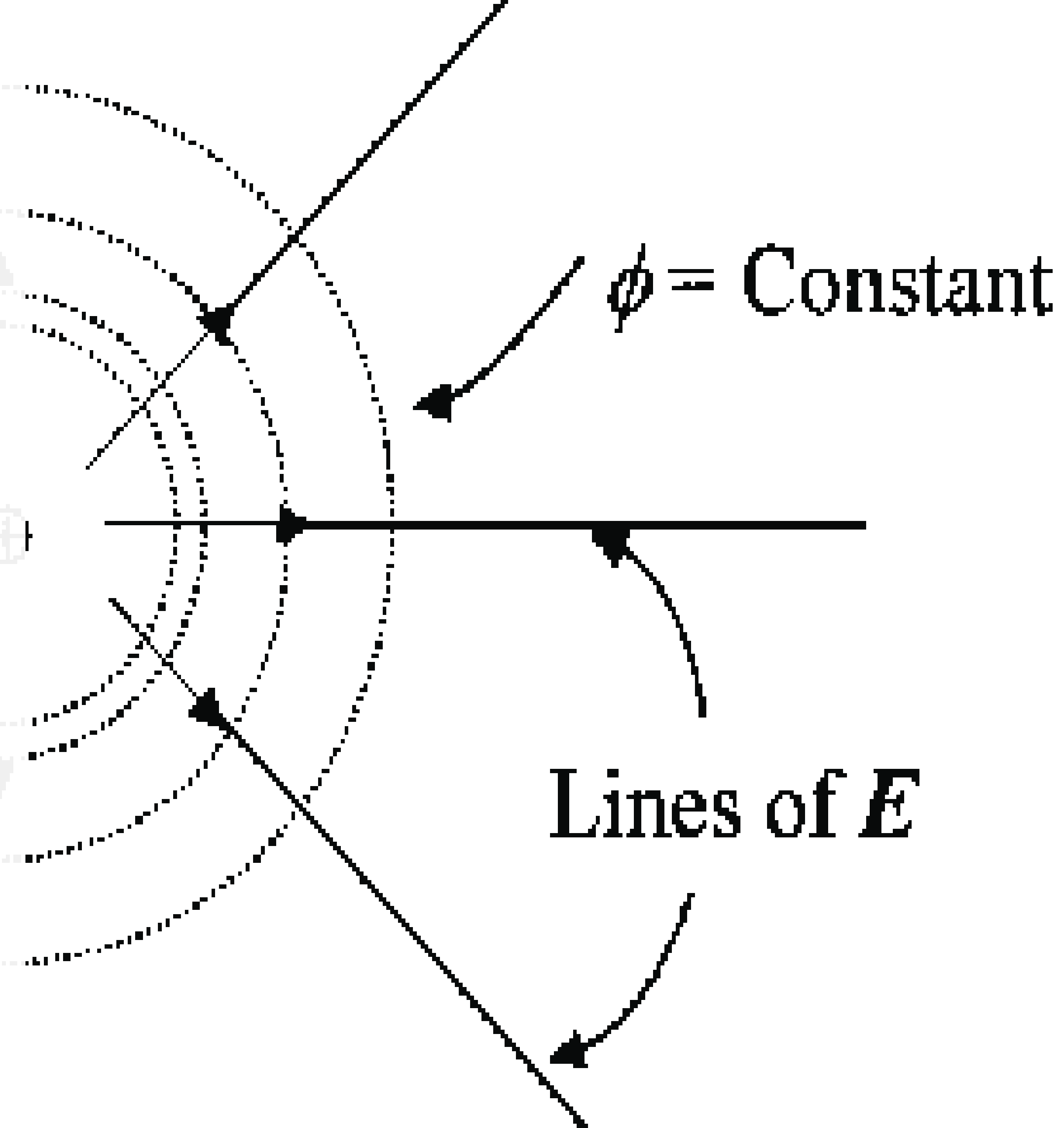
Ley de Gauss, la energía potencial y cinética de una carga, y el potencial eléctrico

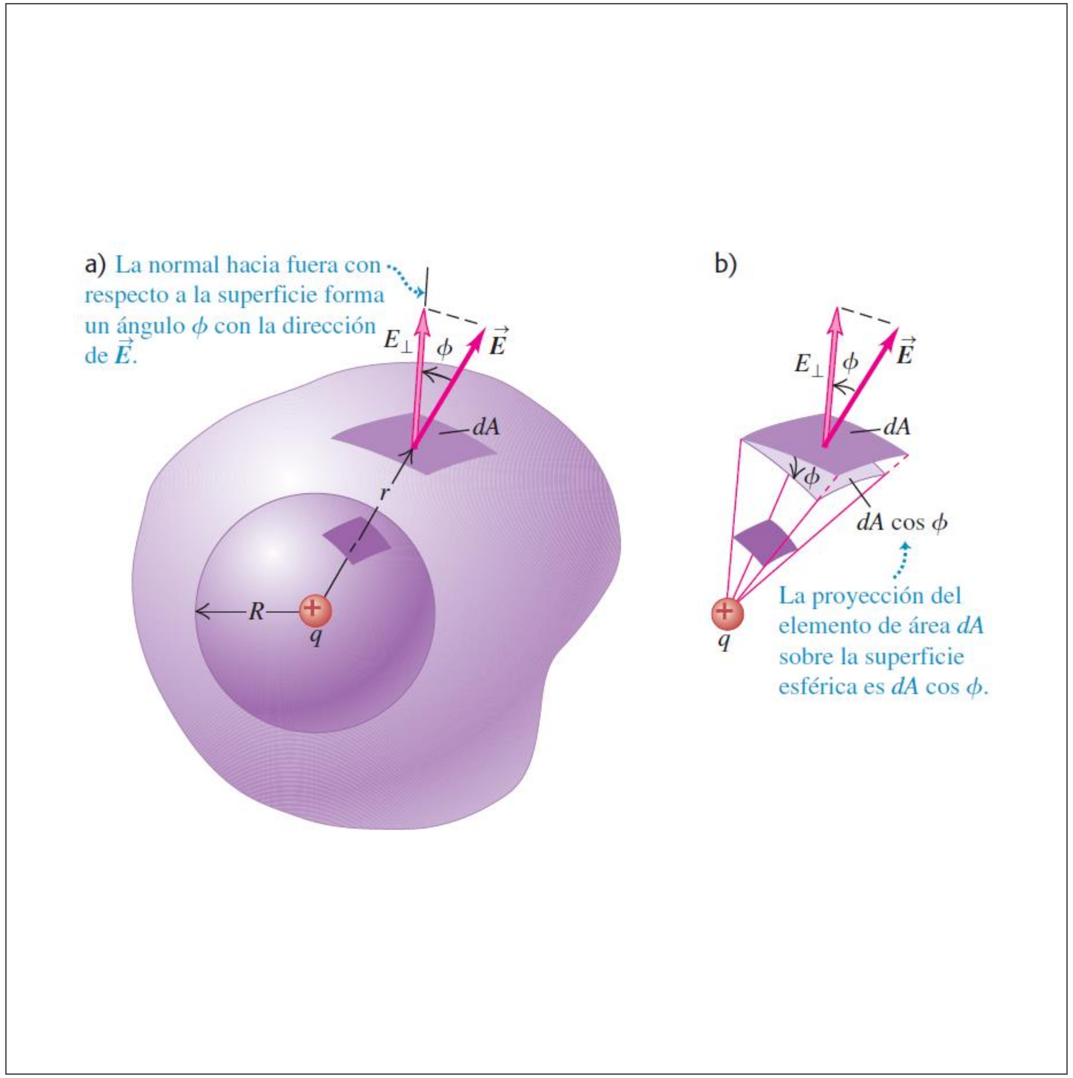
- *Matías López*
- *FIS 2120-02 / FÍSICA GRAL. ELECTROMAGNETISMO*
- *PUCV*

- *31 de Agosto del 2022*



Motivación

- Ver que propone la Ley de Gauss y como aplicarla. Posteriormente, definir la energía potencial eléctrica, su relación con la energía cinética de una carga, y la posterior definición de potencial eléctrico. A partir de aquí, relacionar esta cantidad con el campo eléctrico.



Carga cerrada por una superficie no esférica

- Consideremos a la carga anterior, **encerrada ahora además por una superficie irregular**, como se ve en la imagen.
- Sobre esta nueva superficie, **se escoge una sección de Área**, que estará por encima de nuestra primera esfera imaginaria.
- Sin embargo, el campo eléctrico que cuenta, pasa por las partes **donde el área es completamente perpendicular al campo.**
- Los únicos lugares donde ocurre aquello, es donde la superficie nueva se proyecte completamente sobre la esfera. Como el campo atraviesa simplemente otra esfera de mayor área, **decimos que en ambos casos el flujo es el mismo.**

Ley de Gauss

- Para **cualquier** distribución de carga o cuerpo cargado **y encerrado completamente** por una superficie:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

- Y se dice que el flujo que atraviesa esta superficie es igual a la carga encerrada, dividida entre *la permeabilidad eléctrica en el vacío.*
- Existen dos casos de interés: ***si el campo es uniforme, o si este no depende de las coordenadas del diferencial.*** En ambos casos, el campo eléctrico puede sacarse de la integral, y la integral de superficie se convierte en el área total que se estudia (por lo tanto, volvemos al producto punto habitual).
- Por otro lado, asumiremos siempre que la carga eléctrica dentro de la superficie se distribuye **homogéneamente.**

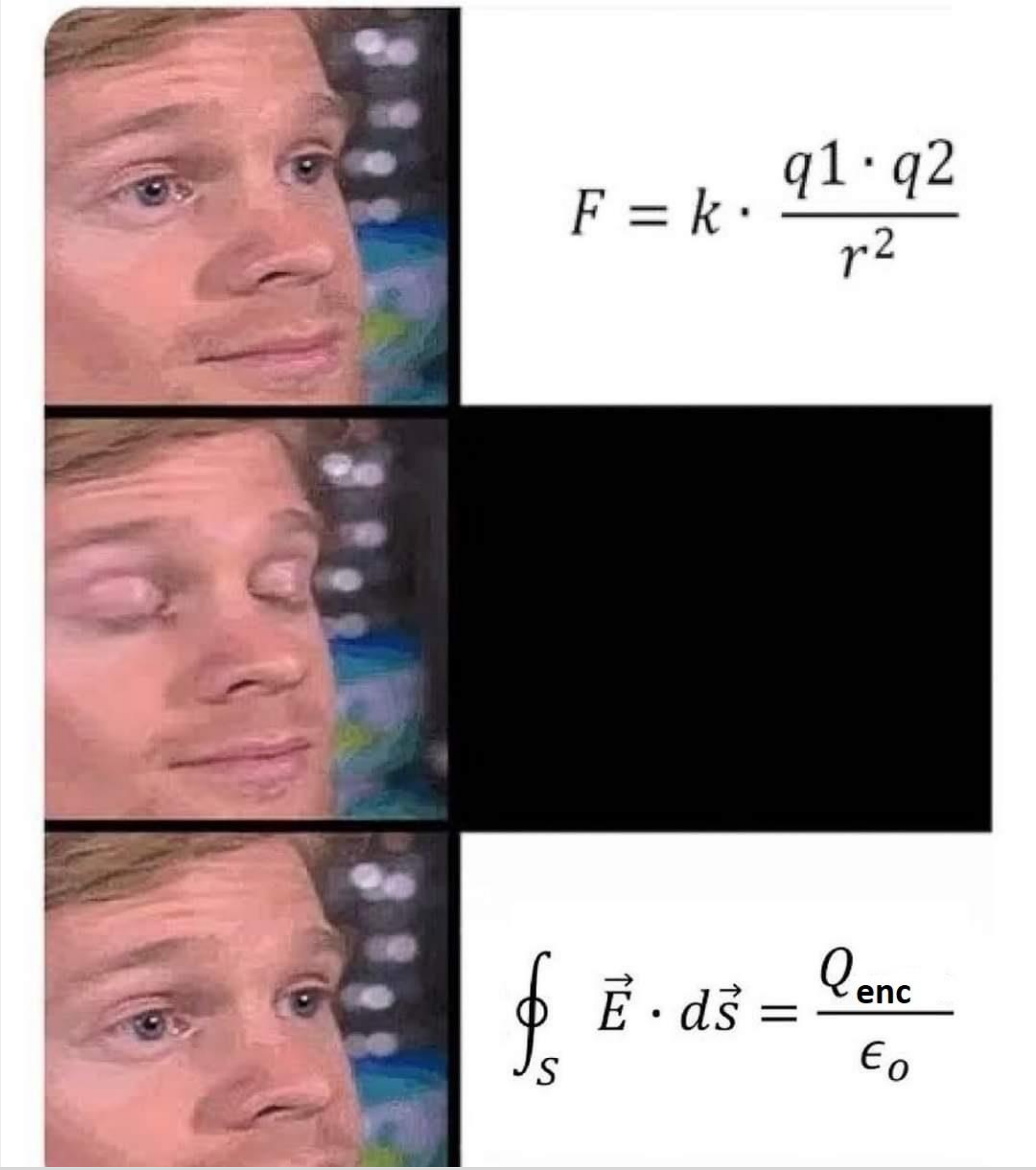
Aplicación

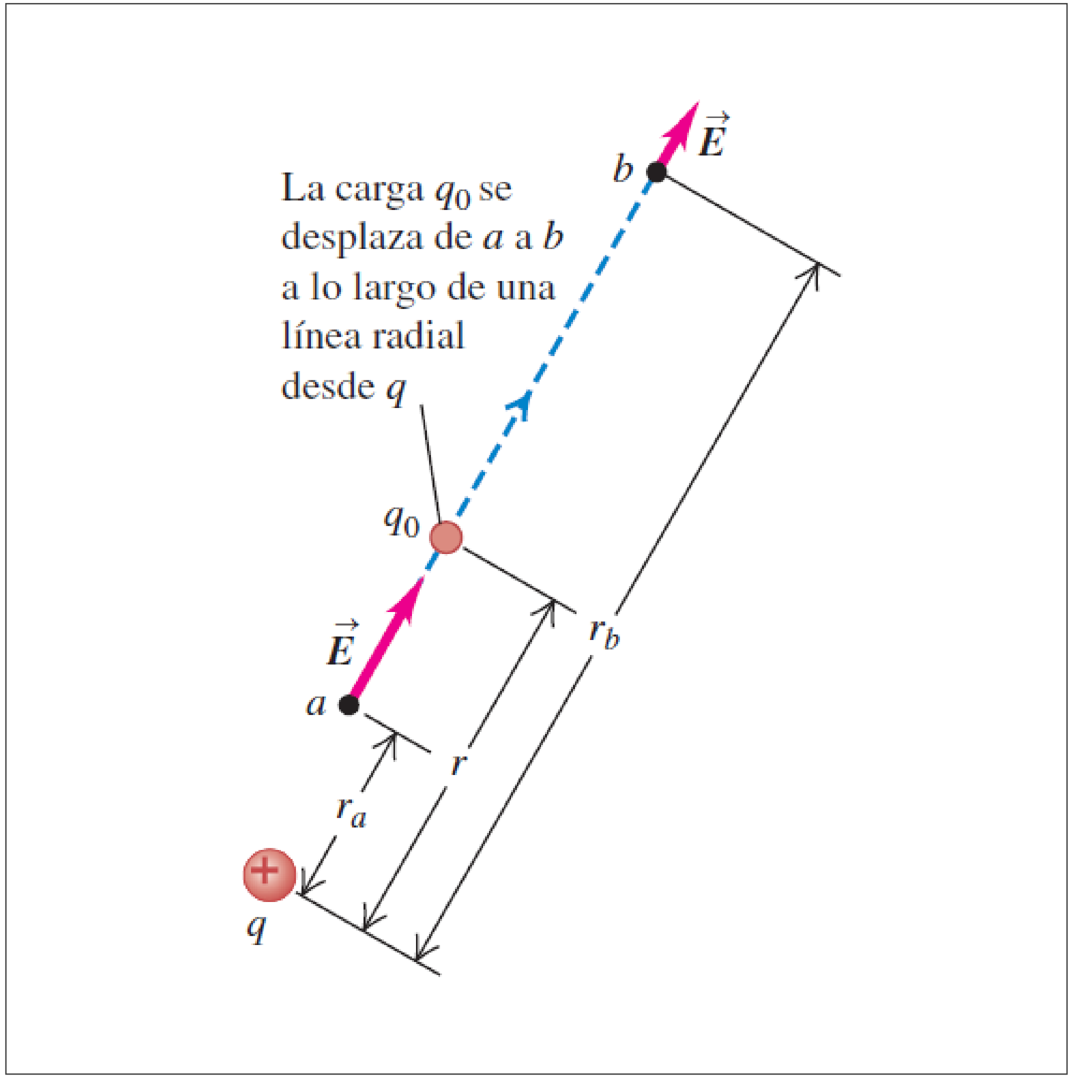
- Lo siguiente es una especie de algoritmo para emplear la Ley de Gauss. Aunque no lo parezca, **esta Ley es equivalente a la Ley de Coulomb,** pero su formulación esta motivada por ***la geometría del objeto cargado que se estudia y sus simetrías.***
- La Ley de Gauss se emplea usualmente para calcular el campo eléctrico de un objeto cargado. De este objeto se estudia el campo eléctrico **tanto en su interior como en el exterior de este.** Para hacerlo:

1. Se define una "Superficie Gaussiana". Esta superficie se dibuja dentro o fuera del objeto cargado, **dependiendo donde queramos estudiar el campo**. Su forma tiene relación con la del cuerpo estudiado.
2. Estudiamos si el campo **es uniforme o no** sobre la superficie que va a atravesar. Esto puede facilitar los cálculos. Luego, **procedemos a calcular el flujo eléctrico** que atraviesa esta "Superficie Gaussiana".
3. Una vez calculamos el flujo, **ahora debemos calcular la carga encerrada en el cuerpo cargado. La carga encerrada a su vez, se relaciona con la densidad de carga en el cuerpo**. Si nos interesa el campo dentro del cuerpo estudiado, ***la carga encerrada será siempre una porción de la carga total, que debemos calcular***. Si nos interesa el campo fuera del cuerpo estudiado, ***la carga encerrada en este caso será siempre la carga total contenida en el cuerpo.*** Luego, se procede a despejar el campo eléctrico a partir del flujo.

Ejemplo: campo eléctrico de una esfera sólida

- Se distribuye uniformemente una carga Q en el interior de una esfera solida. Calcule el campo eléctrico tanto fuera como dentro de la esfera **–ósea, en todo el espacio-.**


$F = k \cdot \frac{q1 \cdot q2}{r^2}$
$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_o}$



La energía potencial y cinética de una carga eléctrica

- Estudiemos la situación de la imagen, **donde la carga q, ejerce una fuerza sobre q0**, desplazándola desde un punto A hasta otro B. La fuerza total ***que siente q0*** es:

$$\vec{F} = m\vec{a} = q_0\vec{E}$$

- Supongamos que esta fuerza ***provoca un desplazamiento en q0***. Podríamos decir que el trabajo necesario para desplazar esta carga, bajo la acción de esta fuerza ***hecha por q***, es:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

- Supongamos que ahora, el desplazamiento provocado en la carga q0 **es infinitesimalmente pequeño**. Por lo tanto, ***el trabajo sobre ella también lo es,*** y la formula anterior cambia a:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

- Por lo tanto, **el trabajo total que siente una carga eléctrica q0, bajo un campo eléctrico emitido por q,** es:

$$W = \int_{r_a}^{r_b} \vec{F} \cdot d\vec{r} = q_0 \int_{r_a}^{r_b} \vec{E} \cdot d\vec{r} = q_0 \int_{r_a}^{r_b} k \frac{q}{r^2} dr = k \frac{q q_0}{r_a} - k \frac{q q_0}{r_b}$$

- La siguiente cantidad se define como **la energía potencial eléctrica de una carga**. *Es la responsable de mantener a una carga eléctrica en una posición fija:*

$$U = k \frac{q q_0}{r}$$

- Podemos notar entonces que el trabajo necesario para mover una carga q0, desde un punto A hasta otro B, no es más que **el negativo del cambio en la energía potencial entre ambos puntos:**

$$W = U_a - U_b = -(U_b - U_a) = -\Delta U$$

- Por otro lado, **podemos tomar la segunda Ley de Newton como tal**, y procedemos de la misma forma:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$
$$\implies \vec{F} \cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = md\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = m\vec{v} \cdot d\vec{v}$$

- Y ahora integramos para obtener el trabajo:

$$W = \int_{r_a}^{r_b} \vec{F} \cdot d\vec{r} = m\int_{r_a}^{r_b} \vec{v} \cdot d\vec{v} = m\frac{v_b^2}{2} - m\frac{v_a^2}{2} = \Delta K$$

- Notamos que en este caso, **el trabajo es igual al cambio en la energía cinética de la carga q0, entre los puntos A y B.** Podemos igualar este resultado de trabajo con el anterior, para llegar a un resultado interesante:

$$-\Delta U = \Delta K$$
$$\implies U_a - U_b = K_b - K_a$$
$$\implies U_a + K_a = U_b + K_b$$

- Concluimos que **la energía mecánica -o total-, igual a la suma de la energía potencial mas cinética, tanto al inicio como al final del desplazamiento, es la misma.** ***Por lo tanto, para una carga eléctrica, la energía se conserva.***

El potencial eléctrico

- Si dividimos el trabajo total en la magnitud de la carga de prueba, se obtiene:

$$\frac{W}{q_0} = \frac{U_a}{q_0} - \frac{U_b}{q_0}$$

- Se define la siguiente cantidad V, **como el potencial eléctrico**, y la ecuación anterior se transforma en:

$$V = \frac{U}{q_0} = k\frac{q}{r}$$
$$\Longrightarrow \frac{W}{q_0} = V_a - V_b = -(V_b - V_a) = -\Delta V$$

- Podemos comparar la última ecuación, con la ecuación de trabajo en términos del campo eléctrico:

$$W = \int_{r_a}^{r_b} \vec{F} \cdot d\vec{r} = q_0 \int_{r_a}^{r_b} \vec{E} \cdot d\vec{r} \Longrightarrow \frac{W}{q_0} = \int_{r_a}^{r_b} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

- Podemos igualar para obtener lo siguiente:

$$-\Delta V = -(V_b - V_a) = \int_{r_a}^{r_b} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

- Y se dice que **la diferencia de potencial eléctrico depende del campo eléctrico**. Esto asumiendo que el vector E se conoce. Si lo que se conoce es la diferencia de potencial y la función que la describe, entonces podemos conocer al vector E, reescribiendo la ecuación anterior como:

$$\implies -\Delta V = -(V_b - V_a) = -\int_{r_a}^{r_b} dV = \int_{r_a}^{r_b} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

- Como los limites de ambas integrales son iguales, **entonces sus argumentos deben ser iguales también:**

$$-dV = \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

- Y el campo eléctrico a partir del potencial, **se define como el negativo de su gradiente:**

$$\vec{E} = -\frac{dV}{d\vec{r}} = -\left(\frac{dV}{dx}\,\hat{i} + \frac{dV}{dy}\,\hat{j} + \frac{dV}{dz}\,\hat{k}\right) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{k}\right) = -\vec{\nabla} V$$
$$\implies \vec{E} = -\vec{\nabla} V$$