Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati - Esercitazione 3

Prof. G. De Nicolao, dott. G.R. Marseglia

1. **Stima LS di un modello lineare nei parameteri**

   La conducibilità termica k di alcuni campioni di ferro è stata misurata a diverse temperature T. I risultati sperimentali sono riportati nel file `dati1.mat`.

   (a) Si carichi in MatLab il file `dati1.mat`

   (b) Si disegni k in funzione di T in uno scatter plot e si facciano delle considerazioni preliminari sulla possibile dipendenza

   (c) Ci si pone l'obiettivo di identificare un modello che descriva la dipendenza di k nei confronti della temperatura. Si considerino i seguenti modelli:

$$k = \theta_1 \tag{1}$$
$$k = \theta_1 + \theta_2 \cdot T \tag{2}$$
$$k = \theta_1 + \theta_2 \cdot T + \theta_3 \cdot T^2 \tag{3}$$
$$k = \theta_1 + \theta_2 \cdot T + \theta_3 \cdot T^2 + \theta_4 \cdot T^3 \tag{4}$$
$$k = \theta_1 + \theta_2 \cdot T + \theta_3 \cdot T^2 + \theta_4 \cdot T^3 + \theta_5 \cdot T^4 \tag{5}$$

   (d) Si stimino i parametri e la deviazione standard dei parametri stimati per tutti e 5 i casi

   (e) Si scelga il modello ottimo usando il test F con livello di significativit pari al 5%

   (f) **(bonus)** Si discuta infine la scelta del modello ottimo anche in base ai criteri FPE, AIC, MDL

$$Y = \Phi\,\theta + \mathrm{V}$$

n x 1   n x q   q x 1   n x 1

Nell'esercitazione $\longrightarrow$ $Y \equiv \mathrm{k}$

$\mathrm{E[V]} = 0$; $Var[\mathrm{V}] = \sigma^2$

$$\boxed{\begin{aligned} \theta_{LS} &= (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T\, Y \;\; ; \\ Var[\theta_{LS}] &= \sigma^2(\Phi^T\Phi)^{-1} \end{aligned}}$$

σ^2 ignota $\longrightarrow$ $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{SSR}{n-q} = \dfrac{\varepsilon^T\varepsilon}{n-q}$

$\varepsilon = Y - \hat{Y}_{\mathrm{LS}}$ $\hat{Y}_{\mathrm{LS}} = \Phi\,\theta_{\mathrm{LS}}$

Modello costante:

q = 1 $\qquad \theta = \theta_1 \qquad \Phi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix}$

$$k = \Phi\,\theta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix} \theta_1 \longrightarrow \begin{cases} k_1 = \theta_1 \\ k_2 = \theta_1 \\ \quad . \\ \quad . \\ k_{\mathrm{n}} = \theta_1 \end{cases}$$

Modello affine:

q = 2 $\qquad \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \qquad \Phi = \begin{bmatrix} 1 & T_1 \\ 1 & T_2 \\ & . \\ & . \\ 1 & Tn \end{bmatrix}$

$$\mathrm{k} = \Phi\,\theta = \begin{bmatrix} 1 & T_1 \\ 1 & T_2 \\ & . \\ & . \\ 1 & Tn \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} k_1 = \theta_1 + \theta_2\,\mathrm{T}_1 \\ k_2 = \theta_1 + \theta_2\,\mathrm{T}_2 \\ \quad . \\ \quad . \\ k_\mathrm{n} = \theta_1 + \theta_2\,\mathrm{T}_n \end{cases}$$