

Imię i nazwisko:
Indeks:

WdI, Egzamin, 11.02.2016

1. Ciąg liczb nazywamy k -zróżnicowanym jeśli wśród reszt z dzielenia elementów ciągu przez 10 jest dokładnie k różnych wartości.

Przykład

Ciąg 5, 15, 7, 25, 17, 37, 275 jest 2-zróżnicowany, gdyż reszty z dzielenia elementów ciągu przez 10 to odpowiednio 5, 5, 7, 5, 7, 7 i 5; pojawiają się wśród reszt dwie różne wartości.

Wariant A [10pkt]: Napisz funkcję realizującą następującą specyfikację:

Wejście: n – liczba naturalna, a – tablica liczb naturalnych

Wyjście: k – liczba naturalna, taka że ciąg $a[0], \dots, a[n-1]$ jest k -zróżnicowany.

Wariant B [20pkt]: Napisz funkcję realizującą następującą specyfikację:

Wejście: n, k – liczby naturalne, a – tablica liczb naturalnych

Wyjście:

- 0, jeśli wśród reszt z dzielenia elementów przez 10 ciągu $a[0], \dots, a[n-1]$ występuje mniej niż k różnych wartości;
- i – najmniejsza liczba naturalna taka, że ciąg $a[0], \dots, a[i-1]$ jest k -zróżnicowany.

Przykłady do wariantu B:

Wejście: $n=7, k=3, a[0..6]=[5, 15, 57, 25, 17, 37, 275]$

Wyjście: 0

(gdyż wśród reszt z dzielenia przez 10 są tylko dwie różne wartości, a $k=3$)

Wejście: $n=7, k=2, a[0..6]=[5, 15, 5, 25, 17, 37, 275]$

Wyjście: 5

(gdyż ciąg $a[0], \dots, a[4]$ jest 2-zróżnicowany, a ciąg $a[0], \dots, a[3]$ nie jest 2-zróżnicowany)

Imię i nazwisko:
Indeks:

WdI, Egzamin, 11.02.2016

Imię i nazwisko:
Indeks:

WdI, Egzamin, 11.02.2016

2. [20] Rozważmy następującą funkcję:

```
int zagadka(int i, int j, int a[])
{
    if (j-i<2)
        if (a[i]<a[j]) return a[j];
        else return a[i];
    int z1=zagadka(i,i+1,a);
    int z2=zagadka(i+2,j,a);
    if (z1<z2) return z2;
    else return z1;
}
```

```
def zagadka(i, j, a):
    if j-i<2:
        if a[i]<a[j]: return a[j]
        else: return a[i]
    z1=zagadka(i,i+1,a)
    z2=zagadka(i+2,j,a)
    if z1<z2: return z2
    else: return z1
```

Twoje zadanie:

- a) [4] Prześledź działanie funkcji zagadka dla podanych poniżej wartości parametrów. W każdym wierszu poniższej tabeli uzupełnij ostatnią kolumnę.

i	j	zawartość a[0...7]	zwracana wartość funkcji
0	1	[8, 7, 6, 5, 1, 2, 3, 4]	8
2	3	[8, 7, 6, 5, 1, 2, 3, 4]	
0	7	[8, 7, 6, 5, 1, 2, 3, 4]	
4	7	[8, 7, 6, 5, 1, 2, 3, 4]	
1	6	[8, 7, 6, 5, 1, 2, 3, 4]	

- b) [4] Narysuj drzewo wywołań rekurencyjnych dla zagadka(1, 6, a).

Imię i nazwisko:
Indeks:

WdI, Egzamin, 11.02.2016

- c) [4] Uzupełnij specyfikację funkcji zagadka. Twoja specyfikacja powinna możliwie dokładnie opisywać działanie programu. Możesz też w niej przyjąć, że j nie przekracza rozmiaru tablicy.

Wejście: i, j – liczby naturalne takie, że $0 \leq i \leq j$
 a – tablica liczb naturalnych

Wyjście:

- d) [4] Chcemy ustalić funkcję $T(n)$ określającą asymptotyczny czas obliczeń potrzebny do wykonania funkcji zagadka(0, $n - 1$, a). Podaj rekurencyjną definicję tej funkcji uzupełniając poniższe wyrażenia:

$T(n) = 1$ dla $n \leq 2$

$T(n) = \dots$ dla $n > 2$.

Wskazówka. Zauważ, że czas obliczeń dla funkcji zagadka(i, j, a) jest równy $T(j - i + 1)$.

- e) [4] Podaj jak najlepsze oszacowanie asymptotyczne z góry dla funkcji $T(n)$ z poprzedniego podpunktu. Uzasadnij uzyskany wynik.

$T(n) = O(\dots)$

3. Dane są następujące deklaracje

<pre>typedef struct node *pnode; typedef struct node{ int val; int size; pnode left; pnode right;} snode;</pre>	<pre>class TreeItem: def __init__(self,value): self.val = value self.size = 1 self.left = None self.right = None</pre>
---	--

Drzewo o korzeniu r nazywamy *rozszerzonym drzewem BST*, jeśli:

- r jest drzewem BST ze względu na wartości w polu val poszczególnych węzłów;
- pole size każdego węzła jest równe liczbie elementów w jego poddrzewie.

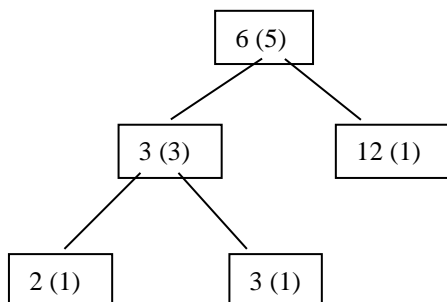
Napisz funkcję, która dla rozszerzonego drzewa BST wyznacza liczbę elementów, których wartości są większe od podanej liczby a lub jej równe. Twoja funkcja ma spełniać następującą specyfikację:

Wejście: r – korzeń rozszerzonego drzewa BST, typu pnode,
a – liczba naturalna

Wyjście: liczba elementów w drzewie o korzeniu r, których pole val ma wartość większą lub równą a.

Przykład

W poniższym drzewie podane są wartości val węzłów oraz (w nawiasach) wartości pola size. Dla a=5 Twoja funkcja powinna zwrócić wartość 2 (elementy większe lub równe 5 to 6 i 12), dla a=1 wartość 5, a dla a=12 wartość 1.



Zadanie możesz rozwiązać w jednym z poniższych wariantów.

Wariant A [10 pkt] Czas działania Twojej funkcji to $O(n)$, gdzie n to liczba węzłów drzewa.

Wariant B [20 pkt] Czas działania Twojej funkcji to $O(h)$, gdzie h to wysokość drzewa.

Podaj asymptotyczny czas działania swojego rozwiązania wraz z uzasadnieniem.

Imię i nazwisko:
Indeks:

WdI, Egzamin, 11.02.2016

Imię i nazwisko:
Indeks:

WdI, Egzamin, 11.02.2016

4. [20 pkt]

- a) [5] Dla każdego z poniższych napisów podaj czy jest poprawnym wyrażeniem ONP. Dla tych napisów, które są poprawnymi wyrażeniami ONP podaj ich wartość:

Napis	Czy ONP	Wartość
5 4 *	Tak	20
6 5 4 3 2 1 + * + * +		
5 4 * 3 2 1 + * 9 +		
6 5 4 3 2 1 + * + *		
6 5 4 3 2 1 + + * +		
6 5 + 4 + 3 + 2 + 1 +		

- b) [5] Zamień na postać ONP następujące wyrażenia (z uwzględnieniem priorytetów operatorów!):

$$(5+4) * (6+3)$$

$$(((5+4) * 3) + 2) * 1)$$

$$(1 * (2 + (3 * (4 + 5))))$$

$$(5+4) * 5 + 4 * 6$$

$$1 * 2 + 3 * 4 + 5 * 6$$

Imię i nazwisko:
Indeks:

WdI, Egzamin, 11.02.2016

- c) [5] Podaj gramatykę bezkontekstową generującą poprawne wyrażenia w postaci ONP, w których argumentami są cyfry, a używane operatory to $+$ i $*$. Podaj też wyprowadzenie wyrażenia

$1\ 2 + 3\ 4 * +$

w podanej przez siebie gramatyce.

- d) [5] Dana jest gramatyka $G(N,T,P,S)$, gdzie $N=\{ S, C, D \}$,

$T=\{ (,), 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, +, * \}$ a zbiór produkcji jest następujący:

$S \rightarrow D\ S\ S, S \rightarrow C, D \rightarrow *, D \rightarrow +,$

$C \rightarrow 0, C \rightarrow 1, C \rightarrow 2, C \rightarrow 3, C \rightarrow 4, C \rightarrow 5, C \rightarrow 6, C \rightarrow 7, C \rightarrow 8, C \rightarrow 9.$

Dla każdego z poniższych napisów podaj wyprowadzenie w gramatyce G lub wskaż, że napis ten nie należy do języka $L(G)$:

* 5 5

5 5 *

* * * 5 5 5 5

* 5 * 5 * 5 5

* * 5 * 5 * 5 * 5 5

Imię i nazwisko:
Indeks:

WdI, Egzamin, 11.02.2016

5. [20 pkt] Dany jest program P:

PROGRAM P: { int x=a; int s=0; while (x>0) { s=s+a; x=x-1; } return s; }	PROGRAM P: x=a s=0 while x>0: s=s+a x=x-1 return s
---	---

i niepełna formalna specyfikacja:

{ a -liczba naturalna }

P

{ S=..... }

Twoje zadanie:

- [6] Podaj warunek końcowy specyfikacji, tak aby odzwierciedlał działanie programu.
- [6] Sformułuj niezmiennik I pętli while, który **umożliwi wykazanie poprawności** Twojej specyfikacji.
- [8] Dla warunku I zdefiniowanego w punkcie (b) uzasadnij, że jeśli spełniony jest warunek $I \wedge (x>0)$ przed obrotem pętli while, to po jednym obrocie pętli nadal spełniony jest niezmiennik I.