

2.1 \mathbb{P}^1 上具有四个奇异纤维的椭圆曲线的稳定族

本节基本是 Arnaud Beauville 在 1982 年发表的法语文章 Les familles stables de courbes elliptiques sur \mathbb{P}^1 admettant quatre fibres singulières 的翻译和补充.

在 \mathbb{P}^1 上的稳定椭圆曲线族指一个平坦态射 $g: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$, 其纤维是算术亏格 1 的整曲线, 且奇异纤维只允许有二重节点出现. 如果该族不平凡, 则根据 Beauville 自己之前的文章, 这样的族至少有四个奇异纤维. 本文的目的是证明同构下只有有限多个这样的族恰好具有四个奇异纤维, 并且将显式地描述这些族. 通过对 Y 的奇点进行消解, 得到一个半稳定的纤维化 $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$, 其中 X 是一个光滑曲面, 而 f 的奇异纤维均具有奇点类型 I_c (由 c 条边组成的多边形, 每条边对应一条有理曲线), 经典结论是, 分类稳定族与分类半稳定族是等价的.

定理 2.1.1. 设 $f: X \rightarrow B$ 是一个具有四个奇异纤维的半稳定椭圆曲线族, 其中 $B \cong \mathbb{P}^1$. 那么 f 同构于以下六个模群子群 Γ 中某一个的模曲线族, 具体方程如下列表给出.

模群 Γ	三次曲线族方程	j -不变量	奇异纤维
$\Gamma(3)$	$X^3 + Y^3 + Z^3 + tXYZ = 0$	$-\frac{(t-6)^3 t^3 (t^2 + 6t + 36)^3}{(t+3)^3 (t^2 - 3t + 9)^3}$	$(3, 3, 3, 3)$
$\Gamma_1(4) \cap \Gamma(2)$	$X(X^2 + 2YZ + Z^2) + tZ(X + Y)(X - Y) = 0$	$\frac{256(t^4 - t^2 + 1)^3}{(t-1)^2 t^4 (t+1)^2}$	$(4, 4, 2, 2)$
$\Gamma_1(5)$	$X(X - Z)(Y - Z) + t(X - Y)YZ = 0$	$\frac{(t^4 - 12t^3 + 14t^2 + 12t + 1)^3}{t^5 (t^2 - 11t - 1)}$	$(5, 5, 1, 1)$
$\Gamma_1(6)$	$(X + Y)(Y + Z)(Z + X) + tXYZ = 0$	$\frac{(t+2)^3 (t^3 + 6t^2 - 12t + 8)^3}{(t-1)^2 t^3 (t+8)}$	$(6, 3, 2, 1)$
$\Gamma_0(8) \cap \Gamma_1(4)$	$(X + Y)(XY - Z^2) + tXYZ = 0$	$\frac{(t^4 + 16t^2 + 16)^3}{t^2 (t^2 + 16)}$	$(8, 2, 1, 1)$
$\Gamma_0(9) \cap \Gamma_1(3)$	$X^2 Y + Y^2 Z + Z^2 X + tXYZ = 0$	$-\frac{t^3 (t^3 + 24)^3}{(t+3)(t^2 - 3t + 9)}$	$(9, 1, 1, 1)$

证明. 记 B_0 为 B 上使得 f 光滑的区域构成的开子概形, 即 \mathbb{P}^1 挖去具有奇异纤维的四个点, \tilde{B}_0 为 B_0 的万有覆叠. 通过选取 $R^1 f_*(\mathbb{Z})$ 在 \tilde{B}_0 上的平凡化, 我们得到了分类映射: $\tau: \tilde{B}_0 \rightarrow \mathbb{H}$. 根据椭圆曲面的几何结论, $H^2(X, \mathbb{Q})$ 中纤维的正交补由奇异纤维的同调类生成, 推出 τ 是同构. 由此 $f: X \rightarrow B$ 同构于模族 $X_\Gamma \rightarrow B_\Gamma$, 其中模群 Γ 正是 f 纤维周期的单值化群 (monodromy group), 且关于 f 的半稳定条件等价于对有限指数子群 $\Gamma \leq \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 提的半稳定条件 (SS).

(SS): Γ 中任何元素的秩不能为 $-2, -1, 0, 1$. (即 Γ 没有椭圆元与 $\begin{bmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 共轭的平移)

这时模映射 $j: B \rightarrow \mathbb{P}^1$ 具有如下分歧特性:

- 在 $\mathbb{P}^1 - \{0, 12^3, \infty\}$ 上是平展的 (因为它们是所有椭圆点和尖点).
- 在 $j^{-1}(0)$ 处, 相应地 $j^{-1}(12^3)$ 处; 每个点的分歧指数为 2, 对应地为 3(椭圆点阶数).

根据上述分歧特性, 应用 Riemann–Hurwitz 公式计算 j 的次数 n :

$$(-2) - (-2)n = \frac{n}{2}(2-1) + \frac{n}{3}(3-1) + (n-4) \implies n = 12.$$

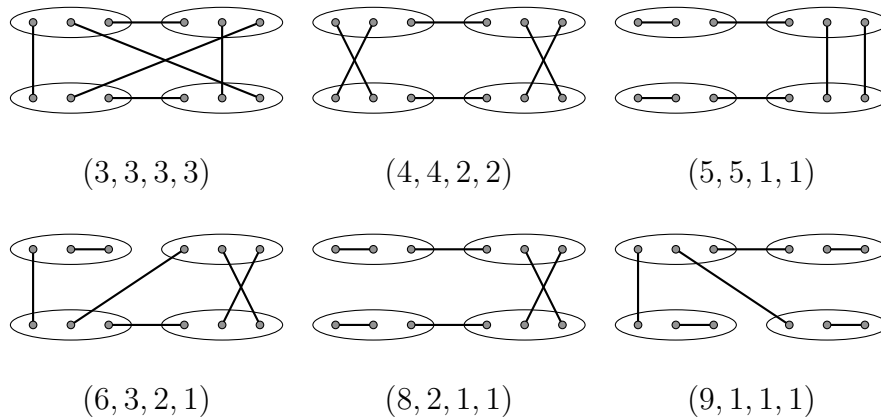
这里两个 -2 是 B, \mathbb{P}^1 的 $2g-2$; 接下来 $n/2$ 是二阶点数量, 每个贡献 2 分歧指数, $n/3$ 是三阶点数量, 每个贡献 3 指数; 而 n 是尖点数量, 在 Γ 下具有 4 个轨道, 长度分别为 c_1, c_2, c_3, c_4 , 和 $\sum_i c_i = n$, 因此分歧指数和 $\sum_i (c_i - 1) = n - 4$. 实际上:

- Γ 在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 中的指数为 24, $\Gamma' := \Gamma/\{\pm I\}$ 在 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ 中的指数为 12.
- 对任意 $\Gamma' \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, 至多存在一个提升 $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 满足 (SS).

设 $\Pi := \pi_1(\mathbb{P}^1 - \{0, 12^3, \infty\})$, 同伦上即两个圆的一点并, 因此可以取 π_1 元素 s, r, t 分别绕三个奇点一周生成整个基本群, 且满足关系 $srt = 1$. 覆叠映射 j 则对应同态 $\varphi: \Pi \rightarrow S_{12}$, 其中:

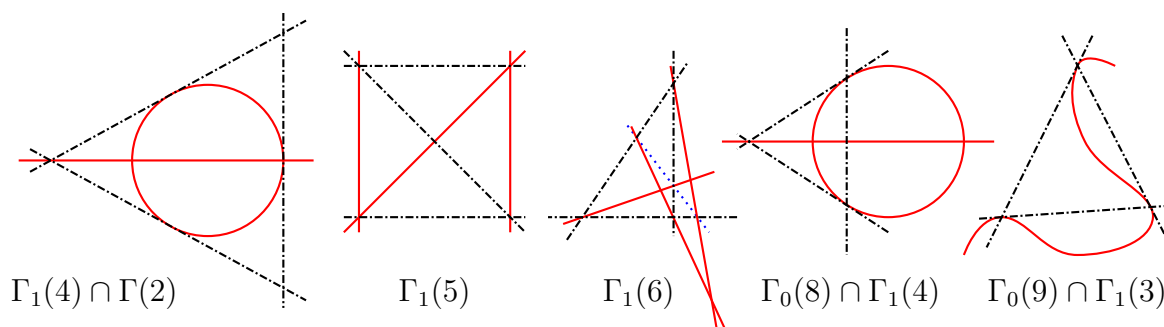
- $\varphi(s)$ 为 $(2, 2, 2, 2, 2, 2)$ 型置换, $\varphi(r)$ 为 $(3, 3, 3, 3)$ 型置换, $\varphi(t)$ 为 (c_1, c_2, c_3, c_4) 型置换.

通过映射 $\Pi \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ (关系为 $s^2 = r^3 = 1$), φ 可分解为: $\psi: \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow S_{12}$, 此时 Γ' 即为 ψ 作用下某点稳定子的原像. 因此, 问题归结为共轭意义下分类 S_{12} 中的元素对 (σ, ρ) , 其中, $\sigma, \rho, \rho\sigma$ 分别具有 $\varphi(s), \varphi(r), \varphi(t)$ 的置换结构, 且因为 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ 在基本区域作用传递, 因此 ψ 在 S_{12} 的像也要传递作用. 通过组合论证分类讨论可以证明所有可能的 σ, ρ 如下所示:



上面的 6 个图的记号说明如下: 我们使用一个椭圆圈起三个点表示一个长度 3 的轮换, 作用为向右平移 1, 模 3 意义下理解; 线段连接两个点表示一个长度 2 的对换, 然后下方的 (c_1, c_2, c_3, c_4) 则是复合 $\rho\sigma \in S_{12}$ 的圈长, 读者可以自行检验这些图的正确性. 且分类表明它们都是同余子群. 下面对应三次曲线族. 几何上, 这些簇对应的三次曲线都可以看成曲线系 $F + tG = 0$, 其中 F, G 是三次曲线. 在图中标记了 $G = 0$ 用黑色点虚线表示, 它总是三条直线的乘积; $F = 0$ 则使用红色实线表示. 特别地, $\Gamma_1(6)$ 中用蓝色的点线标记了需要的三点共线条件. 此外, $\Gamma(3)$ 的图像是熟

知的, 它由光滑三次曲线 E 和它经过的九个三阶点 (flex) $E[3]$ 连出的三条直线生成.



验证这些图像对应定理列表中罗列的三次曲线系, 以及检查对应模群的过程则留给读者. □

关于证明细节的补充. 首先关于组合数学部分, 有如下的 python 程序和对应的运行结果:

```
def generate_pairings(elements):
    if not elements:
        return [[]]
    first, pairs = elements[0], []
    for i in range(1, len(elements)):
        pair = (first, elements[i])
        remaining = elements[1:i] + elements[i+1:]
        for rest in generate_pairings(remaining):
            pairs.append([pair] + rest)
    return pairs

all_pairs = generate_pairings(list(range(12)))

def act2(pairs, num):
    for pair in pairs:
        if num in pair:
            return pair[0] + pair[1] - num
act3 = lambda num: 3*(num // 3) + ((num + 1) % 3)
act = lambda pairs, num: act3(act2(pairs, num))

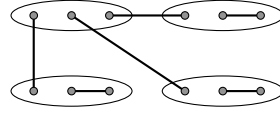
def componentsize0(pairs):
    s0, s1 = set([0]), None
    while s1 != s0:
        if s1 != None:
            s0 = s1
            s1 = s0.union(set(act3(x) for x in s0))
            s1 = s1.union(set(act2(pairs, x) for x in s0))
    return len(s0)

def cycletype(pairs):
    outlst = list()
    s = set(range(12))
    while len(s) > 0:
        p = s.pop()
        l, q = 1, act(pairs, p)
        while q in s:
            s.remove(q)
            l, q = l + 1, act(pairs, q)
        outlst.append(l)
        outlst.sort(key=lambda x: -x)
    return str(outlst)

countdict = dict()
for pairs in all_pairs:
    if componentsize0(pairs) == 12:
        c = cycletype(pairs)
        countdict[c] = 1 if c not in countdict else countdict[c] + 1
print(f"Total pairings: {len(all_pairs)}")
print(countdict)

'''
Total pairings: 10395
{'[5, 5, 1, 1]': 972, '[8, 2, 1, 1]': 972, '[9, 1, 1, 1]': 648,
'[11, 1]': 1944, '[6, 3, 2, 1]': 1944, '[6, 6]': 486, '[10, 2]': 972,
'[4, 4, 2, 2]': 486, '[8, 4]': 486, '[9, 3]': 648, '[3, 3, 3, 3]': 162}
'''
```

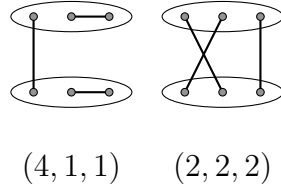
结果和定理所述完全相符, 其中具有四个圈的置换只有定理中声称的 6 种情况. 为了检查它们



在共轭下的唯一性, 我们以 $(9, 1, 1, 1)$ 的情况为例. 它对应图, 我们计算其共轭数量. 首先选取与其他三个 3 连接的椭圆有 4 种选法, 然后椭圆中第 1, 2, 3 个元素连到其他三个则有 $3! = 6$ 种选法; 其次每个椭圆中选取一个元素被连接有 $3^3 = 27$ 种选法, 所以总共共轭数量为 $4 \times 6 \times 27 = 648$ 种情况, 符合计算结果.

本节开头提到 Beauville 自己早些时候已经证明了不能仅有三个奇异纤维, 实际上我们也能用这篇文章中同样方法讨论三个奇异纤维的情况, 根据 Riemann–Hurwitz 定理需将程序中的 12 改成 6. 当然, 容易证明任何 (即使是不稳定的) 椭圆曲线族都不可能只有一个或两个奇异纤维, 与之相关的一个结论是 $\mathbb{P}^1 \setminus \{p_1, p_2\}$ 的万有覆叠是 $\mathbb{P}^1 \setminus \{p\} \cong \mathbb{C}$, 所以无法非平凡映到上半平面.

回到三个纤维的讨论中去, 此时研究对象是 S_6 中结构 $(2, 2, 2), (3, 3)$ 的置换 σ, ρ , 其复合 $\rho\sigma$ 的置换结构由前述程序给出仅有 $(4, 1, 1), (2, 2, 2)$ 两种, 而且共轭下其图如下展示:



这时对应的模群也都存在. 情况 $(4, 1, 1)$ 的模群是 $\Gamma = \Gamma_1(4)$, 此时的族类似 Jacobi 族

$$\mathcal{E}_t := \{(x, y) : y^2 = (x^2 - 1)(x^2 - t)\}, \quad j(\mathcal{E}_t) = \frac{16(t^2 + 14t + 1)^3}{(t - 1)^4 t}.$$

情况 $(2, 2, 2)$ 的模群是 $\Gamma = \Gamma(2)$ (更糟, 级数 2 的模群必含 $-I$, 这导致从 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ 提升到 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的过程中没有得到新东西), 此时的族即 Legendre 族

$$\mathcal{E}_t := \{(x, y) : y^2 = x(x - 1)(x - t)\}, \quad j(\mathcal{E}_t) = \frac{256(t^2 - t + 1)^3}{(t - 1)^2 t^2}.$$

包括定理表格中的结果, 从 j -不变量的分母和次数的信息可读出置换结构, 即分子中因子的重数和 $t = \infty$ 的重数. 然而这两个情况 Γ 均具有秩 -2 的元素, 故 Γ 都不满足 (SS) 条件.

有趣的是此时两个群在 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ 中的像都是正规的同余子群, 考虑 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ 中的它们的商, 分别是 $C_6 \cong C_2 \times C_3$ 和 S_3 , 恰是所有的六阶群. 最后, 有一个猜想叫 Rademacher 猜想, 其声称 $g = 0$ 的同余子群只有有限多个, 现其已被证明, 这意味着如果我们试图将问题推广到有更多奇异纤维的情况, $f : X_\Gamma \rightarrow B_\Gamma$ 这样有模性的族也只有有限多. 因此更有趣的情况必须在高亏格情况下寻找, 只不过 $g = 0$ 的情况已经提供足够多值得研究的例子了.

总结. 将题述的六个情况标准化, 假设四个奇异纤维是 $0, 1, \lambda, \infty$, 那么 λ 的取值只能满足:

$$\lambda \in \left\{ -1, 2, \frac{1}{2}, -8, -\frac{1}{8}, 9, \frac{1}{9}, \frac{9}{8}, \frac{8}{9}, \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}, \frac{-123 \pm 55\sqrt{5}}{2}, \frac{125 \pm 55\sqrt{5}}{2}, \frac{25 \pm 11\sqrt{5}}{50} \right\}.$$

于是我们将这 17 个实数唤作 **Beauville 数**.