Chapitre 1 : second degré

ACTIVITÉ 1 Cette courbe tient une sacrée forme !

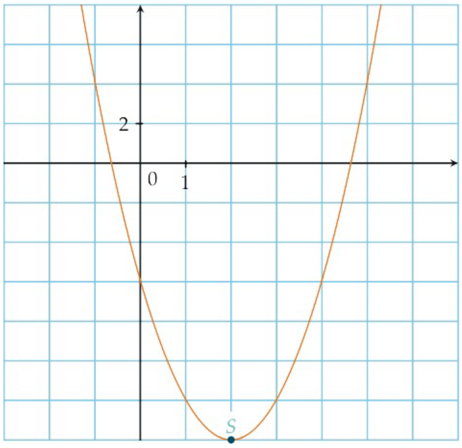
Soit f la fonction du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 8x - 6$.

1) Lecture graphique

a) Lire les coordonnées du sommet de la parabole C_f.

b) La fonction f peut s'écrire sous la forme $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, appelée forme canonique de la fonction f et cette écriture est unique. Que valent α et β ?

c) En remarquant que $f(5) = 4$, on peut écrire que $a(5-\alpha)^2 + \beta = 4$. En déduire a, puis la forme canonique de f.



2) Sans utiliser la courbe représentative de la fonction f, on peut mener le raisonnement suivant pour déterminer la forme canonique.

a) Trouver le nombre réel d tel que $2x^2 - 8x - 6 = 2\left(x^2 - 4x - d\right)$.

b) En développant $(x-2)^2$, déterminer e tel que $x^2 - 4x - d = (x-2)^2 + e$.

c) En déduire la forme canonique de f.

3) Reprendre la démarche précédente pour déterminer la forme canonique de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 4x^2 + 8x + 10.$$

4) Dans le cas général, une fonction f du second degré est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ avec } a \neq 0.$$

a) Développer $a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$.

b) En déduire que $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + d$ où d est un nombre réel que l'on déterminera.

c) On pose $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$. Calculer $f(\alpha)$.

d) Conclure sur la forme canonique de f.

1 Forme canonique

Mettre sous forme canonique les polynômes du second degré suivants.

1) $x^2 + 4x + 1$

2) $4x^2 - 3$

3) $-2x^2 + 3x - 6$

4) $x^2 + 6x$

2 INFO Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$. Écrire un algorithme permettant de calculer α et β connaissant a, b et c.

3 INFO Utiliser la `FormeCanonique[f(x)]` de Geogebra pour vérifier les exemples précédents.

4 Étudier les variations de chacune des fonctions du second degré définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions suivantes.

1) $f_1(x) = (x-1)^2 + 10$

2) $f_2(x) = -2(x-5)^2 + 2$

3) $f_3(x) = 3x^2 + \frac{1}{3}$

4) $f_4(x) = -2(x+3)^2 - 5$

5 On souhaite résoudre l'équation $2x^2 - 8x - 1 = 0$.

1. Compléter les égalités successives :
   $2x^2 - 8x = 2(x - ...)^2 + ...$
   $2x^2 - 8x - 1 = 2(x - ...)^2 + ...$
2. En déduire que l'équation $2x^2 - 8x - 1 = 0$ est équivalente à $(x-2)^2 = \frac{9}{2}$.
3. En déduire la résolution de l'équation :
   $2x^2 - 8x - 1 = 0$.
4. Résoudre de la même façon l'équation :
   $-x^2 + 3x + 2 = 0$.

6 Étudier les variations de chacune des fonctions du second degré définies sur $\mathbb{R}$ par les expressions suivantes.

1) $f_1(x) = x^2 - x + 1$

2) $f_2(x) = -\frac{1}{2}(x-5)(x+3)$

3) $f_3(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}$

4) $f_4(x) = 3x^2 - 6x + 3$

7 Le nombre a est-il racine du trinôme $P(x)$?

1. $a = 1$ — $P(x) = 8x^2 - 7x - 1$
2. $a = 0$ — $P(x) = -x^2 + 2x - 1$
3. $a = -2$ — $P(x) = x^2 - 2x - 4$
4. $a = 2$ — $P(x) = x^2 + x + 2$

8 Déterminer les racines des trinômes suivants.

1) $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$

2) $x^2 - 4x + 4$

3) $4 + 5x - x^2$

4) $4x^2 + 3$

9 **INFO** Reprendre l'exercice précédent après avoir programmé la calculatrice (algorithme du second degré) ou en utilisant la fonction disponible.

10 Établir le tableau de signe de chaque trinôme puis résoudre les inéquations du second degré suivantes dans $\mathbb{R}$.

1) $x^2 + x - 2 > 0$

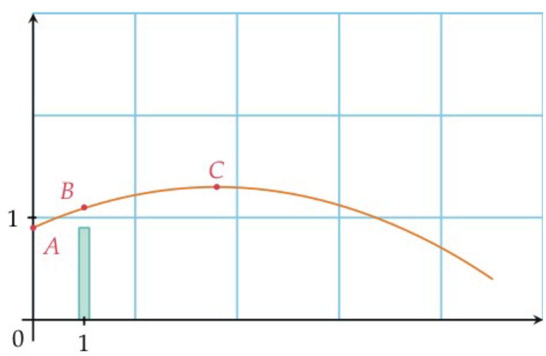
2) $-3x^2 + x - 2 \leq 0$

3) $2x^2 + 3x \geq 0$

4) $2x^2 - 8 < 0$

11 **Tennis**

Un tennisman frappe droit devant lui une volée à 1 m du filet alors que la balle est à 0,9 m de hauteur en A. La balle franchit le filet en B à une hauteur de 1,1 m et atteint en C une hauteur maximale de 1,3 m. La longueur d'un terrain de tennis est 23,77 m.
La balle sortira-t-elle du cours ?



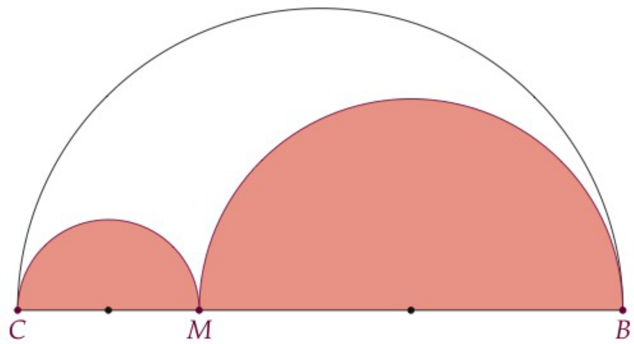
12 Un logo

Un designer doit réaliser un logo pour une entreprise. Il veut créer la partie blanche de la figure ci-dessous, située à l'intérieur du demi-disque de diamètre $[BC]$ et à l'extérieur des demi-disques de diamètre $[CM]$ et $[MB]$ où M est un point quelconque du segment $[BC]$.

On a $BC = 10$ cm et on pose $x = CM$.

Le designer doit faire en sorte que l'aire de la partie blanche soit égale à la moitié de l'aire du demi-disque de diamètre $[BC]$.

Comment doit-il positionner le point M ?



13 Somme et produit des racines

L'objectif est de démontrer et d'illustrer la propriété.

PROPRIÉTÉ

Un trinôme du second degré $X^2 - SX + P$ dont le discriminant est strictement positif a deux racines x_1 et x_2 telles que $\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1 \times x_2 = P \end{cases}$

1. Démonstration

   Soient x_1 et x_2 les racines du polynôme $X^2 - SX + P$ de discriminant positif.

   (a) Développer l'expression $(X - x_1)(X - x_2)$.

   (b) En déduire, par unicité des coefficients d'un polynôme du second degré, que l'on a le système suivant

   $$\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1 \times x_2 = P. \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

2. Application 1

   Donner l'écriture d'un trinôme du second degré dont les racines sont :

   a) 2 et 3 **b)** 1 et -4

3. Application 2

   (a) On considère l'équation du second degré suivante $x^2 - 5x + 6 = 0$. **(2)**

   Montrer que 2 est solution de l'équation **(2)**.

   En déduire la deuxième solution de l'équation **(2)** en résolvant le système **(1)**.

   (b) On considère l'équation $x^2 + x - 2 = 0$.

   Trouver une solution évidente, puis en déduire la deuxième solution en résolvant le système **(1)**.

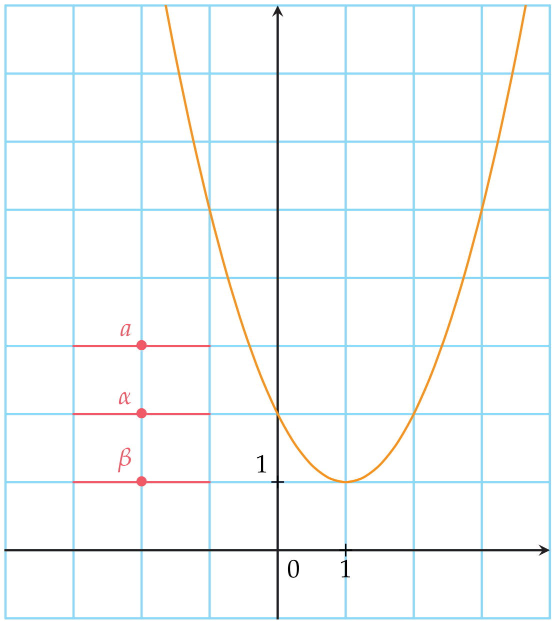
4. **INFO** Écrire un algorithme permettant de déterminer a, b et c puis les racines connaissant S et P.

ACTIVITÉ 2 Combien de solutions ?

INFO *À rédiger et rendre sur Moodle*

Soit f la fonction du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ dont la forme canonique est $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

Partie 1 : Expérimentation



1) Avec un logiciel de géométrie, créer trois variables réelles a, α et β compris entre -5 et 5 avec un pas de 0,1.

2) Fixer $a = 1$. Faire varier α et β.
Du quel de ces deux paramètres dépend le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$?
Préciser les observations effectuées.

3) Fixer $\beta = 1$. Faire varier a et α.
Du quel de ces deux paramètres dépend le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$?
Préciser les observations effectuées.

4) Fixer $\beta = 0$.
Combien l'équation a-t-elle de solutions ?

Partie 2 : Synthèse des observations

1) Recopier et compléter le tableau ci-dessous qui donne le nombre de solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ selon les valeurs de a et β.

2) Compléter les propositions ci-dessous :

- si $\beta = 0$, alors l'équation a ... solution(s),
- si a et β sont de même signe, l'équation a ... solution(s),
- si a et β sont de signe contraire, l'équation a ... solution(s).

Partie 3 : Démonstration

Il est équivalent de résoudre l'équation de départ ou celle partant de la forme canonique : $a(x-\alpha)^2 + \beta = 0$.

1) Résoudre cette équation si $\beta = 0$.

2) Si $\beta \neq 0$, montrer que le nombre de solutions dépend du nombre $\frac{\beta}{a}$.

3) En quoi cela rejoint-il la synthèse effectuée **partie B. 2)** ?