μφι Fachschaft MathPhysInfo

Mathematik-Vorkurs

Kapitel II: Beweise

24. September 2025

In einem **Beweis** versuchen wir, für gegebene Aussagen A, B die Implikation $A \implies B$ nachzuweisen.

Definition

Ein **mathematischer Satz** ist die Feststellung in einem mathematischen Text, dass eine Aussage A „gilt“.

Definition

Axiome sind Aussagen, die nicht bewiesen, sondern schlicht als „gegeben“ vorausgesetzt werden.

Es gibt noch weitere Aussagentypen, wie Korolar, Proposition etc.

wichtige Floskeln:

hinreichend: "Wenn A gilt, dann gilt auch B" $(A \implies B)$
d.h. die Vorraussetzung A ist "hinreichend"
notwendig: umgekehrt ist die Gültigkeit von B notwendig für die Gültigkeit von V $(\neg B \implies \neg A)$
Ein - genau ein: " Es existiert ein a mit Eigenschaft A" bedeutet: es existiert mindestens so ein a (d.h. vllt auch mehrere)
" Es existiert genau ein a" bedeutet, dass es nur so ein a existiert
O.B.d.A (Ohne Beschränkung der Allgemeinheit)
trivial

Axiom

Mithilfe von **direkten Beweisen** wird $A \implies B$ unter Verwendung von Axiomen und bereits bewiesenen Sätzen, direkt mit Hilfe von Schlussregeln hergeleitet.

Beispiel

Eine Äquivalenzaussage, besteht aus zwei Implikationen.
"A gilt genau dann, wenn B gilt"(A $\iff$ B)

Beispiel

Aussage:

"$\Rightarrow$:"

"$\Leftarrow$:"

Beweis durch Ringschluss:
Wenn ein Satz in Form mehrerer äquivalenter Aussagen formuliert wurde, zersetzen wir diese analog in Implikationen.

Beispiel

Aussage: Folgende Aussage sind äquivalent
(i)
(ii)
(iii)

"(i) $\Rightarrow$ (ii):"

"(ii) $\Rightarrow$ (iii):"

"(iii) $\Rightarrow$ (i):"

Axiom

Beim **Beweis durch Kontraposition** verwenden wir $(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A)$. Um $A \implies B$ zu beweisen, führen wir einen direkten Beweis für $\neg B \implies \neg A$.

Beispiel

Axiom

Mithilfe **Widerspruchsbeweis** beweist man die Gültigkeit einer Aussage, indem die Negation der Aussage falsch ist.

Beispiel

Beispiel

Außer durch direkter Beweis der Negation der Aussage, verwendet man üblicherweise **Gegenbeispiele** um einen Widerspruchsbeweis zu zeigen.

Beispiel

Axiom

Bei einem **Beweis durch vollständige Fallunterscheidung** wird jeder der möglichen Fälle einzeln betrachtet.

Beispiel

Beispiel

Satz

Aussageb über unendliche Mengen kann mit dem **Prinzip der vollständigen Induktion** beweisen.
Sei A_n eine Folge von Aussagen ($n \in \mathbb{N}$), welche folgende Bedingungen erfüllen:

- **Induktionsanfang**: Die Aussage A_1 ist gültig
- **Induktionsschluss**: $\forall n \in \mathbb{N}$ folgt aus der Gültigkeit von A_n die Gültigkeit von A_{n+1}

Dann gelten alle Aussagen A_n ($n \in \mathbb{N}$).

Beispiel

Geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + \ldots = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$

Induktionsanfang:

Induktionsvorraussetzung:

Induktionsschluss: