

これはサンプルです

0000000 ほげほげ

2000 年 00 月 00 日

1 タイトル

ここに, $d \times n$ の行列 \mathbf{X} がある (ただし $d \geq n$). 行列 $\mathbf{X}^t \mathbf{X}$ の固有値と固有ベクトルをそれぞれ λ_i, \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) とする. このとき, 行列 $\mathbf{X} \mathbf{X}^t$ の非ゼロな固有値とそれに対応する固有ベクトルは, それぞれ $\lambda_i, \frac{\mathbf{X} \mathbf{e}_i}{\sqrt{\lambda_i}}$ ($i = 1, 2, \dots, d$) となることを示す.

行列 $\mathbf{X}^t \mathbf{X}$ を $n \times n$ の行列 \mathbf{A} とし, 行列 $\mathbf{X} \mathbf{X}^t$ を $d \times d$ の行列 \mathbf{B} とする. 行列 \mathbf{A} の固有値と固有ベクトルは次のように定義される.

$$\mathbf{A} \mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.1)$$

ここで, 行列 \mathbf{A} は対称行列であるため, 固有値は実数であり, 固有ベクトルは直交する. よって, 固有ベクトル \mathbf{e}_i が正規直交基底と仮定すると,

$$\mathbf{e}_i^t \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (1.2)$$

が成り立つ. ここで, 式 (1.1) において, 行列 \mathbf{X} を両辺に左から掛けると,

$$\mathbf{X} \mathbf{A} \mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{X} \mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.3)$$

となる. $\mathbf{A} = \mathbf{X}^t \mathbf{X}$ を代入すると,

$$\mathbf{X} \mathbf{X}^t \mathbf{X} \mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{X} \mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.4)$$

ここで, 行列 $\mathbf{X} \mathbf{X}^t$ は行列 \mathbf{B} であるため,

$$\mathbf{B} \mathbf{X} \mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{X} \mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.5)$$

この式は、行列 \mathbf{B} の固有値と固有ベクトルの定義に一致する。したがって、行列 \mathbf{B} の固有値は λ_i であり、対応する固有ベクトルは $\mathbf{X}\mathbf{e}_i$ である。さらに、 $\mathbf{X}\mathbf{e}_i$ のノルムを計算すると、

$$\|\mathbf{X}\mathbf{e}_i\| = \sqrt{(\mathbf{X}\mathbf{e}_i)^t(\mathbf{X}\mathbf{e}_i)} = \sqrt{\mathbf{e}_i^t \mathbf{X}^t \mathbf{X} \mathbf{e}_i} = \sqrt{\lambda_i}. \quad (1.6)$$

したがって、行列 \mathbf{B} の非ゼロな固有値は λ_i であり、対応する固有ベクトルは

$$\frac{\mathbf{X}\mathbf{e}_i}{\|\mathbf{X}\mathbf{e}_i\|} = \frac{\mathbf{X}\mathbf{e}_i}{\sqrt{\lambda_i}} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.7)$$

となる。

1.1 サブタイトル

論文やレポートでは、数式を本文中に組み込むことがよくあります。オイラーの等式 $e^{i\pi} + 1 = 0$ は、数学における最も美しい方程式の一つとされています。論文の引用は、例えば `\cite{ref}` のように行います [1]。

参考文献

- [1] Jean-Baptiste Mouret and Jeff Clune. Illuminating search spaces by mapping elites. *ArXiv*, Vol. abs/1504.04909, , 2015.