线性代数

1. $D = D^T$

2. 互换行列式某两行(列)，行列式改变符号

3. 行列式有两行(列)完全相同，则行列式为零.

4. n 阶行列式，每个元素都两个数和的形式，可以拆成 2^n 的个行列式的和.

5. $A^k = 0$ 称 A 为幂零阵.

6. $$\begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n

7. $$\begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}^{n} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

8. $(A^T)^T = A$ $\quad (A+B)^T = A^T + B^T$ $\quad (kA)^T = k\cdot A^T$ $\quad (AB)^T = B^T A^T$

9. $|A^T| = |A|$ $\quad |kA| = k^n|A|$ $\quad |AB| = |A||B|$

10. 伴随矩阵

$A\cdot A^* = A^*\cdot A = |A|\cdot E$ $\quad A^* = |A|\cdot A^{-1}$ $\quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$

$|A^*| = |A|^{n-1}$ $[\,|A^*| = ||A|\cdot A^{-1}| = |A|^n\cdot|A^{-1}| = |A|^{n-1}]$

$(A^*)^{-1} = (|A|\cdot A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A|}A$ $\quad (A^{-1})^* = |A^{-1}|\cdot(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A|}A$

$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ $\quad (A^*)^T = (A^T)^*$

$(A^*)^* = |A|^{n-2}\cdot A$ $\quad (AB)^* = B^*\cdot A^*$ $\quad (kA)^* = k^{n-1}\cancel{k}A^*$

11. 可逆矩阵 $AB = BA = E$ 若A可逆，$|A| \neq 0$，充要

若 $|A| \neq 0$，A可逆，$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$ $\quad |A| \neq 0$，称A为非奇异性(非退化)矩阵

12. 若A为可逆，$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ $(A\cdot A^{-1} = E，|A|\cdot|A^{-1}| = E)$

13. $|A^{-1}|^{-1} = A$

14. 若A可逆，则 A^T 也可逆，且 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

15. 若A可逆，$k \neq 0$，kA 也可逆，且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

16. 若A.B为n阶可逆，AB可逆，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

17. 二阶方阵$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

18. 如果线性方程组，$A_nX=b$系数矩阵$|A|\neq 0$，则$AX=b$有唯一解。

$A_nX=b$无解或有两个或两个以上不同解，则$|A|=0$

如果齐次方程组，$A_nX=0$系数矩阵$|A|\neq 0$，则$A_nX=0$只有0解

若$A_nX=0$有非零解，$|A|=0$

19. 矩阵分块：$A\cdot B \to$ A的列分和B的行分保持一致

20. 分块对角阵 $A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{pmatrix}$，A及$A_i$为方阵，则$|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_n|$

21. $\begin{vmatrix} A_{n\times n} & B_{n\times m} \\ 0 & C_{m\times m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{nn} & 0 \\ B_{m\times n} & C_{m\times m} \end{vmatrix} = |A|\cdot|C|$

22. $\begin{vmatrix} 0 & A_{n\times n} \\ C_{m\times m} & B_{m\times n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_{n\times m} & A_{n\times n} \\ C_{m\times m} & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{m\times n}|A|\cdot|C|$

23. $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} C & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \end{pmatrix}$

24. 对A左乘初等矩阵，行初等变换　右乘初等矩阵，列初等变换

25. $E(i,j)^{-1}=E(i,j)$　$E(i,(k))^{-1}=E(i(\frac{1}{k}))$　$E^{-1}(i,j(k))=E(ij(-k))$

例：$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$E(1,2)\,X\,E(2,3)=C$　$X=E(1,2)^{-1}\,C\,E(2,3)^{-1}=E(1,2)\,C\,E(2,3)$

26. $A_{m\times n}$，k阶子式个数：$C_m^k\cdot C_n^k$，$k=1,2,\cdots\min\{m,n\}$

27. $A_{m\times n}$ 各阶子式个数：$\sum_{k=1}^{\min\{m,n\}} C_m^k \cdot C_n^k$

28. $R(A^T)=R(A)$

29. $\begin{cases} |A|\neq 0，此时 R(A)=n \\ |A|=0，此时 R(A)<n \end{cases}$　　A可逆 $\Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow R(A)=n$

$A\sim B$等价，$R(A)=R(B)$

30. $\max\{R(A),R(B)\}\leq R(A,B)\leq R(A)+R(B)$

31. $R(AB)\leq \min\{R(A),R(B)\}$，

32. $R(A)<R(A,b)\rightarrow$ 无解　　$R(A)=R(A,b)=n$，有唯一解

$R(A)=R(A,b)<n$ 有无穷多解

33. $A_{m\times n}X_{n\times 1}=0$ $\begin{cases} 只有零解 \Leftrightarrow R(A)=n \\ 有非零解 \Leftrightarrow R(A)<n \end{cases}$

34. $A_{m\times n}B_{n\times s}=0_{m\times s}$　　$R(A)+R(B)\leq n$

35 n元齐次线性方程组　$AX=0$ $\begin{cases} R(A)=n & 只有0解 \\ R(A)<n & 有非0解，有无穷多解 \end{cases}$

n元非齐次线性方程组　$AX=b$ $\begin{cases} R(A)=R(A,b)=n & 有唯一解 \\ R(A)=R(A,b)<n & 有无穷多解 \\ R(A)<R(A,b) & 无解 \end{cases}$

36. 矩阵A与B等价：$PAQ=B$

向量组A与B等价，$R(A)=R(B)=R(A,B)$

可互相线性表示

37. 若向量组$\beta_1,\beta_2\dots\beta_t$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$线性表示，则$R(\beta_1,\beta_2,\dots\beta_t)\leq R(\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_m)$

38. 线性相关 $R(A)<n$　$|A|=0$　　线性无关 $R(A)=n$　$|A|\neq 0$

39. 矩阵A化成行最简非零元所在列构成列向量组最大无关组

40. 向量组 $b_1, b_2 \dots, b_l$ 能由向量组 $a_1, a_2, \dots a_m$ 线性表示的充分必要条件是

$R(a_1, a_2, \dots, a_m) = R(a_1, \dots a_m, b_1, \dots b_l)$

41. 若向量组B能由向量组A线性表示，则 $R_B \le R_A$.

42. 齐次方程组 $A_{m\times n} x = 0$ 解向量组的最大无关组称为基础解系.

43. 基础解系中解向量组的个数 $(n-r)$ 个无关解向量

44、$R(A) = R(A^T)$　　$0 \le R(A_{m\times n}) \le \min\{m, n\}$

$A \sim B \Rightarrow R(A) = R(B)$　　P、Q可逆　$R(PAQ) = R(A)$

$\Leftarrow$ (A、B同型)　　$R(A\pm B) \le R(A) + R(B)$

$R(AB) \le \min\{R(A), R(B)\}$　　$A_{m\times n} B_{n\times t} = 0$. $R(A) + R(B) \le n$

45. y_1, y_2 是 $Ax = b$ 的解，则 $\xi = y_1 - y_2$ 是对应齐次线性方程组的解

46，特解，自由未知量取0

47. $[x, y] = x^T y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$　内积

$[x, x] = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\|x\| = \sqrt{[x, x]} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$　$\|x\|$ 称为x的长度（模、范数）

单位化 $\frac{\alpha}{\|\alpha\|}$

48. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta \to \cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \to \theta = \arccos \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$[x, y] = 0$. x、y正交

49、两两正交的非零向量组称为正交向量组

正交向量组一定线性无关

50. 施密特正交化（线性无关）　$\beta_1 = \alpha_1$　$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{[\alpha_2, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1$　$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{[\alpha_3, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1 - \frac{[\alpha_3, \beta_2]}{[\beta_2, \beta_2]} \beta_2$

51. 满足 $A^T \cdot A = E$ $(A^{-1} = A^T)$，称A为正交阵

52. 正交阵，行(列)向量两两正交，长度为1

正交阵 $|A| = \pm 1$

53. A为正交阵，A^{-1}也为正交阵

A为正交阵，B为正交阵，AB也是正交阵

54. $A\alpha=\lambda\alpha$ λ是特征值，α.特征向量

55. $(A-\lambda E)\alpha=0 \Rightarrow (A-\lambda E)x=0$ 有非零解，$R(A-\lambda E)<n$，$|A-\lambda E|=0$

$|A-\lambda E|=0$为A的特征方程，$|A-\lambda E|$称为A的特征多项式

56. $A^*\alpha=|A|A^{-1}\alpha=\frac{|A|}{\lambda}\alpha$

$A^*+3A-2E=-2A^{-1}+3A-2E=-\frac{2}{\lambda}+3\lambda-2$

57. A^*的特值 $\frac{1}{\lambda}|A|$ $(A^*)^*=\frac{1}{\frac{1}{\lambda}|A|}|A|=\lambda\frac{1}{|A|}|A|^{n-1}=\lambda|A|^{n-2}$

$k\lambda$是kA的特值 λ^k是A^k的特值 $\frac{1}{\lambda}$是A^{-1}的特征值

58. $P^{-1}AP=B$ 称A与B相似矩阵 A与B相似则A与B一定等价

①行列式相同，②具有相同的可逆性

$|A|=|B|$，③有相同的秩$R(A)=R(B)$

④有相同的特征多项式 $|A-\lambda E|=|B-\lambda E|$ ⑤迹相同 tr

59. $tr=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$

$|A|=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdots\lambda_n$

60. A、B为n阶矩阵，若存在可逆阵C，使$B=C^TAC$，称A与B合同

$P^{-1}AP=B$	$P^TAP=B$	$PAQ=B$
相似	合同	等价

61. 若A与B合同，则$R(A)=R(B)$

若A为对称阵，$C^TAC=\Lambda$，称A合同对角阵

62. 对称阵A正定 $\xLeftrightarrow{充要}$ A的各阶顺序子式为正

A负定 $\xLeftrightarrow{充要}$ 奇数阶主子式为负，偶数阶主子式为正