μφι Fachschaft MathPhysInfo

Mathematik-Vorkurs

Kapitel VI: Verknüpfungen

24. September 2025

Definition

Sei X eine beliebige Menge. Eine (zweistellige) **Verknüpfung auf X** ist eine Abbildung $X \times X \to X$. Notation:

$$x \star y \text{ anstelle von } \star(x, y)$$

für den Funktionswert des Paares (x, y) unter der Abbildung $\star$.

Beispiel

Beispiel

Definition

Seien X eine Menge und $\star$ eine Verknüpfung auf X. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt **abgeschlossen unter der Verknüpfung** $\star$, wenn $\forall x, y \in U$ auch $x \star y \in U$ ist. In diesem Fall ist durch

$$\star|_U : U \times U \to U, (u, v) \mapsto u \star v$$

eine Verknüpfung auf U definiert, die **Einschränkung von $\star$ auf U** oder auch die **von X vererbte Verknüpfung**.

Beispiel

Definition

Seien X eine Menge und $\star$ eine Verknüpfung auf X.
(i) Die Verknüpfung $\star$ heißt **assoziativ**, falls $\forall x, y, z \in X$ das Assoziativgesetz gilt:

$$(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$$

(ii) Man sagt, zwei Elemente $x, y \in X$ **kommutieren**:

$$x \star y = yx$$

(iii) Die Verknüpfung $\star$ heißt **kommutativ**, falls $\forall x, y \in X$ das Kommutativgesetz gilt:

$$x \star y = yx$$

Bemerkung:

Beispiel

Satz

Seien X eine Menge, $\star$ eine Verknüpfung auf X und $U \subseteq X$ eine Teilmenge, die abgeschlossen unter der Verknüpfung ist. Ist dann $\star$ eine assoziative oder kommutative Verknüpfung, so ist es auch ihre Einschränkung $\star|_U$ auf U .

Beweis:

Definition

Seien X eine Menge und $\star$ eine zweistellige Verknüpfung auf X. Ein Element $e \in X$ heißt **neutrales Element**, falls $\forall x \in X$ die beiden folgenden Gleichungen gelten:

$$e \star x = x \qquad \text{(e ist linksneutral)}$$

$$x \star e = x \qquad \text{(e ist rechtsneutral)}$$

Beispiel

Satz

Seien X eine Menge und $\star$ eine Verknüpfung auf X. Sofern X bzgl. $\star$ ein neutrales Element enthält, ist dieses eindeutig bestimmt.

Beweis:

Definition

Ein **Monoid** ist ein Paar $(M,\star)$ bestehend aus einer Menge M und einer Verknüpfung $\star$ auf M , für das gilt:

(i) $\star$ ist eine assoziative Verknüpfung

(ii) M enthält ein neutrales Element (bzgl der Verknüpfung $\star$)

$(M, \star)$ ist ein kommutatives Monoid, wenn die Verknüpfung $\star$ auch noch kommutativ

Beispiel

Definition

Sei X eine Menge mit einer zweistelligen Verknüpfung $\star$, die ein neutrales Element e besitzt und sei $a \in X$. Ein Element $b \in X$ heißt **invers** zu a, falls es die folgenden beiden Inversengleichungen erfüllt:

$$a \star b = e \qquad \text{(„b ist rechtsinvers zu a“)}$$

$$b \star a = e \qquad \text{(„b ist linksinvers zu a“)}$$

Das Element a heißt **invertierbar**, falls es ein zu **a inverses Element in X** gibt. Insbesondere ist $a^1 = a^{inv}$ das Inverse von a.

Beispiel

Satz

Seien $(M, \star)$ ein Monoid und $a \in M$ ein invertierbares Element. Dann ist das inverse Element von a eindeutig bestimmt.

Beweis:

Satz

Sei(M, $\star$) ein Monoid mit neutralem Element $e \in M$. Dann gilt:
(i) Das neutrale Element ist invertierbar und es ist

$$e^{inv} = e$$

(ii) Ist $a \in M$ ein invertierbares Element, so ist auch ainv invertierbar und es ist

$$(a^{inv})^{inv} = a$$

(iii) (Regel von Hemd und Jacke) Sind a, b M zwei invertierbare Elemente, so ist auch a b invertierbar und es ist

$$(a \star b)^{inv} = b^{inv} a^{inv}$$

Beweis:

Definition

Eine **Gruppe** ist ein Monoid, in dem jedes Element invertierbar ist, d.h. eine Gruppe ist ein Paar $(G, \star)$, aus der Menge G und der Verknüpfung $\star$ auf G. Es gelten die Gruppenaxiome:

(i) Die Verknüpfung $\star$ ist assoziativ

(ii) G enthält ein neutrales Element e

(iii) Jedes Element von G ist invertierbar: $\forall a \exists ! a^{inv}$

Ist die Verknüpfung auch noch kommutativ, so spricht man von einer **abelschen Gruppe**.

Beispiel

Definition

Sei M ein Monoid. Die Teilmenge

$$M^X := \{a \in M | aistinvertierbar\}$$

heißt die **Einheitengruppe eines Monoids M**.

Satz

Sei (M,$\star$) ein Monoid. Dann ist die Teilmenge $M^X \subseteq M$ abgeschlossen unter der Verknüpfung $\star$ und wird mit ihrer Einschränkung zu einer Gruppe. Ist M ein kommutatives Monoid, so ist M^X eine abelsche Gruppe.

Beweis:

Beispiel

Definition

Seien M eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung $\star$ und $a \in M$ irgendein Element. Für ein $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ heißt das Element, das durch n-faches Verknüpfen von a mit sich selbst entsteht

$$a^n := a \star \ldots \star a$$

die **n-te Potenz von a**, wobei a die **Basis** und n der **Exponent**.
Sofern M ein neutrales Element $a^0 := e$ enthält (die nullte Potenz) und a ein invertierbares Element ist (d.h. negative Potenzen).
Für $n \in \mathbb{Z}$ ist dann die n-te Potenz von a definiert als:

Satz

Seien M eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung $\star$ und $a, b \in M$ zwei miteinander kommutierende Elemente. Für $m, n \in N_{\geq 1}$ gelten die folgenden Potenzgesetze:

$$a^1 = a$$

$$a^{m+n} = a^m \star a^n$$

$$(a^n)^m = a^{mn}$$

$$(a \star b)^n = a^n \star b^n (\text{sofern } a \star b = b \star a)$$

Wenn M ein neutrales Element enthält, gelten diese Gleichungen auch für m, n = 0. Wenn a, b invertierbar sind, auch für $m, n \in \mathbb{Z}$.

Beweis:

Definition

Sei M eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung $\star$. Für $m, n \in N$ mit $m \leq n$ und $a_m, ..., a_n \in M$ schreibt man

$$\star_{k=m}^{n} a_k := a_m \star ... \star a_n$$

für die Verknüpfung der $a_m, ..., a_n$ in aufsteigender Reihenfolge.

Beispiel