极限的推广与实数构造

——数学分析读书报告

（2019-2020秋季学期）

系别:理科试验班

班级：理试907

姓名：陈昱坤

学号：2193510855

时间： 2019 年 12 月 16 日

摘要

本文主要阐述了极限定义拓展的基本思路，并利用滤子语言构建了实数域。

目录

1 问题陈述 **2**

2 序列极限 **2**

2.1 数列极限 2

2.2 度量空间中的序列极限 3

2.3 拓扑空间中的序列极限 6

2.4 网的极限——Moore–Smith收敛理论 9

3 超滤与实数的构造 **13**

3.1 滤子、滤子基与滤子极限 13

3.2 滤子的序与超滤 15

3.3 自然数上的超滤空间 18

3.4 超滤变换与算术超滤 19

3.5 扩张后的自然数集 21

3.6 实数的构造 22

4 总结与体会 **24**

5 建议与意见 **25**

1　问题陈述

拓扑结构、序结构和代数结构是Bourbaki学派提倡的可以用来统一所有数学结构的三大母结构.

对于实数集而言,拓扑结构、代数结构和序结构都是必不可少的结构,它们相互之间紧密配合才有了实数集优良的性质.例如在$\varepsilon-\delta$语言中,就巧妙地将这三者结合在了一起.然而收敛作为一种拓扑结构,代数结构与序结构并非是必须的,也就是说我们可以完全避开或者少用$\varepsilon-\delta$语言就得到较为完整分析学体系. 与之相应的,我们可以用收敛的语言来重新描绘Cantor构造实数集所用的Cauchy序列等价类.

于是就有这样的想法:一方面,我们需要拓展收敛的定义,从而达到收敛的本质;另一方面,我们只需要研究清楚自然数的极限过程,那么后续的问题也能够迎刃而解.这二者便是写这篇报告的动机.

2　序列极限

2.1　数列极限

首先对数列极限做一个简单的回顾:

定义2.1.1. $\mathbb{R}$是实数集.数列是指映射$a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$，记作$\{a_n\}$ 或者$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$.

定义2.1.2. 一个数列$\{a_n\}$收敛到A是指：对任意的$\varepsilon>0$,存在$N\in\mathbb{N}^*$,当$n\in\mathbb{N}^*$且$n>N$ 时，$|a_n-A|<\varepsilon$. 写作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

并称A为数列$\{a_n\}$的极限.

命题2.1.1. 如果一个数列收敛,那么它的极限是唯一的.

Proof. 反证法.

假设数列$\{a_n\}$有两个极限A和B.不妨设$A>B$. 取$\varepsilon=\frac{B-A}{2}$ 则存在$N\in\mathbb{N}^*$，当$n\in\mathbb{N}^*$且$n>N$ 时,满足

$$|a_n-A|<\tfrac{B-A}{2}$$
$$|a_n-B|<\tfrac{B-A}{2}$$

这意味着对于大于N的每一个n都要同时满足这两个不等式，但这是不可能的. □

定义2.1.3. 设$\{a_n\}$是一个数列.对任意给定的$\varepsilon > 0$，若存在$N \in \mathbb{N}^*$，使得当$n, m \in \mathbb{N}^*$且$n, m > N$ 时，有

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

则称数列$\{a_n\}$为基本列或者$Cauchy$列.

定理2.1.1. （$Cauchy$收敛准则）一个数列收敛的充分必要条件是，它是一个基本列.

在这里我们并不打算证明这两个定理，而仅仅是将它列出来.

定义2.1.4. 设集合$A \subseteq \mathbb{R}.a \in \mathbb{R}$,对任意给定的$\varepsilon > 0$，区间$(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$称为a 的一个$\varepsilon$— 邻域，写作$U_\varepsilon(a)$.并称$\check{U}_\varepsilon(a) = U_\varepsilon(a) - \{a\}$为$a$ 的去心ε 邻域. 如果a的每一个去心ε邻域中都有A中的点，则称a为A的一个聚点.

定理2.1.2. （数列引理）如果a是集合A的一个聚点，那么存在A中的数列$\{x_n\}$收敛到a.

Proof. 取$\varepsilon_n = \frac{1}{n}$.由于$a$是一个聚点，取$x_i \in \check{U}_{\varepsilon_i}(a) \cap A$，则构造出一个数列$\{x_n\}$，这个数列收敛到$a$.

□

容易发现，以上几条命题和定理，除柯西收敛准则之外，都与实数的具体性质没有很大的关系.实际上，这几条性质或者定理将称为后面推广数列极限的重要依据.我们可以这样理解极限过程：所谓的数列趋向于一个数，指的是随着n 的增大，数列逐渐接近它的极限点，也就是说它们之间的距离越来越小.这启发我们将数列极限的概念推向更一般的情况.

2.2 度量空间中的序列极限

定义2.2.1. 若映射$d : X \times X \to \mathbb{R}$满足以下三条性质：
$\forall x, y, z \in X$
(1)$d(x, y) \geq 0$
(2)$d(x, y) = d(y, x)$
(3)$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$
则称d为X上的一个度量.并称(X, d)是一个度量空间.

接下来用度量的语言重述一遍数列极限的定义.首先定义什么叫序列.

定义2.2.2. (X, d)是一个度量空间.序列是指映射$a : \mathbb{N} \to X$.记号与数列相同.

定义2.2.3. (X,d)是一个度量空间.序列$\{a_n\}$收敛到A是指对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$N\in\mathbb{N}^*$,当$n\in\mathbb{N}$且$n>N$时,$d(a_n,A)<\varepsilon$.

容易验证这样定义的序列极限也满足极限的四则运算、极限的唯一性以及与“数列引理”相对应的“序列引理”.然而我们发现，对一般的度量空间，“$Cauchy$ 收敛准则”和列紧性定理不一定成立：

例2.2.1. 在有理数集$\mathbb{Q}$上定义度量为通常的绝对值函数，则空间$(\mathbb{Q},|\cdot|)$不满足$Cauchy$收敛准则.

在开区间$(0,1)$上定义度量为欧氏度量，则这个空间也不满足$Cauchy$收敛准则.

我们现在只关注$Cauchy$收敛准则.根据我们在实数集上的经验，$Cauchy$收敛准则意味着应该收敛的数列就要收敛到集合中的某一个值，这体现了实数集的一种“完备性”.然而，在一般的度量空间中却不一定有$Cauchy$收敛准则成立，说明度量空间不一定就有很好的性质.这启发我们去定义什么叫“度量空间的完备性”.

定义2.2.4. 设(X,d)是度量空间.X的点的序列x_n称为(X,d)中的一个$Cauchy$序列，如果它具有以下性质：任意给定的$\varepsilon>0$，存在一个正整数N,使得

$$d(x_n,x_m)<\varepsilon$$

对任意$n,m\geq N$成立.度量空间(X,d)称为完备的，当且仅当X中的每一个$Cauchy$列都收敛.

在给出经典的完备度量空间的例子之前，我们先来看一种特殊的度量空间.

定义2.2.5. 范数$\|\cdot\|$是线性空间E到非负实数集的一个映射，满足以下四个条件:
(1)$\|0\|=0$
(2)$(\|x\|=0)\Rightarrow(x=0)$
(3)$\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$
(4)$\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$
一个配备范数的线性空间称之为赋范线性空间.

命题2.2.1. 范数可以自然地诱导出一个度量$d(x,y)=\|x-y\|$.

Proof. 我们依次验证度量所满足的条件：
(1)$d(x,y)=\|x-y\|\geq 0$
(2)$d(x,y)=\|x-y\|=\|(-1)\cdot(y-x)\|=|-1|\|y-x\|=\|y-x\|=d(y,x)$

(3)$d(x,z) = \|x-z\| = \|(x-y)+(y-z)\| \le \|x-y\|+\|y-z\| = d(x,y)+d(y,z)$
所以$d(x,y)$是一个度量. □

定义2.2.6. 如果一个赋范线性空间中范数所诱导出的度量空间是完备的，则称这个空间是$Banach$空间或完备赋范空间.

例2.2.2. 设$X \subseteq \mathbb{R}$，从X到$\mathbb{R}$的全体有界连续函数构成的线性空间记为$\mathscr{C}_b(X)$，在这个线性空间中定义一致收敛范数

$$\|f\| = \sup_{x\in X}\{|f(x)|\}$$

则所构成的赋范线性空间是$Banach$空间.

Proof.
1.首先证明$\|f\|$是一个范数.
(1)$\|0(x)\| = 0$这是显然的；
(2)若$\sup_{x\in X}\{|f(x)|\} = 0$，也就是说$|f(x)|$在$X$上的最大值为0，那么对于$x \in X$，有$f(x) = 0$，于是$\|0(x)\| = 0$；
(3)$\|f+g\| = \sup_{x\in X}\{|f(x)+g(x)|\} \le \sup_{x\in X}\{(|f(x)|+|g(x)|)\} \le \sup_{x\in X}\{|f(x)|\} + \sup_{x\in X}\{|g(x)|\} = \|f\|+\|g\|$
(4)正齐次性是显然的
2.接下来证明这个赋范线性空间是$Banach$空间.
任取X中的元素x_0，以及$Cauchy$列$\{f_n(x)\}$.也就是说，对任意的$\varepsilon > 0$，存在$N \in \mathbb{N}^*$，当$n,m > N$时，$\|f_n - f_m\| < \varepsilon$.所以数列$\{f_n(x_0)\}$也是一个$Cauchy$列，由实数集的完备性可知，数列$\{f_n(x_0)\}$收敛到某个实数$f(x_0)$.那么由$x_0$的任意性，可以唯一确定出一个函数$f$.于是函数列$\{f_n(x)\}$一致收敛到函数$f$.再由一致极限定理可知$f$是连续的.容易证明$f$ 是有界的.所以$f \in \mathscr{C}_b(X)$.这说明空间$\mathscr{C}_b(X)$是$Banach$空间.

□

以上的例子说明，抛弃掉实数集的具体结构的度量空间中的序列极限，也可以像数列极限一样具有很好的性质.并且度量空间中的序列极限可以把研究实数的一些方法带到更一般的空间之中.我们不免问道：能不能去掉“度量”这个限制，从而将序列极限拓展到更一般的情形呢？我们来看以下命题：

命题2.2.2. (X,d)是一个度量空间.以x_0为球心的ε开球O是指集合$\{x|d(x,x_0) < \varepsilon\}$.序列$\{x_n\}$收敛到点$x_0$当且仅当对于任意以$x_0$ 为球心的ε开球O，总存在正整数N，当$n > N$ 时，$x_n \in O$.

这个命题的正确性可以用定义直接验证.实际上，这里的O不仅可以是一个开球，还可以是一个闭球，甚至是一个其他类型的集合等.但这些集合都必须包含着一个包住x_0 的开球.类似这样的集合，我们称之为邻域 .以下给出邻域的严格定义.

定义2.2.7. N为x_0的邻域，当且仅当存在一个包含x_0的ε开球O使得$O \subseteq N$.

于是，我们将上述命题改写为以下形式：

命题2.2.3. (X, d)是一个度量空间.序列$\{x_n\}$收敛到点x_0当且仅当对于任意x_0的邻域O，总存在正整数N，当$n > N$ 时，$x_n \in O$.

容易验证这个命题与前一个命题是等价的.这样我们就得到了一个序列收敛的等价定义.在这个命题中，邻域的概念似乎总是和“度量”给出的开球是相关联的.但是反过来想，假如在集合X中，我们不通过度量而直接规定具有某些性质的子集合，这里的每个子集合都与原来通过度量给出的开球具有相同的元素，这样的话就可以脱离“度量”而来讨论邻域了.

2.3 拓扑空间中的序列极限

定义2.3.1. 设X是一个非空集合.X的一个子集族$\mathscr{B}$叫做一个拓扑基（其元素B称为基元素），如果满足以下两条性质：
(1)对于每一个$x \in X$，至少存在一个包含x的基元素B;
(2)若x属于两个基元素B_1和B_2的交，则存在一个包含x的基元素B_3，使得$B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$;
如果$\mathscr{B}$满足以上两个条件，定义由$\mathscr{B}$生成的拓扑$\mathscr{T}$如下：$\mathscr{T}$是X的一个子集族，其元素U满足，对于每一个$x \in U$，总存在一个基元素$B \in \mathscr{B}$，使得$x \in B$且$B \subseteq U$.

以上定义的拓扑基与度量空间中的开球是一样的.

命题2.3.1. 设非空集合X,$\mathscr{T}$是X的一个子集族，且满足以下三条性质：
(1)$\varnothing, X \in \mathscr{T}$;
(2)$\mathscr{T}$中元素的任意并还在$\mathscr{T}$中;
(3)$\mathscr{T}$中元素的有限交还在$\mathscr{T}$中;
那么$\mathscr{T}$是由X中某拓扑基生成的拓扑.

Proof. 实际上$\mathscr{T}$本身就是一个拓扑基.下面只需证明$\mathscr{T}$是由$\mathscr{T}$ 生成的拓扑.对于每一个$\mathscr{T}$中的元素O，取基元素O则满足条件. □

由此，我们给出拓扑的定义：

定义2.3.2. 设非空集合X,$\mathscr{T}$是X的一个子集族，且满足以下三条性质：
(1)$\varnothing, X \in \mathscr{T}$;
(2)$\mathscr{T}$中元素的任意并还在$\mathscr{T}$中;
(3)$\mathscr{T}$中元素的有限交还在$\mathscr{T}$中;
那么称$\mathscr{T}$是X上的拓扑，其元素叫做开集. 并且称$(X, \mathscr{T})$是一个拓扑空间,在不引起歧义的情况下通常简记为X.

例2.3.1. 设非空集合X,集族$\{\varnothing, X\}$是X上的一个拓扑，称为X上的平凡拓扑 ;幂集$\mathscr{P}(X)$也是X上的一个拓扑，称为X 上的离散拓扑.如果度量空间(X, d)上的某个拓扑基是开球族，那么称其生成的拓扑为由度量d诱导出来的度量拓扑.

定义2.3.3. A是拓扑空间X的一个子集，如果$X - A$是开集，则称A是一个闭集.

定理2.3.1. 设X是一个拓扑空间，则下述结论成立：
(1)$\varnothing, X$都是闭的；
(2)闭集的任意交都是闭的；
(3)闭集的有限并都是闭的.

这个定理说明了用闭区间的特征来定义拓扑的可行性.

定义2.3.4. X是一个拓扑空间，其中元素x_0的邻域U是指存在一个包含x_0的开集O,满足$O \subseteq U$.这些U构成的集合叫做集合X关于x_0的邻域基，记作$\mathfrak{B}(x_0)$.

在定义拓扑空间中的序列收敛之前，我们先引入一些必要的概念.[1]

定义2.3.5. X是一个拓扑空间.A是全空间X的一个子集.
(1)如果点x的任意邻域内都有A中的点，那么称x是集合A的一个极限点；
(2)如果点x的任意邻域内都有A中非x的点，那么称x是集合A的一个聚点；
(3)如果点$x \in A$的一个邻域内没有A中非x的点，那么称x是集合A的一个孤立点.

命题2.3.2. X是一个拓扑空间.A是全空间X的一个子集.x是集合A的极限点，当且仅当x 是A的聚点或孤立点.

定义2.3.6. 在拓扑空间X中，X的子集合A的极限点构成的集合记作A'，称为A的导集.集合$\bar{A} = A \cup A'$称为集合A的闭包.

命题2.3.3. A是拓扑空间X的一个子集.$x \in \bar{A}$当且仅当每一个包含x的开集U与A相交.

下面定义拓扑空间中的序列收敛.

定义2.3.7. 序列$\{x_n\}$是拓扑空间X中的点列.我们说$\{x_n\}$收敛到点x是指，对任意点x的邻域O，存在正整数N，当$n > N$时，有$x_n \in O$.并记$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.如果这样的点存在，称序列$\{x_n\}$是收敛的.

在一般的拓扑空间中，一个序列的极限不一定是唯一的.例如：对于配备平凡拓扑的非空集合X，由于对于任意点x，只有一个邻域X，并且每一个点都在它的邻域X 之中，所以说在X中任意点列$\{x_n\}$都收敛到X中的每一点上.这种情况下，研究序列的收敛就没有多大意义.所以，我们必须对拓扑空间做一些限制，保证每个收敛序列都收敛到一个点上.

不妨从度量空间或者实数集上的极限唯一性的证明过程来抽象出所需的性质，容易发现，证明的核心在于构造出不同两点对应的不相交的邻域.也就是说，我们想要的是不同点a,b有着不相交的邻域.实际上，如果两个点不存在不相交的邻域，那么我们可以认为这两点“粘在了一起”，即这两点在拓扑上是完全等价的，那么序列收敛到其中一点就必定要收敛到另外一点.由此，我们给出*Hausdorff*空间的定义：

定义2.3.8. 设X是拓扑空间.如果对于X中的点a,b，存在a的邻域A和b的邻域B，使得$A \cap B = \varnothing$，则称X是Hausdorff的或称X 是一个Hausdorff空间.

一般来说，我们研究的拓扑空间都是Hausdorff空间.

定理2.3.2. *Hausdorff空间中的任何有限集都是闭的.*

Proof. 我们只要证明任何一个单点集是闭的即可.取单点集$\{x_0\}$，对任意全空间中非x_0 的点x，都存在x的一个邻域O_x，及x_0的一个邻域O_{x_0-x}，使得$O_x \cap O_{x_0-x} = \varnothing$，这样取$\bigcup_{x\in X-\{x_0\}} \cap x_0 = \varnothing$,且$\bigcup_{x\in X-x_0}$是开的，故$\{x_0\}$是一个闭集. □

这个定理说明“有限点集是闭集”这一条件是比Hausdorff条件更弱的条件，这一条件又叫做T_1公理.

在一般的拓扑空间中，我们没有度量的概念，也就自然地失去了“*Cauchy*收敛准则”这一性质.如果要进一步在拓扑空间中讨论这一性质，就必须考虑一个拓扑空间的基能否是一个度量所给出的开球族，换句话说，要考虑这个空间是否为可度量化空间.判断一个空间是否为可度量化空间并不是十分容易，所以我们不想涉及更多相关的内容[1].

然后，我们再来看相对应的“序列引理”.

[1]关于可度量化空间可见参考文献[1]的第4 章而完备度量空间可见第7章.

定理2.3.3. （序列引理）设X是一个可度量化空间，A是X的一个子集.如果$x \in \bar{A}$，那么存在一个A中的序列$\{x_n\}$，使得$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Proof. 假设度量d是诱导出该可度量化空间的一个度量.对任意的正整数n，存在一个x的邻域$O_{\frac{1}{n}}(x) = \{a|d(x,a) < \frac{1}{n}\}$，取这个邻域与集合$A$ 的交点中的一个（依赖于选择公理），记作x_n，这个交点的存在性是由$x \in \bar{A}$保证的.这样，我们就找到一个数列$\{x_n\}$，使得$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. □

我们发现在证明过程中并没有依赖于X是度量空间这么强的条件，而是依赖于以下性质：对于给定的点x，存在可数邻域族$\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得对任意x 的邻域U，存在一个$n_0 \in \mathbb{N}$，有$O_{n_0} \subseteq O$. 这个性质称为第一可数性公理.一般的拓扑空间不一定满足第一可数性公理的，相应的，它就不满足序列引理.以下给出例子[2]：

例2.3.2. 设不可数集合X,它上面的余有限拓扑是指$\mathscr{T} = \{T|X - T$是有限的$\}$，容易验证这是X上的一个拓扑.该拓扑空间不满足第一可数性公理.

Proof. 假设点x有一个可数开集族$\{X - C_n\}$,其中C_n是一个有限集.那么将这些C_n并起来，记作$\bigcup C_n$，于是这个集合是可数的.但是X是一个不可数集，于是存在点$a \neq x$，$a \notin \bigcup C_n$，于是x的邻域$X - \{a\}$不能包含任意一个$\{X - C_n\}$. □

这个例子说明了一个很严重的问题：一个集合的聚点不一定存在相应的收敛到它的序列！这是我们不希望看到的结果.当然，一个可行的方法就是去掉这种性质不好的拓扑空间，但是还有另一条更好的路——改变序列极限定义域的限制.实际上，自然数集在极限过程中只起着“导向”的作用.也就是说，“自然数集”并没有发挥“良序”这个本质属性，甚至没有用到“全序”这个性质.我们不妨考虑一个带有“方向”的集合作为定义域来考察序列极限.

2.4 网的极限——Moore–Smith收敛理论

定义2.4.1. 集合X上的二元关系“$\geq$”满足以下条件：
对任意的$x, y, z \in X$,
(1)自反性：$x \geq x$;
(2)传递性：$(x \geq y \wedge y \geq z) \Rightarrow (x \geq z)$,
则称配备了关系“$\geq$”的集合X称为预序集.如果满足：
(3)反对称性：$(x \geq y \wedge y \geq x) \Rightarrow (x = y)$,
则称配备了关系“$\geq$”的集合X称为偏序集.

在这里，我们用预序集来代替偏序集进行网的极限的研究[2].当然无论是“偏序集”还是“预序集”上都没办法讨论“方向”这个概念.因此我们必须在“预序集”上加上“方向”这个性质，使之成为“有向集”.

定义2.4.2. 如果$(D,\geq)$是一个预序集，且满足性质：

$$\forall x,y\in D,\exists z\in D(z\geq x\wedge z\geq y)$$

则称$(D,\geq)$是一个有向集.

这个定义是说，对于任意给定的两个元素，都有一个元素指明他们共同的方向.以下的例子是我们通常给出有向集的方法：

例2.4.1. $(X,\mathscr{T})$是一个拓扑空间，$x\in X$，$D=\{U\in\mathfrak{B}(x)\}$，在集合$D$ 上定义一种关系：

$$\geq:(U\geq V)\Leftrightarrow(U\subseteq V)$$

容易验证，这是一个有向集.我们把这种利用集合间的包含关系来定义的前序称为通常预序.

以下是这一节最重要的概念：

定义2.4.3. X是一个非空集合.我们说$(x_\alpha)(\alpha\in D)$是X上的一个网，满足：
(1)D是一个有向集；
(2)$(x_\alpha)(\alpha\in D)$:$D\to X,\alpha\mapsto x_\alpha$.

例2.4.2. 取X是一个拓扑空间，$(D,\geq)=(\mathbb{N},\geq)$，则网$(x_\alpha)(\alpha\in\mathbb{N})$是一个序列.

定义2.4.4. 设$(x_\alpha)(\alpha\in D)$是一个拓扑空间$(X,\mathscr{T})$上的网，且$A\subseteq X$.我们说(x_α)终在A内，若存在$\delta\in D$，对D中元素α，若满足$\alpha\geq\delta$，则$x_\alpha\in A$.我们说(x_α)常在A内，若对任意的$\delta\in D$，存在一个$\alpha\in D$，使得$x_\alpha\in A$.

这两个定义很容易理解，如果我们将D取作自然数集$\mathbb{N}$，这个序列终在A内是指在某一项之后，每一项都在A中；所谓的常在A 内是指有无穷多项在A.

引理2.4.1. X是一个集合.$A\subseteq X$.$(x_\alpha)(\alpha\in D)$是X上的网，如果$(x_\alpha)(\alpha\in D)$不是终在A内$\Leftrightarrow$ $(x_\alpha)(\alpha\in D)$ 常在$X-A$ 内.

这一事实至为明显，略去不证.然后我们引入网的极限的概念.

[2]在参考文献[1]中第三章的附加习题中在偏序集上讨论网.

定义2.4.5. X是一个拓扑空间，$(x_\alpha)(\alpha\in D)$是X上的一个网，$x\in X$.网(x_α)收敛到x是指对任意的x的邻域U，(x_α)终在U内.我们称x是(x_α)的一个极限点.(x_α)的全体极限点构成的集合叫做(x_α)的极限集，记作$\lim(x_\alpha)$.

我们之前说过，在非Hausdorff空间中，一个序列的极限点不一定是唯一的，这是因为有些点在拓扑结构上是不可区分的.同样，非Hausdorff空间上网的极限点也不一定是唯一的.那么在Hausdorff空间中，网的极限点是否唯一呢？

定理2.4.1. *拓扑空间X是Hausdorff的，当且仅当X上的每个网至多有一个极限点.*

Proof. “$\Rightarrow$”因为X是Hausdorff的.所以对任意的$x\neq y$，存在$U\in\mathfrak{B}(x)$，$V\in\mathfrak{B}(y)$，使得$U\cap V=\varnothing$. 如果X上有一个网$(x_\alpha)(\alpha\in D)$有多于一个极限点，不妨设有两个，分别为x_0和y_0. 那么对任意的$U\in\mathfrak{B}(x_0)$和$V\in\mathfrak{B}(y_0)$.(x_α)终在U 和V，而$U\cap V=\varnothing$.换句话说

$$\exists\delta_U\in D,\forall\alpha\geq\delta_U,x_\alpha\in U$$

$$\exists\delta_V\in D,\forall\alpha\geq\delta_V,x_\alpha\in V$$

于是，由有向集的定义，存在一个$\delta\in D$，使得$\delta\geq\delta_U$且$\delta\geq\delta_V$.当$\alpha\geq\delta$时，$x_\alpha\in U$并且$x_\alpha\in V$，这就引出了矛盾.
“$\Leftarrow$”设拓扑空间X是非Hausdorff的，那么存在不同的两个点x,y使得对任意的$U\in\mathfrak{B}(x)$,和任意的$V\in\mathfrak{B}(y)$，有$U\cap V\neq\varnothing$.那么我们取集合$\mathscr{D}=\{D|D=U\cap V,U\in\mathfrak{B}(x),V\in\mathfrak{B}(y)\}$.利用包含关系定义预序，得预序集$(\mathscr{D},\geq)$.由于每一个$\mathscr{D}$的元素都是非空的，于是利用选择公理，可以从每一个$\mathscr{D}$的元素中选取一个点，记为$x_D$. 那么就有一个映射$(x_D)(D\in\mathscr{D})$:$\mathscr{D}\to X$,$D\mapsto x_D$. 可以验证这样的事情：这个网收敛到$x$和$y$上，这与前提矛盾!

□

下面打算引入一个有趣的定理.这个定理在序列极限下是不能成立的，而在网定义下的极限却能够成立.它是这样描述的：每一个网都有一个超子网.为了证明这个有趣的定理，需要再引入并一些概念.我们不妨类比“子列”来定义“子网”.

定义2.4.6. 设预序集$(D,\geq)$和$(D',\geq')$，映射$h:D'\to D$称为共尾的，如果满足以下条件：

对任意的$\delta\in D$，存在$\delta'\in D'$，当$\alpha'\geq'\delta'$时，$h(\alpha')\geq\delta$.

定义2.4.7. 设网$f=(x_\alpha)(\alpha\in D)$和网$g=(x_{\alpha'})(\alpha'\in D')$，称$g$是$f$的一个子网，如果存在一个共尾映射$h:D'\to D$，使得$g=f\circ h$.

下面是该定义的一个简单推论.

命题2.4.1. 设X是一个拓扑空间,$A\subseteq X$.网$(x_\alpha)(\alpha\in D)$常在A内，则存在网$(x_\alpha)(\alpha\in D)$的一个子网$(x_{\alpha'})(\alpha'\in D')$终在$A$ 内.

定义2.4.8. X是一个集合，(x_α)是X上的一个网，我们说网(x_α)是超的，如果对于任意的$A\in X$，要么(x_α)终在A内，要么(x_α)终在$X-A$内.

定理2.4.2. *X是一个集合，则X中的每一个网都有一个超子网.*

Proof. X上任意一个网$(x_\alpha)(\alpha\in D)$,D是对应的有向集.将网简记为(x_α). 我们考虑X的子集族:
$Y=\{\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}(X)|\forall A\in\mathscr{A},(x_\alpha)$常在$A$内,并且$\forall A,B\in\mathscr{A},A\cap B\in\mathscr{A}\}$.
Y是非空的，于是在关系$\subseteq$下，集合$(Y,\subseteq)$是一个偏序集.于是可以找到一个链，$(C,\subseteq)$是对应的全序子集.于是对于$\mathscr{A}\in C$,总是有$A\subseteq B$,其中$B=\bigcup_{\mathscr{B}\in C}\mathscr{B}\in Y$,那么集合$B$是集合$C$的一个上界.由于$C$的任意性，及Zorn引理，$Y$有极大元，不妨记作$\mathscr{A}_0$.
记$D_0=\{(A,\alpha)\in\mathscr{A}_0\times D|x_\alpha\in A\}$.在集合$D_0$中定义关系$\geq_0$: $(A,\alpha)\geq_0(B,\beta)$,那么有$A\subseteq B$,$\alpha\geq\beta$. 先证明$(D_0,\geq_0)$是一个有向集：
$\forall(A,\alpha),(B,\beta)\in D_0$,因为$(D,\geq)$是有向集，所以存在$\gamma\in D$,有$\gamma\geq\alpha$且$\gamma\geq\beta$.再取集合$A_0=A\cap B$, 根据$\mathscr{A}_0$ 的定义，有$A_0\in\mathscr{A}_0$,则$A_0\subseteq A$且$A_0\subseteq B$.这样，$(A_0,\gamma)\geq_0(A,\alpha)$且$(A_0,\gamma)\geq_0(A,\beta)$,故$(D_0,\geq_0)$是一个有向集.
然后我们证明$y=(x_{\alpha_0})(\alpha_0\in D_0)$是$(x_\alpha)$的一个子网.
我们先证明映射$h:D_0\to D,(A,\alpha)\mapsto\alpha$是一个共尾映射.对给定的$\delta\in D$,及任意的$A\in\mathscr{A}_0$,由于$(x_\alpha)$常在$A$中，那么存在$\alpha\in D$且$\alpha\geq\delta$，有$x_\alpha\in A$，也就是说$(A,x_\alpha)\in D_0$.于是对任意$D$中的元素$\delta$,存在$(A_\delta,\delta)\in D_0$,使得对满足$(A_\alpha,\alpha)\geq_0(A_\delta,\delta)$的$D_0$中的元素$(A_\alpha,\alpha)$,有$h(A_\alpha,\alpha)=\alpha\geq\delta$.因此$y=(x_\alpha)\circ h:D_0\to X,(A,\alpha)\mapsto x_{\alpha_A}=y_{(A,\alpha)}$ 是(x_α)的一个子网.
下面证明对上文所说的y满足的两条引理：
(1)$\forall S\subseteq X$,如果y是常在S中的,那么(x_α)常在$S\cap A$ 中.
根据$\mathscr{A}_0$的定义，对于任意的$A\in\mathscr{A}_0$，(x_α)常在A 中，即对任意的$\delta\in D$，总存在$\alpha\in D$且$\alpha\geq\delta$,使得$x_\alpha\in A$.因此有$(A,\alpha)\in D_0$.那么存在一个D_0中的元素(A_1,α_1),使得$(A_1,\alpha_1)\geq(A,\alpha)$，且$y_{(A_1,\alpha_1)}\in S$. 这意味着$\alpha_1\in A_1$.于是$\alpha_1\in A$.
(2)$\forall S\subseteq X$，如果y常在S中，那么$S\in\mathscr{A}_0$.
由于(x_α)常在A内，及(x_α)常在$S\cap A$内，故$\mathscr{A}_0\cup\{S\cap A|A\in\mathscr{A}_0\}\cup\{S\}\in$

Y.由$\mathscr{A}_0$的极大性可以直接得出$S \in \mathscr{A}_0$.
$\forall S \in X$，如果y不是终在S且不是终在$X-S$内，根据引理2.4.1，它会常在$X-S$之中.根据引理(2),有$X-S \in \mathscr{A}_0$.再用一次引理2.4.1, y 常在S 中，所以$S \in \mathscr{A}_0$，这样$\varnothing \in \mathscr{A}_0$.但这是不可能的.因为根据定义，$(x_\alpha)$不可能常在$\varnothing$中.所以$y$不能既不终在$S$又不终在$X-S$ 内.又因为y终在S和终在$X-S$内不可能同时成立，所以y要么终在S内，要么终在$X-S$内.所以y是(x_α)的一个超子网.再由(x_α)的任意性，我们就证明了这个定理! □

证明这个定理的诀窍就在于要构造出相应的有向集和共尾映射，其他地方大多是机械性地验证罢了.最后我们给出一个网的极限的实例：

例2.4.3. 取拓扑空间X为通常的实数集$\mathbb{R}$,考虑有向集$D=\{T|T=(P,\{c_k\})\}$,其中$P=\bigcup[x_k,x_{k+1}]$是$[a,b]$的一个分法，函数$\lambda: D \to \mathbb{R}^*, T \mapsto min\{|x_{k+1}-x_k|\}$,对$T,T' \in D$,定义$T \geq T'$,若$\lambda(T) \geq \lambda(T')$.容易验证这是一个有向集.在有界函数上，定义网$S_f: D \to \mathbb{R}, S_f(T)=\sum f(c_k)\Delta x_k$.如果这个网收敛，那么这个极限就是函数$f$在$[a,b]$这个区间上的定积分的值.

实际上，在历史中，Moore–Smith收敛理论就是从定积分的定义出发而得到的。我想，以这个例子作为本部分的最后内容是很有意义的.

3 超滤与实数的构造

3.1 滤子、滤子基与滤子极限

在第一部分中，我们将数列极限拓展到网的极限.但是我们已然感觉到用“网”的语言来描述极限是不大方便的.于是在1937 年Cartan 引入了滤子的概念，并在之后所作的《General Topology》中建立了滤子意义下的极限理论.

定义3.1.1. 令X和Y是度量空间,假设$E \subseteq C$,f将E映入Y内,且p是E的一个极限点,凡是我们写当$x \to p$ 时,$f(x) \to q$是说存在一个点$q \in Y$,具有以下性质：对于每个$\varepsilon > 0$,存在$\delta > 0$，当$x \in \check{B}_\delta(p) \cap E$时,$d_Y(f(x),q) < \varepsilon$.

命题3.1.1. $\lim\limits_{x\to p} f(x)=q \Leftrightarrow$对任意$q$的邻域$Q$,总能找到$p$的一个去心邻域$P$,使得$f(P) \subseteq Q$.

从邻域族可以抽象出“滤子”的概念：

定义3.1.2. 设X是一个非空集合,$\mathfrak{F}$是X的一个非空子集族，满足：
(1)$\varnothing \notin \mathfrak{F}$;
(2)$U,V \in \mathfrak{F} \Rightarrow U \cap V \in \mathfrak{F}$;

(3)$U \in \mathfrak{F}, U \subseteq V \Rightarrow V \in \mathfrak{F}$,
则称$\mathfrak{F}$是X的一个滤子.

与拓扑基类似，我们可以定义滤子基：

定义3.1.3. X是一个集合，$\mathscr{B}$是它的一个非空集族，若满足以下条件：
(1)$\forall B \in \mathscr{B}, B \neq \varnothing$;
(2)若$B_1, B_2 \in \mathscr{B}$,则存在$B_3 \in \mathscr{B}$,使得$B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$,
那么称集族$\mathscr{B}$是一个滤子基.

命题3.1.2. X是一个集合，$\mathscr{B}$是一个滤子基.那么集族$\mathfrak{F} = \{F|\exists B \in \mathscr{B}, B \subseteq F \subseteq X\}$ 是X的一个滤子.

Proof. (1)$\mathfrak{F}$中没有空集这个元素,第一条性质满足;
(2)取$U, V \in \mathfrak{F}$,那么存在$B_1, B_2 \in \mathscr{B}$使得$B_1 \subseteq U \subseteq X$且$B_2 \subseteq V \subseteq X$.于是$B_1 \cap B_2 \subseteq U \cap V \subseteq X$,因为$\exists B_3 \in \mathscr{B}$且$\subseteq B_1 \cap B_2$,故$B_3 \subseteq U \cap V \subseteq X$.所以$U \cap V \in \mathfrak{F}$.
(3)设$U \in \mathfrak{F}$,那么$\exists B \in \mathscr{B}, B \subseteq U \subseteq X$.于是对于满足$U \subseteq V$的所有$V$,有$B \subseteq U \subseteq V \subseteq X$,所以$V \in \mathfrak{F}$. □

定义3.1.4. X是一个集合，$\mathscr{B}$是一个滤子基.那么集族$\mathfrak{F} = \{F|\exists B \in \mathscr{B}, B \subseteq F \subseteq X\}$ 称作由$\mathscr{B}$生成的滤子.

例3.1.1. (1)设X是一个非空集合,A是X的一个非空子集,则包含A的集合构成的集族是X上的一个滤子,称为由A生成的主滤子,记作$[A]$.
(2)设X是一个无限集,其中由余集为有限集的集合构成的集族是X上的一个滤子,称为余有限滤子,或*Frechét*滤子.

定义3.1.5. X是一个拓扑空间,X上的滤子$\mathfrak{F}$收敛于$x \in X$,当且仅当x的任何邻域都在$\mathfrak{F}$之中.

引理3.1.1. X是非空集合,A是X的一个不含空集的非空子集族.如果A满足有限交封闭,那么A可以扩张成一个滤子.

Proof. 容易证明A是一个滤子基,于是其生成的滤子就是对应的扩张后的滤子. □

定理3.1.1. 任何滤子$\mathfrak{F}$至多收敛到一个点当且仅当X是*Hausdorff*空间.

Proof. “$\Rightarrow$”:假设X是非Hausdorff空间,那么存在两个不同的点x, y,对任意的$U \in \mathfrak{B}(x)$和任意的$V \in \mathfrak{B}(y)$,有$U \cap V \neq \varnothing$.设集族$\mathscr{B} = \{B|B = U \cap V, U \in \mathfrak{B}(x), V \in \mathfrak{B}(y)\}$.于是$\mathscr{B}$是一个滤子基.其生成的滤子记作$\mathfrak{F}$.对

于任意的x的邻域U, 存在着一个$B = U \cap V$,其中V是y 的一个邻域，使得$B \subseteq U \subseteq X$.故$U \in \mathfrak{F}$.同理,$y$的任意邻域$V$也在$\mathfrak{F}$之中.那么$\mathfrak{F}$ 同时收敛到x和y.与条件矛盾.

“$\Leftarrow$”:假设滤子$\mathfrak{F}$收敛到两点x, y.也就是说x, y的任意邻域都在$\mathfrak{F}$之中.由于X是Hausdorff空间.所以存在x的邻域U和y的邻域V,使得$U \cap V = \varnothing$.又$U \in \mathfrak{F}, V \in \mathfrak{F}$,所以$U \cap V \in \mathfrak{F}$.这与滤子的定义矛盾. □

定理3.1.2. *对于子集$A \subseteq X$,$x \in \bar{A} \Leftrightarrow$存在包含$A$的滤子$\mathfrak{F}$收敛到$x$.*

Proof. 由于$x \in \bar{A}$,所以对于所有包含x的开集与A都相交.并且包含x 的开集族具有有限交性质.将这些开集与A相交得到集族U_x可以验证,U_x 不含空集，并且也具有有限交性质.因此U_x可作为滤子基,其生成的滤子$\mathfrak{F}$包含集合A,并且收敛到x. □

在刚开始,我们说过:我们的目的是推广函数极限.但目前为止,我们并没有做过对应的工作.下面我们将展示如何推广函数极限.

定义3.1.6. 设f是集合X到拓扑空间Y的映射,$\mathscr{B}$是X上的滤子基,b是Y的点.我们说f沿$\mathscr{B}$收敛到b,是指对于b的任何邻域V,存在$B \in \mathscr{B}$,使得$f(B) \subseteq V$.这时记作$\lim\limits_{\mathscr{B}} f = b$.

显然,我们之前讨论过的情况实际上是上述定义的收敛的特殊情形,即取恒等映射$f : X \to X, x \mapsto x$.

命题3.1.3. 如果Y是Hausdorff空间,那么f沿$\mathscr{B}$至多收敛到一个极限.

Proof. 假设b,b'是f沿$\mathscr{B}$的两个不相同的极限.对于b,b'存在对应的不相交的邻域V,V'.存在B,$B' \in \mathscr{B}$,使得

$$f(B) \subseteq V \text{且} f(B') \subseteq V'$$

于是有$B \cap B' = \varnothing$.这与滤子的定义相悖. □

3.2 滤子的序与超滤

下面来研究滤子的序关系：

定义3.2.1. *X是一个非空集合,X上的滤子$\mathfrak{F}$和$\mathfrak{F}'$,如果$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}'$,则称$\mathfrak{F}$粗(小)于$\mathfrak{F}'$,或称$\mathfrak{F}'$细(大)于$\mathfrak{F}$.如果$\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}'$, 则称$\mathfrak{F}$严格粗(小)于$\mathfrak{F}'$,或称$\mathfrak{F}'$严格细(大)于$\mathfrak{F}$.*

上述滤子之间的序关系具有反身、传递、反对称性，因此是一个偏序关系.下面给出一个便于判断滤子粗细的方法：

引理3.2.1. *X是一个非空集合,X上的滤子$\mathfrak{F}'$细于$\mathfrak{F}$当且仅当每一个$\mathfrak{F}$的基$\mathscr{B}$中的元素都包含一个$\mathfrak{F}'$ 的基$\mathscr{B}'$ 中的元素.*

Proof. "$\Rightarrow$":任取$B \in \mathscr{B}$,那么$B \in \mathfrak{F}$,由于$\mathfrak{F} \in \mathfrak{F}$,存在$B' \in \mathscr{B}'$,$B' \subseteq B \subseteq X$;
"$\Leftarrow$":任取$F \in \mathfrak{F}$,存在$B \in \mathscr{B}$,使得$B \subseteq F \subseteq X$.由假设,存在$B' \in \mathscr{B}'$,使得$B' \subseteq B$.于是$B' \subseteq F \subseteq X$.故$F \in \mathfrak{F}'$,即$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}'$. □

引理3.2.2. X是一个非空集合,X上的滤子$\mathfrak{F}'$=$\mathfrak{F}$,当且仅当每一个$\mathfrak{F}$的基$\mathscr{B}$中的元素都包含一个$\mathfrak{F}'$ 的基$\mathscr{B}'$ 中的元素且每一个$\mathscr{B}_{¸}$中的元素都包含一个基$\mathscr{B}$中的元素.

Proof. 可以由引理3.2.1直接得到. □

定义3.2.2. 对于非空集合X,集合$\mathscr{F}$是X上所有滤子构成的集合连带其序关系构成一偏序集,这个偏序集的极大滤子称为*超滤*.

下面是超滤的一个具体的性质:

定理3.2.1. *设非空集合X,$\mathfrak{F}$是一个超滤,当且仅当对任意$A \subseteq X$,有$A \in \mathfrak{F} \Leftrightarrow A^c \notin \mathfrak{F}$.*

Proof. "$\Rightarrow$":假设对于$A \subseteq X$,$A \notin \mathfrak{F}$且$A^c \notin \mathfrak{F}$.那么对于任意的$B \in \mathfrak{F}$必有$A \cap B \neq \varnothing$,否则$B \subseteq A^c$于是$A^c \in \mathfrak{F}$.这样取$\mathscr{C} = \{C | C = A \cap B, B \in \mathfrak{F}$.设$\mathscr{B}$是$\mathfrak{F}$的一个基,设$\mathscr{B}' = \mathscr{B} \cup \mathscr{C}$.可以验证$\mathscr{B}'$也是一个基.那么,由引理2.2.1可得,由$\mathscr{C}'$ 生成的滤子$\mathfrak{F}'$ 细于$\mathfrak{F}$,再由引理2.2.2,$\mathfrak{F}'$严格细于$\mathfrak{F}$.
"$\Leftarrow$":假设有更大的滤子$\mathfrak{F}'$,那么存在集合$A \subseteq X$,使得$A \in \mathfrak{F}'$但$A \notin \mathfrak{F}$.于是$A^c \in \mathfrak{F}$, 所以$A^c \in \mathfrak{F}'$.这样,有$A \cap A^c = \varnothing \in \mathfrak{F}'$,与滤子的定义矛盾. □

推论3.2.1. X是一个非空集合,$\mathfrak{F}$是X的一个子集族,如果满足下列三条性质:
(1)$\varnothing \notin \mathfrak{F}$;
(2)$U, V \in \mathfrak{F} \Rightarrow U \cap V \in \mathfrak{F}$;
(3)对$A \subseteq X$,$A \in \mathfrak{F}$或$A^c \in \mathfrak{F}$,
则$\mathfrak{F}$是一个超滤.

例3.2.1. 设X是一个非空集合,取单点集$\{x\}$.集族$\mathfrak{F} = \{F \subseteq X | x \in F\}$ 是一个超滤,称为X上的*主超滤*.

在定义3.2.2中,似乎蕴含着这样一种可能:每一个滤子都能通过某种途径扩张成一个超滤.下面定理对这一直觉做出了验证.

定理3.2.2. *(滤子扩张原理)非空集合X上的任一滤子都可以扩张成一个超滤.*

Proof. 设$\mathfrak{F}$是集合X上的某个滤子.设集合$P=\{\mathfrak{F}\subseteq G|G$ 是X 上的滤子$\}$.其序关系如定义2.2.1中所言.
现在证明P有极大元.任取P中的链C,证明C在P中有上界.
当$C=\varnothing$时,P中的任何元素都是C的上界.
当$C\neq\varnothing$时,$\bigcup C$就是C的上界.下面证明$\bigcup C$是一个滤子.
(1)$\varnothing\notin\bigcup C$且$X\in\bigcup C$;
(2)设$U,V\in\bigcup C$,则有$G_1,G_2\in C$,使得$U\in G_1$,$V\in G_2$.不妨设$G_1\subseteq G_2$,这时有$U\cap V\in G_2$,故$U\cap V\in\bigcup C$;
(3)设$U\in\bigcup C$,且$U\subseteq V$.那么存在$G\in C$,使得$U\in G$,于是$V\in G$.所以$V\in\bigcup C$,
所以$\bigcup C$是一个滤子.即$\bigcup C\in P$,所以$\bigcup C$是C的一个上界.
再由C的任意性及$Zorn$引理可知,偏序集P存在极大元,这个极大元就是所要求的超滤. □

推论3.2.2. 任意一个滤子都在一个超滤之中.

以下是超滤极大性的一个直观体验：

命题3.2.1. $\mathfrak{F}$是非空集合X上的超滤当且仅当每一个与$\mathfrak{F}$元素相交的集合都是$\mathfrak{F}$中的元素.

下面是超滤和紧致性之间的关系.当然，我们必须先给出紧致性的定义：

定义3.2.3. 设$\mathscr{A}$是空间X的一个子集族，如果$\mathscr{A}$的成员之并等于X,则称$\mathscr{A}$*覆盖*X,或称$\mathscr{A}$是X的一个覆盖. 若$\mathscr{A}$是一个开集族，且满足$\mathscr{A}$的成员之并等于X,则称$\mathscr{A}$是X的一个*开覆盖*.若X的任意一个开覆盖都存在有限子覆盖，则称X是*紧致的*.

定理3.2.3. *X是一个拓扑空间.X上任何滤子$\mathfrak{F}$都存在一个比$\mathfrak{F}$更细的滤子$\mathfrak{G}$使得$\mathfrak{G}$收敛，当且仅当X 是紧致的.*

Proof. “$\Rightarrow$”:假设开覆盖$\{U_i\}_{i\in I}$没有有限子覆盖，那么$\{U_i^c\}_{i\in I}$有限交非空.从而可以生成一个滤子$\mathfrak{F}$.假设一个比$\mathfrak{F}$更细的滤子$\mathfrak{G}$收敛到x,于是U_i与U_i^c同时落入$\mathfrak{G}$中，此即产生矛盾.
“$\Leftarrow$”:假设某个$\mathfrak{F}$不满足条件.那么对于任意的x,存在着$U_x\in\mathfrak{F}_x$和$V_x\in\mathfrak{F}$使得$U_x\cap V_x=\varnothing$. 但是$\{U_x\}$可以构成X的一个开覆盖.由X的紧致性可知,存在有限子覆盖$\{U_{x_i}\}$.于是相应的V_{x_i}为空,与滤子定义矛盾. □

推论3.2.3. X是一个紧致拓扑空间.那么它上面的所有超滤都收敛.

定义3.2.4. 空间X的一个紧致化Y是一个包含X的紧致的Hausdorff空间,以X为它的子空间，并且$\bar{X}=Y$.

根据定理3.1.2,对于X的紧致化Y中的任意一点y，存在X中的一个超滤收敛到y.这意味着我们可以用X中超滤构成的集合来表示其紧致化构成的集合（应该说是与相应紧致化同胚的集合）.当然，这种紧致化在某种意义上体现了一种极大性[3]. 下一节，我们将考虑自然数集用超滤构造的极大紧致化.这种紧致化的方法与大基数、动力系统[4] 等学科密切相关.下面，我们开始研究自然数集上的超滤空间.

3.3 自然数上的超滤空间

我们在这里所提到的自然数集$\mathbb{N}$是集合论语言下的自然数集，其具体构造可见[8].

定义3.3.1. 自然数集$\mathbb{N}$上全体超滤构成的集合称为自然数上的超滤空间.记作$\beta\mathbb{N}$.

自然地，$\beta\mathbb{N}$中由单元素集n诱导出的主超滤$[a]$应该有着和原来对等的地位.设$A\subseteq\mathbb{N}$.将所有含有A的超滤构成的集合记作$A'=\{X\in\beta\mathbb{N}|A\in X\}$.那么有以下事实：

命题3.3.1. (1)$\varnothing'=\varnothing$,$\mathbb{N}'=\beta\mathbb{N}$;
(2)$\{n\}'=\{[n]\}$;
(3)$(A\cap B)'=A'\cap B'$,$(A\cup B)'=A'\cup B'$.

于是，我们可以取$\mathscr{B}=\{A'|A\subseteq\mathbb{N}\}$.容易验证,$\mathscr{B}$是一个拓扑基.于是，我们给出了空间$\beta\mathbb{N}$上的一个拓扑$\mathscr{T}$.在这种拓扑定义下,空间$\beta\mathbb{N}$是紧的,证明如下:

Proof. 设$\mathscr{A}=\{A_i'|i\in I\}$是$\beta\mathbb{N}$的一个开覆盖,即$\bigcup_{i\in I}A_i'=\beta\mathbb{N}$.记$B=\{\mathbb{N}-A_i'|i\in I\}$.那么$B$不具有有限交性质(即有限交非空).否则$B$可以扩张成一个超滤$\mathfrak{F}$,这样的话超滤$\mathfrak{F}$必在某个$A_i'$之中,于是$A_i\in\mathfrak{F}$, 但是$\mathbb{N}-A_i\in\mathfrak{F}$，与超滤定义矛盾.
这样的话就存在着$i_1,i_2,...,i_n\in I$使得$(\mathbb{N}-A_{i_1})\cap(\mathbb{N}-A_{i_2})\cap...\cap(\mathbb{N}-A_{i_n})=\varnothing$,故$A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup...\cup A_{i_n}=\mathbb{N}$. 于是$A_{i_1}'\cup A_{i_2}'\cup...\cup A_{i_n}'=\mathbb{N}'=\beta\mathbb{N}$.即说明$\beta\mathbb{N}$是紧的. □

由全体主超滤构成的集合记作$\mathfrak{N}$.我们要证明$\mathfrak{N}$在$\beta\mathbb{N}$中稠.

[3]关于极大性可见[9]
[4]可见陶哲轩的博客:https://terrytao.wordpress.com/2008/01/13/254a-lecture-3-minimal-dynamical-systems-recurrence-and-the-stone-cech-compactification/

命题3.3.2. $\bar{\mathfrak{N}} = \beta\mathbb{N}$.

Proof. 首先,必有$\bar{\mathfrak{N}} \subseteq \beta\mathbb{N}$.这是因为$\beta\mathbb{N}$是全集.因此只需要证明$\beta\mathbb{N} \subseteq \bar{\mathfrak{N}}$.任取$X \in \beta\mathbb{N}$,只需证包含$X$的开集和$\mathfrak{N}$都相交即可.包含了$X$的开集$O$必定包含着某个基元素$B'$.其中$B' = \{Y \in \beta\mathbb{N} | B \in Y\}$.取$b \in B$,那么主超滤$[b] \in B'$,这样$[b] \in O$且$[b] \in \mathfrak{N}$.这就说明包含$X$的开集和$\mathfrak{N}$都相交.于是$\beta\mathbb{N} \subseteq \bar{\mathfrak{N}}$.所以$\bar{\mathfrak{N}} = \beta\mathbb{N}$. □

这样的话,我们就在某种意义下得到了自然数集的一个紧致化(容易验证$\beta\mathbb{N}$是一个Hausdorff空间).这是因为主超滤与原来自然数的元素的地位是对等的.可以发现,$\beta\mathbb{N}$ 中除了主超滤,应该还有其他类型的超滤,我们称一个不是主超滤的超滤为*非主超滤*.但是我们好像很难去构造出来非主超滤,在这种情况下就可能要使用选择公理(或者比它更弱的滤子扩张原理).

命题3.3.3. 对于一般的无限集X.$Frechét$滤子扩张成的超滤不是主超滤.

Proof. 首先，每一个主超滤都含有单元素集$\{n\}$.但是$Frechét$滤子中不含单元素集$\{n\}$.
假设由某个$Frechét$滤子扩张成的超滤为$\mathfrak{F}$.假如它有某个单元素集$\{n\}$.那么集合$X - \{n\}$是$Frechét$滤子中的元素.于是$X - \{n\} \in \mathfrak{F}$,这就引出了矛盾.于是$Frechét$滤子扩张成的超滤不是主超滤. □

上述命题说明了非主超滤的存在性.自然数集$\mathbb{N}$也是一个无限集,那么它也存在着非主超滤.也就是说$\beta\mathbb{N}$存在着自然数集以外的元素(记这些元素构成的集合为$\mathbb{N}^*$),这意味着我们的确往自然数集中增添了一些元素.这一事实由$\beta\mathbb{N}$与实数的幂集等势[5]表现出来. 然而,这些元素都是不能够构造出来的,因为它们必须依赖于选择公理.因此,要让它们能够参与运算必须用其他的手段.一种想法就是将趋向于无穷大的数列做一个划分.这就是下一节的基本想法.

3.4 超滤变换与算术超滤

我们知道,函数空间中$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$中的每个元素都是一个数列.现取$\mathfrak{U}$是$\mathbb{N}$上的非主超滤.如果数列f与g满足:

$$\{n \in \mathbb{N} | f(n) = g(n)\} \in \mathfrak{U},$$

则说f与g关于$\mathfrak{U}$几乎相等,记作$f =_{\mathfrak{U}} g$.容易证明“$=_{\mathfrak{U}}$”是$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$上的一个等价关系.

由等价关系可以得到$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$上的一个商集,记作

$$^*\mathbb{N} = \{[f]|f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\},$$

其元素$[f]$由f关于$\mathfrak{U}$几乎相等的函数g所组成:

$$[f] = \{g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}|f =_{\mathfrak{U}} g\}.$$

现在,我们想知道什么情况下有$f =_{\mathfrak{U}} g$. 考虑将$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$扩张成$f^* : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$.

定义3.4.1. 对于任一$f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$,可以定义一个超滤变换$f^* : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$如下:

$$f^*(\mathfrak{F}) = \{A \subseteq \mathbb{N}|f^{-1}(A) \in \mathfrak{F}\}, \mathfrak{F} \in \beta\mathbb{N}.$$

例3.4.1. 对于恒等映射$id : x \mapsto x$,$id^*(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$.

注意到:

$$A \in f^*(\mathfrak{F}) \Leftrightarrow f^{-1}(A) \in \mathfrak{F}.$$

且当$B \in \mathfrak{F}$时,总有$f(B) \in f^*(\mathfrak{F})$.故有以下命题:

命题3.4.1. $(1) f^*(\mathfrak{F}) = \mathfrak{G} \Leftrightarrow \forall A \in \mathfrak{G}(f^{-1}(A) \in \mathfrak{F})$;
$(2) f^*(\mathfrak{F}) = \mathfrak{G} \Leftrightarrow \forall A \in \mathfrak{F}(f(A) \in \mathfrak{G})$.

Proof. (1) “$\Rightarrow$”:由f^*的定义即知.
“$\Leftarrow$”:由$f^*(\mathfrak{F})$定义可知,$\mathfrak{G} \subseteq f^*(\mathfrak{F})$.由超滤极大性可知$\mathfrak{G} = f^*(\mathfrak{F})$.
(2) “$\Rightarrow$”:$\forall F \in \mathfrak{F}$有$f^{-1}(f(F)) \in \mathfrak{F}$,故$f(F) \in f^*(\mathfrak{F}) = \mathfrak{G}$.
“$\Leftarrow$”:$\forall G \in f^*(\mathfrak{F})$,有$f^{-1}(G) \in \mathfrak{F}$.所以$f(f^{-1}(G)) \in \mathfrak{G}$,即$G \in \mathfrak{G}$.于是有$f^*(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{G}$,再由超滤极大性则命题得证. □

命题3.4.2. 设$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$是满射,那么$f^*(\mathfrak{F}) = \{f(A)|A \in \mathfrak{F}\}$.

Proof. 显然有$\{f(A)|A \in \mathfrak{F}\} \subseteq f^*(\mathfrak{F})$.再设$A \in f^*(\mathfrak{F})$.$f$为满射,所以对任意的$A \subseteq \mathbb{N}$,都有$f(f^{-1}(A)) = A$.令$B = f^{-1}(A)$,则$B \in \mathfrak{F}$,$A = f(B)$. 这说明有$f^*(\mathfrak{F}) \subseteq \{f(A)|A \in \mathfrak{F}\}$. □

命题3.4.3. $\forall n \in \mathbb{N}$有$f^*([n]) = [f(\{n\})]$.

Proof. $f^*([n]) = \{A \subseteq \mathbb{N}|f^{-1}(A) \in [n]\} = \{A \subseteq \mathbb{N}|n \in f^{-1}(A)\} = \{A \subseteq \mathbb{N}|f(n) \in A\} = [f(\{n\})]$. □

上述命题说明,每一个超滤变换都把一个主超滤映成一个主超滤.这件事在直觉上是显然的:即每一个从自然数集到它本身的一个映射都将一个自然数映成一个自然数.另外,直觉也告诉我们,每一个常值函数对应的超滤变换都将一个超滤映作一个主超滤. 即下述命题:

命题3.4.4. 常值函数$f=n\in\mathbb{N}$对应的f^*把任意的$\mathfrak{F}\in\beta\mathbb{N}$变成一个主超滤.

Proof. 因为

$$f^{-1}(A)=\begin{cases}\mathbb{N}, & n\in A\\ \varnothing, & n\notin A\end{cases}$$

故$f^*(\mathfrak{F})=\{A\subseteq\mathbb{N}|f^{-1}(A)\in\mathfrak{F}\}=\{A\subseteq\mathbb{N}|n\in A\}=[n]$. □

上述命题可以进一步推广为:

命题3.4.5. $f^*(\mathfrak{F})=[n]\Leftrightarrow\exists A\in\mathfrak{F}(f(A)=\{n\})$.

Proof. “$\Rightarrow$”:当$f^*(\mathfrak{F})=[n]$时,有$\{n\}\in f^*(\mathfrak{F})$.此时令$A=f^{-1}(\{n\})$.由定义$A\in\mathfrak{F}$,且$f(A)=[n]$.
“$\Leftarrow$”:设$f(A)=\{n\}$,$A\in\mathfrak{F}$.所以$\{n\}\in f^*(\mathfrak{F})$,于是$f^*(\mathfrak{F})=[n]$. □

命题3.4.6. $(g\circ f)^*=g^*\circ f^*$.

Proof. $g^*(f^*(\mathfrak{F}))=\{A\subseteq\mathbb{N}|g^{-1}(A)\in f^*(\mathfrak{F})\}=\{A\subseteq\mathbb{N}|f^{-1}(g^{-1}(A))\in\mathfrak{F}\}=\{A\subseteq\mathbb{N}|((g\circ f)^{-1}(A)\in\mathfrak{F}\}=(g\circ f)^*(\mathfrak{F})$ □

做完这些铺垫性的工作之后,我们来考虑这样的定理:

定理3.4.1. $\forall f,g\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}(f=_{\mathfrak{U}}g\Rightarrow f^*(\mathfrak{U})=g^*(\mathfrak{U}))$.

Proof. 设$f=_{\mathfrak{U}}g$,但$f^*(\mathfrak{U})=g^*(\mathfrak{U})$.取$A\in f^*(\mathfrak{U})-g^*(\mathfrak{U})$(或$A\in g^*(\mathfrak{U})-f^*(\mathfrak{U})$). 则有$f^{-1}(A)\in\mathfrak{U},g^{-1}(A)\notin\mathfrak{U}$,$g^{-1}(\mathbb{N}-A)\in\mathfrak{U}$.

进而有$\{n\in\mathbb{N}|f(n)=g(n)\}\cap f^{-1}(A)\cap g^{-1}(\mathbb{N}-A)\in\mathfrak{U}$.但是左式左边为空,这便引出矛盾. □

在上述命题中蕴含式的相反方向有可能成立,例如当$\mathfrak{U}=[n]$时:

命题3.4.7. 对于主超滤$[n]$,总有$f^*([n])=g^*([n])\Rightarrow f=_{[n]}g$.

但是,在一般情形下则不一定成立.现在,我们只考虑使得命题3.4.5蕴含式反方向成立的那些超滤,将这些超滤称为*算术超滤*.将不是主超滤的算术超滤称为*非主算术超滤*.

3.5 扩张后的自然数集

设$\mathfrak{F}\in\beta\mathbb{N}$是某个非主算术超滤.现在考虑集合$\mathbb{N}_{\mathfrak{F}}=\{f^*(\mathfrak{F})|f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$. 记常值函数$f=n$扩张后的函数为$n^*$,那么元素$n^*(\mathfrak{F})=[n]$. 现在赋予该集合代数结构:在集合$\mathbb{N}_{\mathfrak{F}}$中自然地定义“$+$”和“$\cdot$”如下:

$$f^*(\mathfrak{F})+g^*(\mathfrak{F})=(f+g)^*(\mathfrak{F});$$

$$f^*(\mathfrak{F}) \cdot g^*(\mathfrak{F}) = (f \cdot g)^*(\mathfrak{F}).$$

容易验证,这里的加法和乘法分别构成加法幺半群和乘法幺半群,并且加法与乘法满足分配律.

接下来赋予该集合序结构:设$f,g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$,定义$f^*(\mathfrak{F}) < g^*(\mathfrak{F}) \Leftrightarrow \exists x(f^*(\mathfrak{F}) + x = g^*(\mathfrak{F}) \wedge x \neq 0)$ 以及$f <_{\mathfrak{F}} g \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} | f(n) < g(n)\} \in \mathfrak{F}$.

命题3.5.1. $f^*(\mathfrak{F}) < g^*(\mathfrak{F}) \Leftrightarrow f <_{\mathfrak{F}} g$.

这样定义的序满足反自反性和传递性,因此是一种严格偏序.并且有三歧性,因此是$(N_{\mathfrak{F}})$是一个全序集.另外,与自然数相似,还具有以下性质:

$$x < y \Rightarrow x + z < y + z;$$

$$x < y \wedge z > 0 \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z.$$

在这种定义下,容易验证,存在从$\mathbb{N} \to \mathfrak{N}$的一个同构映射$f : n \mapsto [n]$.这就完成了$\mathbb{N}$到$\mathbb{N}_{\mathfrak{F}}$的一个嵌入. 取恒等映射$id$,其扩张$id^*$对应的超滤$\mathfrak{F}$大于任何一个主超滤,也就是说$\mathfrak{F} \in \mathbb{N}_{\mathfrak{F}} - \mathfrak{N}$.并且$\mathfrak{F}$大于任意一个主超滤.记$\mathbb{N}_\infty = \mathbb{N}_{\mathfrak{F}} - \mathfrak{N}$.

命题3.5.2. 设$[k] \in \mathfrak{N}$,$\tau \in \mathbb{N}_\infty$,则$\tau > [k]$.

Proof. 设$\tau = h^*(\mathfrak{F}) \in \mathbb{N}_{\mathfrak{F}}$. 如果$\tau \not> [k]$,则$h \not>_{\mathfrak{F}} k$,故$\{n | h(n) > k\} \notin \mathfrak{F}$.于是,由超滤的性质可知$\{n | h(n) \leq k\} \in \mathfrak{F}$. 于是由

$$\{n | h(n) \leq k\} = \{n | h(n) = 0\} \cup \{n | h(n) = 1\} \cup ... \cup \{n | h(n) = k\}$$

可知存在一个$i \in \{1, 2, ..., k\}$使得$\{n | h(n) = i\} \in \mathfrak{F}$.于是$h(n) =_{\mathfrak{F}} i(n)$,即$\tau = [i]$.与$\tau \in \mathbb{N}_\infty$矛盾. □

现在,我们大概可以直观想象集合$\mathbb{N}_{\mathfrak{F}}$的样子,即

$$\{1, 2, ..., n, ..., \tau, \tau + 1, ...\}$$

其中τ是无穷大元素.

3.6 实数的构造

现在,我们得到了一个扩张后的自然数集$\mathbb{N}_{\mathfrak{F}}$.利用原来从自然数构造整数的方法,我们可以从$\mathbb{N}_{\mathfrak{F}}$构造出扩张后的整数集(环)$^*\mathbb{Z}$. 类似的,我们可以得到扩张后的分数集(域)$^*\mathbb{Q}$(这个域拥有着所有有理数域中的语言,包括绝对值).在这里,我们不愿意称$^*\mathbb{Q}$为“扩张后的有理数集”,是因为它之中已经囊括了实数集!这一事实在直观上是很显然的,因为我们已经在最初加入了无穷大元素, 那么对应的,这些元素的逆元就是无穷小元素,然后我们可以用有限

元素的等价类来代表实数,那么每个等价类的代表元——实数就应该在${}^*\mathbb{Q}$之中了.

分数域${}^*\mathbb{Q}$是非Archimedes序域.因为其中含有无穷大元素.现在,取其中的有限元素构成的环:

$$\mathbb{Q}_< = \left\{ \frac{a}{b} \in {}^*\mathbb{Q} | \exists k \in \mathbb{N}(|\frac{a}{b}| \leq k) \right\}.$$

$\mathbb{Q}_<$中所有无穷小元素形成的子环用符号$\mathbb{I}$表示:

$$\mathbf{I} = \left\{ \frac{a}{b} \in {}^*\mathbb{Q}_< | \forall k \in \mathbb{N} - \{0\}(|\frac{a}{b}| < \frac{1}{k}) \right\}$$

由于自然数集本身对加法封闭,因此$\mathbf{I}$是$\mathbb{Q}_<$的一个理想.并且有:

$$x \in \mathbf{I} \wedge t \in \mathbb{Q}_< \to xt \in \mathbf{I}$$

命题3.6.1. $\mathbf{I}$是$\mathbb{Q}_<$的极大理想.

Proof. 设理想J包含着理想$\mathbf{I}$,且$J \neq \mathbb{N}$.取$x \in J - \mathbf{I}$,则存在$k \in \mathbb{N}$,使得$|x| \geq 1/k$,故$|1/x| \leq k$,这说明$1/x \in \mathbb{Q}_<$.于是对于$y \in \mathbb{Q}_<$,由于J有吸收律,因此对$x \in J$有$tx \in J$,又$1/x \in J$,故$t = (tx) \cdot (1/x) \in J$.所以$J = \mathbb{Q}_<$. □

对于极大理想$\mathbf{I}$对应的商环$\mathbb{Q}_</\mathbf{I}$是一个域.实际上,这个域就是所要求的实数集$\mathbb{R} = \{[x] | x \in \mathbb{Q}_<\}$.其中$[x] = \{y \in \mathbb{Q}_< | (y - x) \in \mathbf{I}\}$.

其对应的运算与序为:

$$[x] + [y] = [x + y];$$

$$[x] \cdot [y] = [x \cdot y];$$

$$[x] < [y] \Leftrightarrow (x < y) \wedge ((x - y) \notin \mathbf{I}).$$

容易验证,这些定义都是合理的.即与代表元的选取无关.

Proof. (1)假设x,x'是等价的.那么$x - x' \in \mathbf{I}$,所以$((x + y) - (x' + y)) \in \mathbf{I}$.于是$[x] + [y] = [x + y] = [x' + y] = [x'] + [y]$;
(2),(3)与(1)类似. □

注意到$x < y$并不意味着$[x] < [y]$.实际上有:

命题3.6.2. $x < y \Rightarrow [x] \leq [y]$.

这是因为x和y可能会差一个无穷小元素.

为了描述的方便,我们先将$\mathbb{Q}$嵌入$\mathbb{R}$.实际上映射$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, r \mapsto [r]$即为所求的同构映射. 下面我们要说明$\mathbb{R}$是实数域.我们只需证明它是完备的,因为所有的完备Archimedes序域都同构于实数域.

定理3.6.1. 单调有上界数列必有最小上界.

要证明这个定理需要先考虑自然数列本身的性质:

引理3.6.1. $f,g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, k \in \mathbb{N}, \tau \in \mathbb{N}_{\infty}, \forall x \in \mathbb{N}(x > k \Rightarrow f(x) < g(x)) \Rightarrow \forall \tau \in \mathbb{N}_{\infty}(f^*(\tau) < g^*(\tau))$.

Proof. 假设$f^*(\tau) \not< g^*(\tau)$.于是有$\{n|f(n) < g(n)\} \notin \tau$.这样有$\{n|f(n) = g(n)\} \cup \{n|f(n) > g(n)\} \in \tau$.由于$\tau$是非主超滤,因此$\tau$中只有无限集.由此可以引出矛盾. □

推论3.6.1. 对自然数列m_i和n_i,满足$\forall i > k(m_i < n_i)$,则$\forall \tau \in \mathbb{N}_{\infty}(m_\tau^* < n_\tau^*)$.

推论3.6.2. $\forall i,j(i < j \Rightarrow f(i)g(j) < f(j)g(i)) \Rightarrow f^*([i])g^*(\tau) < g^*([i])f^*(\tau))$

下面我们来证明定理3.6.1,方便起见,我们将不写“$*$”:

Proof. 不妨设数列$a_0 < a_1 < ... < a_i < ...$且只考虑正的部分.
在每个a_i, a_{i+1}中都存在着一个有理数r_i.于是原来的数列$\{a_n\}$与数列$\{r_n\}$具有相同的上界.现在只需考虑$\{r_n\}$.
设$r_i = m_i/n_i$,则$m_i < kn_i$.利用引理3.6.1得$\forall \tau \in \mathbb{N}_{\infty}, m_\tau < kn_\tau$.取$\tau = \mathfrak{F}$,则$m_{\mathfrak{F}}/n_{\mathfrak{F}} < [k]$.即$m_{\mathfrak{F}}/n_{\mathfrak{F}} \in \mathbb{Q}_<$.取$a = [m_{\mathfrak{F}}/n_{\mathfrak{F}}]$.下证$a$就是目标上界.
令$f(i) = m_i, g(i) = n_i$.则$\forall i,j(i < j \Rightarrow f(i)g(j) < f(j)g(i))$,于是$f(i)g(\mathfrak{F}) < g(i)f(\mathfrak{F})$.所以有

$$\frac{f(i)}{g(i)} < \frac{f(\mathfrak{F})}{g(\mathfrak{F})}$$

即

$$r_i = \frac{m_i}{n_i} < \frac{m_{\mathfrak{F}}}{n_{\mathfrak{F}}}$$

由此得$\forall i \in \mathbb{N}(r_i \leq [m_{\mathfrak{F}}/n_{\mathfrak{F}}] = a)$. 假设有更小的$b$也是$\{a_n\}$的上界:$\forall(m_i/n_i \leq b < a)$.在$b$和$a$之间任取分数$m/n$.于是$\forall i(m_i n < n_i m)$.故$m_{\mathfrak{F}} n < n_{\mathfrak{F}} m$.由此即得矛盾. □

这样,就说明了$\mathbb{R}$的完备性. 在这个证明过程中,很容易能体会到这种实数构造方式的优越性——我们可以运用对数列极限的朴素直觉来完成证明.而不用依赖于繁杂的$\varepsilon - \delta$语言.

4 总结与体会

在上面几个章节中,我们完全可以做这样的事情:拆去所有的脚手架,得到一个相对完整的体系.这时我们可以从拓扑出发,一步步地达到分析学的起点.在几十年前,Bourbaki学派就在他们的著作中完成了这件事情,然而当时

所使用的是比较晦涩难懂的拓扑群语言.这篇报告的第二章大部分内容是对汪芳庭一些工作的形象描述.实际上,他在[10]中已经对他近40年的“算术超滤”方面的工作做出了总结. 但是这本书本身并不易懂.所以在报告中我只能结合自己的理解对他的专著中的一些内容做出一些相对直观上的解释.

现在,我们回顾分析学历史.我们都知道,Leibniz和Newton分别发现了微积分,而处理微积分就必须要直面“无穷”的论题.有趣的是,两位伟大的数学家对“无穷”的看法截然相反.

Newton由于他的物理背景,更倾向于用过程来描述极限,也就是说他并不承认无穷作为数的存在.这一个想法被后世采用,产生了$\varepsilon-\delta$语言.实际上这种观点古希腊时期对“无穷”论题的回避不谋而合.与欧几里得第五公设最初的形式类似,传统的分析学采用的是“潜无限”的观点,换句话说就是“要多大就有多大,要多小就有多小”.

而Leibniz则不同,他并不排斥无穷小和无穷大的存在,并想将其合理地引入实数之中.当然,在当时的条件下,这是不可能完成的.于是在之后几百年的时间中,这种想法都没有被采纳. 直到Cantor发现了集合论之后,这种情况才有所改变.人们被迫地开始思考“实无限”的存在,在各种条件都充足的情形下,才产生了非标准分析(或者称为现代分析学).

在本文中,可以看到无穷作为数是可以被接受的,这些数可以通过相对具体的构造(之所以说相对,是因为它依赖于选择公理)来获得它们.而且,我们也可以通过一些手段,将这个有无穷元素的集合缩小成为传统分析学的实数.这在某种意义上展现了非标准分析的优越性.这一优越性还体现在证明的简化上,例如在[1]中花了一整节证明的Tychonoff定理(除掉引理之外有将近二十行)而在[12]中只花了六行.另外,[12]仅仅用了三百余页的内容就写完了传统分析学的主要内容.这些都是非标准分析的优越之处.然而非标准分析的优点也就仅仅如此,现在所有在非标准分析中能够证明的命题, 在传统分析学中都是可证的.而相比之下,非标准分析比传统分析学抽象得太多,这似乎有一种得不偿失的感觉.尽管如此,我还是想多了解一些非标准分析中的思想.

最终,我想引用一句汪芳庭在[10]最后引用的一句话来结束这一部分:

在这个海洋中沉没,令我无限愉悦.

5 建议与意见

(1)适当增加一些习题课,如在周末的时候开设;

(2)考试中可以加入一些基本定理的证明.

参考文献

[1] *James R.Munkres*, 拓扑学（中译本）[M], 机械工业出版社, 2004

[2] 汪林 杨富春,拓扑空间中的反例[M],科学出版社,2000

[3] 王琳, 预序集上的网和滤子的收敛结构研究[D], 河北, 河北科技大学, 2014

[4] *N.Bourbaki*,General Topology[M],Addison-Wesley Publishing Company,1966

[5] 汪芳庭,数学基础（修订本）[M],高等教育出版社,2018

[6] 熊锐,数学入门,本科数学讲义[M],2019

[7] *Water Rudin*,数学分析原理[M],机械工业出版社,2004

[8] 董延闿,基础集合论[M],北京师范大学出版社,1988

[9] 高国士,拓扑空间论[M],科学出版社,2000

[10] 汪芳庭,算术超滤自然数的紧化延伸[M],中国科学技术大学出版社,2016

[11] *G.*肖盖,拓扑学教程[M],高等教育出版社,2009

[12] *A.*鲁滨逊,非标准分析[M],科学出版社,1980