Limbaje formale, automate şi compilatoare

Curs 8

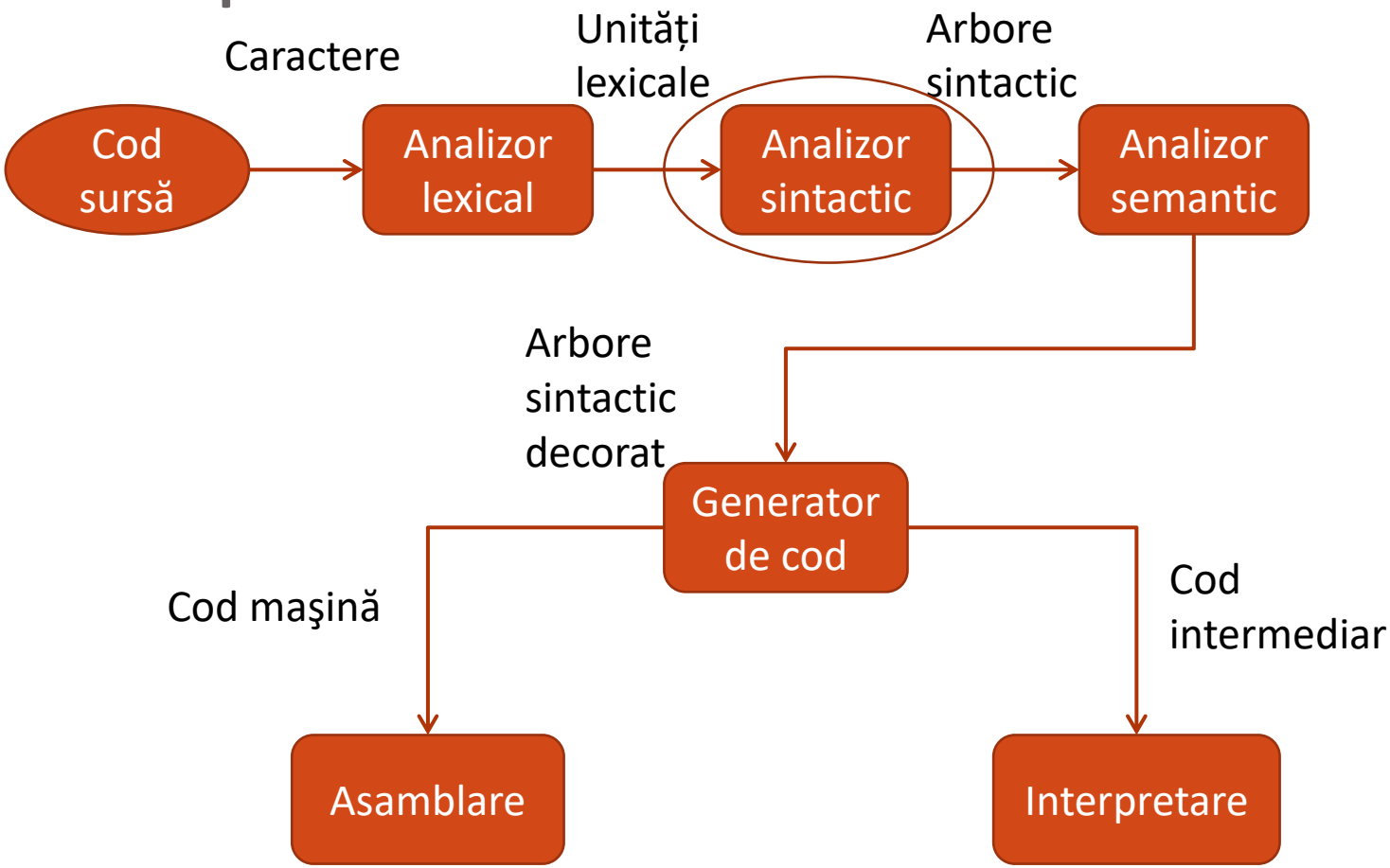
Recapitulare

- Paşii compilării
- Analiza lexicală
  - Descriere lexicală
  - Interpretare
  - Interpretare orientată dreapta
  - Descriere lexicală bine formată

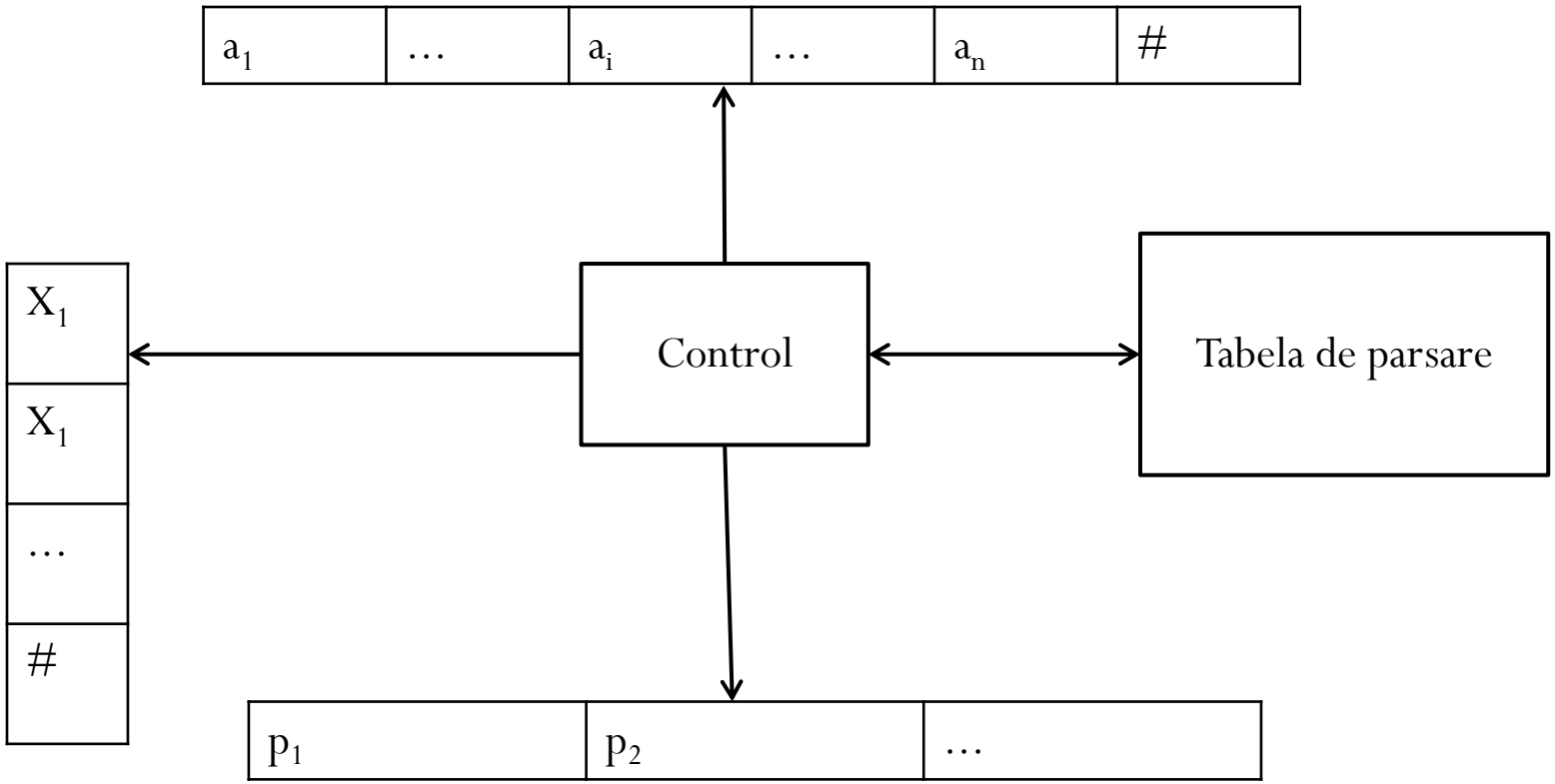
Cuprins

- Analiza sintactică ascendentă
  - Parser ascendent general
  - Analiză LR
  - LR(0)
  - SLR(1)
- FIRST
- FOLLOW

Compilare


Caractere
Unități lexicale
Arbore sintactic
Cod sursă
Analizor lexical
Analizor sintactic
Analizor semantic
Arbore sintactic decorat
Generator de cod
Cod maşină
Cod intermediar
Asamblare
Interpretare

Parser ascendent general



Configurații

- O configuraţie (#γ, u#, π) este interpretată în felul următor:
  - –#γ este conţinutul stivei, cu simbolul # la baza.
  - –u# este conţinutul intrării.
  - –π este conţinutul ieşirii.
- C_0= {(#, w#, ε)|w ∈ T*} mulţimea configuraţiilor iniţiale.

Tranziții

- Parserul ascendent ataşat gramaticii G este perechea $(C_0, \vdash)$ unde C_0 este mulţimea configuraţiilor iniţiale, iar $\vdash$ este o relaţie de tranziţie definită astfel:
  - $(\# \gamma, au\#, \pi) \vdash (\# \gamma a, u\#, \pi)$ (***deplasare)*** pentru orice $\gamma \in \Sigma^*$, $a \in T$, $u \in T^*$, $\pi \in P^*$.
  - $(\#\alpha\beta, u\#, \pi) \vdash (\#\alpha A, u\#, \pi r)$ dacă $r = A \rightarrow \beta$ (***reducere).***
  - Configuraţia $(\#S, \#, \pi)$ unde $\pi \neq \varepsilon$, se numeşte ***configuraţie de acceptare.***
  - Orice configuraţie, diferită de cea de acceptare, care nu este în relaţia $\vdash$ cu nici o altă configuraţie este o configuraţie eroare.
- Parsere de deplasare/reducere.

Exemplu

- Fie gramatica $S \rightarrow aSb| \varepsilon$. Tranziţiile sunt:
  - $(\#\gamma, u\#, \pi) \vdash (\#\gamma S, u\#, \pi 2)$
  - $(\#\gamma aSb, u\#, \pi) \vdash (\#\gamma S, u\#, \pi 1)$
  - $(\#\gamma, au\#, \pi) \vdash (\#\gamma a, u\#, \pi)$
  - $(\#\gamma, bu\#, \pi) \vdash (\#\gamma b, u\#, \pi)$
- O succesiune de tranziţii se numeşte calcul
  - $(\#, \#, \varepsilon) \vdash (\#S, \#, 2)$
  - $(\#, aabb\#, \varepsilon) \vdash (\#a, abb\#, \varepsilon) \vdash (\#aa, bb\#, \varepsilon) \vdash (\#aaS, bb\#, 2) \vdash (\#aaSb, b\#, 2) \vdash (\#aS, b\#, 21) \vdash (\#aSb, \#, 21) \vdash (\#S, \#, 211)$

Conflicte

- Parserul este nedeterminist:
  - Pentru o configuraţie de tipul (#αβ, au#, π), S→β, există două posibilităţi (conflict **deplasare/reducere**):
    - (#αβ, au#, π) ⊢ (#αS, au#, πr) (reducere cu S→β)
    - (#αβ, au#, π) ⊢ (# αβa, u#, π) (deplasare)
  - Pentru o configuraţie (#γ, u#, π) cu $\gamma=\alpha_1\beta_1=\alpha_2\beta_2$ şi $A\rightarrow\beta_1$, $B\rightarrow\beta_2$, reguli (conflict **reducere/reducere**)
    - $(\#\alpha_1\beta_1, u\#, \pi) \vdash (\#\ \alpha_1 A, au\#, \pi r_1)$
    - $(\#\alpha_2\beta_2, u\#, \pi) \vdash (\#\ \alpha_2 B, au\#, \pi r_2)$

Corectitudine

- Spunem că un cuvânt $w \in T^*$ este acceptat de un parser ascendent dacă există măcar un calcul de forma
  - $(\#, w\#, \varepsilon) \vdash^+ (\#S, \#, \pi)$
- Pentru ca parserul descris să fie corect, trebuie ca el să accepte toate cuvintele din L(G) şi numai pe acestea.
- **Teorema**
  - Parserul ascendent general ataşat unei gramatici G este corect: pentru orice $w \in T^*$, $w \in L(G)$ dacă şi numai dacă în parser are loc calculul $(\#, w\#, \varepsilon) \vdash^+ (\#S, \#, \pi)$.

Analiza sintactică LR

- Gramatici **LR(k)**:**L**eft to right scanning of the input, constructing a **R**ightmost derivation in reverse, using **k** symbols lookahead
- Definiţie
  - O gramatică G se numeşte gramatică LR(k), k≥0, dacă pentru orice două derivări de forma:
    - $S' \Rightarrow S \underset{dr}{\Rightarrow}{}^{*} \alpha A u \underset{dr}{\Rightarrow} \alpha\beta u = \delta u$
    - $S' \Rightarrow S \underset{dr}{\Rightarrow}{}^{*} \alpha' A' u' \underset{dr}{\Rightarrow} \alpha'\beta' u' = \alpha\beta v = \delta v$
  - pentru care k:u = k:v, are loc $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, $A=A'$

Analiza sintactică LR

- **Teorema 1**
  - Dacă G este gramatică LR(k), k≥0, atunci G este neambiguă.
- Un limbaj L este (în clasa) $\mathscr{LR}$(k) dacă există o gramatică LR(k) care îl generează
- **Teorema 2**
  - Orice limbaj $\mathscr{LR}$(k) este limbaj de tip 2 determinist.
- **Teorema 3**
  - Orice limbaj de tip 2 determinist este limbaj LR(1).
- **Teorema 4**
  - Pentru orice limbaj $\mathscr{LR}$(k), k≥1, există o gramatică LR(1) care generează acest limbaj, adică LR(0) ⊂ LR(1) = LR(k), k≥1.

Gramatici LR(0)

- **Definiţie**
  - Fie G = (V, T, S, P) o gramatică independentă de context redusă. Să presupunem că simbolul · nu este în Σ. Un **articol** pentru gramatica G este o producţie $A \rightarrow \gamma$ în care s-a adăugat simbolul · într-o anume poziţie din γ. Notăm un articol prin $A \rightarrow \alpha \cdot \beta$ dacă $\gamma = \alpha\beta$. Un articol în care · este pe ultima poziţie se numeşte **articol complet**.
- **Definiţie**
  - Un **prefix viabil** pentru gramatica G este orice prefix al unui cuvânt αβ dacă $S \underset{dr}{\Rightarrow}^* \alpha A u \underset{dr}{\Rightarrow} \alpha\beta u$. Dacă $\beta = \beta_1\beta_2$şi $\varphi = \alpha\beta_1$spunem că articolul $A \rightarrow \beta_1 \cdot \beta_2$ este **valid** pentru **prefixul viabil** φ.

Exemplu

- Exemplu S → A, A → aAa | bAb | c | ε.
  - Articole: S→•A, S→A•, A→•aAa, A→a•Aa, A→aA•a, A→aAa•, A→•bAb, A→b•Ab, A→bA•b, A→bAb•, A→•c, A→c•, A→ •.
- Articole valide pentru prefixe viabile:

Prefixul viabil	**Articole valide**	**Derivarea corespunzătoare**
ab	A→b•Ab A→•aAa A→•bAb	S⇒A⇒aAa⇒abAba S⇒A⇒aAa⇒abAba⇒abaAaba S⇒A⇒aAa⇒abAba⇒abbAbba
ε	S→•A A→•bAb A→•c	S⇒A S⇒A⇒bAb S⇒A⇒c

Gramatici LR(0)

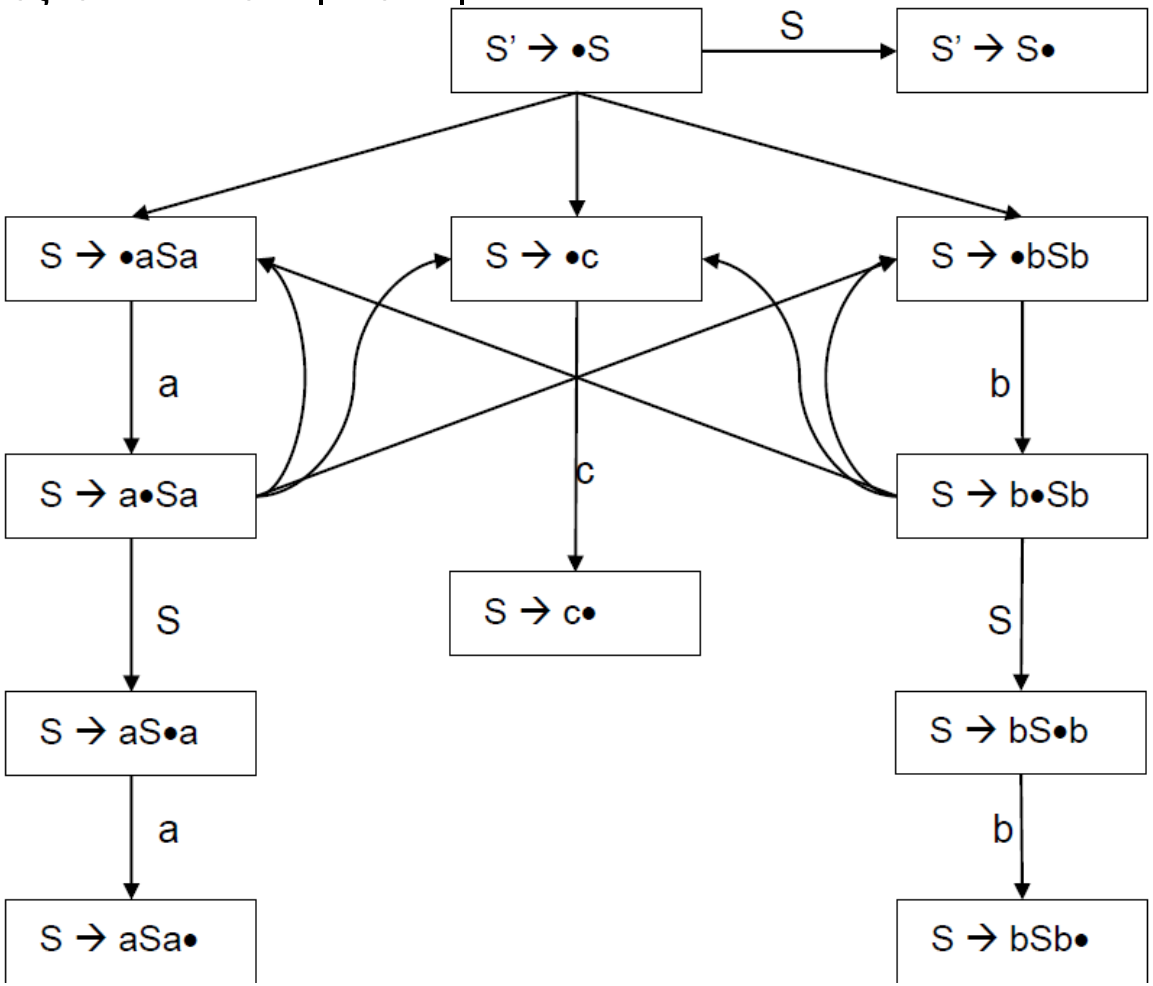
- **Lema**
  - Fie G o gramatică şi $A \rightarrow \beta_1 \cdot B\beta_2$ un articol valid pentru prefixul viabil γ. Atunci, oricare ar fi producţia $B \rightarrow \beta$, articolul $B \rightarrow \cdot\beta$ este valid pentru γ.
- **Teorema** (caracterizare LR(0))
  - Gramatica G este gramatică LR(0) dacă şi numai dacă, oricare ar fi prefixul viabil γ, sunt îndeplinite condiţiile:
    - 1.nu există două articole complete valide pentru γ.
    - 2.dacă articolul $A \rightarrow \beta\cdot$ este valid pentru γ, nu există nici un articol $B \rightarrow \beta_1 \cdot a\beta_2$, $a \in T$, valid pentru γ.

Gramatici LR(0)

- **Teorema**
  - Fie G = (V, T, S, P) o gramatică independentă de context. Mulţimea prefixelor viabile pentru gramatica G este limbaj regulat.
- **Demonstraţie**
  - G' este G la care se adaugă $S' \rightarrow S$.
  - M = (Q, Σ, δ, q_0, Q), unde:
    - Q este mulţimea articolelor gramaticii G',
    - $\Sigma = V \cup T$, $q_0 = S' \rightarrow \cdot S$
    - $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow 2^Q$ definită astfel:
      - $\delta(A \rightarrow \alpha \cdot B\beta, \varepsilon) = \{B \rightarrow \cdot\, \gamma \mid B \rightarrow \gamma \in P\}$.
      - $\delta(A \rightarrow \alpha \cdot X\beta, X) = \{ A \rightarrow \alpha X \cdot \beta\}$, $X \in \Sigma$.
      - $\delta(A \rightarrow \alpha \cdot a\beta, \varepsilon) = \emptyset$, $\forall a \in T$.
      - $\delta(A \rightarrow \alpha \cdot X\beta, Y) = \emptyset$, $\forall X, Y \in \Sigma$ cu $X \neq Y$.
- Se arată că are loc:
  - $(A \rightarrow \alpha \cdot \beta \in \delta(q_0, \gamma) \Leftrightarrow \gamma$ este prefix viabil şi $A \rightarrow \alpha \cdot \beta$ este valid pentru γ.

Exemplu

- S’ ⟶ S, S ⟶ aSa | bSb | c



Automatul LR(0)

- Algoritmul 1(procedura închidere(t))
- Intrare:
  - Gramatica G = (V, T, S, P);
  - Mulţimea t de articole din gramatica G;
- Ieşire: t'=închidere(t)={$q \in Q | \exists_p \in t, q \in \delta(p,\varepsilon)$} = $\delta(t,\varepsilon)$

Automatul LR(0)

- t’ = t ; flag = true;
- while(flag) {
  - flag = false;
  - for (A→α·Bβ ∈ t’) {
    - for (B→γ ∈ P)
      - if (B→·γ∉t’) {
      - t’ = t’∪{B→·γ};
      - flag = true;
      - }//endif
    - }//endforB
  - }//endforA
- }//endwhile
- return t’;

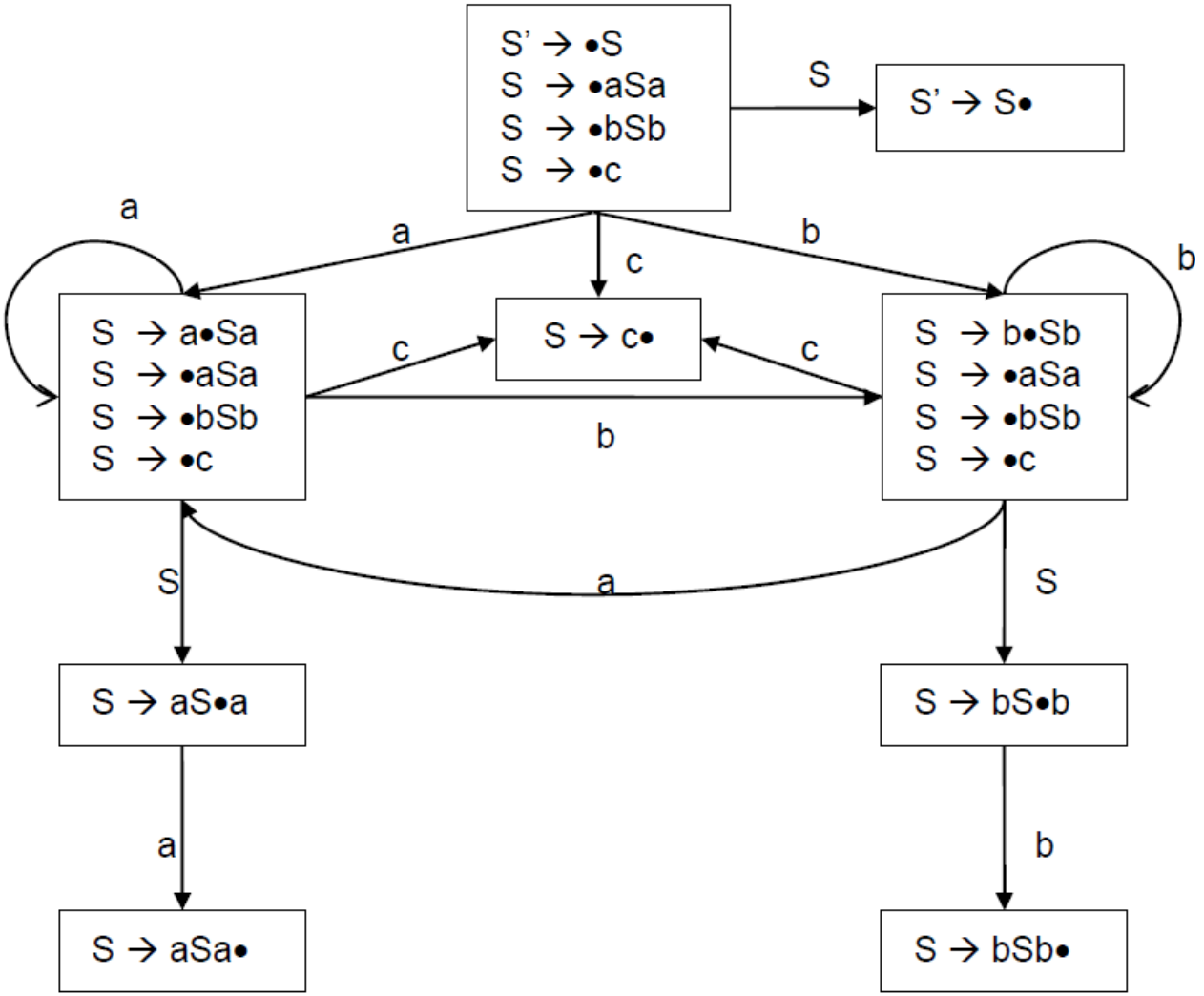
Automatul LR(0)

- Algoritmul 2 Automatul LR(0)
  - Intrare: Gramatica G = (N, T, S, P) la care s-a adăugat S’ → S;
  - Ieşire: Automatul determinist M = (T, Σ, g, t_0, T) echivalent cu M.

- t0=închidere(S’ →· S); T={t_0}; marcat(t_0)=false;
- while(∃ t ∈ T && !marcat(t)) { // marcat(t) = false
  - for(X ∈ Σ) {// Σ = N ∪T
    - t’ = ∅;
    - for(A→α·Xβ ∈ t)
      - t’ = t’ ∪ {B→αX·β | A→α·Xβ ∈t};
      - if(t’≠∅){
        - t’ = închidere(t’);
        - if(t’∉T) {
          - T = T∪{ t’ };
          - marcat(t’) = false;
        - }//endif
      - g(t, X) = t’;
      - }//endif
    - }//endfor
  - }//endfor
  - marcat(t) = true;
- }// endwhile

Automatul LR(0) - Exemplu

- S' ⟶ S, S ⟶ aSa | bSb | c



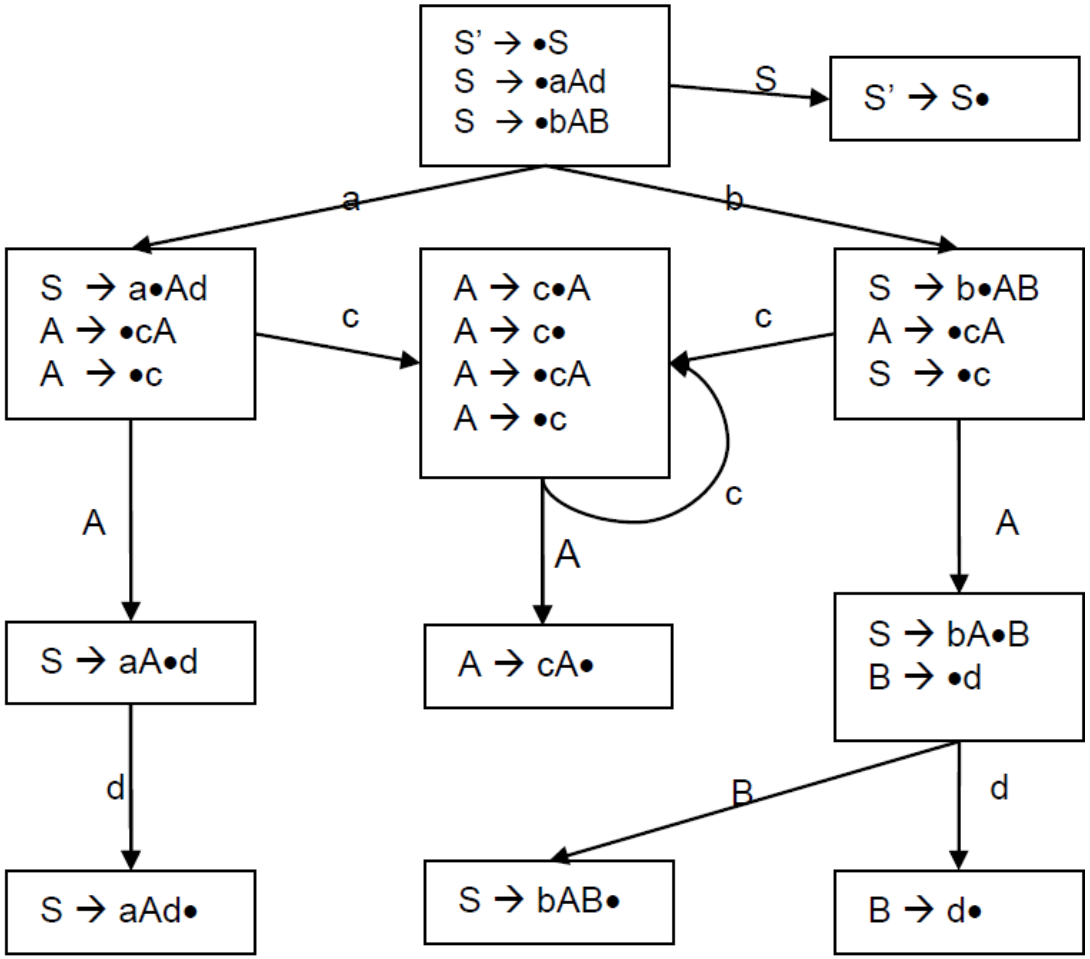
Test LR(0)

- **Definiţie** Fie G o gramatică şi M automatul LR(0) ataşat lui G.
  - Spunem că o stare a lui M are un conflict **reducere/reducere** dacă ea conţine două articole complete distincte $A \rightarrow \alpha\cdot$, $B \rightarrow \beta\cdot$.
  - Spunem că o stare a lui M are un conflict **deplasare/reducere** dacă ea conţine un articol complet $A \rightarrow \alpha\cdot$ şi un articol cu terminal după punct de forma $B \rightarrow \beta\cdot a\gamma$.
  - Spunem că o stare este **consistentă** dacă ea nu conţine conflicte şi este **inconsistentă** în caz contrar.

- **Teorema** Fie G o gramatică şi M automatul său LR(0). Gramatica G este LR(0) dacă şi numai dacă automatul M nu conţine stări inconsistente

Exemplu

- $S \rightarrow aAd \mid bAB,\ A \rightarrow cA \mid c,\ B \rightarrow d$



Algoritmul de analiză LR(0)

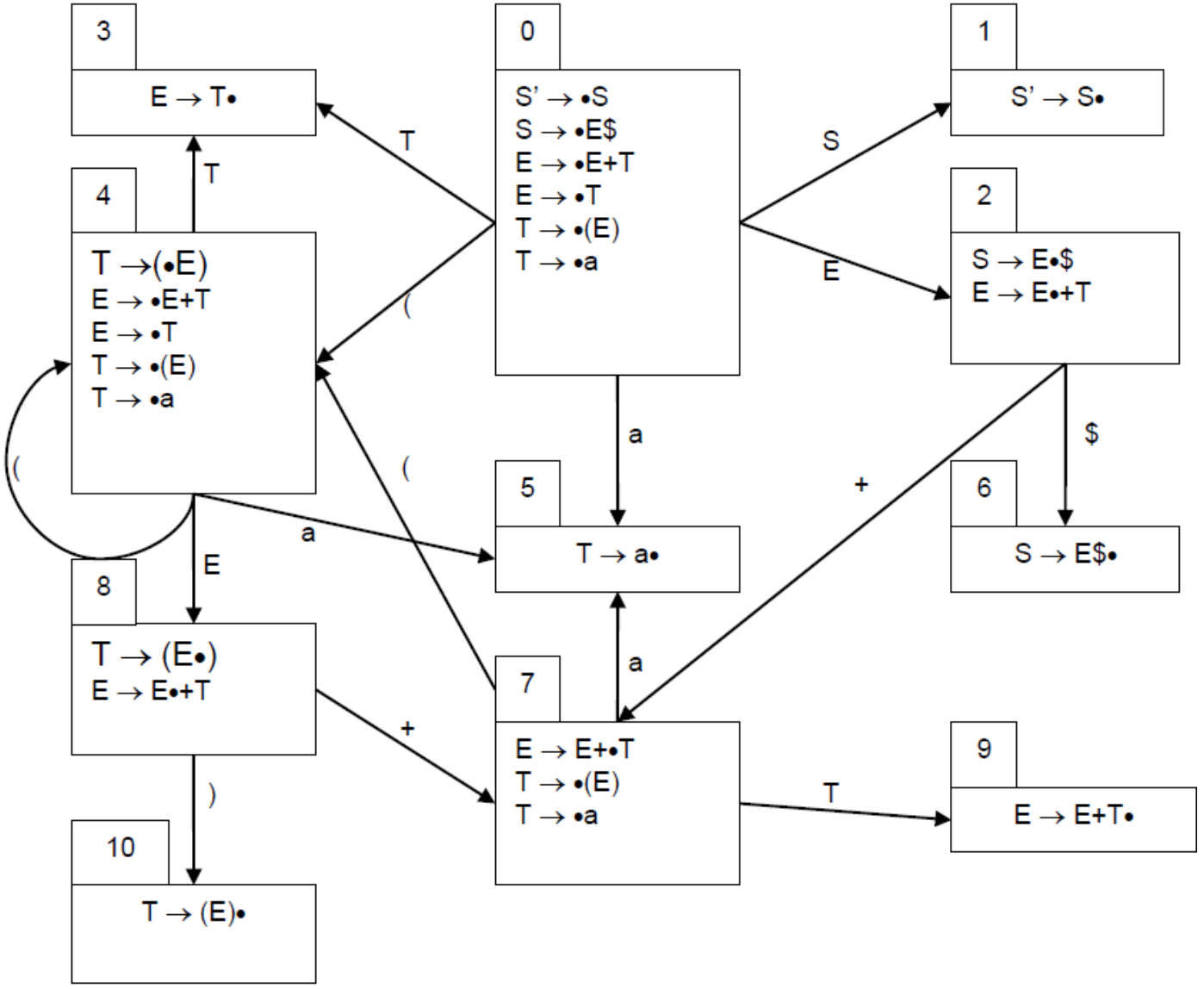
- Tabela de parsare coincide cu automatul LR(0), M.
- Configuraţie: $(\sigma, u\#, \pi)$ unde $\sigma \in Q^*$, $u \in T^*$, $\pi \in P^*$.
- Configuraţia iniţială este $(t_0, w\#, \varepsilon)$,
- Tranziţiile:
  - Deplasare: $(\sigma t, au\#, \pi) \vdash (\sigma tt', u\#, \pi)$ dacă $g(t, a) = t'$.
  - Reducere: $(\sigma t \sigma' t', u\#, \pi) \vdash (\sigma tt'', u\#, \pi r)$ dacă $A \rightarrow \beta \cdot \in t'$, $r = A \rightarrow \beta$, $|\sigma' t'| = |\beta|$ şi $t'' = g(t, A)$.
  - Acceptare: $(t_0 t_1, \#, \pi)$ este configuraţia de acceptare dacă $S' \rightarrow S \cdot \in t_1$, π este parsarea acestuia.
  - Eroare: o configuraţie căreia nu i se poate aplica nici o tranziţie

Algoritmul de analiză LR(0)

- char ps[]= "w#"; //ps este sirul de intrare w
- i = 0; // pozitia in sirul de intrare
- STIVA.push(t0); // se initializeaza stiva cu t0
- while(true) { // se repeta pana la succes sau eroare
  - t = STIVA.top();
  - a = ps[i] // a este simbolul curent din intrare
  - if(g(t, a)≠∅ { //deplasare
    - STIVA.push(g(t, a));
    - i++; //se inainteaza in intrare
    - }
  - else {
  - if(A → $X_1X_2…X_m$· ∈ t){
    - if(A == „S")
      - if(a == „#")exit("acceptare");
      - else exit("eroare");
    - else // reducere
      - for(i = 1; i <= m; i++) STIVA.pop();
        - STIVA.push(g(top(STIVA), A));
    - } //endif
  - else exit("eroare");
  - }//endelse
- }//endwhile

Exemplu

- S’ → S S → E$ E → E+TT →(E) E → TT → a



Exemplu

- S' → S S → E$ E → E+TT →(E) E → TT → a

Stiva	Intrare	Acţiune	Ieşire
0	a+(a+a)$#	deplasare	
05	+(a+a)$#	reducere	T → a
03	+(a+a)$#	reducere	E → T
02	+(a+a)$#	deplasare	
027	(a+a)$#	deplasare	
0274	a+a)$#	deplasare	
02745	+a)$#	reducere	T → a
02743	+a)$#	reducere	E → T
02748	+a)$#	deplasare	
027487	a)$#	deplasare	
0274875	)$#	reducere	T → a
0274879	)$#	reducere	E → E+T
02748	)$#	deplasare	
02748'10'	$#	reducere	T → (E)
0279	$#	reducere	E → E+T
02	$#	deplasare	
026	#	reducere	S → E$
01	#	acceptare	

Corectitudinea parserului LR(0)

- **Lema 1, 2** Fie G = (N, T, S, P) o gramatică LR(0), $t_0\sigma$, $t_0\tau$ drumuri în automatul LR(0) etichetate cu φ respectiv γ şi u, v $\in$ T*. Atunci, dacă în parserul LR(0) are loc $(t_0\sigma, uv\#, \varepsilon) \vdash^+ (t_0\tau, v\#, \pi)$, atunci în G are loc derivarea $\varphi \underset{dr}{\Rightarrow}_\pi u$ şi reciproc.

Corectitudinea parserului LR(0)

- **Teoremă** Dacă G este gramatică LR(0) atunci, oricare ar fi cuvântul de intrare $w \in T^*$, parserul LR(0) ajunge la configuraţia de acceptare pentru w, adică $(t_0\sigma, uv\#, \varepsilon) \vdash^+ (t_0\tau, v\#, \pi)$ dacă şi numai dacă $\varphi \underset{dr}{\Rightarrow}_{\pi} u$

Mulțimile FIRST și FOLLOW

- $FIRST(\alpha) = \{a | a \in T, \alpha \Rightarrow_{st}^{*} au \} \cup$
  $\text{if } (\alpha \Rightarrow_{st}^{*} \varepsilon) \text{ then } \{\varepsilon\} \text{ else } \emptyset.$

- $FOLLOW(A) = \{a | a \in T \cup \{\varepsilon\}, S \Rightarrow_{st}^{*} uA\gamma,$
  $a \in FIRST(\gamma) \}$

Determinare FIRST

- 1.for(X ∈ Σ)
  - 2.if(X ∈ T)FIRST(X)={X} else FIRST(X)=∅;
- 3.for(A→aβ ∈P)
  - 4.FIRST(A)=FIRST(A)∪{a};
- 5.FLAG=true;
- 6.while(FLAG){
  - 7.FLAG=false;
  - 8.for(A → $X_1X_2…X_n$ ∈ P){
    - 9.i=1;
    - 10.if((FIRST(X1) ⊄ FIRST(A)){
      - 11.FIRST(A)=FIRST(A) ∪(FIRST(X1)-{ε});
      - 12.FLAG=true;
    - 13.}//endif
    - 14.while(i<n && $X_{i\,st}$ ⇒* ε)
      - 15.if((FIRST(X_{i+1}) ⊄ FIRST(A)){
        - 16.FIRST(A)=FIRST(A)∪FIRST(X_{i+1});
        - 17.FLAG=true;i++;
      - }//endif
    - }//endwhile
  - }//endfor
- }//endwhile
- for(A∈N)
  - if(A_{st} ⇒* ε)FIRST(A)=FIRST(A) ∪{ε};

Determinare FIRST

- **Intrare:** Gramatica $G=(N,T,S,P)$.
- Mulţimile $FIRST(X), X \in \Sigma$.
- $\alpha = X_1X_2\ldots X_n$, $X_i \in \Sigma, 1 \leq i \leq n$.
- **Ieşire:** $FIRST(\alpha)$.

- $1.FIRST(\alpha)=FIRST(X_1)-\{\varepsilon\}; i=1;$
- 2.while($i<n$ && $X_i \Rightarrow^+ \varepsilon$){
  - $3.FIRST(\alpha)=FIRST(\alpha) \cup (FIRST(X_{i+1})-\{\varepsilon\});$
  - $4.i=i+1;$
- }//endwhile
- 5.if($i==n$ && $X_n \Rightarrow^+ \varepsilon$)
  - $6.FIRST(\alpha)=FIRST(\alpha) \cup \{\varepsilon\};$

Exemplu

- Fie gramatica:
- $S \rightarrow E \mid B, E \rightarrow \varepsilon, B \rightarrow a \mid \text{begin SC end}, C \rightarrow \varepsilon \mid ; SC$

- $FIRST(S) = \{a, \text{begin}, \varepsilon\}$ $FIRST(E) = \{\varepsilon\}$
- $FIRST(B) = \{a, \text{begin}\}$ $FIRST(C) = \{;, \varepsilon\}$.
- $FIRST(SEC) = \{a, \text{begin}, ;, \varepsilon\}$,
- $FIRST(SB) = \{a, \text{begin}\}$,
- $FIRST(;SC) = \{;\}$.

Determinarea FOLLOW

- $\varepsilon \in FOLLOW(S)$.
- Dacă $A \rightarrow \alpha B \beta X \gamma \in P$ şi $\beta \Rightarrow^{+} \varepsilon$, atunci $FIRST(X) - \{\varepsilon\} \subseteq FOLLOW(B)$.
  - $S \Rightarrow^{*} \alpha_1 A \beta_1 \Rightarrow \alpha_1 \alpha B \beta X \gamma \beta_1 \Rightarrow^{*} \alpha_1 \alpha B X \gamma \beta_1$ şi atunci rezultă $FIRST(X)-\{\varepsilon\} \subseteq FOLLOW(B)$.
- Dacă $A \rightarrow \alpha B \beta \in P$ atunci $FIRST(\beta)-\{\varepsilon\} \subseteq FOLLOW(B)$.
- Dacă $A \rightarrow \alpha B \beta \in P$ şi $\beta \Rightarrow^{+} \varepsilon$, atunci $FOLLOW(A) \subseteq FOLLOW(B)$.

Determinarea FOLLOW

- 1. for(A $\in \Sigma$)FOLLOW(A)=$\varnothing$;
- 2.FOLLOW(S)={ε};
- 3.for(A $\rightarrow X_1X_2\ldots X_n$){
- 4.i=1;
  - 5.while(i<n){
    - 6.while($X_i \notin$ N)++i;
    - 7.if(i<n){
      - 8.FOLLOW(Xi)= FOLLOW(X_i) $\cup$ (FIRST($X_{i+1}X_{i+2}\ldots X_n$)-{ε});
      - 9.++i;
    - }//endif
  - }//endwhile
- }//endfor

Determinarea FOLLOW

- 10.FLAG=true;
- 11.while(FLAG){
  - 12.FLAG=false;
  - 13.for($A \rightarrow X_1X_2\ldots X_n$){
    - 14.i=n;
    - 15.while(i>0 && $X_i \in N$){
      - 16.if(FOLLOW(A) $\not\subset$ FOLLOW(X_i)){
        - 17.FOLLOW(Xi)=FOLLOW(X_i) $\cup$ FOLLOW(A);
        - 18.FLAG=true;
      - 19.}//endif
      - 20.if($X_i \Rightarrow^+ \varepsilon$)--i;
      - 21.else continue;
    - 22.}//endwhile
  - 23.}//endfor
- 24.}//endwhile

Exemplu

- Fie gramatica:
- $S \rightarrow E \mid B$, $E \rightarrow \varepsilon$, $B \rightarrow a \mid$ begin SC end, $C \rightarrow \varepsilon \mid$; SC

- FOLLOW(S)=FOLLOW(E)=FOLLOW(B) ={ε, ; , end}
- FOLLOW(C) = {end}.

Bibliografie

- A. V. Aho, M. S. Lam, R. Sethi, and J. D. Ullman, *Compilers: Principles, Techniques, and Tools*, Second Edition. Addison-Wesley, 2007
- G. Grigoraş, *Construcţia compilatoarelor. Algoritmi fundamentali*, Editura Universităţii "Alexandru Ioan Cuza", Iaşi, 2005