

2024 年度“火花杯”数学建模精英联赛

B 题：基于 WiFi 的室内定位问题

室内定位系统在医疗服务、消防、维恐等场景中有着广泛的应用。目前，室内定位技术主要基于超宽带、射频识别、可见光、雷达以及超声波等。由于这些平台都需要安装额外的设备，难免会造成高额的成本以及不便的使用。相对于以上技术，基于 WiFi 的室内定位技术由于其低廉的成本、便捷性好、覆盖范围广、以及分布广泛等诸多优势，获得了学术界的广泛关注。

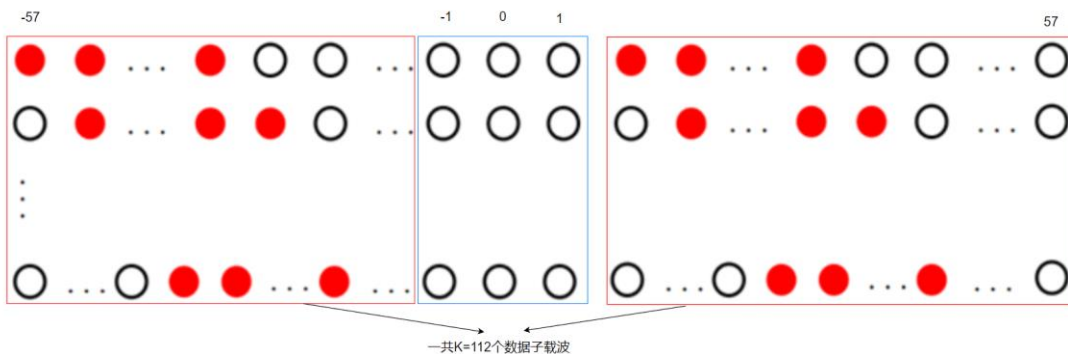
基于飞行时间的定位技术是室内定位的一个研究热点，其基本原理是利用飞行时间（TOF）求出发送器到接收器之间的物理距离后，再运用三角定位等方法估计出用户的位置。因此，TOF 估计精度会直接影响到定位的准确性。

传统的估计方法为多重信号分类（MUSIC）方法，MUSIC 算法中，导向矢量可以理解为相同信号在一组接收器上形成的差异特征，同样的，将 OFDM 信号的一组子载波看作一组接收器，其导向矢量为：

$$\vec{a}(\tau) = [1, \Omega_\tau^1, \dots, \Omega_\tau^{N-1}]$$

其中， $\Omega_\tau = e^{-j2\pi f_\delta \tau}$ ， $f_\delta = 312.5\text{KHz}$ ， τ 为未知的时延， N 为导向矢量中子载波的个数，那么这个导向矢量就表示：一个信号在某个时延时 τ ，在这组子载波上产生的相位变化特征。

现假设一共有 128 个子载波的系统，编号分别记为 -64 至 63，有三部分子载波不使用，编号分别为：-64 至 -58；-1 至 1；58 至 63。因此，共有 $K=112$ 个数据子载波（表示实际使用的具有数据的部分，用红色表示），如下图所示。图示中给出了 $N=22$ 的情形，第一行红色的编号分别为：-57 至 -47；2 至 12，故所得到的数据为一个 22 维的列向量。每次向右滑动一个单位，得到新的列向量，直至首个红色的编号为 -12 为止。综合以上过程可得到一个 22 行 46 列的矩阵。通过对该矩阵适当的分析后，可对目标进行定位。



由于不同径的飞行时间 ToF 不同，因此不同径在不同的子载波上的相位变化不同。
在理想情况下的信道状态信息（CSI）为：

$$H(t, f) = \sum_{m=1}^M \alpha_m e^{j\phi_m(t, f)}$$

上式中， M 表示多径的个数，但每条多径有复数幅度衰减 α_m 和相位偏差 $\phi_m(t, f)$ 。但是在射频直连和天线较近时，一般只考虑 $M=1$ 。

但在实际的应用中，误差的影响通常会导致以下三个问题，其一是中心频率偏移：

$$\tilde{\phi}_n(t, f) = 2\pi(f + \epsilon_f)\tau_n = \phi_n(t, f) + 2\pi\epsilon_f\tau_n.$$

其二，采样频率偏移与包检测时延：

$$\tilde{\phi}_n(t, f) = 2\pi f(\tau_n + \epsilon_t) = \phi_n(t, f) + 2\pi f\epsilon_t.$$

其三，IQ 不平衡非线性误差，其具体的细节可参考文献[1]。

基于附件所给的数据，建立数学模型求解以下问题：

- (1) 不考虑误差，射频直连的单路径场景。依据 CSI1.mat 所给的数据，求 ToF 估计的时间。
- (2) 不考虑误差，场景为一室内环境，A 点有一发射机，B，C 点各有一个接收机，B 点坐标（单位 m）为（1，1），C 点坐标为（7.3，1），A 点坐标未知，CSI2 为 B 点收到的 CSI 数据，CSI3 为 C 点收到的 CSI 数据，计算 A 点分别到 B 和 C 的 ToF 时间，并确定 A 点的位置。

- (3) 考虑实际有误差的情形。附件 CSI4, CSI5 为实际的射频直连测试得到的数据, 已知其中没有中心频率偏移导致的误差, 请分析其可能的误差情况 (如分布情况) 以及误差对 ToF 的影响。

数据说明:

子载波总个数 256, 采样频率 $f_s=80\text{Mhz}$, 载波 (中心) 频率 5.1Ghz , 光速 $3*10^8\text{m/s}$, 子载波频率间隔为采样频率的 $1/256$ 。

CSI1.mat: 8 个天线, 256 个载波, 仅用其中一组天线数据即可, 编号分别为: 1~256, 其中编号为[1,6] [128 129 130] [251,256]的子载波没有使用。

CSI2.mat 和 CSI3.mat 为无噪声情形下的数据。

CSI4.mat 和 CSI5.mat 为有噪声时的实测数据, 表示 24 个时刻的 CSI。数据没有中心频率偏移, 子载波个数为 256, 采样频率为 61.44Mhz 。

参考文献:

- [1] Hongzi Zhu, Yiwei Zhuo, Qinghao Liu, and Shan Chang, π -Splicer: Perceiving accurate CSI phases with commodity WiFi devices, IEEE Transactions on Mobile Computation, PP.1536-1233, 2017.
- [2] Manikanta Kotaru, Kiran Joshi, Dinesh Bharadia, Sachin Katti, SpotFi: Decimeter Level Localization Using WiFi, SIGCOMM'15, August 17-21, 2015, London, United Kingdom.