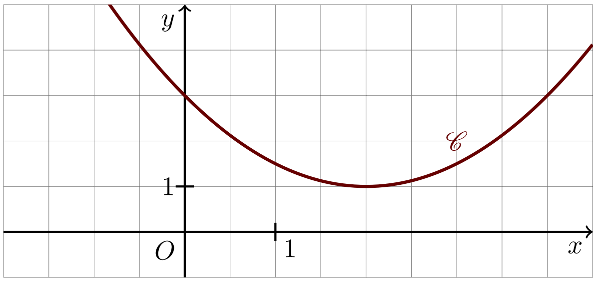
9

La parabole ci-dessous représente une fonction polynôme du second degré. Utiliser le graphique pour déterminer la forme canonique de $f(x)$:



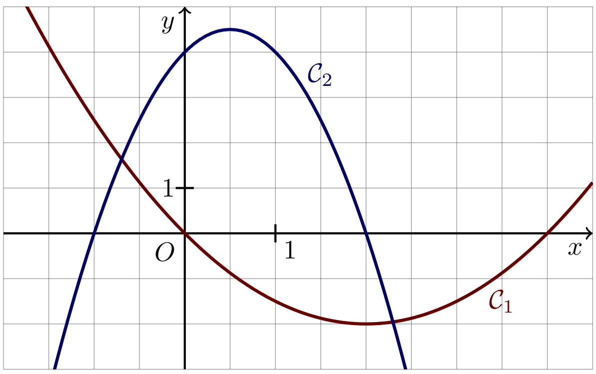
10

On considère ci-contre deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

Ces courbes sont les représentations graphiques des deux fonctions f et g dont les expressions sont les suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 2 \text{ et } g(x) = -2(x+1)(x-2)$$

Associer à chacune des fonctions sa courbe représentative en donnant à chaque fois deux arguments justificatifs.



11

Soit f la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 7x + 1$.
Déterminer la forme canonique de $f(x)$.

12

Dresser le tableau de variation de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = 100 - 2(x-50)^2$

2. $f(x) = -0,6(x+2)^2$

3. $f(x) = -2 - 6x^2 + \frac{1}{3}x$

4. $f(x) = x^2 + 7$

13

Une fonction polynôme du second degré g est telle que $g(0) = g(6)$ et admet pour minimum -2.
Dresser son tableau de variation.

14

Le bénéfice, en millier d'euro, d'une entreprise est modélisé par la fonction f définie sur $[0\,;\,3]$ par $f(x) = -2x^2 + 5x - 2$, où x représente le nombre d'objets fabriqués et vendus, en centaine.

1. Donner les formes factorisées et canonique de $f(x)$.

2. En exploitant la forme la plus appropriée de $f(x)$, donner :

a. les quantités d'objets fabriqués et vendus pour lesquelles le bénéfice est positif ;

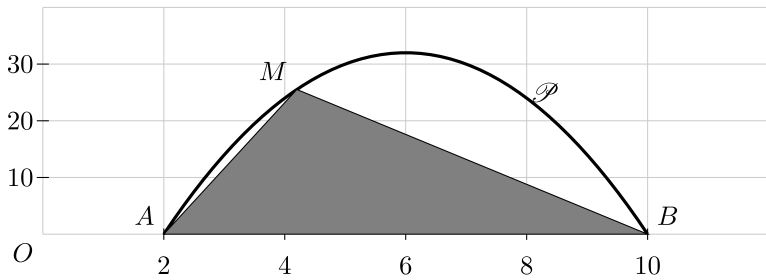
b. le bénéfice est maximal ;

c. les quantités d'objets fabriqués et vendus sachant que l'entreprise a perdu 2 000 €.

15

Soit f la fonction polynomiale de degré 2 définie sur $[2; 10]$ par $f(x) = -2x^2 + 24x - 40$.

On note $\mathcal{P}$ sa courbe représentative. Soit A et B les points de $\mathcal{P}$ de coordonnées respectives $(2,0)$ et $(10,0)$. Le point M est un point de $\mathcal{P}$ dont l'abscisse a est dans l'intervalle $]2; 10[$.



1. Justifier que les points A et B appartiennent bien à $\mathscr{P}$.

2. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles l'aire du triangle ABM est supérieure à 100.
On arrondira les valeurs au centième.

16

f est une fonction polynôme de degré 2 qui vérifie les conditions suivantes :

- 0 admet pour antécédents 4 et 5.
- L'image de 1 par f est 24.

Déterminer $f(x)$ sous forme factorisée.

17

Factoriser, si possible, les fonctions polynômes du second degré suivantes :

1. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 8$

2. $f(x) = 0,01x^2 + 0,8x - 4,25$

3. $f(x) = 2x^2 + x\sqrt{2} - 1$

18

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes sans utiliser le discriminant :

1. $-5x^2+4=0$
2. $-x^2+6x=0$
3. $(x-1)^2-(x-1)(x-2)=0$
4. $(2x-3)(x-7)=-21$

19

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $-2x^2+x-1=0$
2. $5x^2-2x+1=0$
3. $2x^2+4=-6x$
4. $x(8-x)+1=0$
5. $2x(5+2x)=9-2x$
6. $x^2+2\sqrt{3}x+3=0$

20 **Démonstration**

Soit $f(x)=ax^2+bx+c$ un polynôme de degré 2 admettant deux racines x_1 et x_2.

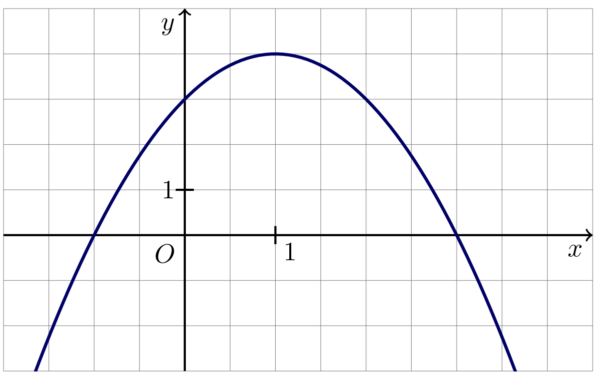
1. Démontrer que $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ et $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.
2. Soit $f(x)=3x^2+5x+2$.
   a. Donner une racine évidente de $f(x)$.
   b. En déduire la seconde racine et factoriser $f(x)$.

21

1. Soit u et v deux réels.
   a. Développer le produit $(x-u)(x-v)$.
   b. En déduire que les réels u et v sont les racines du polynôme x^2-Sx+P où $S=u+v$ et $P=u\times v$.
2. Existe-t-il un rectangle d'aire 40 et de périmètre 40 ? Si oui, donner ses dimensions.

22

On a représenté graphiquement ci-dessous la courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$. Donner graphiquement le signe de $f(x)$:



23

Étudier le signe des fonctions dans chacun des cas suivants :

1. $f_1 \ : \ x \longmapsto 2x^2+5x+4$
2. $f_2 \ : \ x \longmapsto 4x^2-7x+3$
3. $f_3 \ : \ x \longmapsto x^2+x+\frac{1}{4}$
4. $f_4 \ : \ x \longmapsto 2x^2-2x-1$
5. $f_5 \ : \ x \longmapsto 4x^2-2,4x+0,36$

24

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes sans utiliser le discriminant :

1. $(4x+1)(x+3)>0$
2. $2x \geqslant x^2+1$
3. $x^2<x$
4. $(-3x+5)^2 \leqslant 16$

25

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes sans utiliser le discriminant :

1. $x^2-0,4x+0,04 \leqslant 0$
2. $-x^2+5x<7$
3. $\frac{2}{3}x^2 \geqslant 4x-6$
4. $11x^2+16x-9<10x+8$

26

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\dfrac{2x}{x^2+1}=3$
2. $\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{2x-1}=2$
3. $\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{2x}=1$

27

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $(x-1)(x^2-5x+6)=0$
2. $\dfrac{-x^2+5x-7}{2x+5}=0$
3. $x^3-x^2+4x=0$

28

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $(4-x)(x^2-5x+6)>0$
2. $\dfrac{-x^2+3x-2}{2x+1} \geqslant 0$
3. $x^3-x^2+4x<0$

29

Soit p un nombre réel et soit (E) l'équation :
$(E)\ :\ -2x^2+5x=p$. Déterminer les valeurs de p pour lesquelles :

1. l'équation (E) n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$;
2. l'équation (E) admet une solution dans $\mathbb{R}$;
3. l'équation (E) admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.

30

On veut résoudre l'équation suivante, appelée *équation bicarrée* :

$$(E)\ :\ x^4-9x^2+14=0.$$

1. On pose $X=x^2$. Écrire l'équation (E) en fonction de X.
2. Résoudre l'équation en X.
3. En déduire les solutions de (E).
4. Appliquer cette méthode pour résoudre l'équation bicarrée $2x^4-13x^2-7=0$.
5. Résoudre l'équation $x-3\sqrt{x}-2=0$.

31

Dans un repère, on donne les courbes d'équation
$y=x-1$ et $y=\dfrac{1}{x-1}$.
Étudier la position relative de ces deux courbes ?

32

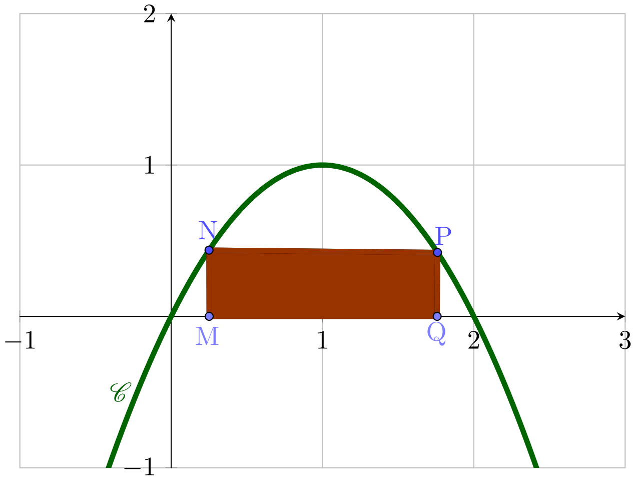
Soit un repère du plan et m un réel. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles la droite D_m d'équation $y=mx+7$ ne coupe pas la parabole d'équation $y=mx^2+7x+11$.

33

Soit x un nombre réel. Dans un repère orthonormé, on donne A$(2\,;\,1)$, B$(x\,;\,3)$ et C$(-1\,;\,3)$.
Pour quelle(s) valeur(s) de x le triangle ABC est-il rectangle en B ?

34

La courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous représente la fonction polynôme f définie par $f(x)=-x^2+2x$. Le point M a pour coordonnées $(x\,;\,0)$ où $x\in[0\,;\,1]$.



1. Déterminer les coordonnées des trois sommets du rectangles autres que M.
2. Démontrer que le périmètre du rectangle MNPQ est inférieur à 4.

35

Une entreprise produit et commercialise des casques audios au prix unitaire de 120 €.
On note x le nombre de dizaines de casques produits avec $0\leqslant x\leqslant 16$. Le coût total de production, en millier d'euros, de ces x dizaines d'unités est donnée par :

$$C(x)=0,08x^2+0,2x+0,48.$$

1. L'entreprise a vendu 160 casques. A-t-elle réalisé un bénéfice ?
2. Quel est le nombre de casques produits lorsque le coût de production est égal à 15 480 € ?
   Quel est alors le montant du bénéfice par l'entreprise ?
3. Déterminer le nombre de casques que l'entreprise doit produire et vendre pour que sa production soit rentable.

36 **Modéliser**

ABCD est un rectangle tel que AB=5 et AD=2 et Mest un point mobile sur le segment [DC].
Le triangle AMB peut-il être rectangle en M ?