

## Une preuve de la conjecture de Mahler-Manin

Katia Barré-Sirieix, Guy Diaz, François Gramain, Georges Philibert

Équipe de Théorie des Nombres, Université de Saint-Étienne, Faculté des Sciences  
23, rue du Docteur Paul Michelon, F-42023 St Etienne cedex 2, France

Oblatum 7-IV-1995

to Reinhold Remmert

### Introduction et résultat

Pour tout nombre premier  $p$ , on note  $\mathbf{C}_p$  le complété de la clôture algébrique de  $\mathbf{Q}_p$  muni de la valeur absolue  $p$ -adique normalisée par  $|p|_p = 1/p$ .

Soit

$$J(z) = \frac{(1 + 240 \sum_{n \geq 1} n^3 z^n / (1 - z^n))^3}{z (\prod_{n \geq 1} (1 - z^n))^{24}} = \frac{1}{z} + 744 + \sum_{n \geq 1} c(n) z^n$$

le développement de Fourier à l'infini de l'invariant modulaire  $j$  (voir [Her] ou [Lan1], chapitre 4, paragraphe 2, proposition 4 et chapitre 18, paragraphe 4, théorème 5). Cette série à coefficients entiers naturels définit des fonctions analytiques sur les disques unités pointés  $\{z \in \mathbf{C} ; 0 < |z| < 1\}$  de  $\mathbf{C}$  et  $\{z \in \mathbf{C}_p ; 0 < |z|_p < 1\}$  de  $\mathbf{C}_p$ .

Dans cet article nous prouvons le résultat suivant:

**Théorème.** (i) Si  $q \in \mathbf{C}$  est un nombre algébrique vérifiant  $0 < |q| < 1$ , alors le nombre  $J(q)$  est transcendant.

(ii) Si  $q \in \mathbf{C}_p$  est un nombre algébrique vérifiant  $0 < |q|_p < 1$ , alors le nombre  $J(q)$  est transcendant.

Dans le cas complexe, cet énoncé a été conjecturé par K. Mahler [Mah1] en 1969 (voir aussi [Mah2]). Il est équivalent au suivant: Soit  $(\omega_1, \omega_2)$  une base du réseau des périodes d'une fonction elliptique  $\wp$  de Weierstrass dont les invariants  $g_2$  et  $g_3$  sont algébriques. Alors, si  $\alpha$  est un nombre algébrique non nul, on a  $\frac{\omega_1}{\omega_2} \neq \frac{\log \alpha}{2i\pi}$ . On voit qu'il s'agit d'un cas particulier d'un problème des quatre exponentielles mixtes (voir [Man], paragraphe 4.12).

Dans le cas  $p$ -adique, ce résultat a été conjecturé par Yu. Manin [Man] en 1971. Il a de nombreuses applications dans la théorie des courbes

elliptiques et des fonctions  $L$   $p$ -adiques. Si l'on note  $\log_p$  le logarithme  $p$ -adique (d'Iwasawa), dont on sait que tous les zéros sont algébriques, on a le corollaire suivant: *Si  $q \in \mathbf{C}_p$  vérifie  $0 < |q|_p < 1$  et si  $J(q)$  est algébrique, alors  $\log_p(q) \neq 0$ .*

Cet énoncé permet, par exemple, de prouver un cas particulier d'une conjecture de Mazur-Tate-Teitelbaum [MazTaTei], grâce au travail de Greenberg et Stevens [GreSte].

Au paragraphe 1, nous précisons les notations utilisées et nous donnons les propriétés fondamentales de la fonction  $J$  que nous utilisons. Le paragraphe 2 regroupe quelques lemmes techniques, et la preuve du théorème se trouve au paragraphe 3.

Nous remercions Michel Waldschmidt et Daniel Bertrand pour leurs conseils, tant archimédiens qu'ultramétriques.

## 1. Notations et préliminaires

Soit  $\overline{\mathbf{Q}}$  la clôture algébrique de  $\mathbf{Q}$ . Si  $\alpha \in \overline{\mathbf{Q}}$  est un nombre algébrique et  $K = \mathbf{Q}(\alpha)$ , on note  $M_K$  l'ensemble des places normalisées du corps de nombres  $K$  et, pour  $v \in M_K$ , on note  $d_v$  le degré local de  $K$  en  $v$ . La hauteur (de Weil) de  $\alpha$  est alors définie par

$$h(\alpha) = \frac{1}{[K : \mathbf{Q}]} \sum_{v \in M_K} d_v \log \max\{1, |\alpha|_v\}$$

et sa mesure de Mahler est  $M(\alpha) = \exp([K : \mathbf{Q}] h(\alpha))$ . Nous utiliserons l'inégalité de Liouville sous la forme suivante:

*Si  $\alpha \in \overline{\mathbf{Q}}$  est un nombre algébrique non nul, pour toute place  $v \in M_{\mathbf{Q}(\alpha)}$ , on a*

$$\log |\alpha|_v \geq -[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}] h(\alpha).$$

Nous utiliserons aussi la mesure de Mahler d'un polynôme: si  $P \in \mathbf{C}[X]$  est un polynôme non nul, sa mesure de Mahler est

$$M(P) = \exp \int_0^1 \log |P(e^{2i\pi t})| dt.$$

On sait que la mesure de Mahler d'un nombre algébrique est égale à la mesure de Mahler de son polynôme minimal. Pour des démonstrations et compléments, nous renvoyons le lecteur au chapitre III de [Wal] ou au chapitre 3 de [Lan2].

Soit  $\tilde{J}$  la série entière définie par  $\tilde{J}(z) = zJ(z)$ . Notre preuve utilise l'estimation des coefficients de  $\tilde{J}$  et de ses puissances entières. Ces estimations sont dues à Herrmann [Her] et Mahler ([Mah3], paragraphe 3). Nous n'utiliserons pas les constantes explicitées dans ces travaux (et qui peuvent d'ailleurs être améliorées), mais seulement l'énoncé suivant:

**Lemme 1.** *Pour tout entier  $k \geq 0$  on note*

$$(zJ(z))^k = \tilde{J}^k(z) = \sum_{n \geq 0} c_k(n) z^n$$

*le développement en série entière de  $\tilde{J}^k$ . Il existe un nombre réel  $C_0$  tel que les nombres entiers  $c_k(n)$  vérifient  $0 \leq c_k(n) \leq \exp(C_0 \sqrt{kn})$ .*

Dans [Mah3], ce résultat n'est qu'un intermédiaire pour estimer les coefficients des polynômes modulaires: on sait (voir [Web] ou [Lan1], chapitre 5, paragraphe 2, théorème 3) que, pour tout entier  $n \geq 2$ , il existe un polynôme irréductible  $\Phi_n \in \mathbf{Z}[X, Y]$  tel que  $\Phi_n(J(z), J(z^n)) = 0$ . Ce polynôme, appelé polynôme modulaire d'ordre  $n$ , est symétrique en  $X$  et  $Y$ , le coefficient dominant en l'indéterminée  $X$  (ou  $Y$ ) est 1, et son degré partiel par rapport à chacune des indéterminées est  $\psi(n) = n \prod_{p|n} (1 + \frac{1}{p})$ , le produit étant fait sur tous les diviseurs premiers de  $n$ . Nous utiliserons les majorations suivantes:

**Lemme 2.** *Il existe des constantes réelles  $C$  et  $C'$  telles que, pour tout entier  $n \geq 2$ , les degrés partiels  $\psi(n)$  et la longueur  $L(\Phi_n)$  somme des modules des coefficients du polynôme modulaire  $\Phi_n$ , sont majorés ainsi*

- (i)  $\psi(n) \leq C n \log \log 2n$  ;
- (ii)  $\log L(\Phi_n) \leq C' \psi(n) \log n$ .

Pour obtenir la majoration (i), il suffit de remarquer que, en notant  $\varphi$  la fonction indicatrice d'Euler, on a  $\psi(n) \varphi(n) \leq n^2$ , puis d'utiliser une minoration de  $\varphi$ , par exemple celle de Landau ([HarWri], théorème 328),  $\liminf n^{-1} \varphi(n) \log \log n = e^{-\gamma}$ . L'inégalité (ii) est une conséquence des travaux de Paula Cohen [Coh] qui donnent une estimation asymptotique du maximum du module des coefficients de  $\Phi_n$ . En fait, la majoration donnée dans [Mah3] ( $n^{3/2}$  au lieu de  $\psi(n) \log n$ ) est suffisante pour l'usage que nous en faisons.

Notre méthode de démonstration peut être considérée comme une variante de la méthode de Mahler (voir [Mah1]). Les critères généraux dérivés de la méthode de Mahler, comme les critères de [Ni] ou de [GraMiWa], n'ont pas permis d'obtenir la preuve de la conjecture de Mahler-Manin; cela provient en particulier du fait qu'ils ne prennent pas en compte les estimations fines des lemmes 1 et 2.

## 2. Quelques lemmes

**Lemme 3.** *Soit  $A = (a_{i,j})$  une matrice à coefficients dans  $\mathbf{Z}$  possédant  $N$  lignes et  $M$  colonnes, avec  $M > N$ . Il existe un vecteur non nul*

$X = {}^t(x_1, \dots, x_M) \in \mathbf{Z}^M$  tel que  $AX = 0$  et

$$\max_{1 \leq j \leq M} |x_j| \leq \left( \prod_{1 \leq i \leq N} L_i \right)^{1/(M-N)},$$

où  $L_i = \max \{1, \sum_{1 \leq j \leq M} |a_{ij}|\}$ .

*Démonstration.* Voir [Mah4], lemme 1.  $\square$

**Lemme 4.** *Les séries formelles  $J$  et  $\tilde{J}$  de  $\mathbf{Q}((X))$  sont transcendentes sur  $\mathbf{Q}(X)$ .*

*Démonstration.* On vérifie immédiatement que le polynôme  $P \in \mathbf{Q}[X, Y]$  est nul si, et seulement si, le polynôme  $P(X, XY)$  est nul. Il suffit donc de vérifier la transcendance de  $J$ . Soit  $P \in \mathbf{Q}[X, Y]$  tel que la série de Laurent  $P(z, J(z))$  soit nulle. On a alors  $P(e^{2i\pi\tau}, j(\tau)) = 0$  pour tout  $\tau$  dans le demi-plan de Poincaré. Pour tout  $c \in \mathbf{Z}$  notons  $\alpha_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbf{Z})$ . Si  $t \geq 1$  est un nombre réel transcendant, tous les nombres  $\exp(2i\pi\alpha_c(it))$  ( $c \in \mathbf{Z}$ ) sont distincts. En effet l'égalité  $\alpha_c(it) - \alpha_{c'}(it) = k \in \mathbf{Z}$  s'écrit  $(c - c' + kcc')t^2 - ik(c + c')t - k = 0$ , et la transcendance de  $t$  implique  $k = c - c' = 0$ . La fonction modulaire  $j$  étant invariante sous l'action de  $PSL_2(\mathbf{Z})$ , il en résulte que le polynôme  $P(X, j(it))$  admet une infinité de zéros, donc est nul. Si  $P = \sum_{0 \leq k \leq m} P_k(Y)X^k$ , on a ainsi  $P_k(j(it)) = 0$  pour tout  $k$  et tout  $t \geq 1$  et transcendant. Mais  $j$  est injective sur  $\{it ; t \geq 1\}$  (qui est contenu dans le domaine fondamental de  $PSL_2(\mathbf{Z})$ ), donc  $P_k$  a une infinité de zéros, et  $P$  est nul.  $\square$

**Lemme 5.** *Soient  $P \in \mathbf{Z}[X, Y]$  et  $\alpha, \beta \in \overline{\mathbf{Q}}$  des nombres algébriques. Si  $P(\alpha, \beta) = 0$  et si le polynôme  $P(\alpha, Y)$  n'est pas constant, on a*

$$\log M(\beta) \leq [\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}](\log L(P) + \deg_X(P)h(\alpha)),$$

où  $L(P)$  est la somme des modules des coefficients de  $P$ .

*Démonstration.* Notons  $d$  le degré de  $\alpha$ ,  $a_0 \in \mathbf{N}$  le coefficient dominant de son polynôme minimal, et  $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_d$  ses conjugués.

On considère le polynôme  $Q = a_0^D \prod_{1 \leq j \leq d} P(\alpha_j, Y)$ , où  $D$  est le degré de  $P$  par rapport à  $X$ . Le polynôme  $Q$  n'est pas nul car on a supposé  $P(\alpha, Y) \neq 0$ . Les coefficients de  $Q$  sont des combinaisons linéaires à coefficients dans  $\mathbf{Z}$  de termes de la forme  $a_0^D \prod_{1 \leq j \leq d} \alpha_j^{D_j}$ , où les entiers  $D_j$  vérifient  $0 \leq D_j \leq D$ . Il est bien connu que tous les nombres  $a_0 \prod_{1 \leq j \leq d} \alpha_j^{\varepsilon_j}$ , avec  $\varepsilon_j = 0$  ou  $1$ , sont des entiers algébriques (voir, par exemple, dans [Wal] le lemme 3.10 et la remarque 2 le suivant). Par suite, les coefficients de  $Q$  sont des entiers algébriques. Comme ils sont symétriques en les  $\alpha_j$ , le polynôme  $Q$  est dans  $\mathbf{Z}[Y]$ . De plus, on a  $Q(\beta) = 0$ , donc le polynôme minimal de  $\beta$  divise  $Q$  dans  $\mathbf{Z}[Y]$ . La multiplicativité de la

mesure de Mahler des polynômes donne donc la majoration  $M(\beta) \leq M(Q) = a_0^D \prod_{1 \leq j \leq d} M(P(\alpha_j, Y))$ . Si l'on considère les  $\alpha_j$  comme plongés dans  $\mathbf{C}$ , on a  $M(P(\alpha_j, Y)) \leq \max_{|z|=1} |P(\alpha_j, z)|$  (cela se déduit immédiatement de la formule intégrale de la mesure de Mahler; voir l'annexe du chapitre III de [Wal]). Il en résulte que  $M(P(\alpha_j, Y)) \leq L(P) \max(1, |\alpha_j|)^D$ , et on en tire l'inégalité annoncée  $M(\beta) \leq L(P)^d M(\alpha)^D$ .  $\square$

**Lemme 6.** Soit  $P \in \mathbf{Z}[X_1, \dots, X_m]$  un polynôme non nul de degré  $D_i$  en  $X_i$ , et soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \overline{\mathbf{Q}}$  des nombres algébriques. Alors

$$h(P(\alpha_1, \dots, \alpha_m)) \leq \log L(P) + \sum_{1 \leq i \leq m} D_i h(\alpha_i),$$

où  $L(P)$  est la somme des modules des coefficients de  $P$ .

*Démonstration.* C'est le lemme 3.6 du chapitre III de [Wal].  $\square$

### 3. Démonstration du théorème

Dans tout ce paragraphe,  $N$ ,  $L_1$  et  $L_2$  sont des nombres entiers au moins égaux à 1. Les constantes  $C_i$  qui apparaîtront sont des nombres réels (strictement) positifs indépendants des paramètres  $N$ ,  $L_1$  et  $L_2$ . Remarquons aussi que les deux premiers pas de la démonstration sont indépendants du nombre  $q$  apparaissant dans l'énoncé du théorème.

*Premier pas.* Construction d'une fonction auxiliaire

On construit un polynôme non nul  $P \in \mathbf{Z}[X_1, X_2]$  tel que la série entière formelle  $P(z, \tilde{J}(z)) \in \mathbf{Z}[[z]]$  ait un zéro d'ordre au moins égal à  $N$  en 0.

Soient  $L_1$  et  $L_2$  des nombres entiers au moins égaux à 1; notons  $\mathcal{L}$  l'ensemble des  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{Z}^2$  vérifiant  $0 \leq \lambda_1 < L_1$  et  $0 \leq \lambda_2 < L_2$ .

Si  $P = \sum_{\lambda \in \mathcal{L}} a_\lambda X_1^{\lambda_1} X_2^{\lambda_2}$ , alors, avec les notations du paragraphe 1 (lemme 1), on a  $P(z, \tilde{J}(z)) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$ , où

$$b_n = \sum_{\substack{\lambda \in \mathcal{L} \\ \lambda_1 \leq n}} a_\lambda c_{\lambda_2} (n - \lambda_1).$$

On applique alors le lemme de Siegel (lemme 3): il existe une constante  $C_1$  telle que le système linéaire des  $N$  équations à coefficients entiers  $b_n = 0$  ( $0 \leq n < N$ ) en les  $L_1 L_2$  inconnues  $a_\lambda$  a une solution non triviale  $(a_\lambda)$  dans  $\mathbf{Z}^{L_1 L_2}$  vérifiant

$$\max_{\lambda \in \mathcal{L}} |a_\lambda| \leq \exp(C_1 \sqrt{L_2 N}),$$

dès que la contrainte

$$(\mathcal{C}_1) \quad L_1 L_2 \geq 2N$$

est réalisée.

En effet, les coefficients de l'équation  $b_n = 0$  sont des entiers naturels majorés par  $\exp(C_0 \sqrt{L_2 N})$ , d'après le lemme 1, et ils sont en nombre au plus égal à  $L_2 \min(L_1, N)$ .

Notons alors  $M$  ( $\geq N$ ) l'ordre de la série  $F(z) = P(z, \tilde{J}(z))$  en zéro. Cet ordre existe bien car, d'après le lemme 4, la série  $\tilde{J}$  est transcendante sur  $\mathbf{Q}(z)$ . On a donc  $F(z) = \sum_{n \geq M} b_n z^n$ , où les  $b_n$  sont des nombres entiers rationnels et  $b_M \neq 0$ . De plus, compte tenu de la formule donnant les  $b_n$ , du lemme 1 et de l'estimation des  $|a_\lambda|$ , il existe une constante  $C_2$  telle que  $|b_n| \leq \exp(C_2 \sqrt{L_2 n})$  pour tout  $n \geq M$ .

Cette construction terminée, nous devons séparer les cas complexe et  $p$ -adique. Nous traiterons d'abord complètement le cas complexe, puis nous indiquerons les modifications à lui apporter dans le cas  $p$ -adique.

*Deuxième pas.* Majoration de  $|F(z)|$

La série  $\tilde{J}$  ayant un rayon de convergence 1, la série entière  $F$  définit une fonction analytique dans le disque unité ouvert de  $\mathbf{C}$ .

Nous avons vu que l'on a  $\log |b_{M+k}| \leq C_2 \sqrt{L_2 (M+k)}$  pour tout entier  $k \geq 0$ . Mais on a  $\sqrt{L_2 (M+k)} \leq k + \sqrt{L_2 M}$  dès que  $L_2 \leq M$ , donc dès que la contrainte

$$(\mathcal{C}_2) \quad L_2 \leq N$$

est réalisée.

Il en résulte que, si  $|z| \leq \frac{1}{2} e^{-C_2}$ , on a  $|b_{M+k} z^k| \leq (\frac{1}{2})^k \exp(C_2 \sqrt{L_2 M})$ .

On a donc  $|F(z)| \leq 2 |z|^M \exp(C_2 \sqrt{L_2 M})$  pour tout  $z \in \mathbf{C}$  tel que  $|z| \leq \frac{1}{2} e^{-C_2}$ .

*Troisième pas.* Construction d'un nombre algébrique non nul

Supposons qu'il existe un nombre algébrique  $q \in \mathbf{C}$  tel que  $0 < |q| < 1$  et que  $J(q)$  soit algébrique. Le théorème sera démontré si nous obtenons une contradiction à partir de cette hypothèse.

Quitte à remplacer  $q$  par une de ses puissances entières  $q^n$ , on peut supposer que  $|q| \leq \frac{1}{2} e^{-C_2}$ . En effet, on a  $\Phi_n(J(q), J(q^n)) = 0$ , donc  $J(q^n)$  est algébrique (puisque le polynôme modulaire  $\Phi_n(X, Y)$  est unitaire en l'indéterminée  $Y$ ).

Soit  $S$  le plus petit entier ( $\geq 1$ ) tel que  $F(q^S) \neq 0$ . Nous allons montrer qu'il existe une constante  $C_3$  telle que

$$S^2 \leq C_3 \sqrt{L_2 M}.$$

Pour établir cette majoration on peut supposer  $S \geq 3$ . Comme  $F(q^s) = 0$  pour tous les entiers  $s$  vérifiant  $1 \leq s < S$ , la fonction  $G$  définie par

$$G(z) = z^{-M} F(z) \prod_{2 \leq s < S} \frac{|q|^2 - z \bar{q}^s}{|q| (z - q^s)}$$

est holomorphe sur le disque unité ouvert. Sur le bord du disque de centre 0 et de rayon  $|q|$ , elle est majorée par  $|G|_{|q|} = |q|^{-M} |F|_{|q|} \leq 2 \exp(C_2 \sqrt{L_2 M})$ ,

d'après le pas précédent. D'autre part, on a  $|G(0)| = |b_M \prod_{2 \leq s < S} q^{1-s}|$ . Mais  $b_M$  est un entier rationnel non nul, donc de module minoré par 1; le principe du maximum,  $|G(0)| \leq |G|_{|q|}$ , donne alors

$$\frac{(S-1)(S-2)}{2} \log \frac{1}{|q|} \leq \log 2 + C_2 \sqrt{L_2 M}.$$

Alors l'inégalité  $(S-1)(S-2)/2 \geq S^2/9$ , vraie pour  $S \geq 3$ , donne la majoration annoncée.

*Quatrième pas.* Minoration de  $|F(q^S)|$

Le nombre  $J(q^S)$  est algébrique. C'est vrai par hypothèse si  $S = 1$ , et, dans le cas où  $S \geq 2$ , c'est conséquence de la relation  $\Phi_S(J(q), J(q^S)) = 0$ . Comme  $q$  est algébrique, il en résulte que  $F(q^S) = P(q^S, q^S J(q^S))$  est algébrique, et le lemme 6 permet d'estimer sa hauteur. Une estimation de son degré et l'inégalité de Liouville donnent alors une minoration de  $|F(q^S)|$ . Notons que l'utilisation de la hauteur de Faltings permet d'obtenir une majoration de  $h(J(q^S))$  meilleure que celle que nous utilisons.

Nous devons d'abord étudier  $J(q^S)$  pour  $S \geq 2$ . La relation modulaire  $\Phi_S(J(q), J(q^S)) = 0$  montre que  $J(q^S)$  est de degré au plus  $\psi(S)$  sur  $\mathbf{Q}(J(q))$ . Il existe donc une constante  $C_4$  telle que  $[\mathbf{Q}(J(q^S)) : \mathbf{Q}] \leq C_4 \psi(S)$ , et le lemme 5 donne

$$[\mathbf{Q}(J(q^S)) : \mathbf{Q}] h(J(q^S)) \leq [\mathbf{Q}(J(q)) : \mathbf{Q}] (\psi(S) h(J(q)) + \log L(\Phi_S)).$$

Comme  $F(q^S)$  est dans le corps  $\mathbf{Q}(q, J(q^S))$ , il existe une constante  $C_5$  telle que  $[\mathbf{Q}(F(q^S)) : \mathbf{Q}] \leq C_5 [\mathbf{Q}(J(q^S)) : \mathbf{Q}]$ .

Le lemme 6 montre que la hauteur de  $F(q^S)$  est majorée par

$$h(F(q^S)) \leq \log L(P) + L_1 h(q^S) + L_2 h(q^S J(q^S)).$$

Le premier pas de la démonstration donne  $\log L(P) \leq \log(L_1 L_2) + C_1 \sqrt{L_2 N}$ , et les propriétés multiplicatives de la hauteur fournissent  $h(q^S) = Sh(q)$  et  $h(q^S J(q^S)) \leq h(q^S) + h(J(q^S))$ .

Il existe donc une constante  $C_6$  telle que l'inégalité de Liouville

$$\log |F(q^S)| \geq -[\mathbf{Q}(F(q^S)) : \mathbf{Q}] h(F(q^S))$$

s'écrit

$$\log |F(q^S)| \geq -C_6 \psi(S) (\sqrt{L_2 N} + S(L_1 + L_2)) - C_6 L_2 (\psi(S) + \log L(\Phi_S)).$$

Tenant compte des estimations de  $\psi(S)$  et de  $L(\Phi_S)$  données par le lemme 2, on obtient l'existence d'une constante  $C_7$  telle que

$$\log |F(q^S)| \geq -C_7 S (\log \log 3S) (\sqrt{L_2 N} + S(L_1 + L_2)).$$

Dans le cas où  $S = 1$ , l'inégalité de Liouville montre immédiatement que cette minoration est encore vraie.

*Cinquième pas. Conclusion*

D'après le deuxième pas de la démonstration, il existe des constantes  $C_8$  et  $C_9$  telles que

$$\log |F(q^S)| \leq -C_8 SM + C_9 \sqrt{L_2 M}.$$

Il existe donc une constante  $C_{10}$  telle que, si la contrainte

$$(\mathcal{C}_3) \quad SM > C_{10} (\sqrt{L_2 M} + S(\log \log 3S)(\sqrt{L_2 N} + S(L_1 + L_2)))$$

est réalisée, la minoration du quatrième pas contredit la majoration ci-dessus de  $|F(q^S)|$ .

S'il existe un choix des paramètres  $N$ ,  $L_1$  et  $L_2$  pour lequel les contraintes  $(\mathcal{C}_1)$ ,  $(\mathcal{C}_2)$  et  $(\mathcal{C}_3)$  sont réalisées, on a obtenu une contradiction et le théorème est démontré. En utilisant la majoration de  $S$  obtenue au troisième pas et le fait que  $M \geq N$ , on vérifie facilement que le choix  $L_1 = L_2 = 2 \lfloor \sqrt{N} \rfloor$  pour  $N$  suffisamment grand permet de réaliser les trois contraintes considérées.

*Le cas  $p$ -adique*

Soit  $p$  un nombre premier; notons  $|\cdot|_p$  la valeur absolue  $p$ -adique sur  $\mathbf{C}_p$ . La série  $\tilde{J}$  est convergente sur le disque non circonferencié  $\{z \in \mathbf{C}_p; |z|_p < 1\}$ , donc la série entière  $F$  y définit une fonction analytique.

Supposons qu'il existe un nombre algébrique  $q \in \mathbf{C}_p$  tel que  $0 < |q|_p < 1$  et que  $J(q)$  soit algébrique.

Majorons le plus petit entier  $S \geq 1$  tel que  $F(q^S) \neq 0$ .

Si  $S \geq 3$  est un nombre entier tel que  $F(q^s) = 0$  pour tous les entiers  $s$  vérifiant  $1 \leq s < S$ , la fonction  $G$  définie par

$$G(z) = z^{-M} F(z) \prod_{2 \leq s < S} (z - q^s)^{-1}$$

est analytique sur le disque unité non circonferencié ([Ami], corollaire 4.5.4). Le principe du maximum ([Ami], corollaire 4.1.12) appliqué à  $G$  sur le disque circonferencié de centre 0 et de rayon  $|q|_p$  majore  $|G(0)|_p$  par le maximum  $|G|_{|q|_p}$  de  $|G(z)|_p$  pour  $|z|_p = |q|_p$ .

Or les coefficients de la série  $F$  sont des nombres entiers, donc, pour  $|z|_p = |q|_p$ , on a  $|z^{-M} F(z)|_p \leq 1$ . Et, pour  $s \geq 2$  et  $|z|_p = |q|_p$ , on a  $|z - q^s|_p = |q|_p$ . Il en résulte que  $\log |G|_{|q|_p} \leq (S-2) \log(1/|q|_p)$ .

D'autre part, on a  $|G(0)|_p = |b_M|_p |q|_p^{1-S(S-1)/2}$ . Mais  $b_M$  est un entier rationnel non nul, donc  $|b_M|_p \geq |b_M|^{-1} \geq \exp(-C_2 \sqrt{L_2 M})$ , d'après le premier pas de la démonstration.

Le principe du maximum fournit donc une majoration de  $S$  de même nature (et même un peu meilleure) que dans le cas complexe.

Le quatrième pas de la démonstration est le même que dans le cas complexe, puisque l'inégalité de Liouville s'écrit

$$\log |F(q^S)|_p \geq -[\mathbf{Q}(F(q^S)) : \mathbf{Q}] h(F(q^S)).$$



Quant au cinquième pas, il se simplifie un peu: en effet, les coefficients de la série  $F$  étant entiers, la majoration de  $|F(q^S)|_p$  devient  $\log |F(q^S)|_p \leq -SM \log(1/|q|_p)$ . On conclut donc comme dans le cas complexe.

## Bibliographie

- [Ami] Y. Amice: Les nombres  $p$ -adiques; Paris, PUF 1975
- [Coh] P. Cohen: On the coefficients of the transformation polynomials for the elliptic modular function; Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **95**, 389–402 (1984)
- [GraMiWa] F. Gramain, M. Mignotte, M. Waldschmidt: Valeurs algébriques de fonctions analytiques; Acta Arith. **XLVII**, 97–121 (1986)
- [GreSte] R. Greenberg and G. Stevens:  $p$ -adic L-functions and  $p$ -adic periods of modular forms; Invent. Math. **111**, 407–447 (1993)
- [HarWri] G. H. Hardy and E. M. Wright: An introduction to the theory of numbers; Clarendon Press: Oxford 1938 (4ème édition, 1971)
- [Her] O. Herrmann: Über die Berechnung der Fourierkoeffizienten der Funktion  $j(\tau)$ ; J. reine angew. Math. **274/275**, 187–195 (1975)
- [Lan1] S. Lang: Elliptic functions; Addison-Wesley: Reading 1973
- [Lan2] S. Lang: Fundamentals of Diophantine Geometry; Springer: New York 1983
- [Mah1] K. Mahler: Remarks on a paper by W. Schwarz; J. Number Theory **1**, 512–521 (1969)
- [Mah2] K. Mahler: On the coefficients of the  $2^n$ -th transformation polynomial for  $j(\omega)$ ; Acta Arith. **XXI**, 89–97 (1972)
- [Mah3] K. Mahler: On the coefficients of transformation polynomials for the modular function; Bull. Austral. Math. Soc. **10**, 197–218 (1974)
- [Mah4] K. Mahler: On a paper by A. Baker on the approximation of rational powers of  $e$ ; Acta Arith. **XXVII**, No. 3, 61–87 (1975)
- [Man] Yu. I. Manin: Cyclotomic fields and modular curves; Uspekhi Mat. Nauk **26**, 7–71 (1971) [en russe] et Russian Math. Surveys **26**, 7–78 (1971)
- [MazTaTei] B. Mazur, J. Tate and J. Teitelbaum: On  $p$ -adic analogs of the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer; Invent. Math. **84**, 1–48 (1986)
- [Ni] K. Nishioka: On a problem of Mahler for transcendence of function values; J. Austral. Math. Soc. (Series A) **33**, 386–393 (1982)
- [Wal] M. Waldschmidt: Linear independence of logarithms of algebraic numbers; Madras L. N., IMSc Report No. 116, Madras 1992
- [Web] H. Weber: Lehrbuch der Algebra, vol. III; réimpression de la seconde édition (1908), Chelsea: New York