μφι | Fachschaft MathPhysInfo

Mathematik-Vorkurs

Kapitel IV: Abbildungen

24. September 2025

Seien X, Y zwei Mengen.

Definition

Eine **Abbildung von X nach Y** (oder auch **Y - wertige Funktion auf X**) ist ein mathematisches Objekt, das jedem Element von X genau ein Element von Y zuordnet.
Sind f eine Abbildung von X nach Y und $x \in X$, so heißt das eindeutig bestimmte Element von Y , das f dem Element x zuordnet, der **Funktionswert von f an der Stelle x** oder auch das **Bild von x unter der Abbildung f** und wird notiert mit $f(x)$ (lies: „f von x“) Ferner heißen

- X der **Definitionsbereich** (oder auch **Quelle**) von f
- Y der **Wertebereich** (oder auch **Ziel**) von f
- die Menge $\{(x, y) \in X \times Y | y = f(x)\}$ der **Graph** von f

Satz

Zwei Abbildungen f, g von X nach Y stimmen genau dann überein, wenn sie an jeder Stelle denselben Funktionswert haben. Als Formel:

$$f = g \iff \forall x \in X : f(x) = g(x)$$

Dementsprechend sind f und g voneinander verschieden, wenn es mindestens ein $x \in X$ gibt mit $f(x) \neq g(x)$. Zwei Abbildungen, die sich in ihrem Definitionsbereich oder ihrem Wertebereich unterscheiden, denkt man sich als „Objekte verschiedenen Typs". Sie seien von vornherein voneinander verschieden.

Bemerkung:

Beispiel

Definition

Seien X, Y, Z drei Mengen und $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ zwei Abbildungen. Mit

$$\circ : Abb(Y, Z) \times Abb(X, Y) \longrightarrow Abb(X, Z), (g, f) \mapsto g \circ f$$

(lies: „g nach f", „g verkettet f") wird diejenige Abbildung $X \longrightarrow Z$ bezeichnet, die gegeben ist durch die Zuordnungsvorschrift

$$X \longrightarrow Z,\ x \mapsto g(f(x))$$

Die Abbildung $g \circ f$ heißt die **Verkettung** von f und g.

Beispiel

Satz

Seien A, B, C, D vier beliebige Mengen und $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ drei Abbildungen. Dann gilt:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Beweis:

Definition

Sei X eine Menge. Die Abbildung

$$id_X : X \to X,\ x \mapsto x$$

heißt die **Identität** auf X.

Satz

Seien X, Y zwei beliebige Mengen und $X \to Y$ eine Abbildung. Dann gilt:

$$id_Y \circ f = f \text{ und } f \circ id_X = f$$

Beweis:

Definition

Inklusionabbildung weglassen?

Seien X, Y Mengen und $X \to Y$ eine Abbildung.

Definition

- Die Menge $im(f) := \{y \in Y | \exists x \in X : f(x) = y\}$ heißt das **Bild von f** (englisch: “image”)
- Für eine Teilmenge A X heißt $f(A) := \{y \in Y | \exists a \in A : f(a) = y\}$ die **Bildmenge von A** oder schlicht das Bild von A unter f.
- Für ein Element $y \in Y$ heißt die Menge $f^1(y) := x \in X | f(x) = y$ das **Urbild von y**. Die Elemente von $f^1(y)$ werden ebenfalls Urbilder von y genannt.
- Für eine Teilmenge $B \subseteq Y$ heißt $f^1(B) := x \in X | f(x) \in B$ die **Urbildmenge von B** oder schlicht das Urbild von B unter f .

Definition

Eine Abbildung $X \to Y$ heißt **konstant**, wenn im(f) eine Einermenge ist, d.h. wenn es ein y Y gibt derart, dass f(x) = y für alle $x \in X$.

Beispiel

Definition

Sei $A \subseteq X$ eineT eilmenge von X.Dann ist die **Einschränkung von f auf A** oder auch Restriktion von f auf A diejenige Abbildung $A \to Y$, die durch die Abbildungsvorschrift

$$A \to Y, a \mapsto f(a)$$

gegeben ist, sogenannte Restriktionsabbildung:

$$res : Abb(X, Y) \to Abb(A, Y), f \mapsto f|_A$$

Beispiel

Definition

Einschränkung und Fortsetzung?

Definition

Sei $B \subseteq Y$ eine Teilmenge mit im(f) B. Dann ist die **Einschränkung von f auf B** diejenige Abbildung X → B, die durch die Abbildungsvorschrift

$$f|_B : X \to B, x \mapsto f(x)$$

(lies: „f eingeschränkt auf B“) gegeben ist.

Beispiel

Definition

Eine Abbildung $f : XtoY$ heißt **injektiv** (oder auch: eine Injektion), wenn

$$\forall a, b \in X : f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b$$

Satz

Folgende Aussage sind äquivalent:
(i) f ist injektiv
(ii) Für je zwei verschiedene Elemente $a, b \in X$ sind auch $f(a)$ und $f(b)$ voneinander verschieden.
(iii) Für jedes $y \in Y$ gibt es höchstens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$.

Beweis:

Definition

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **surjektiv** (oder auch: eine Surjektion), wenn $\forall y \in Y$ gibt es mindestens ein $x \in X$ mit f(x)=y.

Satz

Folgende Aussage sind äquivalent:
(i) f ist surjektiv
(ii) Es gilt im(f) = Y

Beweis:

Beispiel

Definition

Eine Abbildung$f : X \to Y$ heißt **bijektiv** (oder auch: eine Bijektion), wenn

$$\forall y \in Y \, \exists! x \in X : f(x) = y$$

Satz

Folgende Aussage sind äquivalent:
(i) f ist bijektiv
(ii) f ist injektiv und surjektiv.

Beweis:

Beispiel

Definition

Eine Abbildung g : Y $\to$ X heißt
(i) **linksinvers** zu f, falls $g \circ f = id_X$.
(ii) **rechtsinvers** zu f, falls $f \circ g = id$.
(iii) **invers** zu f (Umkehrabbildung von f/ Inverse zu f), falls sie sowohl links- als auch rechtsinvers zu f ist.
f heißt eine invertierbare Abbildung, wenn sie eine Umkehrabbildung besitzt.

Beispiel

Satz

Sei f eine invertierbare Abbildung. Dann ist die Umkehrabbildung von f eindeutig bestimmt.

Beweis:

Satz

Seien X, Y zwei Mengen und $X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:
(i) f ist invertierbar.
(ii) f ist bijektiv.

Beweis:

Bemerkung: