

注： 每队任选一题.

A、股市分析

最近几个月，中国股市异常火爆，吸引了众多的股市投资者，让越来越多的人关注股市，虽然有时大幅下跌，但目前仍然属于牛市。请解答以下几个问题：

- 1. 分析如今牛市的开始时间，就其形成原因进行分析，并就其结束时间进行预测；
- 2. 选择具有代表性的一些股票（至少 10 只）对其 2015 年来的走势建立模型进行分析；
- 3. 基于以上 1，2 分析给即将进入股市的新股民一些建议。

B 数卡设计

某市科学宫对前来参观的小学生每人赠送一套数卡，每套 6 张，每张正面有 29 或 30 个整数，都选自于 1 到 60 中的整数．下述 6 张数卡就是根据科学宫赠送的数卡复制的。

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59		

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59		

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	34	35	36	37
52	53	54	55	60			

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60			

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60			

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60			

这套数卡有这样的功能：你从 1 到 60 的整数中任选一个数，例如你的年龄是 21 岁，就选 21 吧。检查这套数卡，在第 1 张、第 3 张和第 5 张三张中都出现 21，只要把这三张数卡交给这位小朋友，小朋友很快就能知道你的年龄。

其实只要把你给的那几张数卡左上角的数字加起来，一定等于你的年龄。

这三张数卡左上角的数分别是 1, 4 和 16。而 $1 + 4 + 16 = 21$ 确实是成立的。

科学宫的这套数卡成本低廉，制作简单，却能训练小朋友加法计算能力，提高他们学习数学的兴趣。很多小朋友不知道自己父母等亲人的年龄，回家后通过这个游戏他们都搞清楚了，得到家长的一致赞许。很多家长会问，这套数卡为什么有这样的功能？

此外，年龄超过 60，这套数卡就失效了。能否对它加以改进，适当增加**识别量**，又不增加甚至减少数卡的张数？每一面出现的数的个数能否尽量少又较为均衡？一种方案是数卡两面印刷，可以把张数减少一半。可是，如果你选的数在同一张数卡两面都出现，交出数卡时就要加以说明，在做加法时也要加两次。所以我们规定同一张数卡两面不能有相同的数。为检查方便，再约定同一面上的数按递增顺序排列。

数卡分单面和双面印刷两种。为了叙述方便，我们给出关于“**识别量**”的定义。如果一套数卡满足下述条件：

1. 数卡中出现的数的集合是 $\{1, 2, \dots, n\}$ ；
2. 如果是双面印刷，同一张数卡两面不能有相同的数；
3. 对于任意整数 x ， $1 \leq x \leq n$ ，所有包含 x 的那一面中最小的数（即左上角的数）之和恰等于 x ；
4. 满足上述条件的数卡的张数 k 最少，

那么我们称这套数卡的**识别量**为 n 。所有数卡中每一面数的个数的最大值称为数卡的**单面容量**，简称**容量**，用 r 表示。例如上述科学宫的数卡 $r = 30$ 。

请回答下列问题：

问题一

考虑单面印刷的数卡。用二进制原理解释科学宫数卡的编制方法；若数卡的张数为 k ，识别量 n 的最大值是多少？给出证明。

问题二

以下问题均只讨论双面数卡。编制一套识别量为 80 的双面数卡。它有几张？说明编制原理（建议利用 3 进制）。不计顺序这样的一套数卡是否唯一？若是唯一的，给出证明。

问题三

对识别量 $n = 100$ 和 $n = 160$ ，分别编制两套双面数卡，使它们的容量 r 尽量小。

问题四

你认为上述讨论的结果在什么实际问题中会有所应用？

附加题

对识别量为正整数 n 的双面数卡，试给出容量 r 的最小值 m 或它的下界，并说明数卡的编制的方法或在附录中给出计算机程序。

说明 附加题留给对本题有特别兴趣的同学完成。