μφι Fachschaft MathPhysInfo

Mathematik-Vorkurs

Kapitel V: Relationen

24. September 2025

Definition

Sei X eine Menge. Eine (zweistellige) **Relation auf X** ist ein mathematisches Objekt, das mit zwei beliebigen Elementen von X zu einer Aussage kombiniert werden kann.
Sind R eine Relation auf X und $x, y \in X$ zwei Elemente, so notieren wir die sich ergebende Aussage mit

$$x\mathbf{R}y \qquad \text{(liest: „x steht in der Relation R zu y“)}$$

Satz

Seien X eine Menge und R, S zwei Relationen auf X.

$$R = S \iff (\forall x, y \in X : xRy \longleftrightarrow xSy)$$

Bemerkung:

Definition

Seien X eine Menge und R eine Relation auf X. Für die Relation R^{op} gilt

$$xR^{op}y :\Longleftrightarrow yRx\ x, y$$

heißt die Umkehrrelation von R (englisch: “opposite relation”).

Definition

Seien X eine Menge, R eine Relation auf X und $U \subseteq X$ eine Teilmenge.

$$xR|_U y :\Longleftrightarrow xRy\ x, y \in U$$

ist die Relation auf U, die Einschränkung von R auf U oder auch die von X vererbte Relation.

Beispiel

Definition

Seien X eine Menge und R eine Relation auf X, sowie $\forall x, y, z \in X$.Dann heißt die Relation R

(i) **reflexiv**: xRx

(ii) **transitiv**: $(xRy \text{ und } yRz) \implies xRz$

(iii) **symmetrisch**: $xRy \implies yRx$

(iv) **antisymmetrisch**: $(xRy \text{ und } yRx) \implies x = y$

Graphische Darstellung mit Richtung der Relation auf einer endlichen Menge:

Satz

Seien X eine Menge, R eine Relation auf X und E eine der vier Eigenschaften „reflexiv“, „transitiv“, „symmetrisch“, „antisymmetrisch“. Dann gilt:
(i) Besitzt R die Eigenschaft E, so besitzt auch die Umkehrrelation R^{op} die Eigenschaft E.
(ii) Besitzt R die Eigenschaft E, so besitzt für jede Teilmenge $U \subseteq X$ auch die Einschränkung $R|_U$ die Eigenschaft E

Beweis:

Definition

Sei X eine beliebige Menge, $\forall x, y, z \in X$. Eine Relation $\leq$ auf X heißt **Ordnungsrelation** (partielle Ordnung oder Halbordnung), wenn gilt

(i) Reflexivität:

(ii) Transitivität:

(iii) Antisymmetrie:

Eine (halb-)geordnete Menge ist ein Paar (X, $\leq$), bestehend aus einer Menge X und einer Ordnungsrelation $\leq$ auf X.

Beispiel

Satz

Sei $(X,\geq)$ eine geordnete Menge. Dann gilt:
(i) Die **Umkehrrelation** $\leq$ ist ebenfalls eine Ordnungsrelation auf X, die sogenannte Umkehrordnung.
(ii) Für jede Teilmenge $U \subseteq X$ ist die Einschränkung von $\leq$ auf U ebenfalls eine Ordnungsrelation, die auf U induzierte Ordnung oder von X geerbte Ordnung

Beweis:

Definition

Ist $(X, \leq)$ eine geordnete Menge, so heißen zwei Elemente x, y   X miteinander **vergleichbar**, wenn $x \leq y$ oder $y \leq x$. Die Ordnungsrelation heißt eine **Totalordnung**, genau dann wenn:

$$\forall x, y \in X : x \leq y \text{ oder } y \leq x$$

Ist $\leq$ eine **Totalordnung** auf X, so heißt das Paar $(X, \leq)$ eine **totalgeordnete Menge**.

Beispiel

Definition

Seien $a, b \in R$ mit a$\leq$b. Dann heißen

(i) offene Intervall

(ii) abgeschlossene Intervall

(iii) ganzzahliges Intervall

(iii) halboffene Intervalle

Definition

Sei X eine geordnete Menge. Ein Element $a \in X$ heißt

(i) **Minimum von X**, falls für jedes $x \in X$ gilt, dass $a \leq x$.

(ii) **Maximum von X**, falls für jedes $x \in X$ gilt, dass $x \leq a$.

(iii) **minimales Element von X**, falls es kein $x \in X$ gibt, für das $x < a$ gälte.

(iv) **maximales Element von X**, falls es kein $x \in X$ gibt, für das $a < x$ gälte.

Satz

Sei X eine geordnete Menge. Sofern X ein kleinstes bzw. größtes Element enthält, ist dieses eindeutig bestimmt.

Beweis:

Beispiel

Satz

Sei X eine geordnete Menge. Dann gilt:
(i) Jedes kleinste Element von X ist auch ein minimales Element.
(ii) Ist X totalgeordnet, ist auch jedes minimales Element ein kleinstes Element.
Analoge Aussagen gelten für größte und maximale Elemente.

Beweis:

Definition

Seien X eine geordnete Menge und $T \subseteq X$ eine Teilmenge.
Ein Element $x \in X$ heißt
(i) **untere Schranke** für T, wenn für alle $t \in T$ gilt: $x \leq t$

(ii) **obere Schranke** für T, wenn für alle $t \in T$ gilt: $t \leq x$

Die Teilmenge $T \subseteq X$ heißt
(i) **nach unten beschränkt** (in X), wenn es in X mindestens eine untere Schranke für T gibt

(ii) **nach oben beschränkt** (in X), wenn es in X mindestens eine obere Schranke für T gibt

(iii) **beschränkt** (in X), wenn sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist

Definition

Seien X eine geordnete Menge und $T \subset X$ eine Teilmenge.

(i) Ein Element $a \in X$ heißt **Infimum** von T , wenn a eine größte untere Schranke für T ist.
(a ist eine untere Schranke für T und für jede weitere untere Schranke x gilt $x \leq a$)

(ii) Ein Element $a \in X$ heißt **Supremum** von T , wenn a eine kleinste obere Schranke für T ist.
(a ist eine obere Schranke für T und für jede weitere obere Schranke x gilt $a \leq x$)

Definition

Sei X eine Menge. Eine Relation $\sim$ auf X heißt **Äquivalenzrelation**, wenn

(i) Reflexivität:

(ii) Symmetrie:

(iii) Transitivität:

Beispiel

Definition

Seien X eine Menge, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $x \in X$. Die Menge aller „zu x äquivalenten“ Elemente

$$[x] := \{y \in X | y \sim x\}$$

heißt die **Äquivalenzklasse von x**. Allgemein heißt eine Teilmenge $K \subseteq X$ eine **Äquivalenzklasse** (hinsichtlich $\sim$), wenn es ein Element $a \in X$ gibt, für das K = [a] ist. Ein solches Element a heißt ein **Vertreter** oder auch ein **Repräsentant** der Äquivalenzklasse K.

Definition

Seien X eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Ein **Vertretersystem** (oder auch: **Repräsentantensystem**) für $\sim$ ist eine Teilmenge $V \subseteq X$, die aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält.

Beispiel

Definition

Seien X eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Die Menge aller Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$ heißt die **Faktormenge** (oder auch: **Quotientenmenge**) von X modulo $\sim$

$$X/\sim := \{[x] | x \in X\} \qquad \text{(lies: „X modulo} \sim\text{“)}$$

Die Abbildung $X \to X/\sim$, die jedem Element von X seine Äquivalenzklasse zuordnet, heißt die **(kanonische) Projektion** von X auf X/ $\sim$

$$\pi : X \twoheadrightarrow X/\sim, \qquad x \mapsto [x]$$

Beispiel

Satz

Seien X eine Menge, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $x, y \in X$. Dann sind äquivalent:
(i) Es ist $[x] = [y]$.
(ii) Es gilt $x \sim y$.

Beweis:

Definition

Sei X eine beliebige Menge. Ein System von Teilmengen $\mathbb{P}$ von X heißt **Partition** von X, wenn gilt:

(i) Jedes Element von $\mathbb{P}$ ist eine nichtleere Teilmenge von X.
(ii) Es ist $X = \dot{\bigcup} \mathbb{P}$, d.h. X ist die disjunkte Vereinigung der Elemente von $\mathbb{P}$.

$\Longrightarrow \forall x \in X \; \exists! P \in \mathbb{P}$ mit $x \in P$.

Satz

Seien X eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Dann ist die Faktormenge $X/\sim$ eine Partition von X.

Beweis: