Fachschaft MathPhysInfo

Mathematik-Vorkurs

Kapitel III: Mengen und Familien

24. September 2025

Definition

(Wiederholung) Eine **Menge** ist ein mathematisches Objekt, dem andere Objekte als ihre Elemente angehören können.

Satz

Zwei Mengen M, N stimmen genau dann überein, wenn sie dieselben Elemente enthalten. Dementsprechend sind zwei Mengen verschieden,

wenn mindestens eine der beiden ein Element enthält, das die andere nicht enthält.

Definition

Sei E(x) eine Eigenschaft. Die Menge aller Objekte (vom Typ der Variablen x) mit der Eigenschaft E ist aufgrund des Extensionalitätsaxioms (Gleichheit von Mengen) eindeutig bestimmt. Sie heißt die Extension von E und wird notiert mit

$\{x|E(x)\}$ (lies: „Menge aller x, für die gilt: E(x)“)

In diesem Ausdruck fungiert das Zeichen „x“ als gebundene Variable. Per Definition gilt:

$$\forall a : a \in \{x|E(x)\} \iff E(a)$$

Für eine Menge M (von Objekten vom Typ der Variablen x) wird mit

$$\{x \in M|E(x)\} := \{x|x \in M \, und \, E(x)\}$$

die Menge aller Elemente von M ,die die Eigenschaft E besitzen, notiert.

Bemerkung:

Beispiel

Definition

Seien M und N zwei Mengen. M heißt eine Teilmenge (manchmal auch: Untermenge) von N (und N eine Obermenge von M), falls jedes Element von M auch ein Element von N ist.

$$M \subseteq N :\Leftrightarrow \text{M ist eine Teilmenge von N}$$

$$M \not\subseteq N :\Leftrightarrow \text{M ist keine Teilmenge von N}$$

Beispiel

Satz

Seien L, M, N drei Mengen. Dann gilt:
a) (Reflexivität) $M \subseteq M$.
b) (Transitivität) Aus $L \subseteq M$ und $M \subseteq N$ folgt $L \subseteq N$.
c) (Antisymmetrie) Aus $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$ folgt $M = N$.

Bweis:

Definition

Eine Menge heißt

- **leer**, wenn sie gar keine Elemente enthält.
- **nichtleer**, wenn sie nicht leer ist.
- eine **Einermenge** (englisch: “singleton”), wenn sie genau ein Element enthält, also von der Form $\{x\}$ für irgendein Objekt x ist.

Beispiel

Satz

Die leere Menge ist Teilmenge einer jeden beliebigen Menge.

Beweisidee:

Satz

Es gibt genau eine leere Menge

Beweis:

Definition

Sei M eine Menge. Die Menge aller Teilmengen von M heißt die Potenzmenge von M und wird mit „P(M)“ notiert:

$$P(M) := \{N | \text{N ist eine Teilmenge von M}\}$$

Beispiel

Definition

Eine Menge M heißt ein **Mengensystem**, wenn jedes ihrer Elemente ebenfalls eine Menge ist. Ist M irgendeine Menge, so ist beispielsweise jede Teilmenge $T \subseteq P(M)$ ein Mengensystem. Man nennt dann T auch ein **System von Teilmengen** von M .

Definition

Eine **Familie** a besteht aus

- Einer beliebigen Menge I, welche die **Indexmenge** der Familie genannt wird und deren Elemente die **Indizes** der Familie heißen.
- Für jeden Index i $\in$ I ein Objekt „a “, welches der **Eintrag an der i-ten Stelle oder die i-te Komponente** der Familie a genannt wird.

Die Familie a wird dann notiert als

$$(a_i)_{i \in I} \qquad \text{(lies: „}a_i\text{, i aus I“)}$$

Man spricht auch von einer Familie mit Indexmenge I oder einer **durch I indizierten Familie**.

Satz

Sind I irgendeine Menge und $(a_i)_{i\in I}$ und $(b_i)_{i\in I}$ zwei durch I indizierte Familien, so sind diese beiden Familien genau dann gleich, wenn sie an jedem Index denselben Eintrag besitzen. Als Formel:

$$(a_i)_{i\in I} = (b_i)_{i\in I} \Leftrightarrow \forall i \in I : a_i = b_i$$

Dementsprechend sind zwei solche Familien verschieden, wenn sie sich an mindestens einem Index unterscheiden.
Zwei Familien mit verschiedenen Indexmengen sind von vornherein voneinander verschieden.

Beispiel

Definition

Seien I, M zwei beliebige Mengen und $(a_i)_{i\in I}$ eine durch I indizierte Familie. Ist jedes der a_i 's ein Element von M , so nennt man die Familie $(a_i)_{i\in I}$ eine **(durch I indizierte) Familie mit Einträgen aus M** oder auch eine **M-wertige Familie**.
Die Menge aller Familien mit Indexmenge I und Einträgen aus M wird mit M^I notiert:

$$M^I := (a_i)_{i\in I} | \forall i \in I : a_i \in M$$

M^I heißt auch die „I-te Potenz von M"

Beispiel

Definition

Sei $n \in$ N eine natürliche Zahl. Familien $(a_i)_{i \in I}$ mit der Indexmenge I = 1, ..., n heißen n-Tupel und werden notiert in der Gestalt

$$(a_1, ..., a_n)$$

2-Tupel, also Objekte der Form (a, b), heißen **(geordnete) Paare**, 3-Tupel werden auch **Tripel** genannt.
Ist A eine Menge, so bezeichnet „An“ die Menge aller n-Tupel mit Einträgen aus A:

$$A^n := \{(a_1, ..., a_n) | a_1, ..., a_n \in A\}$$

Beispiel

Definition

Es gibt genau eine Familie, deren Indexmenge die leere Menge ist. Weil diese Familie keine Indizes hat, besitzt sie auch keine Einträge. Man spricht von der leeren Familie und notiert sie, ebenso wie die leere Menge, mit dem Zeichen .

Bemerkung:

Seien M, N zwei Mengen.

Definition

Der **Schnitt (oder auch Durchschnitt oder die Schnittmenge) von M und N**

$$M \cap N := \{x | x \in M \, und \, x \in N\} \qquad \text{(lies: „M geschnitten N“)}$$

ist die Menge aller Objekte, die sowohl in M als auch in N enthalten sind.

Definition

Die **Vereinigung von M und N**

$$M \cup N := \{x | x \in M \; oder \; x \in N\} \qquad \text{(lies: „M vereinigt N“)}$$

besteht aus denjenigen Objekten, die in mindestens einer der beiden Mengen M, N enthalten sind.

Definition

Die **Differenzmenge von M und N**

$$M \setminus N := \{x | x \in M und x \notin N\} \qquad \text{(lies: „M ohne N“)}$$

ist die Menge aller Elemente von M , die nicht in N enthalten sind (oder auch „M N “ für die Differenzmenge). Ist N eine Teilmenge von M, so schreibt man auch $N^C := M \setminus N$ (sofern N M) und spricht vom (relativen) Komplement von N (in M).

Beispiel

Definition

Eine **Mengenfamilie** (oder auch: Familie von Mengen) ist eine Familie, deren Einträge allesamt Mengen sind.

Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen.

Definition

Es heißen

$$\bigcap_{i\in I} M_i := \{x | \forall i \in I : x \in M_i\} \qquad \bigcup_{i\in I} M_i := \{x | \exists i \in I : x \in M_i\}$$

der **Durchschnitt und die Vereinigung** der M_i 's. Ist M eine Menge, deren Elemente ebenfalls allesamt Mengen sind, so schreibt man

$$\bigcap \mathbb{M} := \{m | \forall M \subseteq \mathbb{M} : m \in M\} \qquad \bigcup \mathbb{M} := \{m | \exists M \subseteq \mathbb{M} : m \in M\}$$

und spricht von Durchschnitt und Vereinigung von M.

Definition

Die Menge $\prod_{i\in I} M_i := \{(x_i)_{i\in I} | \forall i \in I : x_i \in M_i\}$
heißt das **(kartesische) Produkt der M ’s**.

Bemerkung:
Schreibweisen:

Beispiel

Definition

Zwei Mengen M, N heißen **disjunkt**, wenn sie keine gemeinsamen Elemente haben ($M \cap N =$). Eine Familie von Mengen $(M_i)_{i \in I}$ heißt **paarweise disjunkt**, wenn je zwei der M_i 's disjunkt sind, d.h. wenn gilt:

$$M_i \cap M_j \neq \implies i = j$$

Sind M, N zwei disjunkte Mengen, so wird deren Vereinigung auch eine **disjunkte Vereinigung** genannt und mit

$$M \dot{\cup} N := M \cup N (\text{sofern M, N disjunkt sind})$$

Beispiel

Definition

Die Menge $\sqcup_{i\in I} M_i := \cup_{i\in I}\{(i,x)|i \in I, x \in M_i\}$
heißt die **(äußere) disjunkte Vereinigung** der M_i 's. Ist die Indexmenge I von der Gestalt $I = \{1, ..., n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$,so schreibt man

$$\sqcup_{i\in\{1,...,n\}} M_i = \sqcup_{i=1}^{n} M_i = M_1 \sqcup ... \sqcup M_n$$

Insbesondere ist für Mengen M, N:

$$M \sqcup N = \{(i,x)|i = 1 \; x \in M \; oder \; i = 2 \; und \; x \in \mathbb{N}\}$$

Man spricht von der **disjunkten Vereinigung** von M und N.

Beispiel