全体共轭作用 Γ_1, Γ_2 保持不变者恰是对角矩阵, 所以 A 也是对角阵, 计算得 $\sigma(x)\sigma(x^{-1}) = 1$ 而且 $\begin{bmatrix}x & 0\\0 & x^{-1}\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}\sigma(x) & 0\\0 & \sigma(x^{-1})\end{bmatrix}$. 于是对角矩阵相乘得 $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$.

(3) 结合 $\Gamma_1, \Gamma_2, \begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}$ 生成整个 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_q)$, 证明原结论.

(4) 现在我们能讨论 $\mathrm{GL}(2, K)$ 的自同构了. 注意到除去 $K = \mathbb{F}_2$ 这一无聊情形（而 $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_2) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_2)$, 自同构我们已经明白）, 总有 $\mathrm{SL}(2, K)$ 为 $\mathrm{GL}(2, K)$ 的导群, 因此 $\mathrm{GL}(2, K)$ 自同构诱导了 $\mathrm{SL}(2, K)$ 自同构, 不妨先对 $\mathrm{GL}(2, K)$ 再取自同构 $A \mapsto \sigma^{-1}(P^{-1}AP)$ 而设 $\mathrm{SL}(2, K)$ 上是恒同. 观察 $A_\lambda := \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & \lambda\end{bmatrix}, \lambda \in K^\times$ 的像 C, 因为在 A_λ 的共轭作用下 $\mathrm{SL}(2, K)$ 映到自己, 考虑 Γ_1, Γ_2 不变性得知 C 是对角矩阵. 现在利用 $A_\lambda B A_\lambda^{-1} = CBC^{-1}$ 对一切 $B \in \mathrm{SL}(2, K)$, 解得 C 总是 A_λ 的常数倍, 设这个常数是 $c(\lambda)$.

(5) 于是利用 $A_\lambda A_{\lambda'} = A_{\lambda\lambda'}$ 得知 $c(\lambda)c(\lambda') = c(\lambda\lambda')$, 从而 $c \in \mathrm{Aut}(K^\times)$. 结合 $\mathrm{SL}(2, K), A_\lambda$ 生成 $\mathrm{GL}(2, K)$, 我们得知 $\mathrm{GL}(2, K)$ 的任意自同构形如 $A \mapsto c(\det A)P\sigma(A)P^{-1}$.

有趣的是, 这其中包括一些 $\mathrm{SL}(2, K)$ 自同构上退化的情形, 例如考虑共轭取逆, 这在 $\mathrm{SL}(2, K)$ 上体现为用 $\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}$ 共轭, 然而在 $\mathrm{GL}(2, K)$ 上必须再乘上行列式的乘法逆.

习题 9.39. 矩阵 $A, B \in M_n(F)$, B 是幂零矩阵, $AB - BA = A$, 证明 $A = 0$.

注意 $BA = A(B-I)$, 故 $0 = B^nA = A(B-I)^n$, B 幂零还推出 $B-I$ 可逆, 因此 $A = 0$, 这个计算的看法直接了当. 不过我们也有李代数的看法, 假如加一点好条件, 比如特征 0 代数闭, **Lie 定理**表明这个二维可解李代数的表示总是上三角的, 那么 B 对角线为 0 表明算子 $X \mapsto XB - BX$ 是幂零的, 所以 A 是其不动点推出 $A = 0$.

一个类似的问题是代数闭域上 $A, B \in M_n(F)$ 使得 $AB = 0$, 证明 A, B 可同时上三角化, 当然传统的方法是考虑 $0 \subset \operatorname{Ker} A \subset F^n$ 的不变旗加细, 利用 $\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Ker} A$, 于是两段分别只需 B 不变和 A 不变. 而一个李代数的看法是, 它们生成的李代数 $\mathfrak{g} = \operatorname{Span}_F B^iA^j$ 的导出列 $\mathfrak{g}^{(2)} = 0$ 于是可解, 从而可同时上三角化.

习题 9.40 (实数域上的李代数)**.** (1) 证明 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ 和 $\mathfrak{su}(2)$ 作为 $\mathbb{R}$-李代数不同构. 提示: 两者的 *Killing* 形一个负定一个不定. 但是它们基变换到 $\mathbb{C}$ 上就同构了. (2) 证明若实李代数 $\mathfrak{g}$ 的 *Killing* 形是正定的, 则 $\mathfrak{g}=0$. 提示: 考虑 ad 把 $\mathfrak{g}$ 单射入 $\mathfrak{o}(\mathfrak{g},\mathbb{R})$, 因为 $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}([z,x])\,\mathrm{ad}(y))+\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}[z,y])=0$. 于是在 *Killing* 形的一组标准正交基下 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ 都是反对称矩阵, 由此 $0\le \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(x))=-\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(x)^{\mathrm{T}}\,\mathrm{ad}(x))\le 0$, 这表明 *Killing* 形式恒 0 故只能 $\mathfrak{g}=0$.
接下来我们用一些小问介绍实李代数的基本理论. 在学过复的后能更好理解实的.
(3)

习题 9.41 (G_2 的构造)**.** 若

例 9.42 (中心列长度 2 的特例)**.** 这不是一道习题, 来自 [37]. 考虑一类有限维李代数 $\mathfrak{n}$, 满足 $\mathfrak{n}^2=[\mathfrak{n},[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]]=0$. 希望通过这个例子表现即便看起来最简单的幂零李代数都足够复杂.
给定简单无向图 $G=(\mathbf{V},\mathbf{E})$, 我们构造一个李代数 $\mathfrak{n}(G)$, 它作为 $\mathbb{C}$-线性空间, 由顶点集和边集 $\mathbf{V},\mathbf{E}$ 自由张成, 若存在 v,v' 的边 e 就定义李括号 $[v,v']=e$ (这相当于给边一个虚拟的定向, 但是后面的描述是和定向无关的) , 其他 $\mathbf{V}\cup\mathbf{E}$ 中两个元素李括号定义成 0. 现在对两个无向图 G,G' 若满足 $\mathfrak{n}(G)$ 同构 $\mathfrak{n}(G')$, 我们希望证明 G 同构于 G' (注意把 e 换成 $-e$ 能对应给出不同有向图定义的李代数同构) , 这样幂零李代数的种类已经不会比简单图少. 证明中我们会用到代数群的重要结论, 极大环面两两共轭. 这并不是初等的, 在这里我们承认它.
证明大致如下, 考虑 $\mathfrak{n}(G)=V\oplus(\wedge^2V/W)$ 其中 $V=\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\mathbf{V}$. 定义 $A(G)=\mathrm{Aut}(\mathfrak{n}(G),V)$ 表示 $\mathfrak{n}(G)$ 的 $\mathbb{C}$-李代数自同构群, 把 V 映到 V, 首先它是 $\mathrm{GL}(V)$ 中固定 W 的子群, 于是它是代数群. 接下来用 D_S 表示 $\mathrm{GL}(V)$ 中以 S 为基的对角子群, 显然 $D_S\subset A(G)$, 回到原问题.
设 $F:\mathfrak{n}(G)\to\mathfrak{n}(G')$ 同构, 记自然投影 $\pi:\mathfrak{n}(G')\to V'$, 考虑 $\mathbf{V}'':=\{\pi F(v):v\in\mathbf{V}\},\mathbf{E}'':=\{(\pi F(v),\pi F(w)):(v,w)\in\mathbf{E}\}$. 由于 $\mathbf{V},\mathbf{E}$ 是 $\mathfrak{n}(G)$ 的一组基及 F 是同构, 注意 $\wedge^2V'/W'=[\mathfrak{n}(G'),\mathfrak{n}(G')]$ 是一个内蕴的表示, 于是由维度知 $\mathbf{V}'',\mathbf{E}''$ 分别是 $V',\wedge^2V'/W'$ 的一组基.
观察 $D_{S''}\subset A(G')$. 注意 $\pi F(v)\wedge\pi F(w)=F(v)\wedge F(w)$, 故 F 诱导的 $A(G)\cong A(G')$ 将 D_S 带到 $D_{S''}$. 这时候极大环面的共轭性告诉我们存在 $\tau\in A(G')$ 使得 $D_{S'}=\tau D_{S''}\tau^{-1}$. 为了应用这一点, 利用 $\mathbb{C}$ 是无限域, 可以构造 $D_{S'}$ 中的一个元素 d', 记它在 $x\in S'$ 上作用为 $d'(x)=d'_xx$, 满足若 $x,y,z,w\in\mathbf{V}'$ 使 $d'_xd'_y=d'_zd'_w$ 则集合 $\{x,y\}=\{z,w\}$, 取 $d''\in D_{S''}$ 使 $d'=\tau d''\tau^{-1}$. 利用特征值互不相同可以构造一个双射 $f:\mathbf{V}'\to\mathbf{V}''$ 使 $d''(f(x))=d'_xf(x)$ 对一切 $x\in\mathbf{V}'$.
下声称 f 将诱导图 $G'=(\mathbf{V}',\mathbf{E}')$ 到 $G''=(\mathbf{V}'',\mathbf{E}'')$ 的同构. $(x,y)\in\mathbf{E}'$ 当且仅当 $[x,y]\neq 0$ 于 $\mathfrak{n}'$, $(f(x),f(y))\in\mathbf{E}''$ 当且仅当 $[f(x),f(y)]\neq 0$, 只需证 $[x,y]\neq 0$ 当且仅当 $[f(x),f(y)]\neq 0$. 注意 d',d'' 诱导 $\wedge^2V'/W'$ 的线性自同构, 且 d',d'' 全体特征值都形如 $d'_xd'_y$. 首先 $d'_xd'_y$ 是 d' 的特征值当且仅当 $[x,y]\neq 0$, 另一方面 $d''[\tau^{-1}(x),\tau^{-1}(y)]=[\tau^{-1}(d'(x)),\tau^{-1}(d'(y))]=d'_xd'_y[\tau^{-1}(x),\tau^{-1}(y)]$. 而由于 $\tau\in A(G')$ 故 $[x,y]\neq 0$ 当且仅当 $[\tau^{-1}(x),\tau^{-1}(y)]\neq 0$. 因为 $d'_xd'_y$

互不相同, 有限集单射就是双射, 因此 $d'_x d'_y$ 是 d'' 的特征值当且仅当 $d'_x d'_y$ 是 d' 的特征值, 而由 f 的定义 $d'_x d'_y$ 是 d'' 的特征值也当且仅当 $[f(x), f(y)] \neq 0$, 命题得证.

至此 $\mathfrak{n}(G)$ 完全决定简单图 G. 根据 **Levi 定理**, 李代数大致由一个可解部分一个半单部分和它们之间的作用决定. 尽管我们对半单部分已经熟悉, 但是不大能指望弄清楚可解部分, 因此也不大能分类一般的李代数.

野蛮数学 (Barbarian Mathematics) 的开端.

习题 9.43 (Ψ 引理)**.** 设 G 是投射有限群, 证明 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Z}) = 0$ (不需要连续). 否则总可假设满, 取 $1 \in \mathbb{Z}$ 的任意原像 g, 用 g 生成的子群的闭包代替 G, 不妨设 $G \cong \lim_{i \in \mathscr{I}}(\mathbb{Z}/m_i)$, $m_i \in \mathbb{Z}_+$. 其中 $\mathscr{I}$ 至多可数, 且在整除下 m_i 构成全序. 若指标集有限则显然, 无限的时候随着 i 增长, 总能把一个元素 $g_i \in \mathbb{Z}/m_i$ 提升到 $\mathbb{Z}/m_{i+1}$ 使得每次杀死一个在 $\mathbb{Z}$ 中可能的像. 因为 $\mathbb{Z}$ 可数于是最后 $(g_1, \cdots)$ 这个元素不能映到 $\mathbb{Z}$ 中任何一个元素矛盾.

习题 9.44. 上述引理有几个应用. 首先我们从平凡的观察开始, $\mathbb{Q}_p$ 作为域, 其上可能的离散赋值只有经典的 p-进赋值. 因为 $\mathbb{Q}_p$ 的乘法群是 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p^\times$, 而 $\mathbb{Z}_p^\times$ 是投射有限的, 这可以取对数或者从有限的提升得到. 于是由Ψ **引理**它到 $\mathbb{Z}$ 的满射只能让 $\mathbb{Z}$ 满射 $\mathbb{Z}$, 从而赋值一定是标准的. 这样立刻看出对不同的 p, $\mathbb{Q}_p$ 作为域两两不同构 (观察在整数上的赋值).

再观察 $\mathbb{Q}_p$ 的域自同构, 因为一定将离散赋值映射为离散赋值, 因此必然连续, 由于 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{Q}_p$ 故只能有平凡自同构. 最后是 $K/\mathbb{Q}_p$ 有限扩张, 用一样的技巧仍能证明 K 的自同构维护赋值从而连续, 故保护 $\mathbb{Q}_p$, 从而在 $\mathrm{Aut}(K/\mathbb{Q}_p)$ 内.

类似神秘的事情在 $K(\!(X)\!)$ 上亦有发生, 若 K 是素域的有限扩张, 我们声称 $K(\!(X)\!)$ 的 X-进赋值仍在任意的域自同构下保持, 注意 $K(\!(X)\!)$ 域的自同构保持素域, 因此总保持素域在 $K(\!(X)\!)$ 里的代数闭包 K, 故 X-进赋值自同构下总在 K 上平凡, $K(\!(X)\!)^\times = \mathbb{Z} \times K^\times \times (1 + XK[\![X]\!])^\times$. 其中 $\mathbb{Z}$ 仍是 X 赋值带来的, 但是 $(1 + XK[\![X]\!])^\times$ 总是 K-线性空间, 打到 $\mathbb{Z}$ 仍平凡.

习题 9.45 (更多的野蛮数学)**.** 我们注意到 $\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}_{(p)} \cong \mathbb{Q}_p/\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{Q}$-线性空间, 这说明 $\mathbb{Z}_p$ 有打到 $\mathbb{Q}$ 的非平凡映射. 但是我们观察 $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_{(p)}$ 的任意 $\mathbb{Z}$-模同态都平凡, 注意再将它标准嵌入 $\mathbb{Z}_p$, 而因为 $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ 的任何加法同态将 $p^n\mathbb{Z}_p$ 打入 $p^n\mathbb{Z}_p$, 从而连续, 则它是 $\mathbb{Z}_p$-模同态, 从而像集一定是 $\mathbb{Z}_p$ 中的理想而矛盾.

总的来说, 野蛮数学中一般的问题考察方法是, 研究一类带有结构的对象, 并分析在没有这个结构的时候, 这个结构在多大程度上被确定下来. 比如带拓扑的群和环可以被看成不带拓扑的, 又如将交换环都看成 $\mathbb{Z}$-模. 狭义地, 类似 $\mathrm{Hom}(\prod \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \bigoplus \mathbb{Z}$ 的现象也是比较野蛮的.

接下来我们将使用数个练习研究 Trees 的理论, 最后应用到群论上. 主要参考是 [30].

习题 9.46 (群的自由积的推广). 对一族群 $\{G_i\}_{i\in\mathscr{I}}$, 对每个对子 $(i,j)\in\mathscr{I}^2$ 用 F_{ij} 记一族 $G_i\to G_j$ 的映射, 记 $G:=\operatorname{colim}_{F_{ij}}G_i$ 表示族 $\{G_i\}$ 在 $\{F_{ij}\}$ 下取余极限, 即一族与 $\{F_{ij}\}$ 可交换的万有的 $f_i:G_i\to G$. 万有性质保证了唯一性, 存在性是取 G 由诸 G_i 的元素作为自由生成元, 而后商掉 G_i 中的乘法关系以及全体 $xy^{-1},x\in G_i,y\in G_j,y=f(x),f\in F_{ij}$.

(1) 对 $n+1$ 个群 $A,G_1,\cdots,G_n$ 及 n 个嵌入 $F_i:A\hookrightarrow G_i$, 记 $G:=*_AG_i:=\operatorname{colim}_{F_i}G_i$ 以及典范的 $f:A\to G,f_i:G_i\to G$. 当 A 平凡时退化为 Grp 中的余积即熟知的群自由积. 设 S_i 为 G_i/A 的陪集代表元, 要求 $1\in S_i$, $A\times S_i\to G_i$ 的映射 $(a,s)\mapsto as$ 是双射. 设 $\mathbf{i}=(i_1,\cdots,i_n)$ 是 $\mathscr{I}$ 中一些指标构成的序列, 若相邻二者不同则称之**约化的**. 而一个 $\mathbf{i}$ **型的约化词**指形如 $m=(a;s_1,\cdots,s_n)$ 者, $a\in A,1\neq s_j\in S_{i_j}$. 下结果帮助我们刻画 G 中元素:

任意 $g\in G$, 存在唯一的约化 $\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{i}$ 型约化词 $m=(a;s_1,\cdots,s_n)$ 使 $g=f(a)f_{i_1}(s_1)\cdots f_{i_n}(s_n)$. 由此容易得到 f,f_i 是单射, 另外读者检查由万有性 G_i 在 G 中的像生成 G.

(2) 沿用前题记号, 记 $g\in G$ 对应的约化 $\mathbf{i}=(i_1,\cdots,i_n)$ 型约化词者的长度 $l(g):=n$. 若 $i_1\neq i_n$ 称 g 为**循环约化**的. 证明任一个 $g\in G$ 要么共轭于一个循环约化元, 而且这种情况下 g 的阶无穷; 要么共轭于某个 G_i 中的元素. 提示: 归纳. 一个直接的推论是 G 中的有限阶元都共轭于某个 G_i 中者. 另一个直接的推论是若诸 G_i 无挠, 则 G 无挠.

(3) 设 A,B 是两个群, $R:=\operatorname{Ker}(A*B\to A\times B)$. 则 R 是自由群, 且自由基为

$$X:=\{[a,b]=a^{-1}b^{-1}ab:a\in A-\{1\},b\in B-\{1\}\}.$$

(4) (HNN 群) 两群 $A\subset G$ 和一个 (不一定典范的) 单射 $\theta:A\hookrightarrow G$, 则存在一个含 G 的群 G' 和一个元素 $s\in G'$ 使 $\theta(a)=sas^{-1}$ 对一切 $a\in A$. 而且若 G 是可数的 (resp. 有限生成的, 无挠的), 则可要求 G' 也具有此性质. 这样的 G' 被称为 (A,G,θ) 的 **HNN 构造**.

作为推论, 每个群 G 都能被嵌入群 K 使得 K 中任意有限相同阶的两个元素都共轭. 进一步的若 G 是可数的 (resp. 无挠的), 则可要求 G' 也具有此性质.

(5) 几个例子, 检查 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\cong(\mathbb{Z}/4)*_{(\mathbb{Z}/2)}(\mathbb{Z}/6)$, 生成元为 $\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&-1\\1&1\end{bmatrix}$ 及 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})\cong(\mathbb{Z}/2)*(\mathbb{Z}/3)$, 对域 k, $\mathrm{GL}(2,k[X])\cong\mathrm{GL}(2,k)*_{B(2,k)}B(2,k[X])$, 其中 $B(n,R)$ 表示 n 阶系数在环 R 的可逆上三角阵, 而 $\mathrm{SL}(2,k[X])$ 也有类似的分解.

提示 9.47. (1) 记 $X_{\mathbf{i}}$ 是约化 $\mathbf{i}$ 对应的全体 $\mathbf{i}$ 型约化词的集合, 用 X 记所有 $X_{\mathbf{i}}$ 的并, 对 $i\in\mathscr{I}$ 用 Y_i 记 X 中 $(1;s_1,\cdots,s_n),i_1\neq i$ 者. 于是 $A\times Y_i,A\times(S_i-\{1\})\times Y_i\to X$ 有映射

$$(a,(1;s_1,\cdots,s_n))\mapsto(a;s_1,\cdots,s_n);$$
$$((a,s),(1;s_1,\cdots,s_n))\mapsto(a;s,s_1,\cdots,s_n).$$

不难检查这是 $(A\times Y_i)\cup(A\times(S_i-\{1\})\times Y_i)\to X$ 的双射, 从而这诱导了 $\theta_i: G_i\times Y_i\to X$ 的双射. 于是 G_i 在 $X=G_i\times Y_i$ 上有典范作用 $g'(g,y)=(g'g,y)$, 对不同的 i 容易检查 $A\subset G_i$ 在 X 上按照相同的方式 $a'(a;s_1,\cdots,s_n)=(a'a;s_1,\cdots,s_n)$ 作用. 从而这诱导了 G 作用在 X 上 (一组融贯的 $A,G_i\to\mathrm{Sym}(X)$ 由万有性质诱导了 $G\to\mathrm{Sym}(X)$) . 于是对 $\mathbf{i}=\varnothing$, 平凡字 $e=(1;)$, 取 $\alpha: G\to X$ 为 $g\mapsto ge$ 以及题述 $\beta: X\to G$. 不难检查 $\alpha\circ\beta=\mathrm{id}_X$ 于是 β 是单射而得到分解唯一性, 而为检查 $\beta(X)=G$, 只需检查 $G_i\beta(X)\subset X$ 对诸 i 而这是容易的.

(3) 设 $S\subset A*B$ 是 X 自由生成的子群, 对 $a'\in A,[a,b]\in X$, 注意 $(a')^{-1}[a,b]a'=[aa',b][a',b]^{-1}$ 可检查 S 正规, 显然 $A*B/S\cong A\times B$, 故只需证明 X 自由. 注意只需证每一列 $x_1,\cdots,x_n\in X,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\in\{\pm1\}$ 使 $x_i\neq x_{i+1}$ 或 $\varepsilon_i\neq-\varepsilon_{i+1}$ 对一切 i, 乘积 $x_1^{\varepsilon_1}\cdots x_n^{\varepsilon_n}\neq 1$. 我们检查对符合上条件的 $g=[a_1,b_1]^{\varepsilon_1}\cdots[a_n,b_n]^{\varepsilon_n}$, 总有 $l(g)\geq n+3$, 且若 $\varepsilon_n=1$, 约化的 g 以 a_nb_n 结尾, 若 $\varepsilon_n=-1$ 则以 b_na_n 结尾. 然后就是简单的归纳.

(4) 考虑如下图表的余极限, 记之 H:

$$\begin{tikzcd}
\cdots G & & G & & G & & G\cdots. \\
& A \arrow[ul, "\theta"] \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] & & A \arrow[ul, "\theta"] \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] & & A \arrow[ul, "\theta"] \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] &
\end{tikzcd}$$

再令 s 为 H 的右平移自同构, 即上述图表往左平移一格. 于是对 $a\in A$, $s(a)=\theta(a)$. 这样设同构于 $\mathbb{Z}$ 的 $S:=\langle s\rangle\subset\mathrm{Aut}\,H$, 令 $G':=H\rtimes S$ 即得.

现在构造阶相同的元素都共轭的群, 首先对 $x,y\in G$ 阶相同, 则由 GNN 构造可取 G_{xy} 含 G 且其中 x,y 共轭, 利用超限归纳, 可取一个群 $E(G)$ 使其中 G 内阶相同的元素共轭, 然后对 $E(E(G)),E(E(E(G))),\cdots$ 取极限即得. 容易发现若 G 无挠, 则最后构造者是单群.

(5) 考察 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$, 首先不难检查题述两矩阵能生成整个群, 其次要证明自由性, 两个矩阵对应的分式线性变换 $B: z\mapsto -1/z, C: z\mapsto 1/(1-z)$ 于是 $C^{-1}: z\mapsto 1-1/z$, 只需非平凡词对应非平凡分式线性变换. 现在用 $\mathcal{P},\mathcal{N}$ 记正, 负无理数. 显然 $B(\mathcal{P})\subset\mathcal{N}, C^{\pm1}(\mathcal{N})\subset\mathcal{P}$, 马上来对一个非平凡的词 $\cdots BC^{\pm1}BC^{\pm1}B\cdots$ 进行分类讨论:

如果涉及 B,C 数量为奇数. 始于, 终于 B, 则 $\mathcal{P}$ 被打入 $\mathcal{N}$; 始于, 终于 C, 则 $\mathcal{N}$ 被打入 $\mathcal{P}$, 必不能是平凡变换. 如果 B,C 数量为偶数. 必要时用 B 共轭而设始于 $C^{\pm1}$ 而终于 B, 若始于 C 则 $\mathcal{P}$ 映入 $C(\mathcal{N})$ 即大于 1 的无理数, 若始于 C^{-1} 则 $\mathcal{P}$ 映入 $C^{-1}(\mathcal{N})$ 即小于 1 的无理数. 无论如何都不能是平凡的. 这种证明技巧的一般版本称 **Ping-pong Lemma**.

接下来看 $\mathrm{GL}(2,k[X])$, 生成性仍通过归纳降次易知. 只需证自由性, 记 $T(f)=\begin{bmatrix}1 & f(x)\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 其中 f 非常数, $C_i\in\mathrm{GL}(2,k)$ 非上三角, 经共轭作用设 $T(f_1)C_1\cdots T(f_r)C_r=I_2$. 然后归纳地证明左上格次数 $=\deg f_1\cdots\deg f_r$, 右上格次数 $\leq\deg f_1\cdots\deg f_r$, 左下和右下格次数 $\leq\deg f_2\cdots\deg f_r$. 这和我们在土法炼钢时的想法是一样的.

习题 9.48. 接下来引入图和树相关的组合数学定义. $X=(V,E)$ 作为**无向图**和**有向图**的定义省略, 无向图的一个**定向**指将每条边定向使之成为有向图, 有向图的**无向化**指忽略边的定向, 图的**态射**是指将顶点映到一些顶点且边映到一些边, 一个无向图的**实现**是一个拓扑空间, 即 $V\sqcup E\times[0,1]$ 按照自然的商拓扑所得者, 从而具有自然的 CW 复形结构. **树**是一个连通无环的无向简单图, 用 $t(T)$ 记树 T 的全体**叶子节点**, 即度数 1 的顶点. 对群 G 和子集 $S\subset G$, 定义有向图 $\Gamma=\Gamma(G,S)$ 为以 G 为顶点, 对每个 $(g,s)\in G\times S$ 连接有向边 $g\to gs$ 者得到的图. 而左乘 G 中的元素是图的自同构. 显然 Γ 的无向化连通当且仅当 S 生成 G; $1\in S$ 当且仅当 Γ 有圈, 即一个起点终点相同的边; $S\cap S^{-1}=\varnothing$ 当且仅当 Γ 是简单图.

树的基本性质: (1) 一棵树中任两顶点 P,Q 间路径唯一, 称之两点间的**测地线**. 用 $d(P,Q)$ 记其长度, 记一棵树的**直径** $d(T):=\sup_{P,Q}d(P,Q)$. (2) 一个有限连通无向图是树当且仅当顶点数比边数多 1. (3) 取一个树 $T=(V,E)$ 的顶点子集 V', 则将 V' 中任意两点连的测地线全部取出得到一棵子树 T', 这是包含 V' 的最小子树. (4) 一棵树 T 去掉所有叶子 $t(T)$ 和对应边得到的图仍是一棵树, 对于直径 $n<+\infty$ 的树, $T-t(T)$ 使其直径变成 $n-2$, 由此推出一个偶数 (resp. 奇数) 直径的树存在一个顶点 (resp. 一条边) 在树的任意自同构下不动.

图的子树有关的结论: (1) 一个连通无向图 X 的极大子树包含 T 的所有顶点. 另由 **Zorn 引理**, 极大子树存在. (2) 对一个无向图 X 缩掉它的一族顶点不交的子树 $T=\{T_i\}_{i\in\mathscr{I}}$, 即取一族新的点 $\{v_i\}$, 原先某 T 以外的边若其任顶点于 T_i 中, 就将边的这一顶点改作 v_i, 这构造记作 X/T. 例如四个顶点完全图 K_4 缩掉一个 Y 得到只有一个顶点 v 的图和 v 到自己的三个圈. 检查 X 和 X/T 的实现是同伦等价的, 只需观察 CW 对的同伦提升性质. (3) 检查 X 是树当且仅当 X 的实现可缩. 因此延续前小题记号, 有 X 是树当且仅当 X/T 是树.

习题 9.49 (树与自由群)**.** 群 G 作用在图 X 上, 指一个同态 $G\to\mathrm{Aut}(X)$, 此时可自然地定义商图 $G\backslash X$ 即将顶点和边按作用下的等价类构成图. 如果任意 $g\in G$ 作用不会使一条边反向（边映到自己而这条边的两个顶点交换）则称该作用无**对合**, 在此基础上如果任意 $1\neq g\in G$ 作用没有不动点, 则称这个作用是**自由**的, 这情况下既没有不动点也没有不动边.

(1) 若 X 连通, 则任意 $G\backslash X$ 的子树 T', 存在 X 的子树 T 使其在 $G\to G\backslash X$ 的投影同态下同构 T', 称此 T 为 T' 的一个**提升**. 取 X 中投影到 $G\backslash X$ 是单射入 T' 的树 T 构成的偏序集, 后用 **Zorn 引理**即可. 定义 $X\bmod G$ 的一个**代表树**指 $G\backslash X$ 的一个极大子树的提升.

(2) 对群 G 和子集 S 记图 $X=\Gamma(G,S)$, 则 X 是树当且仅当 G 是 S 生成的自由群. S 生成 G 当且仅当 X 连通, S 自由于 G 当且仅当 X 无环, 只需取最小长度的环或最小的非平凡关系即可. 不难检查题述等价成立时 G 在 X 自由地左乘作用.

(3) 考察群 G 自由作用在树 X 上, 取定 $X\bmod G$ 的一个代表树 T 以及 X 的一个 G-不变的定向. 设 S 是 $G-\{1\}$ 中使得存在 $t\in T$ 使得 $t\to gt$ 有向边存在的 g 构成的集合, 则 G 是自由群

且 S 自由生成它. 其次若 $X^*=G\backslash X$ 只有 $s<+\infty$ 个顶点和 $a<+\infty$ 条边, 则 $\#S=a-s+1$. 最浅显的, 这表明一个群只要能自由作用在某树上就是自由群.

由于 G 自由作用及 $T\to X^*$ 单, 于是 $g\mapsto gT$ 将 G 打到 T 的若干不交副本, 于是取 $X'=X/(GT)$ 即把这些副本缩掉, 用 $\{gT\}_{g\in G}$ 记这些新顶点. 现在 X' 还是树, 而且它的顶点和 G 是一一对应的. 如果能将 $V(X'),V(\Gamma(G,S))$ 顶点集的自然双射变成图的同构 $X'\to\Gamma(G,S)$, 即可由 (2) 证明. 现在 X' 的边即 X 中不在 GT 的边, 让他们按 X 的方式定向. 不难检查他们对应了 $\Gamma(G,S)$ 中的有向边. 然后是 X^* 有限假设下, 此时始于 X 终于 X 外的边, 和 S 一一对应. 而另一方面设 T^* 是 T 在 X^* 中的像, 是一个极大子树. 因此 X^* 的边恰含两类, 一类是 T^* 的, 因为是极大树, 所以数目是顶点数减 1, 另一类始于 X 终于 X 外的, 数目和 $\#S$ 一样, 于是 $a=(s-1)+\#S$, 这即 $\#S=a-s+1$.

对上述命题我们有好的拓扑学解释, G 在单连通, 局部道路连通和局部半单连通 X 的实现上自由作用, 即在 $X^*=G\backslash X$ 的实现（不难检查正是 X 的实现商掉 G 作用的拓扑空间）的万有覆叠上作用, 于是 $\pi_1(X^*)=G$. 商极大子树就得到圆束, 不仅可研究基本群, 还可合理计数.

(4) 注意 (3) 有几个立即推论, 例如 *Schreier* 定理系列的, 自由群的子群都是自由的, 设 G 自由, 则它自由作用在 $\Gamma(G,S)$, 于是它的任意子群也在其上自由作用. 倘若 G 由 r_G 个元素自由生成, 子群 H 的指数 $n<+\infty$, 则子群 H 由 $r_H=n(r_G-1)+1$ 个元素自由生成. 设 G 自由作用在树 X, 设 $T_1=G\backslash X,T_2=H\backslash X$, 其中 T_1 有限, 于是根据指数的性质 T_2 的顶点和边数都是 T_2 的 n 倍. 从而结合 $r-1$ 由顶点和边数线性组合得到而知 $r_H-1=n(r_G-1)$. 若要具体计算, 就要合理写出极大子树. 设 G 是 S 生成的自由群, 子群 H, 那么我们总能取极大子树 T 是 $H\backslash G$ 的代表元, 使得 T 中的任意元素 $s_1^{\varepsilon_1}\cdots s_n^{\varepsilon_n}$ （这记号满足 $\varepsilon_i=\pm1,s_i\in S$ 且若 $s_i=s_{i+1}$ 则对应的 $\varepsilon_i=\varepsilon_{i+1}$）, 总有 $s_1^{\varepsilon_1}\cdots s_k^{\varepsilon_k}\in T$ 对一切 $k=0,1,\cdots,n$. 若有 $t\in T,s\in S$ 使得 $ts\notin T$ 者, 记 $Hts=Hu,u\in T$ 则全体这样的 tsu^{-1} 者构成 H 的一组基.

(5) 一个具体的例子, 自由群 $\langle x,y\rangle$ 商掉关系 $x^2,y^2,xyx^{-1}y^{-1}$ 得到 *Klein* 四元群, 于是核是一个由 5 个元素生成的自由子群, 取一棵极大子树 $T=\{1,x,y,xy\}$.

计算得到 $x^2,y^2,yxy^{-1}x^{-1},xyxy^{-1},xy^2x^{-1}$ 是自由生成元.

习题 9.50 (树和自由积)**. 本题中的作用都是无对合的**. 设群 G 在树 X 上作用, 则 $X \bmod G$ 的一个**基本区域**指 X 的一个子图 T 使 $T\to G\backslash X$ 是同构. 我们可能换一种作用方式, 考虑 $\mathbb{Z}$ 为顶点, $n,n+1$ 连边的图, 于是 $(\mathbb{Z}/2)*(\mathbb{Z}/2)$ 的两个二阶元分别按照关于 $0,1$ 反射作用在树上, 显然可以把基本区域取成一条边. 读者不难把这个例子推广到 $(\mathbb{Z}/m)*(\mathbb{Z}/n)$, 即每次把树往外扩充交替的度 m,n 顶点, 群作用是旋转, 基本区域仍是一条边.

(1) 群 G 作用在树 X 上, 则 $X \bmod G$ 的基本区域存在当且仅当 $G\backslash X$ 是树. 如果 $G\backslash X$ 是树则它的极大子树是自身, 用前一习题将其提升到 X. 反过来基本区域是树的连通子图而是树.

(2) 设群 G 作用在图 X 上满足 $X \bmod G$ 的基本区域是一条边 T, 这情况下因为无对合不妨给它一个定向从而诱导整个 X 的定向, 故记 $T=(P\to Q)$. 用 G_P, G_Q, G_T 记 G 使顶点 P, Q 以及整条有向边 T 不动的稳定化子. 则 X 是一棵树当且仅当自然的嵌入 $G_P \hookrightarrow G, G_Q \hookrightarrow G$ 诱导的 $G_P *_{G_T} G_Q \to G$ 是群同构.

实际上只需证明如下两回事. X 连通当且仅当 G 由 $G_P \cup G_Q$ 生成, X 无环当且仅当 $G_P *_{G_T} G_Q \to G$ 是单射. 对前者设 X' 是 X 含 T 的连通分支, G' 是 G 中使 $gX'=X'$ 的 g 构成的子群, 由 g 的拓扑连续性这当且仅当 g 将 T 映入 X', G'' 是 G 中由 $G_P \cup G_Q$ 生成的子群. G_P, G_Q 含于 G', 进而 G'' 亦然. 反过来 $G''T, (G-G'')T$ 两图没有重复的顶点, 倘若有, 例如 G'' 外的群元将 x 映为 x 或 y, 前者群元含于 G_P 而后者导致基本区域不是 T 而不能发生. 于是 $G''T$ 含 T 所在的连通分支 X', 从而 G' 含于 G''. 于是 X 连通当且仅当 $G=G'=G''$.

对后者, 若 X 有非平凡的环, 边分别是 $h_1T_1, \cdots, h_nT_n$, 其中 T_i 交替出现 T 和 T 的反向, 利用基本区域是树不难检查定向如此. 不妨设 $T_1=T$ 于是 $h_1Q=h_2Q$ 从而 $h_2^{-1}h_1 \in G_Q$, 类似得 $h_3^{-1}h_2 \in G_P$, 一直下去, 从而得到 n 个奇偶来自 G_Q, G_P 的元素而乘起来平凡. 同样的若非单射, 在核中找一个非平凡序列, 也能反过来构造出一个环.

(3) 反过来, 设 $G=G_1 *_A G_2$, 则存在一个树 X, G 作用在其上是的基本域是一条边 $T=(P\to Q)$ 使得 G_1, G_2, A 分别是 P, Q, T 的稳定化子. 构造就是平凡取陪集对应把这棵树延展开. 一个优美的说法是, 顶点集取 $G/G_1, G/G_2$ 陪集的无交并, 边集是 G/A 陪集, 从边确定顶点就是平凡观察 A 的陪集落在 G_1, G_2 哪个陪集中. 由 (2) 检查是树.

(4) 若 Γ 是 $G=G_1 *_A G_2$ 的子群, 使得 $\Gamma-\{1\}$ 不含 G_1, G_2 中元素的共轭, 那么 Γ 是自由群. 这是本命题 (3) 和前一个命题 (3) 的立即推论. 然后注意一般的群 Γ 作用在树 X 上, 总有如下等价: (A) 对顶点集的有界（即元素长度被一致控制, 下同）子集 S 总有 ΓS 有界. (B) 存在顶点 P 使 ΓP 有界. (C) Γ 有不动顶点. 显然 (C) 推 (A) 推 (B), 对 (B) 推 (C) 只需取 ΓP 生成的有界子树, 它的直径当然有限, 运用树的基本知识得知它有顶点或边在任意自同构下不动, 结合本题假设的作用的无对合性, 这两种情况下总有不动顶点.

于是 G 的有界子群一定落在 G_1 或 G_2 的某个共轭中, 因为这个有界子群作用总有不动点从而要么在 G_P 要么在 G_Q 的共轭中. 有限子群有界, 这也是前文阶有限元素讨论的推广.

原书 [30] 接下来的理论虽然有用但也繁复, 限于篇幅就不在习题中多提.

参考文献

[1] Serge Lang, Algebra,revised third edition.

[2] Gregor Kemper, A Course in Commutative Algebra.

[3] Alborz Azarang, A one-line undergraduate proof of Zariski's lemma and Hilbert's Nullstellensatz.

[4] Michael Francis Atiyah,Ian Grant MacDonald, Introduction to Commutative Algebra.

[5] 刘青, Algebraic Geometry and Arithmetic Curves.

[6] Ravi Vakil, Rising Sea Foundations of Algebraic Geometry.

[7] Robin Hartshorne, Algebraic Geometry.

[8] Griffiths & Harris, Principles of Algebraic Geometry.

[9] Thierry Coquand & Henri Lombardi, A Short Proof for the Krull Dimension of a Polynomial Ring.

[10] The Stacks Project, https://stacks.math.columbia.edu/.

[11] Jean-Pierre Serre, Local Algebra.

[12] 李超, 阮威, 张龙, 张翔, 计算机代数系统的数学原理.

[13] Martin Kreuzer and Lorenzo Robbiano, Computational Commutative Algebra 1.

[14] Santiago Laplagne, The computation of the radical of an ideal.
http://cms.dm.uba.ar/Members/slaplagn/archivos/linz_2006-02.pdf
https://cms.dm.uba.ar/Members/slaplagn/archivos/2006-07_computationOfTheRadical.pdf

[15] 香蕉空间, https://www.bananaspace.org/

[16] David Eisenbud, Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry.

[17] Jack Davies, Algebraic Geometry I, Taught by Prof. Dr. Peter Scholze.
https://www.math.uni-bonn.de/people/ja/alggeoI/notes.pdf

[18] 扶磊, Algebraic Geometry, 研究生数学丛书 6.

[19] Weibel, An Introduction to Homological Algebra.

[20] Peter Freyd, Abelian Categories, An Introduction to the Theory of Functors.

[21] Thomas Jech, Set Theory, The Third Millennium Edition, revised and expanded.

[22] Pierre Schapira, Categories and Homological Algebra.

[23] James E. Humphreys, Introduction to Lie Algebras and Representation Theory.

[24] Alexander Kirillov, JR, An Introduction to Lie Groups and Lie Algebras.

[25] Jean-Pierre Serre, Linear Representations of Finite Groups.

[26] Jean-Pierre Serre, Lie Algebras and Lie Groups.

[27] Amritanshu Prasad, Representations of $\mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_q)$ and $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_q)$, and some remarks about $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$.

[28] 华罗庚, 万哲先, 典型群.

[29] Arno van den Essen, Polynomial Automorphisms: and the Jacobian Conjecture.

[30] Jean-Pierre Serre, Trees.

[31] Shlomo Sternberg, Lie Algebras.

[32] William Fulton Joe Harris, Representation Theory - A First Course.

[33] Jason P. Bell, A generalised Skolem-Mahler-Lech theorem for affine varieties.

[34] V. Srinivas, On the embedding dimension of an affine variety.

[35] William Fulton, Introduction to Toric Varieties.

[36] David Cox, John Little, Hal Schenck, Toric Varieties.

[37] Meera G. Mainkar, Graphs and two-step nilpotent lie algebras.