計算物理演習レポート 3 サイコロゲーム

2020 年 2 月 25 日

1　概要

サイコロゲームの数値計算を行い、計算結果を理論的に考察した。

2　チップの配布

2.1　計算内容

nChip 枚のチップを nPeople 人に配布し、一人が持っているチップの枚数をヒストグラムでプロットする。

0〜nPeople-1 の番号が振られた人の誰に配布するかは、[0,1) の一様分布を nPeople 倍して floor したものを用いた。

各パラメータは、人数 nPeople = 100000, チップの枚数 nChip = 10000000 とした

2.2　ソースコード

以下はチップ授受のコード (3 で後述) も含む。

dice.cpp

```
#include <string>
#include <iostream>
#include <iomanip>
#include "../util2.h"

using namespace std;

int main() {
    const int nPeople = 100000, nChip = 10000000;
    const long nExchange = 1000000000;
    int numsChip[nPeople] = {};

//    distribute
    for (int i = 0; i < nChip; i++) {
        int giveTo = get_random_0_to_n(nPeople);
        numsChip[giveTo] += 1;
    }
    string s1;
    for (int v : numsChip) {
        s1 += to_string(v) + "\n";
    }
```

```
    string fpath1 = "../out/dice_game/data1.dat";
    write_to_file(s1, fpath1);
//    filter(x,y)=int(x/y)*y; plot "data1.dat" u (filter($1,0.001)):(1) smooth frequency with boxes
// でプロット

//    exchange
    cout << "Exchanging... " << flush;
    for (long i = 0; i < nExchange; i++) {
        int giveFrom, giveTo;
        do {
            giveFrom = get_random_0_to_n(nPeople);
            giveTo = get_random_0_to_n(nPeople);
        } while (giveTo == giveFrom || numsChip[giveFrom] == 0);
        numsChip[giveFrom] -= 1;
        numsChip[giveTo] += 1;
        if (i % long(double(nExchange - 1) * 0.1) == 0) {
            cout << setprecision(3) << 100.0 * double(i) / double(nExchange) << "% " << flush;
        }
    }
    string s2;
    for (int v : numsChip) {
        s2 += to_string(v) + "\n";
    }
    string fpath2 = "../out/dice_game/data2.dat";
    write_to_file(s2, fpath2);
//    binwidth=1.0; set boxwidth binwidth; bin(x,width)=width*floor(x/width); plot 'data2.dat' using (bin($1,binwidth)):(1.0) smooth freq with boxes
// でプロット
    return 0;
}
```

util2.h

```
#pragma once

#include <fstream>
#include <random>

using namespace std;

inline int get_random_0_to_n(int n) {
    // 乱数生成器
    static mt19937_64 mt64(0);

```

```
    // 0, 1, ... , n - 1 の一様分布整数生成器
    uniform_real_distribution<double>
        get_rand_uni_real(0.0, double(n));
    // 乱数を生成
    double numRandom = get_rand_uni_real(mt64);
    return int(floor(numRandom));
}

inline int write_to_file(const string& s,
   const string& fpath) {
    ofstream f;
    f.open(fpath);
    f << s;
    f.close();
    return 0;
}
```

2.3 計算結果

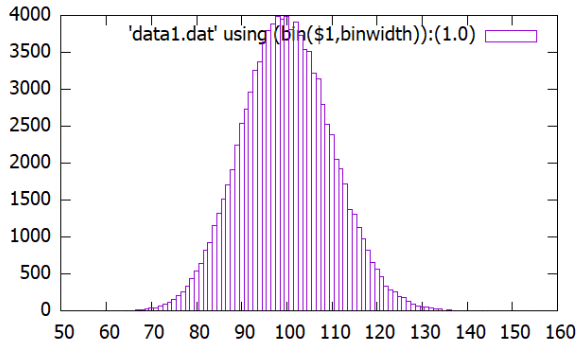

図 1

2.4 考察

チップの枚数 nChip を M、人数 nPeople を N と置く。一様乱数は $1, 2, \cdots, N$ の離散的な値に対して発生するので、一つの x に対して乱数の値が x となる確率 p は

$$p = \frac{1}{N} \tag{1}$$

である。これを 1 回の試行とする。これを乱数の数 M 個分繰り返すので、M 回試行したときには、一つの x に対して乱数の値 k 回 x となる確率 $P_M(k)$ は二項分布となり

$$P_M(k) = {}_M\mathrm{C}_k p^k (1-p)^{M-k} \tag{2}$$

(3)

となる。この二項分布のモーメントの母関数 $M(\theta)$ は

$$
\begin{aligned}
M(\theta) \equiv& E[e^{\theta k}] && (4)\\
=& \sum_{k=1}^{M} e^{\theta k} {}_M\mathrm{C}_k p^k (1-p)^{M-k} && (5)\\
=& \sum_{k=1}^{M} {}_M\mathrm{C}_k \left(pe^{\theta}\right)^k (1-p)^{M-k} && (6)\\
=& \left(pe^{\theta} + (1-p)\right)^M && (7)\\
& && (8)
\end{aligned}
$$

より、期待値 $E[k]$ は

$$
\begin{aligned}
E[k] \equiv& \left.\frac{dM(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta\to 0} && (9)\\
=& \left. Mpe^{\theta}\left(pe^{\theta} + (1-p)\right)^{M-1}\right|_{\theta\to 0} && (10)\\
=& Mp && (11)
\end{aligned}
$$

分散 $\sigma^2[k]$ は

$$
\begin{aligned}
\sigma^2[k] \equiv& \left.\frac{d^2M(\theta)}{d\theta^2}\right|_{\theta\to 0} - E[k]^2 && (12)\\
=& \left.\left(Mpe^{\theta}\left(pe^{\theta} + (1-p)\right)^{M-1} + M(M-1)p^2e^{2\theta}\left(pe^{\theta} + (1-p)\right)^{M-2}\right)\right|_{\theta\to 0} - E[k]^2 && (13)\\
=& Mp + M(M-1)p^2 - (Mp)^2 && (14)\\
=& Mp(1-p) && (15)
\end{aligned}
$$

より、標準偏差 $\sigma[k]$ は

$$
\sigma[k] = \sqrt{Mp(1-p)} \qquad (16)
$$

$$
\begin{aligned}
P_M(x) =& {}_M\mathrm{C}_k p(x)^k (1-p(x))^{M-k} && (17)\\
=& \frac{M!}{k!(M-k)!}\left(\frac{1}{N}\right)^k \left(1-\frac{1}{N}\right)^{M-k} && (18)\\
\sim& \left(\frac{M}{e}\right)^M \left(\frac{e}{k}\right)^k \left(\frac{e}{M-k}\right)^{M-k} \left(\frac{1}{N}\right)^k \left(1-\frac{1}{N}\right)^{M-k} && (19)\\
=& \left(\frac{M}{e}\right)^M \left(\frac{e}{kN}\right)^k \left(\frac{e(N-1)}{(M-k)N}\right)^{M-k} && (20)\\
=& \left(\frac{Me(N-1)}{e(M-k)N}\right)^M \left(\frac{e(M-k)N}{kNe(N-1)}\right)^k && (21)\\
\sim& \left(\frac{M}{M-k}\right)^M \left(\frac{M-k}{kN}\right)^k && (22)
\end{aligned}
$$

となる。ただし、途中でスターリングの公式 $n! \sim (\frac{n}{e})^n$、及び $N >> 1$ を用いた。

$M = 10000000, N = 100000$ を代入すると、ヒストグラム $f(k)$ は

$$
f(k) \equiv \left(\frac{10000000}{10000000-k}\right)^{10000000} \left(\frac{10000000-k}{100000k}\right)^k \qquad (23)
$$

期待値と標準偏差を考えれば良い。

まず、1 枚配ったときを考える。生成する乱数を $p(x)$ と置くとこれは一様分布であるから、1 枚配ったときの 1 人あたりの確率は全員等しく $p(x) = \frac{1}{N}$ である。この期待値 $E_1[x]$ は

$$
\begin{aligned}
E_1[x] =& \sum_{x=1}^{N} x\frac{1}{N} && (24)\\
=& \frac{N+1}{2} && (25)\\
\sim& \frac{N}{2} && (26)
\end{aligned}
$$

標準偏差 $\sigma_1[x]$ は

$$\sigma_1[x] = \sqrt{\left(\sum_{x=1}^{N} x^2 \frac{1}{N}\right) - E_1[x]^2} \tag{27}$$

$$= \sqrt{\frac{(N+1)(N+2)}{6} - \frac{N^2}{4}} \tag{28}$$

$$\sim \frac{N}{2\sqrt{3}} \tag{29}$$

である。

次に M 枚配った場合を考える。2 枚以上配ったときはこれら確率変数の足し算となるが、今 $M >> 1$ より中心極限定理が成り立つから、M 枚配ったときの確率分布による期待値 $E_M[x] = E_1[x]$、標準偏差 $\sigma_M[x] = \sigma_1[x]$

3 チップの授受

3.1 計算内容

次に配布されたチップを交換していく。まず、2 と同じの分布を使い、ランダムに 2 人を決定する。2 人が同一人物だったり、チップをあげる人がチップを 1 枚も持っていなかった場合は乱数を再生成する。そしてチップを手渡す。これを nExchange 回繰り返し、一人が持っているチップの枚数をヒストグラムでプロットする。

各パラメータは、交換回数 nExchange = 1000000000 とした

3.2 ソースコード

2.2 に既に記載。

3.3 計算結果

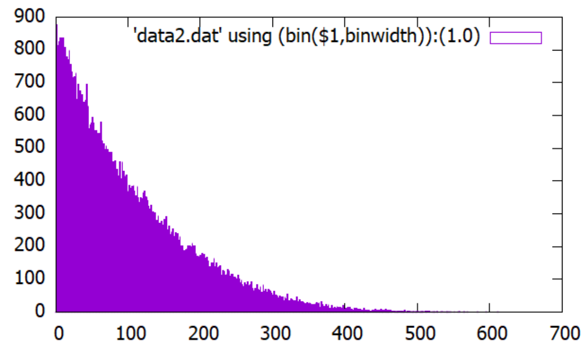

図 2

3.4 考察

計算結果は次のようにして説明できる。

チップの枚数 nChip を M、人数 nPeople を N と置くと、まず、チップの配布の総組み合わせ $W(N, M)$ は、丸○が nChip 個と仕切り | が nPeople 個の並び方と考えることができるから、

$$W(N, M) = \frac{(M+N-1)!}{M!(N-1)!} \tag{30}$$

通り。ここである人が x 枚チップを持っている場合の状態数 $W(N-1, M-1)$ を考えると、残りの人の状態を数え上げればよいから、

$$W(N-1, M-1) = \frac{(M-x+N-2)!}{(M-x)!(N-2)!} \tag{31}$$

通りである。よって、総組み合わせに対する条件付き確率の密度関数は

$$
\begin{aligned}
p(x;N,M) =& \frac{W(N-1,M-1)}{W(N,M)} && (32)\\
=& \frac{(M-x+N-2)!}{(M-x)!(N-2)!}\frac{M!(N-1)!}{(M+N-1)!} && (33)\\
\sim& \left(\frac{M-x+N-2}{e}\right)^{M-x+N-2}\left(\frac{e}{M-x}\right)^{M-x}\left(\frac{e}{N-2}\right)^{N-2}\cdot && (34)\\
& \left(\frac{M}{e}\right)^{M}\left(\frac{N-1}{e}\right)^{N-1}\left(\frac{e}{M+N-1}\right)^{M+N-1}\\
=& \left(\frac{M-x+N-2}{M-x}\right)^{M-x}\left(\frac{M-x+N-2}{N-2}\right)^{N-2}\left(\frac{M}{M+N-1}\right)^{M}\left(\frac{N-1}{M+N-1}\right) && (35)\\
=& \left(\frac{(M-x+N-2)M}{(M-x)(M+N-1)}\right)^{M}\left(\frac{M-x}{M-x+N-2}\right)^{x}\left(\frac{M-x+N-2}{N-2}\right)^{N-2}\left(\frac{N-1}{M+N-1}\right)^{N-1} && (36)\\
\sim& \left(\frac{(M+N)M}{M(M+N)}\right)^{M}\left(\frac{M}{M+N}\right)^{x}\left(\frac{M+N}{N}\right)^{N-2}\left(\frac{N}{M+N}\right)^{N-1} && (37)\\
=& \frac{N}{M+N}\left(\frac{M}{M+N}\right)^{x} && (38)
\end{aligned}
$$

ただし、途中でスターリングの公式 $n! \sim (\frac{n}{e})^n$、及び $M >> x$ と $N >> 1$ を用いた。

データ数 N より先程プロットしたヒストグラムはこの確率密度関数を N 倍したものとなる。$M = 10000000, N = 100000$ を代入すると、

$$
\begin{aligned}
f(x) \equiv& N \cdot p(x;N,M) && (39)\\
=& \frac{N^2}{M+N}\left(\frac{M}{M+N}\right)^{x} && (40)\\
\sim& 990.1 \cdot 0.9901^{x} && (41)
\end{aligned}
$$

これを先程の図に重ねてプロットすると

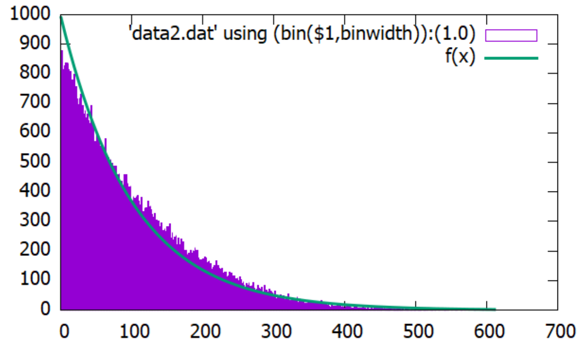

図 3　計算結果 (理論値付き)

となり計算結果とよく一致する。よって計算結果は妥当といえる。

参考文献

[1] 統計力学入門の為のゲーム (課題 1、2 含む) http://www.scc.kyushu-u.ac.jp/BioChemPhys/ko-gi/game09.pdf

[2] 乱数とヒストグラム モデリングとシミュレーション http://aoba.cc.saga-u.ac.jp/lecture/ModelingAndSimulation/PDF/Random.pdf