

Nom de famille : **B E N A Y E D**

Prénom(s) : **H A F E D H**

Numéro d'inscription : **01 72 1008**

Né(e) le : **01 / 72 / 2008**

Concours / Examen : **Bac blanc** Section/Specialité/Série : .....

Epreuve : **Math** Matière : ..... Session : .....

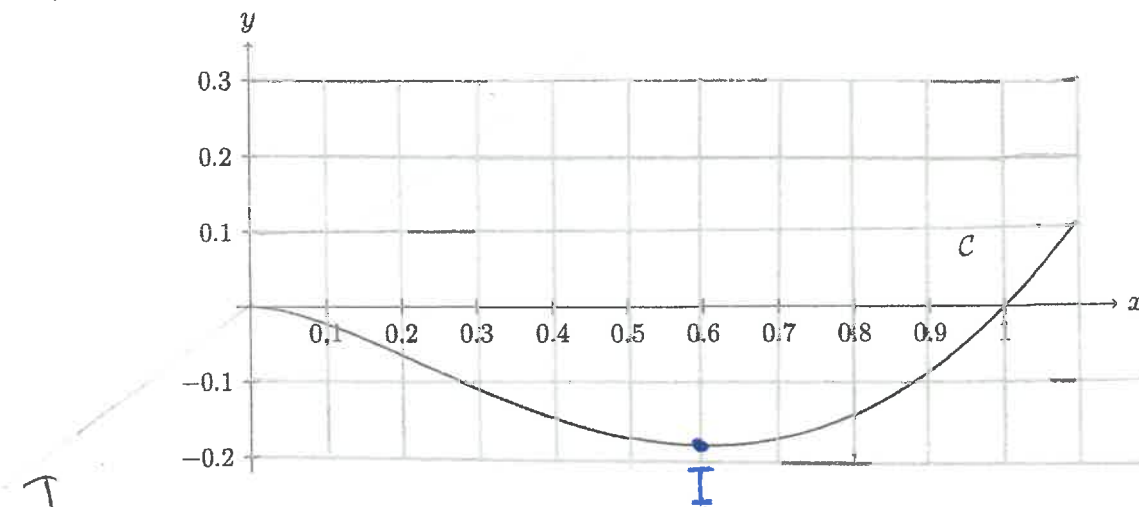
**CONSIGNES** Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.

- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroté chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuilles officielles. Ne joindre aucun brouillon.

## ANNEXE

(à rendre avec la copie)

Exercice 2 – Courbe de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^2 \ln x$



Exercice 4 – Programme Python

```

1 def seuil():
2     u = 0.1
3     n = 0
4     while u <= 0.99:
5         u = 2u - u**2
6         n = n+1
7     return n

```

**EXERCICE 4****(6 points)**

Une entreprise de la Tech lance une nouvelle application basée sur l'intelligence artificielle dans une ville test fermée de 10 000 habitants.

On modélise la proportion de la population ayant installé l'application  $n$  semaines après le lancement par une suite  $(u_n)$ .

On admet que l'évolution de cette proportion suit la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+1} = 2u_n - u_n^2$$

pour tout entier naturel  $n$ , avec  $u_0 = 0,1$  (ce qui signifie que 10 % de la population possède l'application au départ).

**Partie A : Étude de la fonction modélisatrice**

On considère la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $[0; 1]$  par :

$$g(x) = 2x - x^2$$

1. Étudier les variations de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[0; 1]$ .
2. Montrer que pour tout  $x \in [0; 1]$ , on a  $g(x) \in [0; 1]$ .
3. Résoudre dans  $[0; 1]$  l'équation  $g(x) = x$ .

**Partie B : Étude de la suite  $(u_n)$** 

1. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$$

2. En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.
3. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ . Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

**Partie C : Une formule explicite**

On définit la suite auxiliaire  $(v_n)$  pour tout entier naturel  $n$  par :

$$v_n = 1 - u_n$$

$v_n$  représente la proportion de la population n'ayant *pas* encore installé l'application.

1. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_{n+1} = v_n^2$ .
2. (a) Calculer  $v_0$ ,  $v_1$  et  $v_2$ .  
(b) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = 0,9^{(2^n)}$ .
3. En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
4. À l'aide de cette expression, retrouver la limite de la suite  $(u_n)$ .

**Partie D : Vitesse de convergence**

1. On considère la fonction Python `seuil` donnée en **annexe**.  
(a) Compléter le code Python de la fonction `seuil` afin qu'il permette de trouver le plus petit entier naturel  $n$  tel que  $u_n \geq 0,99$ .  
(b) Quelle valeur est renvoyée par l'appel de cette fonction ?
2. Dans un autre modèle (linéaire celui-ci), la proportion suivrait la suite  $(w_n)$  définie par  $w_0 = 0,1$  et  $w_{n+1} = 0,5w_n + 0,5$ . On admet que la suite  $(w_n)$  est convergente vers 1 également.  
Expliquer brièvement pourquoi la suite  $(u_n)$  de notre exercice converge beaucoup plus vite vers 1 que la suite  $(w_n)$ .