# Limites de suites
# Terminale S

Lycée Pierre Mendes France - Tunis

## Table des matières

# 1 Définitions

## 1.1 Limite finie et suites convergentes

**Définition 1**

*Soit $\ell$ un réel. On dit qu'une suite $(u_n)$ a pour limite $\ell$ quand $n$ tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant $\ell$ contient tous les termes $u_n$ à partir d'un certain rang.*
*On dit alors que $(u_n)$ est une suite* ***convergente*** *et converge vers $\ell$.*

**Reformulation.**
Cette définition revient à dire que la suite $(u_n)$ converge vers $\ell$ lorsque, pour tout $r > 0$, il existe un rang $N$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| < r$.
$|u_n - \ell|$ désigne la distance de $u_n$ à $\ell$.

**Illustration.**

**Propriété 1**

*La limite d'une suite $(u_n)$ convergente est* ***unique****. On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.*

**Démonstration. Accrochez-vous...**

...........................................................................................
...........................................................................................
...........................................................................................
...........................................................................................
...........................................................................................
...........................................................................................
...........................................................................................
...........................................................................................
...........................................................................................
...........................................................................................
...........................................................................................
...........................................................................................
...........................................................................................
...........................................................................................
...........................................................................................
...........................................................................................
...........................................................................................
...........................................................................................
...........................................................................................
...........................................................................................

**Propriété 2** (*Admise*)

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0$, *où* $k$ *est un entier naturel non nul.*

## 1.2 Suites divergentes

**Définition 2**

*On dit qu'une suite est* ***divergente*** *lorsqu'elle n'est pas convergente (tout simplement).*

**Définition 3**

*Une suite* $(u_n)$ *tend vers* $+\infty$ *lorsque tout intervalle de la forme* $[A;+\infty[$ *contient tous les termes* $u_n$ *à partir d'un certain rang.*
*On note* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

**Reformulation.**
Cette définition revient à dire que la suite $(u_n)$ diverge vers $+\infty$ lorsque, pour tout tout réel $A$, il existe un rang $N$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \geq A$.

**Illustration.**

**Exercice à faire à la maison.**
Énoncer une définition similaire pour $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

................................................................................................................................................................
................................................................................................................................................................
................................................................................................................................................................
................................................................................................................................................................
................................................................................................................................................................
................................................................................................................................................................
................................................................................................................................................................
................................................................................................................................................................
................................................................................................................................................................
................................................................................................................................................................
................................................................................................................................................................
................................................................................................................................................................
................................................................................................................................................................
................................................................................................................................................................
................................................................................................................................................................
................................................................................................................................................................

**Remarque.**
Certaines suites n'ont pas de limites, par exemple la suite $(u_n)$ définie pour tout entier $n$ par $u_n = (-1)^n$.
De telles suites sont bien divergentes, puisqu'elles ne sont pas convergentes.
Il existe donc deux types de suites divergentes, celles qui tendent vers l'infini, et celles qui n'ont pas de limite.

**Propriété 3** (***Admise***)

*$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$, où $k$ est un entier naturel non nul.*

## 2 Limites et opérations

Dans cette partie, $(u_n)$ et $(v_n)$ désignent deux suites ; $\ell$ et $\ell'$ sont deux réels. Les symbole $\infty$, s'il se présente seul, désigne soit $+\infty$, soit $-\infty$.

### 2.1 Somme

**Propriété 4** (***Admise***)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$ | $\ell$ | $\ell$ | $\ell$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$ | $\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) =$ | | | | | | |

### 2.2 Produit

**Propriété 5** (***Admise***)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$ | $\ell$ | $\ell \neq 0$ | $\infty$ | *0* |
| *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$ | $\ell'$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |
| *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) =$ | | | | |

### 2.3 Quotient

**Propriété 6** (***Admise***)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$ | $\ell$ | $\ell \neq 0$ | $\infty$ | $\ell$ *ou* $\infty$ | *0* | $\infty$ |
| *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$ | $\ell' \neq 0$ | $\infty$ | $\ell' \neq 0$ | *0 avec* $v_n$ *de signe constant* | *0* | $\infty$ |
| *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} =$ | | | | | | |

**Exercice.**
Déterminer, en justifiant rigoureusement, les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+n-6$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} (2-5n)\sqrt{n}$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-10n+5$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n-4}{3+n}$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^2-n}{n^3+1}$

# 3 Limites et comparaisons

## 3.1 Limite infinie

**Théorème 1** (*dit théorème de comparaison*)

*Soit $N$ un entier naturel.*
*Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites telles que, pour tout $n \geq N$ (à partir du rang $N$ en fait), $u_n \leq v_n$.*

- *Si* $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, *alors* $\lim_{n \to +\infty} v_n = \ldots$
- *Si* ..........................................................................................
  ..........................................................................................
  ..........................................................................................

**Exemple.**
Déterminer $\lim_{n \to +\infty} n + \cos(n)$.
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................

**Démonstration.**
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................

### 3.2 Limite finie

**Théorème 2 (*dit théorème des gendarmes ou théorème sandwich. Admis.*)**

*Soit $N$ un entier naturel et soit $\ell$ un réel. Soient $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ trois suites telles que, pour tout $n \geq N$ (à partir du rang $N$ en fait), $u_n \leq v_n \leq w_n$. Si $(u_n)$ et $(w_n)$ convergent vers la même limite $\ell$, alors ...*

*Illustration*

Les deux propriétés qui suivent sont moins utilisées.

**Propriété 7**

*Soient $N$ un entier naturel, $\ell$ et $\ell'$ deux réels.*
*Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites telles que, pour tout $n \geq N$, $u_n \leq v_n$.*
*Si $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent vers $\ell$ et $\ell'$ respectivement, alors ...*

**Propriété 8**

*Soit $\ell$ un réel et $(u_n)$ une suite définie pour tout entier naturel $n$.*

- *Si $(u_n)$ est croissante et converge vers $\ell$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ , $u_n \leq \ell$.*
- *Si* ..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................

**Exercice à faire à la maison.**
Démontrer les deux propriétés.

**Exercice.**
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} n + \sqrt{\dfrac{1}{n+1}}$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 + (-1)^n$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+\cos(n)}$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{2+(-1)^n}{n^2+1}$

..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................
..........................................................................................

# 4 Suites géométriques, suites monotones

## 4.1 Suites du type $(q^n)$

**Propriété 9**

*Soit $q$ un réel.*

1. *Si $q \leq -1$, alors la suite $(q^n)$ ..........*

2. *Si $-1 < q < 1$, alors la suite $(q^n)$ ..........*

3. *Si $q = 1$, alors la suite $(q^n)$ ..........*

4. *Si $q > 1$, alors la suite $(q^n)$ ..........*

**Exemple 1.**

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^n}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{5^n}{3^{n+1}}$

..........

**Exemple 2.**

Étudier la convergence de chacune des suites suivantes définies sur $\mathbb{N}$ .

1. $(w_n)$, suite géométrique de raison $-\dfrac{5}{3}$ et de premier terme égal à 5.
2. $(z_n)$, suite géométrique de raison $e$ et de premier terme égal à -2.

..........

### 4.2 Suites monotones

Soit $(u_n)$ une suite de nombres réels. Soient $M$ et $m$ deux réels.

**Théorème 3 (*Théorème de convergence monotone. Très utilisé. Admis*)**

- *Si la suite $(u_n)$ est croissante et majorée, alors elle est ......*
- *Si la suite $(u_n)$ ..........................................................................................*

**Remarque. Éviter le piège suivant.**
Le théorème assure l'existence de la limite $\ell$, mais ne donne pas la valeur de $\ell$.

**Théorème 4**

- *Si $(u_n)$ est croissante et non majorée, alors $(u_n)$................................................*
- *Si $(u_n)$ est décroissante et non minorée, alors ..........................................................*

**Exercice.**
Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$.

1. Montrer par récurrence que la suite $(u_n)$ est minorée par 2.
2. En déduire que la que $(u_n)$ est décroissante.
3. Que peut-on en déduire ?

.............................................................................................................
.............................................................................................................
.............................................................................................................
.............................................................................................................
.............................................................................................................
.............................................................................................................
.............................................................................................................
.............................................................................................................
.............................................................................................................
.............................................................................................................
.............................................................................................................
.............................................................................................................
.............................................................................................................
.............................................................................................................
.............................................................................................................
.............................................................................................................
.............................................................................................................
.............................................................................................................
.............................................................................................................
.............................................................................................................
.............................................................................................................
.............................................................................................................
.............................................................................................................
.............................................................................................................
.............................................................................................................