

Die Eigenschaft UBC auf freien Gruppen

Schwerpunkt Globale Analysis

Simon Lang

Matrikelnr.: 1864218



Bachelorarbeit

Universität Regensburg

Abgabedatum: 02.01.2020

Druckdatum: 19.12.2019

Betreuerin: Frau Prof. Dr. C. Löh

Zusammenfassung

Die Gruppenkohomologie für eine freie Gruppe F_n von Rang n ist vollständig bekannt. So gilt beispielweise mit \mathbb{R} -Koeffizienten (und trivialer Gruppenwirkung auf \mathbb{R})

$$H^q(F_n, \mathbb{R}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & q = 0 \\ \mathbb{R}^n & q = 1 \\ 0 & q \geq 2 \end{cases}$$

Für den funktionalanalytischen Zwilling der Gruppenkohomologie, der beschränkten Kohomologie von Gruppen $H_b^*(G, \mathbb{R})$, gilt dies jedoch nicht. Obwohl sich diese in niedrigen Graden sehr einfach bestimmen lässt und sogar unabhängig von der Gruppe G ist (siehe Abschnitt 2.1), ist sie bereits für F_2 für $q \geq 4$ unbekannt.

Für $q = 2$ wurde von [Mit84] und für $q = 3$ wurde von [Som98] gezeigt, dass $\dim_{\mathbb{R}} H_b^q(G, \mathbb{R}) = \infty$ gilt. Insbesondere demonstriert dies, dass beschränkte Kohomologie von Gruppen i.A. nichttrivial ist. Dies ist nicht offensichtlich, da sie nach [Gro82] für mittelbare Gruppen für $q > 0$ verschwindet.

In dieser Arbeit werden zuerst die grundlegenden Begriffe für das Setting von (Ko)Homologie definiert. Gruppenkohomologie und beschränkte Kohomologie von Gruppen werden anschließend über die Bar-Auflösung konstruiert.

Basierend auf [MM85, Theorem 2.8] wird mithilfe der „Uniform Boundary Condition“ (UBC) eine äquivalente Charakterisierung der Trivialität von $H_b^4(F_2, \mathbb{R})$ bewiesen, welche einen experimentellen Zugang ermöglicht.

Zuletzt wird eine beispielhafte Implementation des Experiments in der Programmiersprache C++ gegeben und ein generierter Datensatz ausgewertet.

Inhaltsverzeichnis

1	Konstruktion der beschränkten Kohomologie von Gruppen	1
1.1	Gruppenringe	1
1.2	Elementare Begriffe der homologischen Algebra	2
1.3	Bar-Auflösung und elementare Eigenschaften	4
1.4	Wechseln der Koeffizienten	8
1.5	Definiton und Vergleich von Kohomologie und (Ko)Kettenkomplexen . .	9
2	Eigenschaften beschränkter Kohomologie von Gruppen	12
2.1	Beschränkte Kohomologie in niedrigen Graden	12
2.2	Die Eigenschaft UBC und die Vergleichsabbildung	13
2.3	Anwendung der Resultate im Experiment	18
3	Auswertung des Experiments	20
3.1	Implementation des Experiments	20
3.2	Auswertung des Datensatzes	22

1 Konstruktion der beschränkten Kohomologie von Gruppen

Wir verwenden die folgenden Konventionen: Alle Ringe sind unitär, Moduln sind Links-Moduln (sofern nicht anders angegeben).

Wichtig sowohl für die Konstruktion der Gruppenkohomologie als auch der beschränkten Kohomologie von Gruppen ist der Gruppenring. Dazu definieren wir dessen universelle Eigenschaft und geben die konkrete Konstruktion im Spezialfall des Ringes \mathbb{Z} an, da diese für unsere Zwecke genügt.

1.1 Gruppenringe

Definition 1.1.1 (universelle Eigenschaft des Gruppenrings). Sei R ein Ring. Der *Gruppenring* $R[G]$ (der sogar die Struktur einer R -Algebra besitzt) besitzt zusammen mit der kanonischen Inklusion $i : G \rightarrow R[G]$ folgende universelle Eigenschaft:

Für jede R -Algebra S und jeden Gruppenhomomorphismus $f : G \rightarrow S^\times$ existiert ein eindeutiger R -Algebrenhomomorphismus $R[f] : R[G] \rightarrow S$ mit $R[f] \circ i = (S^\times \xrightarrow{\text{incl}} S) \circ f$.

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{f} & S^\times & \xrightarrow{\text{incl}} & S \\ i \downarrow & & & \nearrow \text{! } R[f] & \\ R[G] & & & & \end{array}$$

Diese universelle Eigenschaft entspricht der Tatsache, dass der Funktor $R[-] : \text{Grp} \rightarrow R\text{-Alg}$ linksadjungiert ist zu dem Funktor $(-)^{\times} : R\text{-Alg} \rightarrow \text{Grp}$, der eine R -Algebra auf ihre Einheitengruppe schickt.

Da wir uns meist nur für die Ringstruktur interessieren, sprechen wir vom Gruppenring.

Definition 1.1.2 (ganzzahliger Gruppenring). Wir konstruieren im Folgenden den Gruppenring $\mathbb{Z}[G]$. Für allgemeine Ringe verläuft die Konstruktion analog.

Sei G eine Gruppe. Der (integrale) Gruppenring $\mathbb{Z}[G]$ von G ist definiert wie folgt:

Die zugrundeliegende additive Gruppe ist die freie abelsche Gruppe $\bigoplus_G \mathbb{Z}$, wobei wir G als die kanonische Basis auffassen. Somit können wir $x \in \mathbb{Z}[G]$ als $x = \sum_{g \in G} a_g \cdot g$

mit eindeutigen Koeffizienten $a_g \in \mathbb{Z}$ auffassen, die für alle bis auf endlich viele $g \in G$ verschwinden. Die Addition ist also gegeben durch die Abbildung

$$+ : \mathbb{Z}[G] \times \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}[G]$$

$$\left(\sum_{g \in G} a_g \cdot g, \sum_{g \in G} b_g \cdot g \right) \mapsto \sum_{g \in G} (a_g + b_g) \cdot g$$

und die Multiplikation durch

$$\cdot : \mathbb{Z}[G] \times \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}[G]$$

$$\left(\sum_{g \in G} a_g \cdot g, \sum_{h \in G} b_h \cdot h \right) \mapsto \sum_{g \in G} \left(\sum_{h \in G} a_h b_{h^{-1}g} \right) \cdot g.$$

Da $1 \cdot e$ (mit $e \in G$ neutrales Element) ein neutrales Element bezüglich der Multiplikation ist, ist $\mathbb{Z}[G]$ ein unitärer (aber nicht notwendigerweise kommutativer) Ring. (Die restlichen Ringaxiome lassen sich an der angegebenen Konstruktion verifizieren.)

1.2 Elementare Begriffe der homologischen Algebra

Es gibt verschiedene Möglichkeiten Gruppenkohomologie bzw. beschränkte Kohomologie von Gruppen zu konstruieren. Da wir sie über die sogenannte Bar-Auflösung einführen werden, wiederholen wir Grundbegriffe der homologischen Algebra. Die hier benutzten Indexkonventionen gelten auch im weiteren Verlauf.

Definition 1.2.1 (Kategorie der Kettenkomplexe). Sei R ein Ring. Ein *(Links-)R-Kettenkomplex* C_* ist ein Paar $((C_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1})_{n \in \mathbb{Z}})$, wobei für alle $n \in \mathbb{Z}$ gelte:

- C_n ist ein R -Links-Modul
- $\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ ist eine R -lineare Abbildung
- $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$

Die Abbildung ∂_n wird als Randoperator bezeichnet. Die Kategorie ${}_R\text{Ch}$ ist die Kategorie der (Links-)R-Kettenkomplexe, wobei die Objekte die eben definierten Kettenkomplexe sind und Morphismen $C_* \rightarrow D_*$ zwischen Kettenkomplexen gegeben sind durch Familien $(f_n : C_n \rightarrow D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, für die

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{\partial_n^C} & C_{n-1} \\ f_n \downarrow & & \downarrow f_{n-1} \\ D_n & \xrightarrow{\partial_n^D} & D_{n-1} \end{array}$$

kommutiert. Die Verknüpfung von Morphismen ist durch die gradweise Abbildungsverknüpfung gegeben.

Weiter bezeichnen wir im Folgenden Elemente aus C_n als $(n-)$ Ketten, Elemente aus $\ker \partial_n$ als $(n-)$ Zykel und Elemente aus $\operatorname{im} \partial_{n+1}$ als $(n-)$ Ränder.

Definition 1.2.2 (Homologie von Kettenkomplex). Sei R ein Ring. Wir definieren für alle $n \in \mathbb{Z}$ Funktoren $H_n : {}_R\mathbf{Ch} \rightarrow {}_R\mathbf{Mod}$ wie folgt:

- auf Objekten:

$$H_n(C_*) := \frac{\ker \partial_n}{\operatorname{im} \partial_{n+1}}$$

- auf Morphismen:

Seien $C_*, D_* \in \operatorname{Ob}({}_R\mathbf{Ch})$ und $f \in \operatorname{Hom}_{{}_R\mathbf{Ch}}(C_*, D_*)$. Dann ist

$$\begin{aligned} H_n(f) : H_n(C_*) &\rightarrow H_n(D_*) \\ [x] &\mapsto [f(x)] \end{aligned}$$

eine wohldefinierte, R -lineare Abbildung. (Dies folgt aus der universellen Eigenschaft von Quotienten, da f eine Kettenabbildung ist.)

Aus dieser Konstruktion folgt sofort, dass H_n ein Funktor ist.

Definition 1.2.3 (Kategorie der Kokettenkomplexe). Sei R ein Ring. Ein $(\text{Links-})R$ -Kokettenkomplex C^* ist ein Paar $((C^n)_{n \in \mathbb{Z}}, (\delta^n : C^n \rightarrow C^{n+1})_{n \in \mathbb{Z}})$, wobei für alle $n \in \mathbb{Z}$ gelte:

- C^n ist ein R -Links-Modul
- $\delta^n : C^n \rightarrow C^{n+1}$ ist eine R -lineare Abbildung
- $\delta^n \circ \delta^{n-1} = 0$

Die Abbildung δ^n wird als Korandoperator bezeichnet. Die Kategorie ${}_R\mathbf{KoCh}$ ist die Kategorie der $(\text{Links-})R$ -Kokettenkomplexe, wobei die Objekte die eben definierten Kokettenkomplexe sind und Morphismen $C^* \rightarrow D^*$ zwischen Kokettenkomplexen gegeben sind durch Familien $(f_n : C^n \rightarrow D^n)_{n \in \mathbb{Z}}$, für die

$$\begin{array}{ccc} C^n & \xrightarrow{\delta_C^n} & C^{n+1} \\ f_n \downarrow & & \downarrow f_{n+1} \\ D^n & \xrightarrow{\delta_D^n} & D^{n+1} \end{array}$$

kommutiert. Die Verknüpfung von Morphismen ist wieder durch die gradweise Abbildungsverknüpfung gegeben.

Weiter bezeichnen wir im Folgenden Elemente aus C^n als $(n-)$ Koketten, Elemente aus $\ker \delta^n$ als $(n-)$ Kozykel und Elemente aus $\operatorname{im} \delta^{n-1}$ als $(n-)$ Koränder.

Definition 1.2.4 (Kohomologie von Kokettenkomplex). Sei R ein Ring. Wir definieren für alle $n \in \mathbb{Z}$ Funktoren $H^* : {}_R\text{KoCh} \rightarrow {}_R\text{Mod}$ wie folgt:

- auf Objekten:

$$H^n(C^*) := \frac{\ker \delta^n}{\text{im } \delta^{n-1}}$$

- auf Morphismen:

Seien $C^*, D^* \in \text{Ob}({}_R\text{KoCh})$ und $f \in \text{Hom}_{{}_R\text{KoCh}}(C^*, D^*)$. Dann ist

$$\begin{aligned} H^n(f) : H^n(C^*) &\rightarrow H^n(D^*) \\ [x] &\mapsto [f(x)] \end{aligned}$$

eine wohldefinierte, lineare Abbildung. (Dies folgt aus der universellen Eigenschaft von Quotienten, da f eine Kokettenabbildung ist.)

Aus dieser Konstruktion folgt sofort, dass H^n ein Funktor ist.

Im Folgenden wird häufig der Fall von (Ko)Kettenkomplexen auftreten, die über \mathbb{N} statt \mathbb{Z} indiziert sind. In diesem Fall sind die verbleibenden Indizes mit Nullmoduln und trivialen (Ko)Randoperatoren zu ergänzen. Wir benutzen für Kettenkomplexe und Homologie untere Indizes sowie obere Indizes für Kokettenkomplexe und Kohomologie.

1.3 Bar-Auflösung und elementare Eigenschaften

Im Folgenden sei G eine Gruppe. Wir definieren nun die Bar-Auflösung $C_*(G)$ der Gruppe G . Auf dieser Konstruktion aufbauend werden wir sowohl Gruppenkohomologie als auch beschränkte Kohomologie von Gruppen konstruieren.

Definition 1.3.1 (Die Bar-Auflösung $C_*(G)$). Für $n \in \mathbb{N}$ definiere

$$C_n(G) := \bigoplus_{G^n} \mathbb{Z}[G]$$

d.h. $C_n(G)$ sei der freie $\mathbb{Z}[G]$ Modul zur Basis G^n . Wir notieren die Elemente der $\mathbb{Z}[G]$ -Basis (g_1, \dots, g_n) als $[g_1] \dots [g_n]$ und das (einzige) Element der (trivialen) Gruppe G^0 als $[]$. Die Randoperatoren seien definiert als

$$\begin{aligned} \partial_n : C_n(G) &\rightarrow C_{n-1}(G) \\ [g_1] \dots [g_n] &\mapsto g_1 \cdot [g_2] \dots [g_n] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \cdot [g_1] \dots [g_{i-1}] g_i \cdot [g_{i+1}] g_{i+2} \dots [g_n] \\ &\quad + (-1)^n \cdot [g_1] \dots [g_{n-1}]. \end{aligned}$$

Dass dies wirklich Randoperatoren sind wird in Lemma 1.3.2 bewiesen.

Lemma 1.3.2. *Die Bar-Auflösung aus Definition 1.3.1 ist ein Kettenkomplex, d.h. $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $\partial_n \circ \partial_{n+1}$ auf der kanonischen Basis von $C_{n+1}(G)$ verschwindet.

Um die Rechnung übersichtlich zu halten, führen wir unter der Konvention $n < m \implies \sum_{i=m}^n (\dots) = 0$ folgende Zerlegungen ein:

Es gilt

$$\begin{aligned} \partial_n \circ \partial_{n+1}([g_1 | \dots | g_{n+1}]) &= g_1 \cdot \partial_n([g_2 | \dots | g_{n+1}]) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (-1)^i \cdot \partial_n([g_1 | \dots | g_{i-1} | g_i \cdot g_{i+1} | g_{i+2} | \dots | g_{n+1}]) \\ &\quad + (-1)^{n+1} \cdot \partial_n([g_1 | \dots | g_n]) \end{aligned}$$

und wir zerlegen die Summe in folgende Teile:

$$\begin{aligned} A &:= g_1 \cdot \partial_n([g_2 | \dots | g_{n+1}]) \\ &= g_1 \cdot g_2 \cdot [g_3 | \dots | g_{n+1}] + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i g_1 \cdot [g_2 | \dots | g_{i+1} \cdot g_{i+2} | \dots | g_{n+1}] \\ &\quad + (-1)^n g_1 \cdot [g_2 | \dots | g_n] \\ B &:= \sum_{i=1}^n (-1)^i \cdot \partial_n([g_1 | \dots | g_{i-1} | g_i \cdot g_{i+1} | g_{i+2} | \dots | g_{n+1}]) \\ C &:= (-1)^{n+1} \cdot \partial_n([g_1 | \dots | g_n]). \end{aligned}$$

Weiter zerlegen wir

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n (-1)^i \cdot \partial_n([g_1 | \dots | g_i \cdot g_{i+1} | \dots | g_{n+1}]) \stackrel{\text{umordnen}}{=} -g_1 \cdot g_2 \cdot [g_3 | \dots | g_{n+1}] \\
& + \sum_{i=2}^n (-1)^i g_1 \cdot [g_2 | \dots | g_i \cdot g_{i+1} | \dots | g_{n+1}] \\
& + \sum_{i=3}^n \sum_{j=1}^{i-2} (-1)^{i+j} \cdot [g_1 | \dots | g_j \cdot g_{j+1} | \dots | g_i \cdot g_{i+1} | \dots | g_{n+1}] \\
& + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} (-1)^{i+j} \cdot [g_1 | \dots | g_i \cdot g_{i+1} | \dots | g_{j+1} \cdot g_{j+2} | \dots | g_{n+1}] \\
& - \sum_{i=2}^n [g_1 | \dots | g_{i-1} \cdot g_i \cdot g_{i+1} | \dots | g_{n+1}] \\
& + \sum_{i=1}^{n-1} [g_1 | \dots | g_i \cdot g_{i+1} \cdot g_{i+2} | \dots | g_{n+1}] \\
& + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+n} \cdot [g_1 | \dots | g_i \cdot g_{i+1} | \dots | g_n] + [g_1 | \dots | g_{n-1}]
\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}
B_1 &:= -g_1 \cdot g_2 \cdot [g_3 | \dots | g_{n+1}] + \sum_{i=2}^n (-1)^i g_1 \cdot [g_2 | \dots | g_i \cdot g_{i+1} | \dots | g_{n+1}] \\
B_2 &:= \sum_{i=3}^n \sum_{j=1}^{i-2} (-1)^{i+j} \cdot [g_1 | \dots | g_j \cdot g_{j+1} | \dots | g_i \cdot g_{i+1} | \dots | g_{n+1}] \\
B_3 &:= \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} (-1)^{i+j} \cdot [g_1 | \dots | g_i \cdot g_{i+1} | \dots | g_{j+1} \cdot g_{j+2} | \dots | g_{n+1}] \\
B_4 &:= - \sum_{i=2}^n [g_1 | \dots | g_{i-1} \cdot g_i \cdot g_{i+1} | \dots | g_{n+1}] \\
B_5 &:= \sum_{i=1}^{n-1} [g_1 | \dots | g_i \cdot g_{i+1} \cdot g_{i+2} | \dots | g_{n+1}] \\
B_6 &:= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+n} \cdot [g_1 | \dots | g_i \cdot g_{i+1} | \dots | g_n] + [g_1 | \dots | g_{n-1}]
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (-1)^{n+1} \cdot \partial_n([g_1 | \dots | g_n]) &= (-1)^{n+1} g_1 \cdot [g_2 | \dots | g_n] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+n+1} \cdot [g_1 | \dots | g_i \cdot g_{i+1} | \dots | g_n] \\ &\quad - [g_1 | \dots | g_{n-1}] \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} C_1 &:= (-1)^{n+1} g_1 \cdot [g_2 | \dots | g_n] \\ C_2 &:= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+n+1} \cdot [g_1 | \dots | g_i \cdot g_{i+1} | \dots | g_n] - [g_1 | \dots | g_{n-1}]. \end{aligned}$$

Offenbar gilt $B_4 + B_5 = 0$, $B_6 + C_2 = 0$ und $A + B_1 + C_1 = 0$.

Es gilt $B_3 = -B_2$, denn

$$\begin{aligned} B_3 &= \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} (-1)^{i+j} \cdot [g_1 | \dots | g_i \cdot g_{i+1} | \dots | g_{j+1} \cdot g_{j+2} | \dots | g_{n+1}] \\ &\stackrel{\text{umordnen}}{=} \sum_{j=2}^{n-1} \sum_{i=1}^{j-1} (-1)^{i+j} \cdot [g_1 | \dots | g_i \cdot g_{i+1} | \dots | g_{j+1} \cdot g_{j+2} | \dots | g_{n+1}] \\ &= \sum_{j=3}^n \sum_{i=1}^{j-2} (-1)^{i+j-1} \cdot [g_1 | \dots | g_i \cdot g_{i+1} | \dots | g_j \cdot g_{j+1} | \dots | g_{n+1}] = -B_2, \end{aligned}$$

womit $\partial_n \circ \partial_{n+1}([g_1 | \dots | g_{n+1}]) = 0$ folgt. \square

Satz 1.3.3 (Eine \mathbb{Z} -Basis der Bar-Auflösung). *Die $\mathbb{Z}[G]$ -Moduln $C_n(G)$ der Bar-Auflösung besitzen eine \mathbb{Z} -Basis und diese ist für $n \in \mathbb{N}$ gegeben durch $\{g_0 \cdot [g_1 | \dots | g_n] \in C_n(G) : (g_0, g_1, \dots, g_n) \in G^{n+1}\} \subset C_n(G)$.*

Beweis. Nach Konstruktion gilt $C_n(G) = \bigoplus_{G^n} \mathbb{Z}[G]$ und $\mathbb{Z}[G] \cong_{\mathbb{Z}\text{-Mod}} \bigoplus_{g \in G} \mathbb{Z}$. Wenn wir also $\mathbb{Z}[G]$ als \mathbb{Z} -Modul auffassen, gilt

$$C_n(G) = \bigoplus_{G^n} \mathbb{Z}[G] \cong_{\mathbb{Z}\text{-Mod}} \bigoplus_{G^n} \bigoplus_G \mathbb{Z} \cong_{\mathbb{Z}\text{-Mod}} \bigoplus_{G^{n+1}} \mathbb{Z}$$

wobei wir die angegebene Basis erhalten, indem wir die kanonische Basis von $\bigoplus_{G^{n+1}} \mathbb{Z}$ „rückwärts“ durch die Isomorphismen auf $C_n(G)$ zurückführen. \square

1.4 Wechseln der Koeffizienten

Wir wollen im Folgenden die Koeffizienten der Bar-Auflösung in $\mathbb{R}[G]$ bzw. $\mathbb{Q}[G]$ ändern.

Definition 1.4.1 (Tensorprodukt Modul und Kettenkomplex). Seien R, S Ringe und $M \in {}_S\text{Mod}_R$, d.h. ein (S, R) -Bimodul. Weiter sei $C_* \in {}_R\text{Ch}$. Das Tensorprodukt $M \otimes_R C_*$ sei definiert als die Anwendung von $M \otimes_R (-)$ auf die Moduln und Randoperatoren des Kettenkomplexes C_* . Aus der Funktorialität von $M \otimes_R (-) : {}_R\text{Mod} \rightarrow {}_S\text{Mod}$ folgt bereits die Funktorialität ${}_R\text{Ch} \rightarrow {}_S\text{Ch}$, da das Tensorprodukt Nullabbildungen erhält.

Bemerkung 1.4.2. Seien $A, B \in {}_R\text{Alg}$ mit R einem kommutativen Ring. Sei $M \in {}_A\text{Mod}$ und $N \in {}_B\text{Mod}$. Dann ist $M \otimes_R N$ ein $A \otimes_R B$ -Modul mit der Skalarmultiplikation

$$\begin{aligned} A \otimes_R B \times M \otimes_R N &\rightarrow M \otimes_R N \\ (a \otimes b, m \otimes n) &\mapsto a \cdot m \otimes b \cdot n. \end{aligned}$$

Auf diese Weise können wir die Koeffizienten der Bar-Auflösung ändern. Indem wir \mathbb{R} und \mathbb{Q} mit ihrer gewöhnlichen Multiplikation selbst als \mathbb{R} - bzw. \mathbb{Q} -Algebra auffassen, erhalten wir also eine $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G]$ - bzw. $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G]$ -Multiplikation auf $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} C_n(G)$ bzw. $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C_n(G)$. Der nächste Satz zeigt, dass wir $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G]$ mit $\mathbb{R}[G]$ und $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G]$ mit $\mathbb{Q}[G]$ identifizieren können.

Satz 1.4.3 ($A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G]$). *Sei A ein kommutativer Ring. Wir betrachten A als A -Algebra (mit der eigenen Multiplikation als Skalarmultiplikation) und $\mathbb{Z}[G]$ als \mathbb{Z} -Algebra. Das Tensorprodukt $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G]$ ist dann eine A -Algebra. Die Multiplikation ist auf den Erzeugern gegeben durch $(a_1 \otimes z_1) \cdot (a_2 \otimes z_2) = a_1 \cdot a_2 \otimes z_1 \cdot z_2$.*

Dann gilt, dass

$$\begin{aligned} A[G] &\rightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G] \\ \sum_{g \in G} a_g \cdot g &\mapsto \sum_{g \in G} a_g \otimes 1 \cdot g \end{aligned}$$

ein (kanonischer) A -Algebrenisomorphismus ist.

Beweis. Da das Tensorprodukt in $A\text{-Alg}$ zum Vergissfunktorkomplex $(-)_\text{Ring} : A\text{-Alg} \rightarrow \text{Ring}$ linksadjungiert ist, gilt

$$\text{Hom}_{A\text{-Alg}}(A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G], -) \cong \text{Hom}_{\text{Ring}}(\mathbb{Z}[G], (-)_\text{Ring}).$$

Sei $(-)_\mathbb{Z\text{-Alg}} : A\text{-Alg} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-Alg}$ der Funktor, welcher die Skalare von A auf \mathbb{Z} ändert (via dem eindeutigen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \rightarrow A$). Dann gilt

$$\text{Hom}_{\text{Ring}}(\mathbb{Z}[G], (-)_\text{Ring}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-Alg}}(\mathbb{Z}[G], (-)_\mathbb{Z\text{-Alg}})$$

und der natürliche Isomorphismus ist gegeben durch kanonisches Erweitern von Ringhomomorphismen auf \mathbb{Z} -Algebrenhomomorphismen und umgekehrt durch das „Vergessen“ der Verträglichkeit mit Skalaren aus \mathbb{Z} .

Durch zweimaliges Anwenden der Adjunktion des Gruppenringfunktors erhalten wir

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-Alg}}(\mathbb{Z}[G], (-)_{\mathbb{Z}\text{-Alg}}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Grp}}(G, (-)^\times) \cong \mathrm{Hom}_{A\text{-Alg}}(A[G], -),$$

womit nach dem Yoneda-Lemma $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G] \cong_{A\text{-Alg}} A[G]$ folgt. Durch Einsetzen in die universelle Eigenschaft von Gruppenringen zusammen mit

$$\begin{aligned} i : G &\rightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G] \\ g &\mapsto 1 \otimes 1 \cdot g \end{aligned}$$

erhält man, dass die obige Abbildung tatsächlich der kanonische A -Algebrenisomorphismus ist. \square

Bemerkung 1.4.4. Somit trägt $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} C_*(G)$ die Struktur eines $\mathbb{R}[G]$ -Moduls und $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} C_*(G)$ die eines $\mathbb{Q}[G]$ -Moduls. Wir bezeichnen ab jetzt den Kettenkomplex $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} C_*(G)$ mit $C_*^{\mathbb{R}}(G)$ und die Randoperatoren $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \partial_*$ dieses Komplexes mit $\partial_*^{\mathbb{R}}$ (für \mathbb{Q} analog).

Bemerkung 1.4.5 (Basis von $C_n^{\mathbb{R}}(G)$). Aus der Argumentation in Satz 1.3.3 folgt bereits, dass die \mathbb{Z} -Basis $\{g_0 \cdot [g_1 | \dots | g_n] \in C_n(G) : (g_0, g_1, \dots, g_n) \in G^{n+1}\} \subset C_n(G)$ von $C_n(G)$ auch eine \mathbb{R} -Basis von $C_n^{\mathbb{R}}(G)$ ist. Das analoge Resultat für $C_n^{\mathbb{Q}}(G)$ gilt ebenfalls.

1.5 Definiton und Vergleich von Kohomologie und (Ko)Kettenkomplexen

In diesem Abschnitt werden alle für diese Arbeit relevanten (Ko)Kettenkomplexe verglichen und Gruppenkohomologie sowie beschränkte Kohomologie von Gruppen eingeführt.

Definition 1.5.1 (Gruppenkohomologie mit \mathbb{R} -Koeffizienten). Sei G eine Gruppe, $(C_*^{\mathbb{R}}(G), \partial_*^{\mathbb{R}})$ der Kettenkomplex der Bar-Auflösung (mit \mathbb{R} -Koeffizienten). Weiter fassen wir \mathbb{R} mit der Skalarmultiplikation

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[G] \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \left(\sum_{g \in G} a_g \cdot g, r \right) &\mapsto r \sum_{g \in G} a_g \end{aligned}$$

als $\mathbb{R}[G]$ -Modul auf. Wir erhalten daraus einen $\mathbb{R}[G]$ -Kokettenkomplex $(\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}[G]}(C_*^{\mathbb{R}}(G), \mathbb{R}), \delta_{\mathbb{R}}^*)$ mit den Korandoperatoren

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbb{R}}^n : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}[G]}(C_n^{\mathbb{R}}(G), \mathbb{R}) &\rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}[G]}(C_{n+1}^{\mathbb{R}}(G), \mathbb{R}) \\ g &\mapsto (-1)^{n+1} g \circ \partial_{n+1}^{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

Wir bezeichnen $(\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}[G]}(C_*^{\mathbb{R}}(G), \mathbb{R}), \delta_{\mathbb{R}}^*)$ im weiteren abkürzend als $(C_{\mathbb{R}}^*(G), \delta_{\mathbb{R}}^*)$. Die Kohomologie dieses Komplexes $H^*(G, \mathbb{R})$ bezeichnen wir im Folgenden als *Gruppenkohomologie* von G mit \mathbb{R} -Koeffizienten.

Definition 1.5.2 (ℓ^1 -Norm). Mithilfe von Bemerkung 1.4.5 können wir eine Norm auf den Kettenmoduln $C_n^{\mathbb{R}}(G)$ bzw. $C_n^{\mathbb{Q}}(G)$ der Bar-Auflösung definieren.

Wir betrachten hierbei $C_n^{\mathbb{R}}(G)$ als \mathbb{R} -Vektorraum mit der \mathbb{R} -Basis aus Satz 1.3.3 bzw. Bemerkung 1.4.5. Dann ist

$$\|\cdot\|_1 : C_n^{\mathbb{R}}(G) \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ \sum_{g \in G^{n+1}} a_g \cdot g_0 \cdot [g_1 | \dots | g_n] \mapsto \sum_{g \in G^{n+1}} |a_g|$$

eine Norm, die ℓ^1 -Norm auf $C_*^{\mathbb{R}}(G)$. Diese Norm ist G -invariant, d.h. für alle $g \in G, v \in C_n^{\mathbb{R}}(G)$ gilt $\|g \cdot v\|_1 = \|v\|_1$.

Die Einschränkung der Abbildung $\|\cdot\|_1 : C_n^{\mathbb{R}}(G) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ auf $C_n^{\mathbb{Q}}(G)$ bezeichnen wir als ℓ^1 -Norm auf $C_n^{\mathbb{Q}}(G)$.

Offenbar sind die Randoperatoren $\partial_n^{\mathbb{R}}$ bzw. $\partial_n^{\mathbb{Q}}$ beschränkt bezüglich der ℓ^1 -Norm, denn es gilt $\|\partial_n^{\mathbb{R}}(x)\|_1 \leq (n+1)\|x\|_1$ bzw. $\|\partial_n^{\mathbb{Q}}(x)\|_1 \leq (n+1)\|x\|_1$ nach Konstruktion.

Definition 1.5.3 (beschränkte Kohomologie von Gruppen mit \mathbb{R} -Koeffizienten). Sei G eine Gruppe. Wir bezeichnen im Folgenden die Operatornorm auf dem topologischen Dualraum von $(C_n^{\mathbb{R}}(G), \|\cdot\|_1)$ mit $\|\cdot\|_{\infty}$, d.h. die topologischen Dualräume sind gegeben durch $\text{BHom}_{\mathbb{R}[G]}(C_n^{\mathbb{R}}(G), \mathbb{R}) = \{f \in \text{Hom}_{\mathbb{R}[G]}(C_n^{\mathbb{R}}(G), \mathbb{R}) : \|f\|_{\infty} < \infty\}$.

Wir erhalten so analog zu der Konstruktion von Gruppenkohomologie einen Kokettenkomplex $(\text{BHom}_{\mathbb{R}[G]}(C_*^{\mathbb{R}}(G), \mathbb{R}), \delta_{b,\mathbb{R}}^*)$ mit beschränkten Korandoperatoren

$$\delta_{b,\mathbb{R}}^n : \text{BHom}_{\mathbb{R}[G]}(C_n^{\mathbb{R}}(G), \mathbb{R}) \rightarrow \text{BHom}_{\mathbb{R}[G]}(C_{n+1}^{\mathbb{R}}(G), \mathbb{R}) \\ f \mapsto (-1)^{n+1} f \circ \partial_{n+1}^{\mathbb{R}}$$

den wir abkürzen mit $(C_{\mathbb{R},b}^*(G), \delta_{\mathbb{R},b}^*)$. Die zugehörige Kohomologie ist die *beschränkte Kohomologie* von G mit \mathbb{R} -Koeffizienten, wir bezeichnen sie mit $H_b^*(G, \mathbb{R})$.

Definition 1.5.4 (ℓ^1 -Kettenkomplex). Sei G eine Gruppe. Da die Randoperatoren des Komplexes $(C_*^{\mathbb{R}}(G), \partial_*^{\mathbb{R}})$ linear und stetig sind, können wir sie eindeutig auf die ℓ^1 -Norm-Vervollständigungen $C_*^{\ell^1}(G) := \overline{C_*^{\mathbb{R}}(G)}^{\|\cdot\|_1}$ der Kettenmoduln fortsetzen, sodass

$$\begin{array}{ccc} C_n^{\mathbb{R}}(G) & \xrightarrow{\partial_n^{\mathbb{R}}} & C_{n-1}^{\mathbb{R}}(G) \\ \text{incl} \downarrow & & \downarrow \text{incl} \\ C_n^{\ell^1}(G) & \xrightarrow{\partial_n^{\ell^1}} & C_{n-1}^{\ell^1}(G) \end{array}$$

kommutiert, wobei $\partial_n^{\ell^1}$ den fortgesetzten Randoperator bezeichnet.

Bemerkung 1.5.5 (Buchhaltung für die (Ko)Kettenkomplexe). Wir haben für eine Gruppe G folgende Kettenkomplexe definiert:

- Die Bar-Auflösung $C_*(G)$ mit \mathbb{Z} -Koeffizienten
- Die normierte Bar-Auflösung $C_*^{\mathbb{Q}}(G)$ mit \mathbb{Q} -Koeffizienten und ℓ^1 -Norm
- Die normierte Bar-Auflösung $C_*^{\mathbb{R}}(G)$ mit \mathbb{R} -Koeffizienten und ℓ^1 -Norm
- Die normierte, vervollständigte Bar-Auflösung $C_*^{\ell^1}(G)$ mit \mathbb{R} -Koeffizienten und ℓ^1 -Norm (auch genannt ℓ^1 -Kettenkomplex, siehe Definition 1.5.4),

wobei $C_*^{\mathbb{Q}}(G) \xrightarrow{\text{incl}} C_*^{\mathbb{R}}(G)$ ein isometrischer \mathbb{Q} -Kettenmorphismus (mit der \mathbb{R} -Multiplikation von $C_*^{\mathbb{R}}(G)$ auf \mathbb{Q} eingeschränkt) und $C_*^{\mathbb{R}}(G) \xrightarrow{\text{incl}} C_*^{\ell^1}(G)$ ein isometrischer \mathbb{R} -Kettenmorphismus ist. Wir bezeichnen die Homologie von $C_*^{\mathbb{Q}}(G)$ mit $H_*(G, \mathbb{Q})$ und die Homologie von $C_*^{\mathbb{R}}(G)$ mit $H_*(G, \mathbb{R})$.

Weiter haben wir folgende Kokettenkomplexe definiert:

- Den Kokettenkomplex $C_{\mathbb{R}}^*(G)$ der Gruppenkohomologie mit \mathbb{R} -Koeffizienten
- Den Kokettenkomplex $C_{\mathbb{R},b}^*(G)$ der beschränkten Kohomologie von Gruppen mit \mathbb{R} -Koeffizienten (und der Operatornorm als Norm)

wobei $C_{\mathbb{R},b}^*(G) = \text{BHom}_{\mathbb{R}[G]}(C_*^{\mathbb{R}}(G), \mathbb{R})$ vollständig ist, da \mathbb{R} vollständig ist. Wir bezeichnen die Kohomologie des Kokettenkomplexes $C_{\mathbb{R}}^*(G)$ mit $H^*(G, \mathbb{R})$. Weiter bezeichnen wir die Kohomologie des Kokettenkomplexes $C_{\mathbb{R},b}^*(G)$ mit $H_b^*(G, \mathbb{R})$.

Definition 1.5.6 (Vergleichssabbildung). Sei G eine Gruppe. Offenbar gilt $C_{\mathbb{R},b}^*(G) \subseteq C_{\mathbb{R}}^*(G)$. Die Inklusion ist ein \mathbb{R} -Kokettenmorphismus, d.h. sie induziert eine \mathbb{R} -lineare Abbildung

$$c^* : H_b^*(G, \mathbb{R}) \rightarrow H^*(G, \mathbb{R})$$

in der Kohomologie. Diese Abbildung c^* ist die sogenannte *Vergleichsabbildung*.

2 Eigenschaften beschränkter Kohomologie von Gruppen

Wir wollen im Folgenden einige bekannte Resultate über die beschränkte Kohomologie von Gruppen darstellen sowie die Zusammenhänge zwischen den UBC-Eigenschaften und der Vergleichsabbildung wie in [MM85, Theorem 2.8] zeigen, welche fundamental für das Experiment sind.

2.1 Beschränkte Kohomologie in niedrigen Graden

Satz 2.1.1 (beschränkte Kohomologie in Grad 0). *Sei G eine Gruppe. Dann gilt $H_b^0(G, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$.*

Beweis. Zu zeigen ist, dass $\ker \delta_{\mathbb{R},b}^0 \cong \mathbb{R}$. Sei $f \in C_{\mathbb{R},b}^0(G)$, dann gilt

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbb{R},b}^0(f) &= -f \circ ([g] \mapsto g \cdot [] - []) \\ &= ([g] \mapsto -f([]) + f([])) = 0 \end{aligned}$$

wobei benutzt wurde, dass \mathbb{R} mit der trivialen $\mathbb{R}[G]$ -Skalarmultiplikation ausgestattet ist. Somit folgt $\ker \delta_{\mathbb{R},b}^0 = C_{\mathbb{R},b}^0(G)$. Da f ein $\mathbb{R}[G]$ -Modulhomomorphismus ist, ist f nur von seinen Werten auf $[] \in C_0^{\mathbb{R}}(G)$ abhängig. Wir erhalten somit einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow C_{\mathbb{R},b}^0(G) \\ r &\mapsto ([] \mapsto r). \end{aligned} \quad \square$$

Satz 2.1.2 (beschränkte Kohomologie in Grad 1). *Sei G eine Gruppe. Dann gilt $H_b^1(G, \mathbb{R}) \cong 0$.*

Beweis. Sei $f \in C_{\mathbb{R},b}^1(G)$, dann gilt

$$\delta_{\mathbb{R},b}^1(f) = \left([g_1|g_2] \mapsto f([g_2]) - f([g_1 \cdot g_2]) + f([g_1]) \right)$$

d.h. $\delta_{\mathbb{R},b}^1(f) = 0$ impliziert, dass $f([g_1 \cdot g_2]) = f([g_1]) + f([g_2])$ für alle $g_1, g_2 \in G$ gilt. Da f beschränkt ist, existiert ein $C \geq 0$, sodass für alle $g \in G$ gilt, dass $|f([g])| \leq C$. Damit gilt also für alle $g \in G$ und $n \in \mathbb{N}$, dass $C \geq |f([g^n])| = n|f([g])|$. Somit folgt bereits, dass f die Nullfunktion sein muss, womit $\ker \delta_{\mathbb{R},b}^1 \cong 0$ und damit auch $H_b^1(G, \mathbb{R}) \cong 0$ gilt. \square

Bemerkung 2.1.3. Über die beschränkte Kohomologie von Gruppen in höheren Graden lassen sich keine derartig generellen Aussagen machen. Beispielweise ist die beschränkte Kohomologie $H_b^*(F_2, \mathbb{R})$ mit F_2 als freier Gruppe vom Rang 2 in den Graden 2 und 3 nicht trivial und es ist sogar bekannt, dass $\dim_{\mathbb{R}} H_b^2(F_2, \mathbb{R}) = \dim_{\mathbb{R}} H_b^3(F_2, \mathbb{R}) = \infty$ gilt (siehe [Mit84] bzw. [Som98]).

2.2 Die Eigenschaft UBC und die Vergleichsabbildung

Definition 2.2.1 (Die Eigenschaft UBC). Sei $(D_*^{\mathbb{R}}, \partial_*^{\mathbb{R}})$ ein normierter \mathbb{R} -Kettenkomplex (d.h. die $D_*^{\mathbb{R}}$ sind normierte \mathbb{R} -Vektorräume und die Randoperatoren $\partial_*^{\mathbb{R}}$ sind stetige, lineare Abbildungen).

Wir sagen, dass $(D_*^{\mathbb{R}}, \partial_*^{\mathbb{R}})$ die Eigenschaft q -UBC für ein $q \in \mathbb{N}$ erfüllt, wenn ein $K > 0$ existiert, sodass für alle $z \in \text{im } \partial_{q+1}^{\mathbb{R}}$ ein $c \in D_{q+1}^{\mathbb{R}}$ mit $\partial_{q+1}^{\mathbb{R}}(c) = z$ und $\|c\| \leq K\|z\|$ existiert.

Definition 2.2.2 (Die Eigenschaften $\text{UBC}^{\mathbb{Q}}$ und $\overline{\text{UBC}}$). Sei $(D_*^{\mathbb{Q}}, \partial_*^{\mathbb{Q}})$ ein \mathbb{Q} -Unterkettenkomplex eines normierten \mathbb{R} -Kettenkomplexes $(D_*^{\mathbb{R}}, \partial_*^{\mathbb{R}})$ (d.h. ein Unterkettenkomplex des Kettenkomplexes, den man erhält wenn man die \mathbb{R} -Skalarmultiplikation von $(D_*^{\mathbb{R}}, \partial_*^{\mathbb{R}})$ auf \mathbb{Q} einschränkt).

Wir sagen, dass $(D_*^{\mathbb{Q}}, \partial_*^{\mathbb{Q}}) \subset (D_*^{\mathbb{R}}, \partial_*^{\mathbb{R}})$ die Eigenschaft q - $\text{UBC}^{\mathbb{Q}}$ für ein $q \in \mathbb{N}$ erfüllt, wenn ein $K > 0$ existiert, sodass für alle $z \in \text{im } \partial_{q+1}^{\mathbb{Q}}$ ein $c \in D_{q+1}^{\mathbb{Q}}$ mit $\partial_{q+1}^{\mathbb{Q}}(c) = z$ und $\|c\| \leq K\|z\|$ existiert.

Seien $\overline{D}_*^{\mathbb{R}}$ die Vervollständigungen von $D_*^{\mathbb{R}}$ und $\overline{\partial}_*^{\mathbb{R}} : \overline{D}_*^{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{D}_{*-1}^{\mathbb{R}}$ die stetigen Fortsetzungen der Randoperatoren $\partial_*^{\mathbb{R}}$. Wir sagen, dass $(\overline{D}_*^{\mathbb{R}}, \overline{\partial}_*^{\mathbb{R}}) \supset (D_*^{\mathbb{R}}, \partial_*^{\mathbb{R}})$ die Eigenschaft q - $\overline{\text{UBC}}$ erfüllt, wenn $(\overline{D}_*^{\mathbb{R}}, \overline{\partial}_*^{\mathbb{R}})$ die Eigenschaft q -UBC erfüllt.

Definition 2.2.3 (Die UBC-Eigenschaften für Gruppen). Sei G eine Gruppe und $q \in \mathbb{N}$. Wir sagen, dass G die Eigenschaft q -UBC erfüllt, wenn $(C_*^{\mathbb{R}}(G), \partial_*^{\mathbb{R}})$ die Eigenschaft q -UBC erfüllt.

Wir sagen, dass G die Eigenschaft q - $\text{UBC}^{\mathbb{Q}}$ erfüllt, wenn $(C_*^{\mathbb{Q}}(G), \partial_*^{\mathbb{Q}}) \subset (C_*^{\mathbb{R}}(G), \partial_*^{\mathbb{R}})$ die Eigenschaft q - $\text{UBC}^{\mathbb{Q}}$ erfüllt.

Weiter erfüllt G die Eigenschaft q - UBC^{ℓ^1} , wenn $(C_*^{\ell^1}(G), \partial_*^{\ell^1}) \supset (C_*^{\mathbb{R}}(G), \partial_*^{\mathbb{R}})$ die Eigenschaft q - $\overline{\text{UBC}}$ erfüllt.

Lemma 2.2.4 (Existenz schnell konvergenter Reihen). Sei X ein normierter Raum und $D \subset X$ eine Untergruppe der Gruppe $(X, +)$, die dicht in X liegt (z.B. ein dichter Unterraum). Dann existiert für alle $z \in X$ und $\epsilon > 0$ eine Folge $(a_i \in D)_{i \in \mathbb{N}}$ mit

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = z \text{ und } \sum_{i=0}^{\infty} \|a_i\| \leq (1 + \epsilon)\|z\|.$$

Beweis. Offenbar ist die Behauptung für $z = 0$ erfüllt, im Folgenden sei also $z \neq 0$.

Wähle zunächst eine Folge $(z_i \in D)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{i \rightarrow \infty} z_i = z$. Wähle nun eine Teilfolge $(z_{i_j})_{j \in \mathbb{N}}$ mit $\|z_{i_j} - z\| \leq 2^{-j} \frac{\|z\|}{3} \frac{\epsilon}{2}$.

Setze $a_0 := z_{i_0}$ und $a_j := z_{i_j} - z_{i_{j-1}}$ für $j > 0$. Offenbar gilt dann $a_j \in D$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = z$.

Weiter gilt $\sum_{i=0}^{\infty} \|a_i\| = \|a_0\| + \sum_{i=1}^{\infty} \|a_i\| \leq (1 + \epsilon)\|z\|$, denn $\|a_0\| \leq \|z\| + \|z\|\frac{\epsilon}{2}$ und $\|a_i\| \leq 2^{-i}\|z\|\frac{\epsilon}{2}$ für $i > 0$ nach Konstruktion. \square

Satz 2.2.5 ($\text{UBC}^{\mathbb{Q}}$ und $\overline{\text{UBC}}$). *Sei $(D_*^{\mathbb{Q}}, \partial_*^{\mathbb{Q}})$ ein dichter \mathbb{Q} -Unterkettenkomplex eines normierten \mathbb{R} -Kettenkomplexes $(D_*^{\mathbb{R}}, \partial_*^{\mathbb{R}})$, für den*

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} H_*(D_*^{\mathbb{Q}}) &\rightarrow H_*(D_*^{\mathbb{R}}) \\ r \otimes [x] &\mapsto r[x] \end{aligned}$$

surjektiv ist. Dann sind für $q \in \mathbb{N}$ äquivalent:

- (i) $(D_*^{\mathbb{R}}, \partial_*^{\mathbb{R}}) \supset (D_*^{\mathbb{Q}}, \partial_*^{\mathbb{Q}})$ erfüllt $q\text{-UBC}^{\mathbb{Q}}$
- (ii) $(D_*^{\mathbb{R}}, \partial_*^{\mathbb{R}}) \subset (\overline{D_*^{\mathbb{R}}}, \overline{\partial_*^{\mathbb{R}}})$ erfüllt $q\text{-}\overline{\text{UBC}}$ und $\ker \partial_{q+1}^{\mathbb{R}}$ ist dicht in $\ker \overline{\partial_{q+1}^{\mathbb{R}}}$

Beweis. (i) \implies (ii):

- Wir zeigen zuerst $q\text{-}\overline{\text{UBC}}$.

Nach Konstruktion ist $\text{im } \partial_{q+1}^{\mathbb{Q}}$ dicht in $\text{im } \overline{\partial_{q+1}^{\mathbb{R}}}$. Sei nun $z \in \text{im } \overline{\partial_{q+1}^{\mathbb{R}}}$ und $(z_i \in \text{im } \partial_{q+1}^{\mathbb{Q}})_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\sum_{i=0}^{\infty} z_i = z$ und $\sum_{i=0}^{\infty} \|z_i\| \leq 2\|z\|$ (diese existiert nach Lemma 2.2.4). Nach $q\text{-UBC}^{\mathbb{Q}}$ existieren nun $c_i \in D_{q+1}^{\mathbb{Q}}$ mit $\partial_{q+1}^{\mathbb{Q}}(c_i) = z_i$ und $\|c_i\| \leq K\|z_i\|$. Setze $c = \sum_{i=0}^{\infty} c_i$. Dies ist wohldefiniert, da $\sum_{i=0}^{\infty} \|c_i\| \leq 2K\|z\|$ gilt und $\overline{D_{q+1}^{\mathbb{R}}}$ vollständig ist. Insbesondere folgt $\overline{\partial_{q+1}^{\mathbb{R}}}(c) = z$ und $\|c\| \leq 2K\|z\|$, d.h. $q\text{-}\overline{\text{UBC}}$ ist erfüllt.

- Wir zeigen nun, dass $\ker \partial_{q+1}^{\mathbb{R}}$ dicht in $\ker \overline{\partial_{q+1}^{\mathbb{R}}}$ ist.

Sei $z \in \ker \overline{\partial_{q+1}^{\mathbb{R}}}$ und sei $(z_i \in D_{q+1}^{\mathbb{Q}})_{i \in \mathbb{N}}$ eine gegen z konvergente Folge. Wähle mit $q\text{-UBC}^{\mathbb{Q}}$ Elemente $(d_i \in D_{q+1}^{\mathbb{Q}})_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\partial_{q+1}^{\mathbb{Q}}(d_i) = -\partial_{q+1}^{\mathbb{Q}}(z_i)$ und $\|d_i\| \leq K\|\partial_{q+1}^{\mathbb{Q}}(z_i)\|$. Offenbar gilt $z_i + d_i \in \ker \partial_{q+1}^{\mathbb{Q}}$. Weiter gilt $\|z_i + d_i - z\| \leq \|z_i - z\| + \|d_i\| \leq \|z_i - z\| + K\|\partial_{q+1}^{\mathbb{Q}}(z_i)\|$. Da $\|\partial_{q+1}^{\mathbb{Q}}(z_i)\| = \|\partial_{q+1}^{\mathbb{Q}}(z_i - z)\| \leq (q+2)\|z_i - z\|$ und $\|z_i - z\|$ nach Definition für $i \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert, konvergiert $z_i + d_i$ gegen z , d.h. $\ker \partial_{q+1}^{\mathbb{Q}}$ ist dicht in $\ker \overline{\partial_{q+1}^{\mathbb{R}}}$. Wegen $\ker \partial_{q+1}^{\mathbb{Q}} \subset \ker \partial_{q+1}^{\mathbb{R}}$ ist damit $\ker \partial_{q+1}^{\mathbb{R}}$ dicht in $\ker \overline{\partial_{q+1}^{\mathbb{R}}}$.

(ii) \implies (i):

Wir zeigen zunächst, dass $\ker \partial_{q+1}^{\mathbb{Q}} \subset \ker \partial_{q+1}^{\mathbb{R}}$ dicht ist. Sei also $z \in \ker \partial_{q+1}^{\mathbb{R}}$. Aus der Surjektivität von $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} H_*(D_*^{\mathbb{Q}}) \rightarrow H_*(D_*^{\mathbb{R}})$ folgt, dass $b \in D_{q+2}^{\mathbb{R}}$ und $n \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, z_1, \dots, z_n \in \ker \partial_{q+1}^{\mathbb{Q}}$ mit

$$\partial_{q+2}^{\mathbb{R}}(b) + \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i = z$$

existieren. Wähle nun eine Folge $(b_j \in D_{q+2}^{\mathbb{Q}})$ mit $\lim_{j \rightarrow \infty} b_j = b$ und für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ eine Folge $(\lambda_{i,j} \in \mathbb{Q})_{j \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_{i,j} = \lambda_i$.

Definiere dann $z_j := \partial_{q+2}^{\mathbb{Q}}(b_j) + \sum_{i=1}^n \lambda_{i,j} z_i$. Offenbar gilt dann $z_j \in \ker \partial_{q+1}^{\mathbb{Q}}$ für $j \in \mathbb{N}$.

Weiter gilt $\lim_{j \rightarrow \infty} \|z - z_j\| \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \|\partial_{q+2}^{\mathbb{R}}(b - b_j)\| + \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |\lambda_i - \lambda_{i,j}| \|z_i\| \leq (q+3) \lim_{j \rightarrow \infty} \|b - b_j\| + \sum_{i=1}^n \lim_{j \rightarrow \infty} |\lambda_i - \lambda_{i,j}| \|z_i\| = 0$, d.h. $\lim_{j \rightarrow \infty} z_j = z$. Also ist $\ker \partial_{q+1}^{\mathbb{Q}}$ dicht in $\ker \partial_{q+1}^{\mathbb{R}}$.

Nach Voraussetzung ist $\ker \partial_{q+1}^{\mathbb{R}}$ dicht in $\ker \overline{\partial_{q+1}^{\mathbb{R}}}$ und somit folgt, dass $\ker \partial_{q+1}^{\mathbb{Q}}$ dicht in $\ker \overline{\partial_{q+1}^{\mathbb{R}}}$ ist.

Sei nun $z \in \text{im } \partial_{q+1}^{\mathbb{Q}}$. Wähle $c \in D_{q+1}^{\mathbb{Q}}$ mit $\partial_{q+1}^{\mathbb{Q}}(c) = z$ sowie mit $q\text{-}\overline{\text{UBC}}$ ein $d \in \overline{D_{q+1}^{\mathbb{R}}}$ mit $\overline{\partial_{q+1}^{\mathbb{R}}}(d) = z$ und $\|d\| \leq K\|z\|$. Da $\ker \partial_{q+1}^{\mathbb{Q}}$ dicht in $\ker \overline{\partial_{q+1}^{\mathbb{R}}}$ ist, gibt es eine Folge $(e_i \in \ker \partial_{q+1}^{\mathbb{Q}})_{i \in \mathbb{N}}$ die gegen $d - c$ konvergiert. Wähle $j \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\|d - c - e_j\| \leq \|z\|$. Dann gilt $c + e_j \in D_{q+1}^{\mathbb{Q}}$ und $\partial_{q+1}^{\mathbb{Q}}(c + e_j) = \partial_{q+1}^{\mathbb{Q}}(c) = z$ sowie $\|c + e_j\| = \|d - c - e_j - d\| \leq \|d - c - e_j\| + \|d\| \leq (K+1)\|z\|$, womit $q\text{-}\overline{\text{UBC}}^{\mathbb{Q}}$ erfüllt ist. \square

Satz 2.2.6. *Sei G eine Gruppe. Dann gilt, dass $(C_*^{\mathbb{Q}}(G), \partial_*^{\mathbb{Q}}(G)) \subset (C_*^{\mathbb{R}}(G), \partial_*^{\mathbb{R}}(G))$ ein dichter \mathbb{Q} -Unterkettenkomplex und*

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} H_*(G, \mathbb{Q}) &\rightarrow H_*(G, \mathbb{R}) \\ r \otimes [x] &\mapsto r[x] \end{aligned}$$

ein Isomorphismus (und damit insbesondere surjektiv) ist.

Beweis.

- Wir zeigen zuerst, dass $(C_*^{\mathbb{Q}}(G), \partial_*^{\mathbb{Q}}(G)) \subset (C_*^{\mathbb{R}}(G), \partial_*^{\mathbb{R}}(G))$ dicht ist.

Sei $x = \sum_{g \in G^{n+1}} a_g \cdot g \in C_n^{\mathbb{R}}(G)$ in \mathbb{R} -Basisdarstellung. Wähle für alle $a_g \neq 0$ (dies sind endlich viele) eine Folge $(a_{g,i} \in \mathbb{Q})_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{i \rightarrow \infty} a_{g,i} = a_g$. Setze anschließend

$$x_i := \sum_{g \in G^{n+1}} a_{g,i} \cdot g \in C_n^{\mathbb{Q}}(G). \text{ Dann gilt } \|x - x_i\|_1 = \left\| \sum_{g \in G^{n+1}} (a_g - a_{g,i}) \cdot g \right\|_1 = \sum_{g \in G^{n+1}} |a_g - a_{g,i}|, \text{ d.h. es folgt } \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x.$$

- Wir zeigen jetzt, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} H_*(G, \mathbb{Q}) &\rightarrow H_*(G, \mathbb{R}) \\ r \otimes [x] &\mapsto r[x] \end{aligned}$$

eine Isomorphismus ist. Wir betrachten hierfür zunächst die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \ker \partial_n^{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\text{incl}} C_n^{\mathbb{Q}}(G) \xrightarrow{\partial_n^{\mathbb{Q}}} \text{im } \partial_n^{\mathbb{Q}} \longrightarrow 0$$

Da \mathbb{R} flach über \mathbb{Q} ist, ist

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \ker \partial_n^{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\text{incl}} C_n^{\mathbb{R}}(G) \xrightarrow{\partial_n^{\mathbb{R}}} \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \text{im } \partial_n^{\mathbb{Q}} \longrightarrow 0$$

wieder exakt. Hieraus folgt, dass

$$\begin{aligned} \text{incl} : \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \text{im } \partial_n^{\mathbb{Q}} &\rightarrow \text{im } \partial_n^{\mathbb{R}} \\ r \otimes x &\mapsto rx \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \text{incl} : \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \ker \partial_n^{\mathbb{Q}} &\rightarrow \ker \partial_n^{\mathbb{R}} \\ r \otimes x &\mapsto rx \end{aligned}$$

Isomorphismen sind.

Wir erhalten daraus folgendes kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \text{im } \partial_{n+1}^{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\text{incl}} & \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \ker \partial_n^{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \text{proj}} & \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} H_n(G, \mathbb{Q}) \longrightarrow 0 \\ & & \cong \downarrow \text{incl} & & \cong \downarrow \text{incl} & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{im } \partial_{n+1}^{\mathbb{R}} & \xrightarrow{\text{incl}} & \ker \partial_n^{\mathbb{R}} & \xrightarrow{\text{proj}} & H_n(G, \mathbb{R}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Mit dem Fünferlemma folgt daraus, dass $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} H_n(G, \mathbb{Q}) \rightarrow H_n(G, \mathbb{R})$ ein Isomorphismus ist.

□

Das folgende Resultat, welches den Zusammenhang zwischen UBC und der Vergleichsabbildung darstellt, ist im Wesentlichen [MM85, Theorem 2.8].

Satz 2.2.7 (UBC, $\text{UBC}^{\mathbb{Q}}$, UBC^{ℓ^1} und die Vergleichsabbildung). *Sei G eine Gruppe, $q \in \mathbb{N}$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

- (i) G erfüllt $q\text{-UBC}^{\mathbb{Q}}$
- (ii) G erfüllt $q\text{-UBC}$
- (iii) G erfüllt $q\text{-UBC}^{\ell^1}$ und $\ker \partial_{q+1}^{\mathbb{R}}$ ist dicht in $\ker \partial_{q+1}^{\ell^1}$
- (iv) $c^{q+1} : H_b^{q+1}(G, \mathbb{R}) \rightarrow H^{q+1}(G, \mathbb{R})$ ist injektiv

Beweis. (i) \iff (iii):

Da nach Satz 2.2.6 die Voraussetzungen von Satz 2.2.5 erfüllt sind, folgt (i) \iff (iii) aus Definition 2.2.3.

(ii) \iff (iii):

Offenbar erfüllt die Inklusion $(C_*^{\mathbb{R}}(G), \partial_*^{\mathbb{R}}(G)) \subset (C_*^{\mathbb{R}}(G), \partial_*^{\ell^1}(G))$ die Voraussetzungen von Satz 2.2.5, womit die Behauptung wieder aus Definition 2.2.3 folgt.

(iii) \implies (iv):

Sei $f \in \ker \delta_{\mathbb{R},b}^{q+1}$ mit $c^{q+1}([f]) = 0$. Dann existiert ein $F \in C_{\mathbb{R}}^q(G)$ mit $(-1)^{q+1} \delta_{\mathbb{R}}^q(F) = F \circ \partial_{q+1}^{\mathbb{R}} = f$ und es folgt $f = 0$ auf $\ker \partial_{q+1}^{\mathbb{R}}$. Da f stetig ist und $\ker \partial_{q+1}^{\mathbb{R}}$ dicht in $\ker \partial_{q+1}^{\ell^1}$ liegt, verschwindet die Fortsetzung von f nach $C_{q+1}^{\ell^1}(G)$ sogar auf $\ker \partial_{q+1}^{\ell^1}$ und induziert damit eine beschränkte Abbildung $\bar{f} : \frac{C_{q+1}^{\ell^1}(G)}{\ker \partial_{q+1}^{\ell^1}} \rightarrow \mathbb{R}$. Genauso induziert $\partial_{q+1}^{\ell^1}$ eine beschränkte und bijektive Abbildung $\overline{\partial_{q+1}^{\ell^1}} : \frac{C_{q+1}^{\ell^1}(G)}{\ker \partial_{q+1}^{\ell^1}} \rightarrow \text{im } \partial_{q+1}^{\ell^1}$. Aus $q\text{-UBC}^{\ell^1}$ folgt, dass $\|\overline{\partial_{q+1}^{\ell^1}}^{-1}(x)\|_1 \leq K\|x\|_1$ gilt, d.h. die Umkehrabbildung ist stetig. Mit dem Satz von Hahn-Banach können wir $\bar{f} \circ \overline{\partial_{q+1}^{\ell^1}}^{-1} : \text{im } \partial_{q+1}^{\ell^1} \rightarrow \mathbb{R}$ fortsetzen zu einem stetigen, $\mathbb{R}[G]$ -linearen Funktional $\bar{F}_b : C_q^{\ell^1}(G) \rightarrow \mathbb{R}$. Dessen Einschränkung $F_b : C_q^{\mathbb{R}}(G) \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllt $(-1)^{q+1} \delta_{\mathbb{R},b}^q(F_b) = F_b \circ \partial_{q+1}^{\mathbb{R}} = f$ nach Konstruktion, d.h. $[f] = 0$ in $H_b^{q+1}(G, \mathbb{R})$, womit c^{q+1} injektiv ist.

(iv) \implies (iii):

- Wir zeigen zuerst $q\text{-UBC}^{\ell^1}$.

Dazu zeigen wir zunächst, dass $\text{im } \partial_{q+1}^{\ell^1}$ abgeschlossen in $C_{q+1}^{\ell^1}(G)$, d.h. ein Banachraum ist. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Bild ist dies genau dann der Fall, wenn der duale Operator ein abgeschlossenes Bild besitzt. Da wir aber für alle $n \in \mathbb{N}$ $\text{BHom}_{\mathbb{R}[G]}(C_n^{\ell^1}(G), \mathbb{R})$ mit $\text{BHom}_{\mathbb{R}[G]}(C_n^{\mathbb{R}}(G), \mathbb{R})$ identifizieren können (da \mathbb{R} vollständig ist), ist dies äquivalent dazu, dass $\text{im } \delta_{\mathbb{R},b}^q$ abgeschlossen ist. Sei also $(f_i \in \text{im } \delta_{\mathbb{R},b}^q)_{i \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert f (der offenbar in $\ker \delta_{\mathbb{R},b}^{q+1}$ liegen muss, da $\ker \delta_{\mathbb{R},b}^{q+1}$ abgeschlossen ist). Dann ist $f = 0$ auf $\ker \partial_{q+1}^{\mathbb{R}}$ und induziert somit eine Abbildung $\bar{f} : \frac{C_{q+1}^{\mathbb{R}}(G)}{\ker \partial_{q+1}^{\mathbb{R}}} \rightarrow \mathbb{R}$. Weiter erhalten wir aus $\partial_{q+1}^{\mathbb{R}}$ einen Isomorphismus (im Sinne linearer Abbildungen, i.A. nicht

im Sinne stetiger, linearer Abbildungen) $\overline{\partial_{q+1}^{\mathbb{R}}} : \frac{C_{q+1}^{\mathbb{R}}(G)}{\ker \partial_{q+1}^{\mathbb{R}}} \rightarrow \text{im } \partial_{q+1}^{\mathbb{R}}$. Es ist also $\bar{f} \circ \overline{\partial_{q+1}^{\mathbb{R}}}^{-1} : \text{im } \partial_{q+1}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ eine $\mathbb{R}[G]$ -lineare, aber nicht notwendigerweise stetige Abbildung. Wir setzen diese zu einer $\mathbb{R}[G]$ -linearen Abbildung $F : C_q^{\mathbb{R}}(G) \rightarrow \mathbb{R}$ fort. Dann gilt $F \circ \partial_{q+1}^{\mathbb{R}} = f$, d.h. $f \in \text{im } \delta_{\mathbb{R}}^q$. Aus der Injektivität der Vergleichsabbildung folgt somit $f \in \text{im } \delta_{\mathbb{R},b}^q$, also ist $\text{im } \partial_{q+1}^{\ell^1}$ abgeschlossen.

Daraus folgt aus dem Prinzip der offenen Abbildung, dass $\overline{\partial_{q+1}^{\ell^1}} : \frac{C_{q+1}^{\ell^1}(G)}{\ker \partial_{q+1}^{\ell^1}} \rightarrow \text{im } \partial_{q+1}^{\ell^1}$ ein Isomorphismus (hier im Sinne stetiger, linearer Abbildungen) ist. Es sei $\|\cdot\|_{\text{quot}}$ die Quotientennorm auf $\frac{C_{q+1}^{\ell^1}(G)}{\ker \partial_{q+1}^{\ell^1}}$. Dann existiert somit ein $K > 0$, sodass für alle $z \in \text{im } \partial_{q+1}^{\ell^1}$ ein $c \in C_{q+1}^{\ell^1}(G)$ existiert mit $\partial_{q+1}^{\ell^1}(c) = z$, $2\|c\|_{\text{quot}} \leq K\|z\|_1$ und $\|c\|_1 \leq 2\|c\|_{\text{quot}}$, womit $q\text{-UBC}^{\ell^1}$ erfüllt ist.

- Wir zeigen nun, dass $\ker \partial_{q+1}^{\mathbb{R}}$ dicht in $\ker \partial_{q+1}^{\ell^1}$ ist.

Angenommen, es existiert $x \in \ker \partial_{q+1}^{\ell^1} \setminus \overline{\ker \partial_{q+1}^{\mathbb{R}}}$. Dann existiert nach Hahn-Banach ein stetiges Funktional $\bar{f} : C_{q+1}^{\ell^1}(G) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\bar{f} = 0$ auf $\overline{\ker \partial_{q+1}^{\mathbb{R}}}$ und $\bar{f}(x) = 1$. Außerdem verschwindet die aus \bar{f} durch Einschränken auf $C_{q+1}^{\mathbb{R}}(G)$ gewonnene Abbildung $f : C_{q+1}^{\mathbb{R}}(G) \rightarrow \mathbb{R}$ auf $\ker \partial_{q+1}^{\mathbb{R}}$. Analog zu vorherigem Teil konstruieren wir daraus eine (nicht notwendigerweise stetige) lineare Abbildung $F : C_q^{\mathbb{R}}(G) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F \circ \partial_{q+1}^{\mathbb{R}} = f$, d.h. $f \in \text{im } \delta_{\mathbb{R}}^q$. Aus der Injektivität der Vergleichsabbildung folgt daraus, dass ein stetiges, lineares Funktional $F_b : C_q^{\mathbb{R}}(G) \rightarrow \mathbb{R}$ existiert mit $F_b \circ \partial_{q+1}^{\mathbb{R}} = f$. Aus der Eindeutigkeit der Fortsetzung auf die Vervollständigung folgt $\overline{F_b} \circ \partial_{q+1}^{\ell^1} = \bar{f}$. Dies ist aber ein Widerspruch, denn $1 = \bar{f}(x) = \overline{F_b} \circ \partial_{q+1}^{\ell^1}(x) = 0$. Damit folgt, dass $\ker \partial_{q+1}^{\ell^1} = \overline{\ker \partial_{q+1}^{\mathbb{R}}}$, d.h. $\ker \partial_{q+1}^{\mathbb{R}}$ ist dicht in $\ker \partial_{q+1}^{\ell^1}$. □

2.3 Anwendung der Resultate im Experiment

Wir können die in Abschnitt 2.2 bewiesenen Aussagen nutzen, um experimentell die Trivialität höherer Grade der beschränkten Kohomologie von Gruppen zu prüfen. Im Folgenden schränken wir uns dabei auf $H_b^4(F_2, \mathbb{R})$ ein, da dies der niedrigste Grad der beschränkten Kohomologie der freien Gruppe von Rang 2 ist, von dem nicht bekannt ist, ob er verschwindet.

Korollar 2.3.1. *Es gilt $H_b^4(F_2, \mathbb{R}) \cong 0$ genau dann, wenn F_2 die Eigenschaft $3\text{-UBC}^{\mathbb{Q}}$ erfüllt.*

Beweis. Nach Satz 2.2.7 ist die Eigenschaft $3\text{-UBC}^{\mathbb{Q}}$ für F_2 äquivalent zur Injektivität der Vergleichsabbildung $c^4 : H_b^4(F_2, \mathbb{R}) \rightarrow H^4(F_2, \mathbb{R})$. Da bekannt ist, dass $H^4(F_2, \mathbb{R}) \cong 0$ gilt, ist dies äquivalent zu $H_b^4(F_2, \mathbb{R}) \cong 0$. □

Da wir im Experiment nicht direkt Elemente $c \in \text{im } \partial_4^{\mathbb{Q}}$ generieren können, müssen wir die Eigenschaft $3\text{-UBC}^{\mathbb{Q}}$ für Elemente $x \in C_4^{\mathbb{Q}}(F_2)$ umformulieren.

Lemma 2.3.2. *Sei $q \in \mathbb{N}$ und G eine Gruppe. Die Eigenschaft $q\text{-UBC}^{\mathbb{Q}}$ für G ist äquivalent zu folgender Eigenschaft: Es existiert ein $K > 0$, sodass für alle $x \in C_{q+1}^{\mathbb{Q}}(G)$ gilt, dass*

$$\inf_{c \in \ker \partial_{q+1}^{\mathbb{Q}}} \|x + c\|_1 \leq K \|\partial_{q+1}^{\mathbb{Q}}(x)\|_1$$

erfüllt ist.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass die gewünschte Eigenschaft aus $q\text{-UBC}^{\mathbb{Q}}$ folgt.

Sei $x \in C_{q+1}^{\mathbb{Q}}(G)$. Dann existiert nach $q\text{-UBC}^{\mathbb{Q}}$ ein $z \in C_{q+1}^{\mathbb{Q}}(G)$ mit $\partial_{q+1}^{\mathbb{Q}}(z) = \partial_{q+1}^{\mathbb{Q}}(x)$ und $\|z\|_1 \leq K \|\partial_{q+1}^{\mathbb{Q}}(x)\|_1$. Offenbar ist $c := z - x \in \ker \partial_{q+1}^{\mathbb{Q}}$ und somit $\|x + c\|_1 \leq K \|\partial_{q+1}^{\mathbb{Q}}(x)\|_1$, womit insbesondere die gewünschte Eigenschaft erfüllt ist.

Für die Umkehrung sei nun $\inf_{c \in \ker \partial_{q+1}^{\mathbb{Q}}} \|x + c\|_1 \leq K \|\partial_{q+1}^{\mathbb{Q}}(x)\|_1$ für alle $x \in C_{q+1}^{\mathbb{Q}}(G)$ erfüllt. Ist $a \in \text{im } \partial_{q+1}^{\mathbb{Q}}$, so existiert ein $x \in C_{q+1}^{\mathbb{Q}}(G)$ mit $\partial_{q+1}^{\mathbb{Q}}(x) = a$ und nach Voraussetzung gilt $\inf_{c \in \ker \partial_{q+1}^{\mathbb{Q}}} \|x + c\|_1 \leq K \|a\|_1$. Insbesondere existiert dann ein $c \in \ker \partial_{q+1}^{\mathbb{Q}}$ mit $\|x + c\|_1 \leq (K + 1) \|a\|_1$. Da $\partial_{q+1}^{\mathbb{Q}}(x + c) = a$ gilt, folgt $q\text{-UBC}^{\mathbb{Q}}$. \square

Bemerkung 2.3.3. Lemma 2.3.2 ermöglicht folgende Strategie:

- Einen möglichst großen Datensatz bestehend aus Tripeln $\left(x, \partial_4^{\mathbb{Q}}(x), \frac{\|x\|_1}{\|\partial_4^{\mathbb{Q}}(x)\|_1}\right)$ generieren
- In dem generierten Datensatz die Werte $\frac{\|x\|_1}{\|\partial_4^{\mathbb{Q}}(x)\|_1}$ vergleichen
- Falls wir Elemente $x \in C_4^{\mathbb{Q}}(F_2)$ mit außergewöhnlich großen Quotienten $\frac{\|x\|_1}{\|\partial_4^{\mathbb{Q}}(x)\|_1}$ finden (für welche es keine $c \in \ker \partial_4^{\mathbb{Q}}$ gibt, sodass $\frac{\|x+c\|_1}{\|\partial_4^{\mathbb{Q}}(x)\|_1} < \frac{\|x\|_1}{\|\partial_4^{\mathbb{Q}}(x)\|_1}$ gilt, siehe Lemma 2.3.2), ein Bildungsgesetz für eine Folge $(x_i \in C_4^{\mathbb{Q}}(F_2))_{i \in \mathbb{N}}$ finden, die die Existenz einer Schranke K aus Lemma 2.3.2 widerlegt
oder
eine Gesetzmäßigkeit beobachten, welche zum Beweis der Existenz einer Schranke K aus Lemma 2.3.2 benutzt werden kann.

3 Auswertung des Experiments

Zum Abschluss dieser Arbeit sollen Daten wie in Bemerkung 2.3.3 generiert und anschließend ausgewertet werden.

Dazu wird zunächst die dieser Arbeit beiliegende Implementation beschrieben.

3.1 Implementation des Experiments

Eine beispielhafte Implementation des Experiments in der Programmiersprache C++ befindet sich (zusammen mit dem ausgewerteten Datensatz) auf der beiliegenden CD sowie auf GitHub unter dem Link <https://github.com/cybran01/ubc-free-group>.

In diesem Beispiel wurden, um die Anzahl an Kollisionen zu erhöhen, nur $x \in C_4^{\mathbb{Q}}(F_2)$ mit ganzzahligen Koeffizienten generiert. Dieser Schritt ist auch durch folgende Bemerkung gerechtfertigt:

Bemerkung 3.1.1. Sei G eine Gruppe, $n \in \mathbb{N}$ und $x \in C_n^{\mathbb{Q}}(G)$. Dann gibt es ein $y \in C_n(G)$ mit folgenden Eigenschaften:

- y ist von x linear abhängig
- für die Basisdarstellung $y = \sum_{i=1}^m a_i x_i$ bezüglich der Basis aus Satz 1.3.3 gilt $\gcd(a_1, \dots, a_m) = 1$.

Beweis. Sei $x = \sum_{i=1}^m b_i x_i$ in der Basisdarstellung der \mathbb{Q} -Basis aus Bemerkung 1.4.5 mit $b_i = \frac{p_i}{q_i}$ und $p_i, q_i \in \mathbb{Z}$, $\lambda = \text{lcm}(q_1, \dots, q_m)$ und sei $\mu = \frac{\lambda}{\gcd(\lambda b_1, \dots, \lambda b_m)}$. Dann erfüllt $y = \mu x$ die gewünschten Eigenschaften. \square

Insbesondere existiert also für jedes Element $x \in C_4^{\mathbb{Q}}(F_2)$ ein $y \in C_4(F_2)$, welches $\frac{\|y\|_1}{\|\partial_4^{\mathbb{Q}}(y)\|_1} = \frac{\|x\|_1}{\|\partial_4^{\mathbb{Q}}(x)\|_1}$ erfüllt.

Um Reproduzierbarkeit zu gewährleisten, wurde der Datensatz mit den im Quelltext angegebenen „Default“-Parametern generiert.

Die Implementation besteht aus 4 Klassen, die die folgenden Funktionalitäten übernehmen:

- WORD

Diese Klasse implementiert die Gruppenelemente $w \in F_2$ als Listen, die nur die Koeffizienten $n_i \in \mathbb{Z}$ und für $i > 0$ $n_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ aus der Darstellung $w = a^{n_1} b^{n_2} a^{n_3} b^{n_4} \dots$ speichern. Wörter aus F_2 , die mit b beginnen, sind in dieser

Darstellung genau die, für die $n_1 = 0$ gilt. Für das neutrale Element gibt es in dieser Darstellung 2 Möglichkeiten: entweder die leere Liste, oder die Liste, welche nur die 0 enthält.

Weiter implementiert die Klasse die Gruppenverknüpfung auf F_2 .

- **BarResElement**

Diese Klasse implementiert Elemente aus der Bar-Auflösung als assoziatives, geordnetes Datenfeld. Dadurch sind in Linearkombinationen auftretende Basiselemente garantiert eindeutig und Linearkombinationen untereinander direkt vergleichbar, da die Basiselemente geordnet sind.

Die Klasse implementiert die Addition und Skalarmultiplikation von Elementen der Bar-Auflösung sowie deren ℓ^1 -Norm und den Randoperator. Die Klasse ist lediglich eine Schablone, d.h. der konkrete Datentyp der Koeffizienten der Bar-Auflösung kann gewählt werden (dies ermöglicht zum Beispiel exakte Arithmetik durch Implementation eines Datentyps für rationale Zahlen).

- **BarResElementGenerator**

Diese Klasse ist abstrakt und lediglich eine Schnittstelle für beliebige Algorithmen zur Generierung von Elementen der Bar-Auflösung. Hierzu muss die (einzige) Methode der Klasse `nextElement(int, int, int, int, int)` von abgeleiteten Klassen überschrieben werden.

- **RandomGenerator**

Dies ist eine von `BarResElementGenerator` abgeleitete Klasse, welche Elemente der Bar-Auflösung „zufällig“ generiert. Sie benutzt einen Pseudozufallsgenerator mit Startwert, d.h. für gleichen Startwert und gleiche Eingabeparameter der Methode `nextElement(int, int, int, int, int)` wird die gleiche Ausgabe generiert. Die Eingabeparameter sind dabei die folgenden:

- `elementMaxLength` gibt die maximale Länge (in der \mathbb{Q} -Basis) der generierten Elemente der Bar-Auflösung an.
- `wordMaxLength` gibt die maximale Länge der Elemente aus F_2 an, die zur Konstruktion der Basisdarstellung des Elements verwendet werden.
- `expMax` gibt den maximalen Betrag der Koeffizienten an, den die generierten Elemente $w \in F_2$ besitzen, d.h. für $w = a^{n_1}b^{n_2}a^{n_3}b^{n_4} \dots$ gilt $\max(|n_1|, |n_2|, |n_3|, \dots) \leq \text{expMax}$.
- `degree` legt den Grad fest, in dem die Elemente der Bar-Auflösung generiert werden. In unserem Fall ist dieser Parameter 4.
- `maxKoeff` legt den maximalen Betrag von Koeffizienten in der \mathbb{Q} -Basisdarstellung von generierten Elementen fest. Für $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i \in C_{\text{degree}}^{\mathbb{Q}}(F_2)$ gilt also $\max(|a_1|, |a_2|, |a_3|, \dots) \leq \text{maxKoeff}$.

Da diese Klasse ebenfalls eine Schablone ist, können auch hier eigene Datentypen für die Koeffizienten benutzt werden.

Beim Ausführen des Programms müssen die gewünschte Größe des zu generierenden Datensatzes und die obigen Parameter eingegeben werden. Danach wird wiederholt die Methode `nextElement(int, int, int, int, int)` aufgerufen und aus dem Ergebnis ein Tripel wie in Bemerkung 2.3.3 generiert, bis der Datensatz die gewünschte Größe erreicht hat. Der Datensatz wird als „experiment.csv“ im CSV-Format mit Semikolon als Trennungszeichen gespeichert.

3.2 Auswertung des Datensatzes

Für alle Elemente x des Datensatzes bis auf 5 Ausnahmen gilt $\frac{\|x\|_1}{\|\partial_4^{\mathbb{Q}}(x)\|_1} \leq 1$. Diese Ausnahmen sind folgende:

x	$\partial_4^{\mathbb{Q}}(x)$	$\frac{\ x\ _1}{\ \partial_4^{\mathbb{Q}}(x)\ _1}$
$+4e \cdot [e e e e] - 6e \cdot [e e e b^4a^{-2}]$	$-2e \cdot [e e e]$	5
$-3a^{-2} \cdot [e e e a^{-1}b^{-4}]$ $+2a^{-2} \cdot [e e e b^4a^{-2}b^3a^4]$	$-1a^{-2} \cdot [e e e]$	5
$-3e \cdot [e e e a^{-3}b^{-2}] + 6e \cdot [e e e a^3b^4]$	$+3e \cdot [e e e]$	3
$+3e \cdot [e e e a^{-2}b^{-2}a] - 3e \cdot [e e e b^3]$ $+6a^{-3}b \cdot [a^{-1} e b^4a^{-4}b^3a^{-1} e]$	$+6a^{-3}ba^{-1} \cdot [e b^4a^{-4}b^3a^{-1} e]$	2
$+3e \cdot [e e e b^4a^{-1}ba^{-3}] - 4e \cdot [e e e a^2]$ $-1b^{-2}a^4b^3 \cdot [e a b^4 ab^{-4}a^{-2}]$	$-1e \cdot [e e e]$ $-1b^{-2}a^4b^3 \cdot [e a b^4]$ $+1b^{-2}a^4b^3 \cdot [e a b^4ab^{-4}a^{-2}]$ $-1b^{-2}a^4b^3 \cdot [e ab^4 ab^{-4}a^{-2}]$	2

Durch „Korrektur“ mit Elementen aus $\ker \partial_4^{\mathbb{Q}}$ wie in Lemma 2.3.2 können jedoch die Quotienten aller Elemente dieser Liste auf ≤ 1 verringert werden.

Beispielweise gilt für das erste Element $x = +4e \cdot [e|e|e|e] - 6e \cdot [e|e|e|b^4a^{-2}]$ der Liste wegen $d = +1e \cdot [e|e|e|e] - 1e \cdot [e|e|e|b^4a^{-2}] \in \ker \partial_4^{\mathbb{Q}}$, dass $\partial_4^{\mathbb{Q}}(x - 4d) = \partial_4^{\mathbb{Q}}(-2e \cdot [e|e|e|b^4a^{-2}]) = -2e \cdot [e|e|e] = \partial_4^{\mathbb{Q}}(x)$, also insbesondere $\frac{\|x-4d\|_1}{\|\partial_4^{\mathbb{Q}}(x)\|_1} = 1$. Analog kann auch für die anderen Elemente verfahren werden.

Abschließend sollen nun noch beispielhaft einige elementare Abschätzungen für Elemente der Bar-Auflösung gezeigt werden.

Definition 3.2.1. Sei G eine Gruppe. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ die \mathbb{Q} -linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} f_n &: C_n^{\mathbb{Q}}(G) \rightarrow \mathbb{Q} \\ g \cdot [g_1] \dots [g_n] &\mapsto 1 \end{aligned}$$

Lemma 3.2.2. Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade. Dann gilt $f_{n-1} \circ \partial_n^{\mathbb{Q}} = f_n$.

Beweis. Es genügt, die Behauptung auf der \mathbb{Q} -Basis von $C_n^{\mathbb{Q}}(G)$ aus Bemerkung 1.4.5 zu zeigen. Es gilt $f_{n-1} \circ \partial_n^{\mathbb{Q}}(g \cdot [g_1 | \dots | g_n]) = \sum_{i=0}^n (-1)^i = 1 = f_n(g \cdot [g_1 | \dots | g_n])$, womit die Behauptung folgt. \square

Definition 3.2.3 (Länge von Elementen der Bar-Auflösung). Für $n \in \mathbb{N}$ und eine Gruppe G definieren wir

$$L : C_n^{\mathbb{Q}}(G) \rightarrow \mathbb{N}$$

$$x = \sum_{i=1}^m a_i x_i \mapsto m$$

wobei $x = \sum_{i=1}^m a_i x_i$ in \mathbb{Q} -Basisdarstellung der Basis aus Bemerkung 1.4.5 sei. Hierbei benutzen wir die Konvention, dass für die „leere Summe“ (d.h. das 0-Element) $m = 0$ ist.

Lemma 3.2.4. Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade, G eine Gruppe und $x \in C_n^{\mathbb{Q}}(G)$ mit $L(x) = 1$. Dann gilt

$$\sup_{\substack{x \in C_n^{\mathbb{Q}}(G) \\ L(x)=1}} \inf_{c \in \ker \partial_n^{\mathbb{Q}}} \frac{\|x + c\|_1}{\|\partial_n^{\mathbb{Q}}(x)\|_1} = 1.$$

Beweis. Sei $x \in C_n^{\mathbb{Q}}(G)$ mit $L(x) = 1$. Dann gilt $x = ag \cdot [g_1 | \dots | g_n]$ mit $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $g, g_1, \dots, g_n \in G$ und insbesondere $f_n(x) = a$. Für $c \in \ker \partial_n^{\mathbb{Q}}$ gilt $f_n(c) = 0$ nach Lemma 3.2.2, d.h. $\|x\|_1 = |f_n(x)| = |f_n(x+c)| \leq \|x+c\|_1$, also $\inf_{c \in \ker \partial_n^{\mathbb{Q}}} \|x+c\|_1 = \|x\|_1$. Weiter gilt $\|x\|_1 = |f_n(x)| = |f_{n-1} \circ \partial_n^{\mathbb{Q}}(x)| \leq \|\partial_n^{\mathbb{Q}}(x)\|_1$, d.h.

$$\sup_{\substack{x \in C_n^{\mathbb{Q}}(G) \\ L(x)=1}} \inf_{c \in \ker \partial_n^{\mathbb{Q}}} \frac{\|x + c\|_1}{\|\partial_n^{\mathbb{Q}}(x)\|_1} \leq 1.$$

Für $x = e \cdot [e | \dots | e]$ gilt $1 = \|x\|_1 = \|\partial_n^{\mathbb{Q}}(x)\|_1$, also

$$\sup_{\substack{x \in C_n^{\mathbb{Q}}(G) \\ L(x)=1}} \inf_{c \in \ker \partial_n^{\mathbb{Q}}} \frac{\|x + c\|_1}{\|\partial_n^{\mathbb{Q}}(x)\|_1} = 1.$$

\square

Korollar 3.2.5. Sei G eine Gruppe. Für ungerade $q \in \mathbb{N}$ gilt für die Konstante K aus Lemma 2.3.2 $K \geq 1$.

Beweis. Da $q + 1$ gerade ist, folgt dies aus Lemma 3.2.4. \square

Lemma 3.2.6. Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade, G eine Gruppe und $x \in C_n^{\mathbb{Q}}(G)$. Sei weiter $\mu \in \mathbb{Q}$ gewählt wie in Bemerkung 3.1.1, d.h. $y = \mu x$ erfüllt die Eigenschaften aus Bemerkung 3.1.1. Gilt $\|x\|_1 > \|\partial_n^{\mathbb{Q}}(x)\|_1$, so folgt $\mu\|x\|_1 - 2 \geq \mu\|\partial_n^{\mathbb{Q}}(x)\|_1$.

Beweis. Offenbar gilt $\|\mu x\|_1 \equiv f_n(\mu x) \pmod{2}$ sowie $\|\partial_n^{\mathbb{Q}}(\mu x)\|_1 \equiv f_{n-1}(\partial_n^{\mathbb{Q}}(\mu x)) \pmod{2}$ und aus Lemma 3.2.2 folgt somit $\|\partial_n^{\mathbb{Q}}(\mu x)\|_1 \equiv \|\mu x\|_1 \pmod{2}$. Wegen $\mu\|x\|_1 > \mu\|\partial_n^{\mathbb{Q}}(x)\|_1$ muss somit $\mu\|x\|_1 - 2 \geq \mu\|\partial_n^{\mathbb{Q}}(x)\|_1$ gelten. \square

Korollar 3.2.7. *Sei G eine Gruppe, $n \in \mathbb{N}$ gerade, $g, g_1, \dots, g_n, h, h_1, \dots, h_n \in G$ und $x = g \cdot [g_1 | \dots | g_n] - h \cdot [h_1 | \dots | h_n] \in C_n^{\mathbb{Q}}(G)$ mit $x \neq 0$. Gilt $\|x\|_1 > \|\partial_n^{\mathbb{Q}}(x)\|_1$, so folgt bereits $x \in \ker \partial_n^{\mathbb{Q}}$.*

Beweis. Aus Lemma 3.2.6 folgt (da hier $\mu = 1$), dass $\|x\|_1 - 2 \geq \|\partial_n^{\mathbb{Q}}(x)\|_1$ gilt. Wegen $\|x\|_1 = 2$ gilt also $x \in \ker \partial_n^{\mathbb{Q}}$. \square

Literatur

- [Fri17] Roberto Frigerio. *Bounded cohomology of discrete groups*. Bd. 227. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 2017, S. xvi+193. ISBN: 978-1-4704-4146-3.
- [Gro82] Michael Gromov. „Volume and bounded cohomology“. In: *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 56 (1982), 5–99 (1983). ISSN: 0073-8301. URL: http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1982__56__5_0.
- [Löh10] C. Löh. *Group Cohomology & Bounded Cohomology*. An introduction for topologists. 2010.
- [Löh19] C. Löh. *Group Cohomology*. Sommersemester 2019 Universität Regensburg. 2019.
- [Mit84] Yoshihiko Mitsumatsu. „Bounded cohomology and l^1 -homology of surfaces“. In: *Topology* 23.4 (1984), S. 465–471. ISSN: 0040-9383. DOI: 10.1016/0040-9383(84)90006-5. URL: [https://doi.org/10.1016/0040-9383\(84\)90006-5](https://doi.org/10.1016/0040-9383(84)90006-5).
- [MM85] Shigenori Matsumoto und Shigeyuki Morita. „Bounded cohomology of certain groups of homeomorphisms“. In: *Proc. Amer. Math. Soc.* 94.3 (1985), S. 539–544. ISSN: 0002-9939. DOI: 10.2307/2045250. URL: <https://doi.org/10.2307/2045250>.
- [Som98] Teruhiko Soma. „Existence of non-Banach bounded cohomology“. In: *Topology* 37.1 (1998), S. 179–193. ISSN: 0040-9383. DOI: 10.1016/S0040-9383(97)00002-5. URL: [https://doi.org/10.1016/S0040-9383\(97\)00002-5](https://doi.org/10.1016/S0040-9383(97)00002-5).

Ich habe die Arbeit selbstständig verfasst, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt und bisher keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt. Außerdem bestätige ich hiermit, dass die vorgelegten Druckexemplare und die vorgelegte elektronische Version der Arbeit identisch sind und dass ich von den in § 27 Abs. 6 vorgesehenen Rechtsfolgen Kenntnis habe.

Unterschrift: _____