Fiche élève — Généralités sur les suites (Rappels de Première) Suites — EDS Terminale

Auteur : **Alaeddine Ben Rhouma** — Lycée Pierre Mendès France, Tunis

Sommaire (impression)

1. Définir une suite

Définition. Une suite (u_n) est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto u_n$. L'*indice de départ* est précisé (souvent $n = 0$ ou $n = 1$).

Deux modes de définition. *Explicite* : $u_n = f(n)$. *Récurrente* : u_0 (ou u_1) donné et relation $u_{n+1} = g(u_n)$.

Suite arithmétique. $u_{n+1} = u_n + r$ (raison r). Alors $u_n = u_0 + nr$. *Somme* : $\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$. *Variations* : $r > 0$ croissante, $r < 0$ décroissante, $r = 0$ constante.

Suite géométrique. $u_{n+1} = q\,u_n$ (raison q). Alors $u_n = u_0\,q^n$. *Somme* : si $q \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0\,\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$; sinon $(n+1)u_0$.

Limites usuelles : $|q| < 1 \Rightarrow q^n \to 0$; $q = 1$ constante; $q = -1$ non convergente; $|q| > 1$ divergence en module (alternance si $q < 0$). Une arithmétique $u_0 + nr$ diverge si $r \neq 0$.

1 Explicite : $u_n = (-1)^n$ (on peut calculer u_9 immédiatement).

2 Récurrente : $w_{n+1} = 5w_n + 3$ (il faut connaître un terme initial).

- On peut souvent **passer** d'une définition à l'autre selon la question étudiée.
- La suite peut être notée u; u_n désigne le *n-ième terme* de la suite u.

2. Monotonie d'une suite

Tout ouvrir

Croiss. Strictement croissante à partir du rang p si $\forall n \geq p$, $u_{n+1} > u_n$. Strictement décroissante si $u_{n+1}

Large Croissante si $u_{n+1} \geq u_n$; décroissante si $u_{n+1} \leq u_n$. Stationnaire/constante à partir d'un rang si $u_{n+1} = u_n$ pour tout n assez grand.

(1) Si $u_n = f(n)$ (définition explicite), les variations de (u_n) suivent celles de f.

(2) Si $u_{n+1} = f(u_n)$ (définition récurrente), les variations de (u_n) ne suivent *pas forcément* celles de f.

Utilité Décider si (u_n) est croissante/décroissante via $\Delta_n = u_{n+1} - u_n$.

Énoncé $\forall n$, $\Delta_n \geq 0 \Rightarrow (u_n)$ croissante; $\Delta_n \leq 0 \Rightarrow$ décroissante.

Idée Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors $u_{n+1} \geq u_n$. En enchaînant, on obtient $u_{n+k} \geq u_n$.

Énoncé Si $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \ \forall n$, alors (u_n) croît; si ≤ 1, décroît.

Idée Comparer u_{n+1}/u_n est utile pour les suites de type exponentiel.

3. Suites arithmétiques et géométriques

Tout ouvrir

Formule $u_{n+1} = u_n + r \iff u_n = u_0 + nr$.

Somme $\sum_{k=0}^{n} u_k = \dfrac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$.

Généralisation Pour tous entiers n, p, $u_n = u_p + (n-p)r$.

Variations $r > 0$ croissante; $r < 0$ décroissante.

Ex $u_0 = 2,\ r = 3 \Rightarrow u_n = 2 + 3n$; $\sum_{k=0}^{4} u_k = \frac{5}{2}(u_0 + u_4) = \frac{5}{2}(2 + 14) = 40$.

Formule $u_{n+1} = q\,u_n \iff u_n = u_0\,q^n$.

Somme Si $q \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0\,\dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$; sinon $(n+1)u_0$.

Généralisation Pour tous entiers n, p, $u_n = u_p\,q^{\,n-p}$.

Limites $|q| < 1 \Rightarrow u_n \to 0$; $q > 1 \Rightarrow |u_n| \to +\infty$ (si $u_0 \neq 0$).

Ex $u_0 = 8,\ q = \frac{1}{2} \Rightarrow u_n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$; $\sum_{k=0}^{3} u_k = 8\,\dfrac{1 - (1/2)^4}{1 - 1/2} = 15$.

Règle $|q| < 1 \Rightarrow q^n \to 0$; arithmétique $u_0 + nr$ diverge si $r \neq 0$; $(-1)^n$ n'a pas de limite.

Ex $u_n = 5 \cdot (0{,}8)^n \to 0$; $v_n = 3 - 2n \to -\infty$.

Arith. $u_{n+1} = u_n + r \Rightarrow u_n = u_0 + nr$.

Géo. $u_{n+1} = q\,u_n \Rightarrow u_n = u_0\,q^n$.

Ex $u_0 = 1,\ u_{n+1} = u_n + 4 \Rightarrow u_n = 1 + 4n$;
$v_0 = 9,\ v_{n+1} = 0{,}6 v_n \Rightarrow v_n = 9 \cdot 0{,}6^n$.

Attention Vérifier l'*indice de départ* (0 ou 1) avant d'appliquer les formules de somme.

⚠️ Confondre $\sum_{k=0}^{n}$ et $\sum_{k=1}^{n}$ change les résultats.

Méthodologie par type d'exercice

Tout ouvrir

1. Identifier le type : arithmétique ($u_{n+1} - u_n$ constant), géométrique (u_{n+1}/u_n constant pour $u_n \neq 0$), autre.
2. Relever l'indice de départ (u_0 ou u_1) et la ou les constantes (raison r ou q).

Ex $u_0 = 2,\ u_{n+1} = u_n + 5$ ⇒ arithmétique (r=5). $v_1 = 3,\ v_{n+1} = 2v_n$ ⇒ géométrique (q=2) à partir de $n = 1$.

1. Arithmétique : $u_n = u_0 + nr$.
2. Géométrique : $u_n = u_0\, q^n$.

Ex $w_0 = 7,\ w_{n+1} = w_n - 2 \Rightarrow w_n = 7 - 2n$. $x_0 = 5,\ x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n \Rightarrow x_n = 5\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

1. Calculer $u_{n+1} - u_n$ (ou u_{n+1}/u_n si $u_n > 0$) et conclure.
2. Pour une géométrique $u_0 > 0$: $q > 1$ ⇒ croissante; $0

Ex $u_n = 2 + 3n$ ↑;
$v_n = 8 \cdot 0{,}5^n$ ↓ vers 0.

1. Arithmétique : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \dfrac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$.
2. Géométrique ($q \neq 1$) : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0\,\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Ex Si $u_k = 3 + 2k$ (arith.), alors $\sum_{k=0}^{10} u_k = \dfrac{11}{2}(u_0 + u_{10}) = \dfrac{11}{2}(3 + 23) = 143$.

1. $|q| < 1 \Rightarrow q^n \to 0$; $q = 1 \Rightarrow$ constante; $|q| > 1 \Rightarrow$ divergence en module.
2. Arithmétique $u_0 + nr$: si $r > 0$, $\to +\infty$; si $r < 0$, $\to -\infty$.

Ex $x_n = 5 \cdot (0{,}8)^n \to 0$, $y_n = 1 - 0{,}2n \to -\infty$.

Checklist avant de rendre

- J'ai indiqué le **type** de la suite (arithmétique, géométrique, autre) et l'**indice de départ**.
- J'ai écrit la **formule** (explicite/récurrente) et les paramètres (u_0, r ou q).
- Variations justifiées (signe de $u_{n+1} - u_n$ ou du quotient).
- Pour une somme, j'ai vérifié les **bornes d'indice** et le **cas** $q = 1$.
- Limites : j'ai appliqué les **règles usuelles** correctement.

Rappels rapides (formules utiles)

- Arith. $u_{n+1} = u_n + r \iff u_n = u_0 + nr$; somme $\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$.
- Géo. $u_{n+1} = q\,u_n \iff u_n = u_0\,q^n$; somme si $q \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
- Limites : $|q| < 1 \Rightarrow q^n \to 0$; $q = 1$ constante; $|q| > 1$ divergence; $(-1)^n$ non convergente.
- Monotonie : $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ⇒ croissante; si $u_n > 0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ ⇒ croissante.

Mini-entraînements éclair

Tout ouvrir

1 Reconnaître le type : $u_0 = 4,\ u_{n+1} = u_n - 3$.

Suite arithmétique de raison

$r = -3$
,
$u_n = 4 - 3n$
.

2 Somme géométrique : $u_n = 5 \cdot (0{,}8)^n$. Calculer $\sum_{k=0}^{3} u_k$.

$$5\,\frac{1-0{,}8^4}{1-0{,}8} = 5\,\frac{1-0{,}4096}{0{,}2} = 5 \cdot 2{,}952 = 14{,}76$$
.

3 Limite : pour $q = \frac{1}{2}$, compléter : « $q^n \to ? » Vérifier

4 Variations : $v_n = 9 \cdot 1{,}2^n$ ($v_n > 0$).

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1{,}2 > 1$
$\Rightarrow$
(v_n)
croissante et
$\to +\infty$
.

5 Étudier le sens de variation de $u_n = 2n^2 + n + 5$.

$u_{n+1} - u_n = 2((n+1)^2 - n^2) + 1 = 2(2n+1) + 1 = 4n + 3 > 0$
$\forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow$
(u_n)
strictement croissante.

6 Étudier le sens de variation de $v_{n+1} = v_n - 2$, $v_0 = -1$.

$v_{n+1} - v_n = -2 < 0$
$\Rightarrow$

(v_n)
strictement décroissante; de plus
$v_n = -1 - 2n$
.

7 Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 1$; poser $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

(i) u n'est ni arithmétique ($u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{2}u_n + 1$ dépend de n) ni géométrique ($\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{1}{2} + \dfrac{1}{u_n}$ non constant).

(ii) $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}u_n + 1 - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}(u_n - \frac{2}{3}) = -\frac{1}{2}v_n$.
Donc (v_n) est géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$ et
$v_0 = u_0 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$.

Erreurs fréquentes à éviter

- Oublier de préciser **l'indice de départ** et/ou le **type** de la suite.
- Confondre r et u_0 en arithmétique; oublier le cas $q = 1$ en géométrique.
- Appliquer une formule de **somme** avec de **mauvaises bornes** ou le mauvais type.
- Conclure une limite sans vérifier les **conditions** ($|q| < 1$, signe de r, etc.).