Fonctions Polynômes du Second Degré

I Fonction polynôme de degré 2:

Définition:

On appelle fonction polynôme du second degré toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où les coefficient a, b et c sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

Remarque:
Une fonction polynôme de degré 2 s'appelle également fonction trinôme du second degré ou par abus de langage "trinôme".

Exemples et contre-exemples:

- $f_1(x) = 3x^2 - 2x + 4$ ($a = \ldots\ldots$, $b = \ldots\ldots$ et $c = \ldots\ldots$)
- $f_2(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 3$ ($a = \ldots\ldots$, $b = \ldots\ldots$ et $c = \ldots\ldots$)
- $f_3(x) = -4x^2 + 3x$ ($a = \ldots\ldots$, $b = \ldots\ldots$ et $c = \ldots\ldots$)

  sont des fonctions polynômes de degré 2.
- $g(x) = 3x - 1$ est une fonction polynôme de degré $\ldots\ldots(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$.
- $h(x) = 4x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ est une fonction polynôme de degré $\ldots\ldots$
- $k(x) = 3x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 5x - 1$ est une fonction polynôme de degré $\ldots\ldots$

II Forme canonique d'une fonction polynôme de degré 2:

Soit f définie sur $\mathbb{R}$Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 20x + 10$

On veut exprimer la fonction f sous la forme canonique : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

où a, α et β sont des nombres réels.
$f(x) = 2x^2 - 20x + 10$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

d'où la forme canonique de f est de la forme

$$f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

où $a = \ldots\ldots$, $\alpha = \ldots\ldots$ et $\beta = \ldots\ldots$

Propriété:

> Toute fonction polynôme f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme :
>
> $$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$
>
> où α et β sont deux nombres réels.
>
> Cette dernière écriture s'appelle la forme canonique de f.

Démonstration:

Comme $a \neq 0$, on peut écrire pour tout réel x:

$f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Soit, en posant $\alpha = \ldots\ldots$ et $\beta = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, on obtient: pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a:

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Exemple

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$,

on a $a = \ldots\ldots$, $b = \ldots\ldots$ et $c = \ldots\ldots$ alors:

$\alpha = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

et $\beta = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

D'où, la forme canonique de la fonction polynôme du second degré est

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

III Variation et représentation graphique d'une fonction polynôme de degré 2:

Quand on connaît la forme canonique d'une fonction polynôme du second degré, on peut en déduire son maximum ou son minimum.

Démonstration:

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, alors pour tout réel x, $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

1. Étudions le cas où $a < 0$

   Si $x_1 < x_2 \leqslant \alpha$ alors $x_1 - \alpha < x_2 - \alpha \leqslant 0$ d'où $(x_1-\alpha)^2 > (x_2-\alpha)^2$. (la fonction carré est décroissante sur $]-\infty; 0]$)
   On en déduit que $a(x_1-\alpha)^2 + \beta < a(x_2-\alpha)^2 + \beta$ soit $f(x_1) < f(x_2)$.
   Si $\alpha \leqslant x_1 < x_2$ alors $0 \leqslant x_1 - \alpha < x_2 - \alpha$ d'où $(x_1-\alpha)^2 < (x_2-\alpha)^2$. (la fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$)
   On en déduit que $a(x_1-\alpha)^2 + \beta > a(x_2-\alpha)^2 + \beta$ soit $f(x_1) > f(x_2)$.

   Ainsi, si $a < 0$ la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty; \alpha]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$

2. Étudions le cas où $a > 0$

   Si $x_1 < x_2 \leqslant \alpha$ alors $x_1 - \alpha < x_2 - \alpha \leqslant 0$ d'où $(x_1-\alpha)^2 > (x_2-\alpha)^2$.
   On en déduit que $a(x_1-\alpha)^2 + \beta > a(x_2-\alpha)^2 + \beta$ soit $f(x_1) > f(x_2)$.
   Si $\alpha \leqslant x_1 < x_2$ alors $0 \leqslant x_1 - \alpha < x_2 - \alpha$ d'où $(x_1-\alpha)^2 < (x_2-\alpha)^2$.
   On en déduit que $a(x_1-\alpha)^2 + \beta < a(x_2-\alpha)^2 + \beta$ soit $f(x_1) < f(x_2)$.

   Ainsi, si $a > 0$ la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty; \alpha]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$

On retient :

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
Les variations de f sont données par les tableaux suivants :

Cas 1

$\boxed{a < 0}$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	β	$\searrow$	

Cas 2

$\boxed{a > 0}$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	β	$\nearrow$	

EXEMPLE

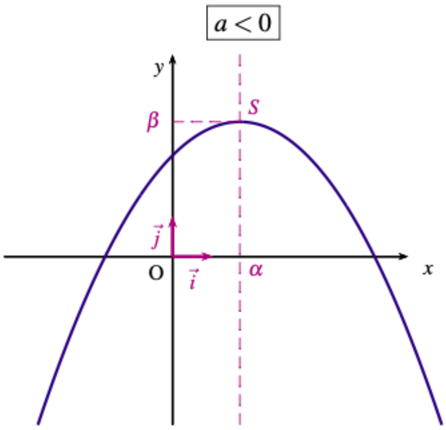
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par par $f(x) = -3x^2 - 2x + 1$. Ici $a = \ldots\ldots$, $b = \ldots\ldots$ et $c = \ldots\ldots$.
Ainsi, $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = \ldots\ldots$ et $\beta = f(\alpha) = \ldots\ldots$. Comme $a < 0$, on en déduit le tableau des variations de f :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	

Courbe Représentative

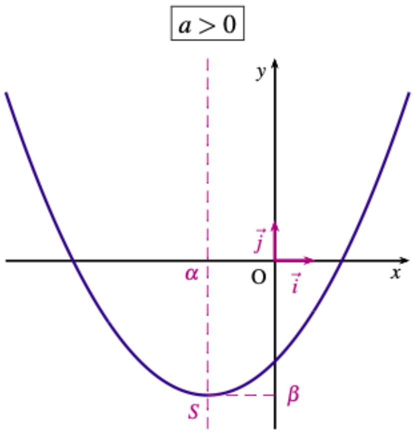
Dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan, la courbe représentative d'une fonction polynôme f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ est une parabole.
On dit que la parabole a pour équation $y = ax^2 + bx + c$
Le sommet S de la parabole a pour abscisse α. Il correspond au maximum ou au minimum sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.
La parabole a pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$

Cas 1



La parabole est tournée vers le bas

Cas 2



La parabole est tournée vers le haut

III.0.1 Symétrie de la parabole

Pour des raisons de symétrie, l'abscisse α du sommet de la parabole est la moyenne des abscisses x_1 et x_2 de deux points de la parabole ayant même ordonnée : $\alpha = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = 2x^2 - 6x - 5$.

Déterminons deux points de la courbe représentative de la fonction f ayant la même ordonnée.

Cherchons les solutions de l'équation $f(x) = -5$

$$2x^2 - 6x - 5 = -5 \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Soit $x = \ldots\ldots$ ou $x = \ldots\ldots$. Par conséquent, le sommet de la parabole a pour abscisse $\alpha = \ldots\ldots\ldots\ldots$

IV Racine d'une fonction polynôme de degré 2:

Définition:

On appelle racine de la fonction f polynôme de degré 2 tout nombre réel x_1 tel que $f(x_1) = 0$

Autrement dit, une racine de f est une solution de l'équation $f(x) = 0$.

Exemple:

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 1)(x - 1)$ est une fonction polynôme du second degré. En développant, on obtient :

$$f(x) = 2x^2 - 3x - 1$$

Les racines de f sont $\ldots\ldots$ et $\ldots\ldots$

En effet,

$f(1) = \ldots\ldots$ et $f(\frac{1}{2}) = \ldots\ldots$

V Factorisation d'une fonction polynôme de degré 2:

Propriété:

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme : $f(x) = ax^2 + bc + c$

où les coefficient a, b et c sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

Si le réel x_1 est une racine de f , alors f peut se factoriser par $x - x_1$ sous la forme $f(x) = (x - x_1)(ax + d)$ où d est un nombre réel.

Conséquences:

• Si f admet deux racines x_1 et x_2 , alors f peut se factoriser par

$$f(x_1) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

• Une fonction f polynôme du second degré admet au plus 2 racines.

Propriété:

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme : $f(x) = ax^2 + bc + c$

où les coefficient a, b et c sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

Si la fonction f admet deux racines x_1 et x_2, alors f peut se factoriser sous la forme

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Exemple:

Soit f La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$.

On a :
$f(1) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

et $f(2) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Alors la fonction f admet deux racines $x_1 = \dots\dots$ et $x_2 = \dots\dots$

d'où la forme factorisée de f est

$$f(x) = \dots\dots(x - \dots\dots)(x - \dots\dots)$$

VI Somme et produit de racines d'une fonction polynôme de degré 2:

On admet que deux fonctions polynômes du second degré sont égales si et seulement si elles ont les mêmes coefficients

Propriété:

> Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme : $f(x) = ax^2 + bx + c$
>
> où les coefficient a, b et c sont des réels donnés avec $a \neq 0$.
>
> Si f admet les réels x_1 et x_2 pour racines, alors
>
> ▷ La somme des racines est $S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$
>
> ▷ Le produit des racines est $P = x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$

Démonstration:

D'une part, $f(x) = ax^2 + bx + c$

D'autre part, $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

D'où $a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 + bx + c$

On a , $a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - x_2 \times x - x_1 \times x + x_1 \times x_2$

$= ax^2 - a(x_1 + x_2) \times x + a \times x_1 \times x_2$

$= ax^2 - a \times S \times x + a \times P$

$= ax^2 + bx + c$

D'où, $-a \times S = b$ et $a \times P = c$

Ainsi, $\boxed{S = \dots\dots}$ et $\boxed{P = \dots\dots}$

Applications:

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Déterminer les racines de f.

On constate que $f(1) = \ldots\ldots$, donc $x_1 = \ldots\ldots$ est une racine évidente de f.

Or, $x_1 \times x_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ d'où $\ldots\ldots\ldots\ldots$

Ainsi, $x_2 = \ldots\ldots$

Donc, les racines de la fonction f sont $\boxed{x_1 = \ldots\ldots}$ et $\boxed{x_2 = \ldots\ldots}$

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 4x - 7$. Déterminer les racines de f.

   On constate que $f(-1) = \ldots\ldots$, donc $x_1 = \ldots\ldots$ est une racine évidente de f.

   Or, $x_1 \times x_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ d'où $-1 \times x_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

   Ainsi, $x_2 = \ldots\ldots$
   Donc, les racines de la fonction f sont $\boxed{x_1 = \ldots\ldots}$ et $\boxed{x_2 = \ldots\ldots}$

VII Équations du second degré:

Une équation du second degré à une inconnue x, est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b, c sont des réels et $a \neq 0$.
L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$ peut s'écrire sous la forme $a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0$
On pose $\Delta = b^2 - 4ac$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$ équivaut à l'équation $a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$, soit encore $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} = 0$.

- Si $\Delta < 0$ alors $\dfrac{\Delta}{4a^2} < 0$ et $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$. Donc l'équation du second degré n'a pas de solution.
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$ équivaut à l'équation $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$. Donc l'équation du second degré a pour unique solution $x = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$ alors :

$$\begin{aligned}
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0
\end{aligned}$$

  Donc l'équation du second degré a deux solutions $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Propriétés:

Soit S l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ où a, b et c sont des réels fixés avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2-4ac$ le discriminant du trinôme.

- Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'a pas de solution ; $S=\emptyset$.
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation a une seule solution ; $S=\left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$.
- Si $\Delta > 0$ alors l'équation a deux solutions ; $S=\left\{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} ; \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

Exemple:

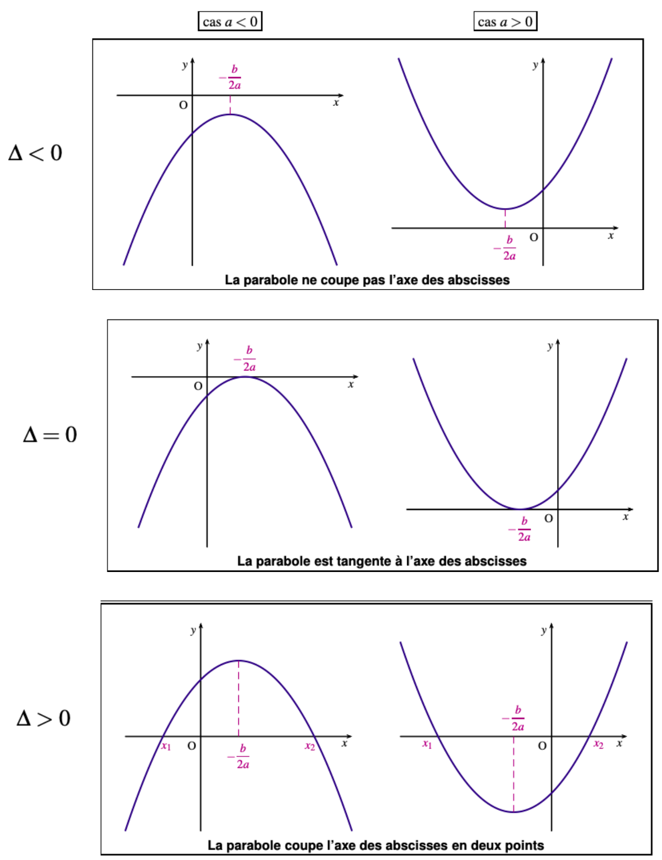
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $6x^2-3=7x$
Pour tout réel x, $6x^2-3=7x \Leftrightarrow 6x^2-7x-3=0$. Il s'agit de résoudre une équation du second degré avec $a = \ldots\ldots$, $b = \ldots\ldots$ et $c = \ldots\ldots$
Le discriminant du trinôme est $\Delta = b^2-4ac$ soit $\Delta = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.
Comme $\Delta \ldots\ldots$, l'équation admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{Soit} \quad x_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{Soit} \quad x_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

L'ensemble des solutions de l'équation $6x^2-3=7x$ est $S=\{\ldots\ldots\ldots\ldots ; \ldots\ldots\ldots\ldots\}$

Interprétation graphique:



Conséquences:

Factorisation du trinôme ax^2+bx+c avec $a \neq 0$:

- Si $\Delta < 0$ alors le trinôme ne se factorise pas.
- Si $\Delta = 0$ en notant x_0 l'unique racine : $f(x) = a(x-x_0)^2$.
- Si $\Delta > 0$ en notant x_1 et x_2 les deux racines : $f(x) = a\,(x-x_1)\,(x-x_2)$.

VIII Signe d'un trinôme:

Propriétés:

Soit f un polynôme du second degré défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2-4ac$ le discriminant du trinôme.

- Si $\Delta < 0$ alors pour tout réel x, $f(x)$ est du signe de a.
- Si $\Delta = 0$ alors $f(x)$ est du signe de a pour tout réel $x \neq -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, x_1 et x_2 désignant les deux racines du trinôme avec $x_1 < x_2$ alors $f(x)$ est du signe de a pour tout réel $x \in \left]-\infty; x_1\right[\cup \left]x_2; +\infty\right[$ et $f(x)$ est du signe contraire de celui de a pour tout réel $x \in \left]x_1; x_2\right[$.

Démonstration:

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2-4ac$ le discriminant du trinôme.

On sait que $f(x) = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$

- Si $\Delta < 0$ alors $f(x)$ est le produit par a d'une somme de deux nombres positifs donc le signe du trinôme est le signe de a pour tout réel x.

- Si $\Delta = 0$ alors $f(x) = a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ donc $f(x)$ est nul pour $x = -\dfrac{b}{2a}$; pour les autres valeurs de x le signe du trinôme est le signe de a.

- Si $\Delta > 0$, x_1 et x_2 désignant les deux racines du trinôme avec $x_1 < x_2$ alors $f(x) = a\,(x-x_1)\,(x-x_2)$.
  Étudions le signe du produit $a\,(x-x_1)\,(x-x_2)$ à l'aide d'un tableau de signe.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x-x_1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-x_2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$a\,(x-x_1)\,(x-x_2)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

Remarque:

On retiendra la règle " Un polynôme du second degré est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe contraire de a entre les racines".

Exemple:

1. Résoudre l'inéquation $-\dfrac{x^2}{4} - x + 3 \leqslant 0$.

   Étudions le signe du trinôme $-\dfrac{x^2}{4} - x + 3$ avec $a = -\dfrac{1}{4}$, $b = -1$ et $c = 3$

   Le discriminant du trinôme est $\Delta = b^2 - 4ac$ soit $\Delta = (-1)^2 - 4 \times \left(-\dfrac{1}{4}\right) \times 3 = 1 + 3 = 4$.

   Comme $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines :

   $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{Soit} \qquad x_1 = \frac{1-2}{-\frac{1}{2}} = 2$$

   $$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{Soit} \qquad x_2 = \frac{1+2}{-\frac{1}{2}} = -6$$

   Un polynôme du second degré est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe contraire de a entre les racines. Ainsi :

x	$-\infty$		-6		2		$+\infty$
Signe du trinôme $-\dfrac{x^2}{4} - x + 3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   L'ensemble des solutions de l'inéquation $-\dfrac{x^2}{4} - x + 3 \leqslant 0$ est $S =]-\infty; -6] \cup [2; +\infty[$.

2. Étudier les positions relatives de la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$ avec la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2x - 3$

   Les positions relatives de la parabole et de la droite se déduisent du signe de

   $$x^2 - (2x - 3) = x^2 - 2x + 3$$

   Le discriminant du trinôme est $\Delta = b^2 - 4ac$ soit $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 - 12 = -8$.
   Comme $\Delta < 0$, le trinôme est du signe de a donc pour tout réel x, $x^2 - 2x + 3 > 0$.

   La parabole $\mathcal{P}$ est au dessus de la droite $\mathcal{D}$.

IX Application: Position relative de deux courbes

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + 8x - 11$ et $g(x) = x - 1$.

Étudier la position relative des courbes représentatives C_f et C_g.

On va étudier la différence $f(x) - g(x)$

• Si $f(x) - g(x) \leq 0$ sur un intervalle I, alors la courbe C_f est en-dessous de la courbe C_g sur l'intervalle I.

• Si $f(x) - g(x) \geq 0$ sur un intervalle I, alors la courbe C_f est au-dessus de la courbe C_g sur l'intervalle I.

$f(x) - g(x) = (-x^2 + 8x - 11) - (x - 1)$

$= -x^2 + 7x - 10$

Le discriminant du trinôme est $\Delta = 7^2 - 4 \times (-1) \times (-10) = 9$

Ainsi, le trinôme possède deux racines distinctes:

$$x_1 = \frac{-7 - \sqrt{9}}{2 \times (-1)} = 5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-7 + \sqrt{9}}{2 \times (-1)} = 2$$

D'où, on dresse le tableau de signe du trinôme $-x^2 + 7x - 10$

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On conclut:
○ La courbe C_f est en-dessous de la courbe C_g sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 2]$ et sur l'intervalle $[5\ ;\ +\infty[$
○ La courbe C_f est au-dessus de la courbe C_g sur l'intervalle $[2\ ;\ 5]$.