Les Suites (Partie 1)

I Raisonnement par récurrence:

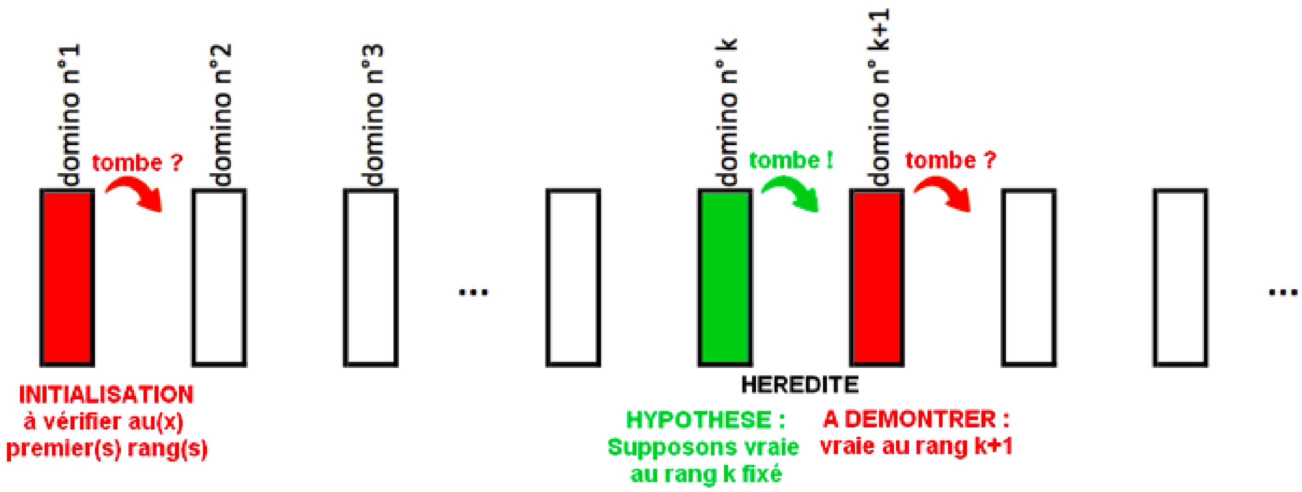
I.1 Le principe:

Définition 1

Une propriété est dite héréditaire à partir du rang n_0 si lorsque pour un entier $k \geq n_0$, la propriété est vraie, alors elle est vraie pour l'entier $k + 1$.

Exemple:

On considère une file illimitée de dominos placés côte à côte. La règle veut que lorsqu'un domino tombe, alors il fait tomber le domino suivant et ceci à n'importe quel niveau de la file.
Alors, si le premier domino tombe, on est assuré que tous les dominos de la file tombent.



On suppose que si "un domino (k) tombe" alors "le domino $(k + 1)$ tombe" aussi.

Principe du raisonnement par récurrence:

Si la propriété $P(n)$ est :

- vraie au rang n_0
- héréditaire à partir du rang n_0 (Hérédité)

alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Dans l'exemple, le premier domino tombe (**initialisation**). Ici $n_0 = 1$.

L'hérédité est vérifié.

On en déduit que tous les dominos tombent.

Remarque: Une démonstration par récurrence sur les entiers est mise en œuvre lorsque toute démontration "classique" est difficile.

I.2 Exemples:

1. On considère le suite (u_n) définie pour tout entier nanutel n par $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ et $u_0 = 1$

   Démontrer par récurrence que $u_n = (n+1)^2$

   - **Initialisation:**

   - **Hérédité:**
     Hypothèse de récurrence:

     Démontrons que:

   - **Conclusion:**

     La propriété est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, soit $u_n = (n+1)^2$.

2. On consière la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$

   Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

On va démontrer que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} \geq u_n$.

Soit $P(n)$:

- **Initialisation:**

- **Hérédité:**
  Hypothèse de récurrence:

  Démontrons que:

- **Conclusion:**

  La propriété est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, soit $u_{n+1} \geq u_n$ et donc la suite (u_n) est croissante.

I.3 Inégalité de Bernoulli

Propriété:

Soit un nombre réel a strictement positif.

Pour tout entier naturel n, on a $(1 + a)^n \geq 1 + na$

Démonstration:

Soit $P(n)$:

- **Initialisation:**

- **Hérédité:**
  Hypothèse de récurrence:

  Démontrons que:

- **Conclusion:**

  La propriété est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.

Remarque:
L'initialisation est indispensable sinon on peut démontrer des propriétés fausses.

En effet, démontrer par exemple que la propriété "2^n est divisible par 3" est héréditaire sans vérifié l'initialisation.

Supposons qu'il existe un entier k tel que "2^k est divisible par 3".

$2^{k+1} = 2^k \times 2 = 3p \times 2$ où p est un entier (d'après l'hypothèse de récurrence).

D'où $2^{k+1} = 6p$ donc 2^{k+1} est divisible par 3.

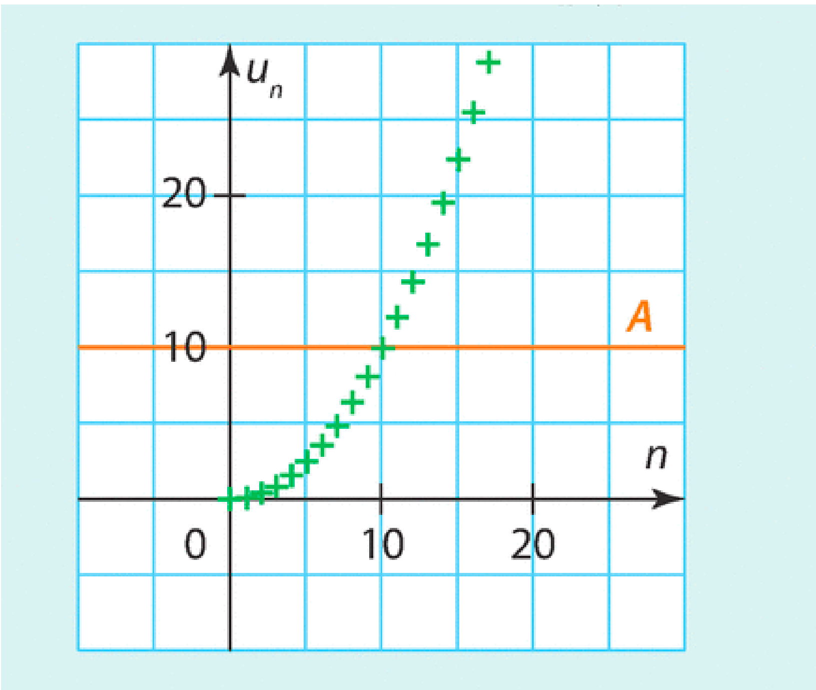
L'hérédité est vérifiée et pourtant la proriété n'est jamais vraie.

II Limite d'une Suite:

II.1 Limite infinie:

Exemple:

La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2$, a pour limite ....



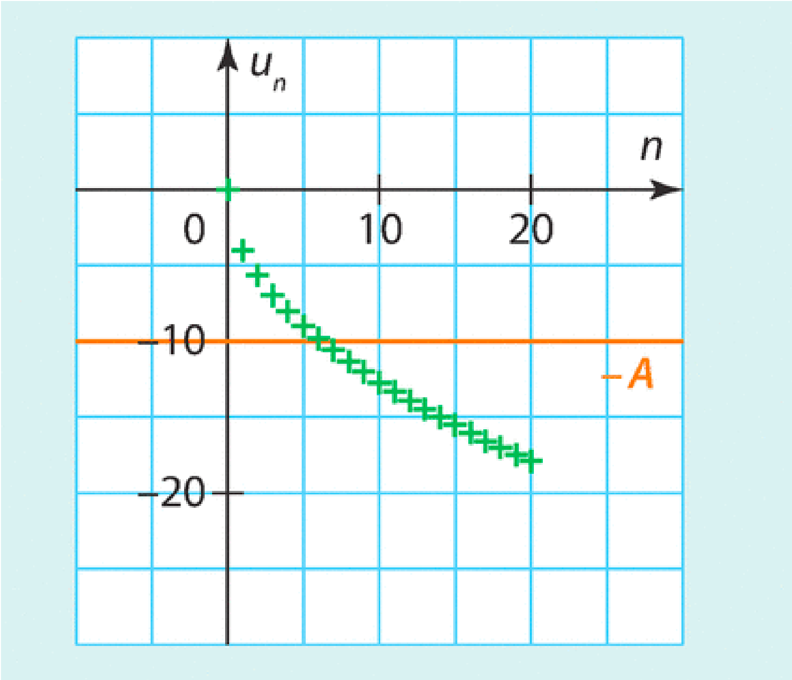
En effet, les termes de la suite deviennent aussi grands que l'on souhaite à partir d'un certain rang.

Si on prend un réel A quelconque, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Définition 2

- On dit que la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle $]A; +\infty[$, A réel strictement positif, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$
On dit que le suite (u_n) **diverge**.

- On dit que la suite (u_n) admet pour limite $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle $]-\infty; -A[$, A réel strictement positif, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$
On dit que le suite (u_n) **diverge**.



Exemple

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^2$

Pour tout réel $A > 0$, $u_n > A \Leftrightarrow n^2 > A$

$\Leftrightarrow n > \sqrt{A}$ car $A > 0$

Donc l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir du rang n_0, avec $n_0 = E(\sqrt{A}) + 1$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Donc la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

Algorithme permettant de déterminer un rang à partir duquel une suite croissante de limite infinie est supérieure à un nombre réel A:
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 4u_n$.
Cette suite est croissante et admet pour limite . . . .

Voici un algorithme écrit en langage naturel:

Langage naturel

Définir fonction seuil(A)
 	
n ← 0
u ← 2
 	
Tant que u < A
    n ← n + 1
    u ← 4u
Fin Tant que
 	
Afficher n

En appliquant cet algorithme avec $A = 100$, on obtient en sortie $n = 3$. À partir du terme u_3, les termes de la suite dépassent 100.

En langage calculatrice et Python, cela donne:

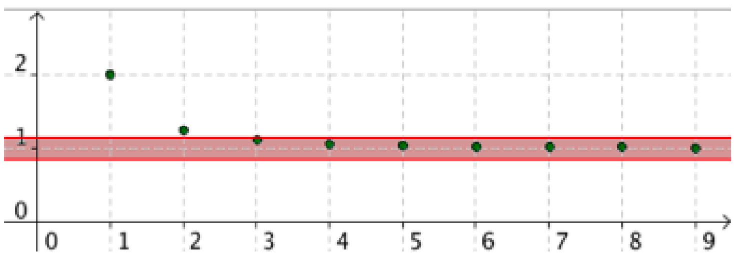
TI	CASIO	Python

PROGRAM:SEUIL
:Input A
:0→N
:2→U
:While U<A
:N+1→N
:4*U→U
:End
:Disp N
	======SEUIL
	"A="?→A↵
	0→N↵
	2→U↵
	While U<A↵
	N+1→N↵
	4×U→U↵
	WhileEnd↵
	N
		def seuil(a):
		    n=0
		    u=2
		    while u<a:
		        n=n+1
		        u=4*u
		    return(n)

II.2 Limite finie:

Exemple:

La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ pau $u_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$ a pour limite **1**.



En effet, les termes de la suite se resserrent autour de 1 à partir d'un certain rang.

Si on prend un intervalle ouvert quelconque centré en 1, tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle à partir d'un certain rang.

Définition 3
On dit que la suite (u_n) admet pour limite ℓ si tout intervalle ouvert centré en ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note:

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$$

Une telle suite est dite **convergente**.

Définition 4
Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**

Remarque:

Une suite qui est divergente n'admet pas nécessairement de limite infinie.

Par exemple, la suite de terme générale $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs -1 et 1. Elle n'admet donc pas de limite finie, ni infinie. Elle est donc divergente.

II.3 Limite des suites usuelles:

Propriétés:

$$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty \ , \ \lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty \ , \ \lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0 \ , \ \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \ , \ \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Démonstration de : $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Soit un intervalle quelconque ouvert $]-a; a[$, a un réel positif non nul, centré en 0.

Pour tout n, tel que $n > \frac{1}{a}$, on a: $0 < \frac{1}{n} < a$ et donc $\frac{1}{n} \in \,]-a; a[$

Ainsi à partir d'un certain rang tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]-a; a[$ et donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

III Opérations sur les limites:

III.1 Limite d'une somme:

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n) =$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I**

F.I = Forme indéterminée : On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

Exemples:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2+n) =?$

  $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = \ldots\ldots$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = \ldots\ldots$

  D'après la règle sur la limite d'une somme: $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2+n) = \ldots\ldots$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} (2+\frac{1}{n}) =?$

  $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 = \ldots\ldots$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \ldots\ldots$

  D'après la règle sur la limite d'une somme: $\lim\limits_{n\to+\infty} (2+\frac{1}{n}) = \ldots\ldots$

III.2 limite d'un produit:

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n\times v_n) =$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I**

Exemples:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{1}{\sqrt{n}}+1)(n^2+3) =?$

  $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \ldots\ldots$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = \ldots\ldots$ donc d'après la règle sur la limite d'une somme :

$$\lim_{n\to+\infty} (\frac{1}{\sqrt{n}}+1) = \ldots\ldots$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = \ldots\ldots$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 = \ldots\ldots$ donc d'après la règle sur la limite d'une somme :

$$\lim_{n \to +\infty} (n^2 + 3) = \ldots\ldots$$

donc d'après la règle sur la limite d'un produit:

$$\lim_{n \to +\infty} (\frac{1}{\sqrt{n}} + 1)(n^2 + 3) = \ldots\ldots$$

- $\lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{1}{n} + 2)(\frac{1}{n^2} + 3) =?$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = \ldots\ldots$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 2 = \ldots\ldots$ donc d'après la règle sur la limite d'une somme :

$$\lim_{n \to +\infty} (\frac{1}{n} + 2) = \ldots\ldots$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = \ldots\ldots$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 3 = \ldots\ldots$ donc d'après la règle sur la limite d'une somme :

$$\lim_{n \to +\infty} (\frac{1}{n} + 3) = \ldots\ldots$$

donc d'après la règle sur la limite d'un produit:

$$\lim_{n \to +\infty} (\frac{1}{n} + 2)(\frac{1}{n^2} + 3) = \ldots\ldots$$

III.3 Limite d'un quotient:

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	$\ell \neq 0$	ℓ	∞	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$\ell' \neq 0$	0	∞	ℓ'	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} =$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	∞	0	∞	**F.I**	**F.I**

Exemple:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4}{-2n^2-5} =?$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = \ldots\ldots$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -2n^2 = \ldots\ldots$ (règle sur la limite d'un produit) et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -2n^2-5 = \ldots\ldots$ (règle sur la limite d'une somme)

D'après la règle sur la limite d'un quotient:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4}{-2n^2-5} = \ldots\ldots$$

Remarque:

Il est important de reconnaître les formes indéterminées pour lesquelles il faudra utiliser des calculs algébrique afin de lever l'indétermination ou utiliser d'autres propriétés sur les calculs de limites.

Les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture:

$$"\infty-\infty", "0\times\infty", "\frac{\infty}{\infty}" \text{et } "\frac{0}{0}"$$

III.4 Applications:

Déterminer les limites suivantes:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-5n+1$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} n-3\sqrt{n}$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^2+4}{4n^2+3n}$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n^2+n}{n+3}$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+2}-\sqrt{n}$