これはサンプルです

0000000　ほげほげ

2000 年 00 月 00 日

1　演習問題 7.1

ここに，$d \times n$ の行列 $\mathbf{X}$ がある (ただし $d \geq n$)．行列 $\mathbf{X}^t\mathbf{X}$ の固有値とと固有ベクトルをそれぞれ $\lambda_i, \mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$ とする．このとき，行列 $\mathbf{X}\mathbf{X}^t$ の非ゼロな固有値とそれに対応する固有ベクトルは，それぞれ $\lambda_i, \frac{\mathbf{X}\mathbf{e}_i}{\sqrt{\lambda_i}} \quad (i = 1, 2, \ldots, d)$ となることを示す．

行列 $\mathbf{X}^t\mathbf{X}$ を $n \times n$ の行列 $\mathbf{A}$ とし，行列 $\mathbf{X}\mathbf{X}^t$ を $d \times d$ の行列 $\mathbf{B}$ とする．行列 $\mathbf{A}$ の固有値と固有ベクトルは次のように定義される．

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.1}$$

ここで，行列 $\mathbf{A}$ は対称行列であるため，固有値は実数であり，固有ベクトルは直交する．よって，固有ベクトル $\mathbf{e}_i$ が正規直交基底と仮定すると，

$$\mathbf{e}_i^t\mathbf{e}_j = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.2}$$

が成り立つ．ここで，式 (1.1) において，行列 $\mathbf{X}$ を両辺に左から掛けると，

$$\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{X}\mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.3}$$

となる．$\mathbf{A} = \mathbf{X}^t\mathbf{X}$ を代入すると，

$$\mathbf{X}\mathbf{X}^t\mathbf{X}\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{X}\mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.4}$$

ここで，行列 $\mathbf{X}\mathbf{X}^t$ は行列 $\mathbf{B}$ であるため，

$$\mathbf{B}\mathbf{X}\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{X}\mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.5}$$

この式は，行列 $\mathbf{B}$ の固有値と固有ベクトルの定義に一致する．したがって，行列 $\mathbf{B}$ の固有値は λ_i であり，対応する固有ベクトルは $\mathbf{X}\mathbf{e}_i$ である．さらに，$\mathbf{X}\mathbf{e}_i$ のノルムを計算すると，

$$\|\mathbf{X}\mathbf{e}_i\| = \sqrt{(\mathbf{X}\mathbf{e}_i)^t(\mathbf{X}\mathbf{e}_i)} = \sqrt{\mathbf{e}_i^t\mathbf{X}^t\mathbf{X}\mathbf{e}_i} = \sqrt{\lambda_i}. \tag{1.6}$$

したがって，行列 $\mathbf{B}$ の非ゼロな固有値は λ_i であり，対応する固有ベクトルは

$$\frac{\mathbf{X}\mathbf{e}_i}{\|\mathbf{X}\mathbf{e}_i\|} = \frac{\mathbf{X}\mathbf{e}_i}{\sqrt{\lambda_i}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.7}$$

となる．

参考文献