Suites. Le raisonnement par récurrence

Terminale EDS Maths

2022-2023

Lycée Pierre Mendes France - Tunis

En mathématiques, un certain nombre de propriétés dépendent d'un entier naturel n. Par exemple, la somme des naturels de 1 à n est égale à $\dfrac{n(n+1)}{2}$. On peut vérifier l'exactitude de ce résultat pour $n = 2$, $n = 3$, etc. Mais, quand bien même on le vérifierai jusqu'à $n = 100$ ou même $n = 10^{4000}$, cela **ne démontre pas** qu'elle est vraie **pour tout entier** n.
Pour effectuer cette démonstration, on dispose d'un outil particulier : **l'axiome de récurrence**.

Voici un exemple pour vulgariser le concept.
Supposons que l'on se trouve au début d'une file illimitée de personnes portant toutes un chapeau, et que la règle veuille que lorsque l'une d'elles quitte son chapeau, alors la suivante quitte le sien. Alors, si la première personne quitte son chapeau, on est assuré que toutes les autres le quitteront. C'est cette propriété qui se traduit en mathématiques par l'axiome de récurrence.

Propriété 1 (*Axiome de récurrence*)

Soit n_0 un entier donné (souvent $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$)
Si l'on veut démontrer qu'une propriété P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$, il faut :

1. *Vérifier que la propriété est **initialisée**, c'est-à-dire montrer que P_{n_0} est vraie.*
2. *Montrer que la propriété est **héréditaire à partir du rang** n_0 : on suppose que pour un certain entier naturel $n \geq n_0$ la propriété P_n est vraie (on appelle cela l'hypothèse de récurrence), et on démontre que la propriété P_{n+1} est vraie.*

Exercice 1.
On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_{n+1} = \sqrt{5u_n - 4}$ et $u_1 = 8$.
Démontrer par récurrence que $u_n \geq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2.
Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 5u_n - 4$.
Démontrer par récurrence que l'on a $u_n = 2 \times 5^n + 1$ pour tout naturel n.

Exercice 3.
Démontrer par récurrence que $\sum_{q=1}^{n} q^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 4. Inégalité de Bernoulli
Soit α un réel positif. Démontrer par récurrence l'inégalité $(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$.

Exercice 5.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $7^n - 1$ est un multiple de 6.

Exercice 6.
(u_n) est la suite définie par $u_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 4$.
Démontrer par récurrence que (u_n) est croissante.

Exercice 7.
(u_n) est la suite définie par $u_0 = 8$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.
Démontrer par récurrence que (u_n) est décroissante.

Exercice 8.
(u_n) est la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n}$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Exercice 9.
La suite (u_n) est définie par $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4 en donnant les résultats sous forme de fraction irréductible.
2. (a) Quelle conjecture peut-on faire sur l'expression de u_n en fonction de n ?
   (b) Démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 10.
Montrer que la proposition :

$$P(n) : 2^n < 0$$

est héréditaire à partir du rang 0. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 11. Bien comprendre cet exercice !
Pour tout entier n, on considère la propriété :

$$P(n) : \text{« } 2^n \geq (n+1)^2 \text{ »}.$$

1. Montrer que la propriété P est héréditaire à partir du rang 2.
2. Pour quelles valeurs de n cette propriété est-elle vraie ?

Exercice 12. RPR et étude de fonction
Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et pour tout entier n :

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}.$$

1. Etudier les variations de la fonction f définie sur $]-1; +\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{4x - 2}{x + 1}.$$
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier n, $2 < u_n \leq 3$

Exercice 13. Récurrence forte. Hors programme, mais facile à comprendre.
On considère la suite u définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$u_{n+1} = 4u_n - 3u_{n-1}.$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier n :

$$u_n = \frac{3^n - 1}{2}.$$