

# Tomographie

---

Traitement des données Audio-Visuelles - 2024

# Sommaire

---

Introduction

De la découverte des rayons X  
au CT-scan

Atténuation des rayons X

Acquisition des rayons X

Méthode de résolution algébrique

Rétro-projection filtrée

# Introduction

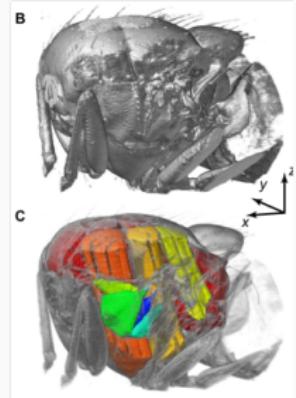
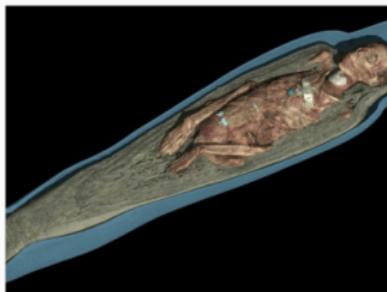
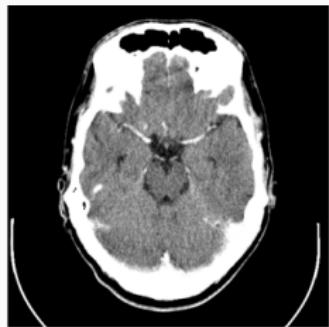
---

# Définitions

---

- τομής = coupe, γράφει = écrire
- Tomographie axiale calculée par ordinateur (TACO, et maintenant TCO)
- Reconstruction de l'intérieur d'un objet à partir d'observations extérieures : les coupes tomographiques ( $\approx$  projections)

## Quelques applications



## Qu'observe-t-on ?

---

L'élément observé dépend de l'application :

- Capture d'une particule : médecine (rayons X)
- Radioactivité : médecine (pet-scan)
- Pression acoustique : océanologie
- Signal électro-magnétique : médecine (IRM), astronomie (imagerie Zeeman-Doppler)
- Ondes sismiques : géologie, prospection pétrolière

⇒ Aujourd'hui : tomographie par rayons X

# **De la découverte des rayons X au CT-scan**

---

# Wilhelm Röntgen

---



Wilhelm Röntgen (1845 - 1923, Allemagne)

# Imagerie médicale : du premier *Röntgenogram*...



Main d'Anna Bertha Röntgen prise le 22 décembre 1895

... aux machines d'aujourd'hui

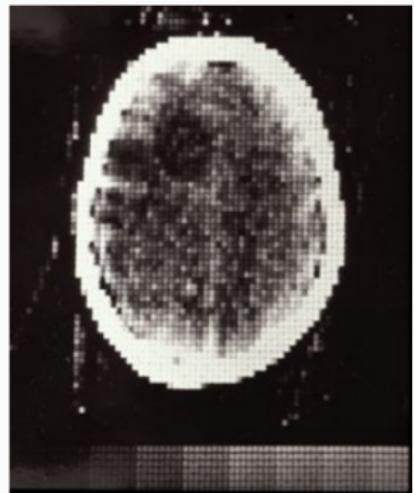


Appareil moderne de radiographie et exemple d'image

# Défauts de la radiographie à rayons X

- Pas de vision multi-couches
  - ⇒ Les organes se cachent les uns les autres
- Difficile de différencier les tissus d'un même organe
  - ⇒ Pas de visualisation des lésions ou des tumeurs

## A. Cormack et G. Hounsfield



Allan Cormack (1924-1998, Afrique du Sud), Godfrey Hounsfield (1919 - 2004, Royaume-Uni) et le premier CT-scan (1971)

# CT-scan

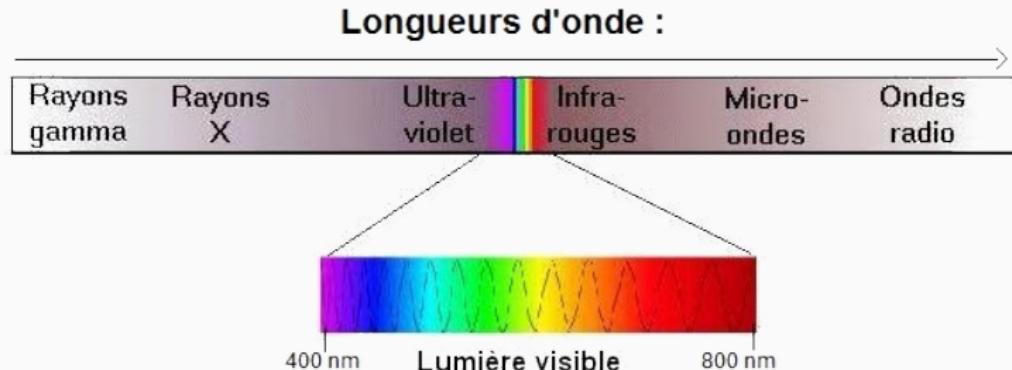


CT-scanner

## Atténuation des rayons X

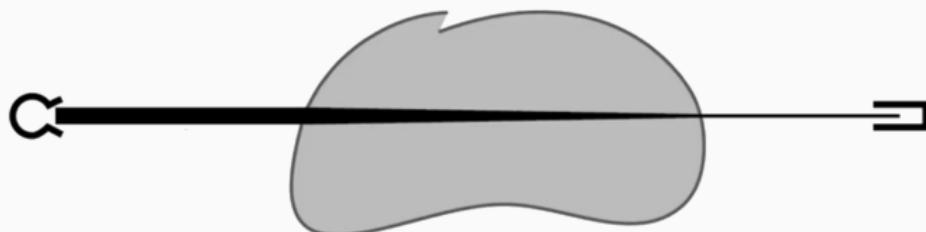
---

# Les rayons X dans le spectre



- Une onde électromagnétique interagit avec des objets qui ont une taille comparable à la longueur d'onde
- Longueur d'onde des rayons X = de  $0,01\text{nm}$  à  $5\text{nm}$
- Interaction avec les nuages d'électrons des atomes

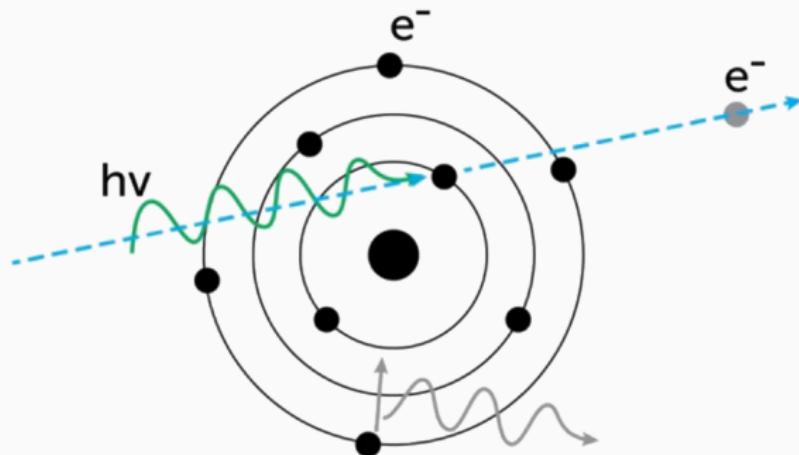
# Principe de l'atténuation des rayons X



Émission - atténuation - réception

- Rayons X envoyés au travers de l'objet à reconstruire
- Atténuation de l'énergie lors de la traversée
- Impression d'un négatif sur le détecteur

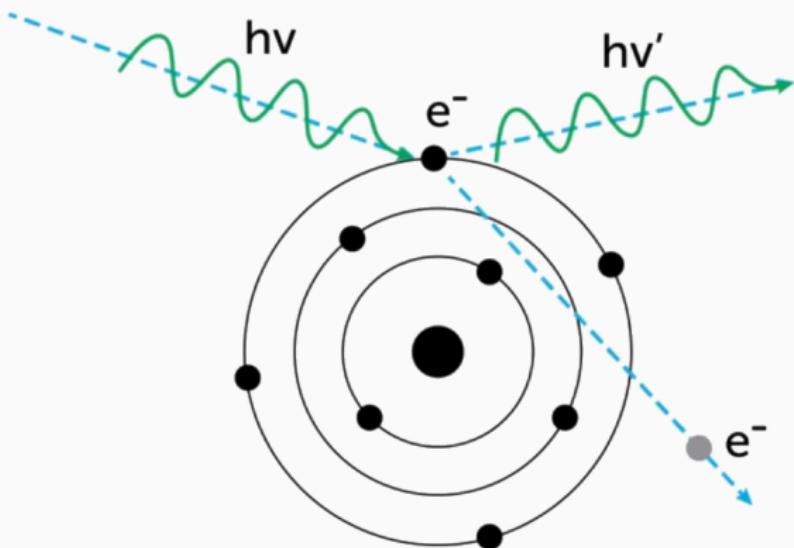
# Interaction avec la matière : effet photoélectrique



Effet photoélectrique

- Rayon arrêté par un électron d'une couche interne
- Le photon n'atteint pas le récepteur
- Principal type d'interaction lumière/matière

## Interaction avec la matière : source de bruit

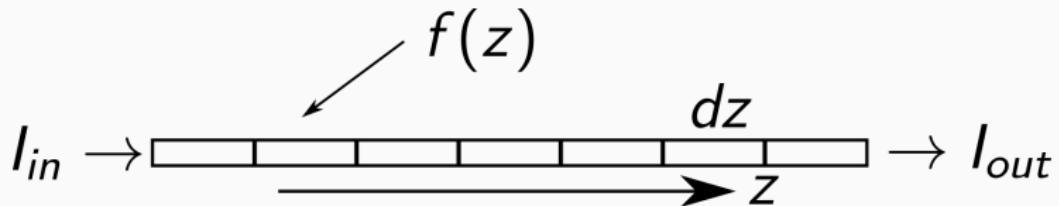


Diffusion Compton

- Photon dévié par un électron de la couche externe
- Source de bruit pour le capteur

## Loi de Beer-Lambert (1/2)

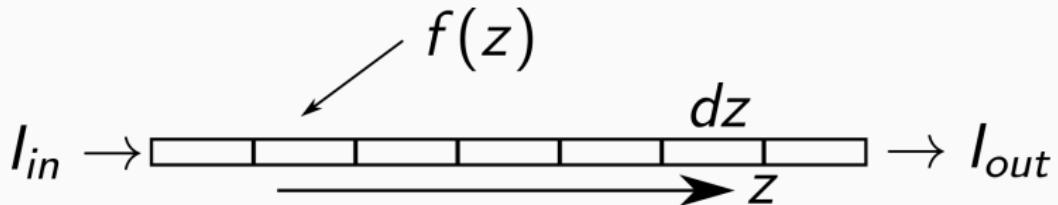
- Atténuation de la lumière à la traversée de la matière
- Le chemin parcouru est découpé en volumes élémentaires :



Où on note :

- $I(z)$  : énergie lumineuse le long du rayon
- $f(z)$  : coefficient d'atténuation du milieu

## Loi de Beer-Lambert (2/4)



$$I(z + dz) = I(z) - f(z)I(z)dz$$

$$I'(z) \approx \frac{I(z + dz) - I(z)}{dz} = -f(z)I(z)$$

## Loi de Beer-Lambert (3/4)

- Le long d'une ligne  $L$  paramétrée par  $z$ , on obtient l'équation différentielle suivante :

$$I'(z) = -f(z)I(z) \quad \text{avec} \quad I(0) = I_{in}$$

- Équation différentielle linéaire à coefficients non constants :

$$I_{out} = I_{in} \exp \left( - \int_L f(z) dz \right) \iff \ln \frac{I_{in}}{I_{out}} = \int_L f(z) dz$$

## Loi de Beer-Lambert (4/4)

$$\int_L f(z) dz = \ln \frac{I_{in}}{I_{out}}$$

- Résolution de cette équation en  $f$  : problème mal posé
- Principe de la tomographie : effectuer suffisamment de mesures pour rendre ce problème bien posé

## Acquisition des rayons X

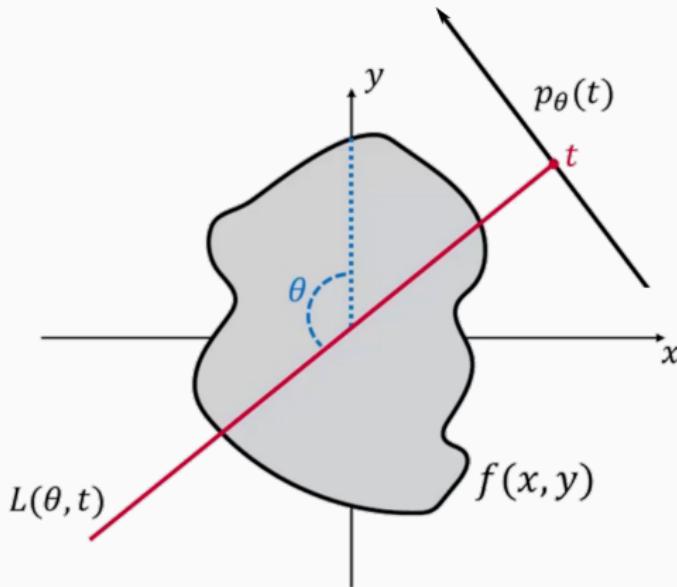
---

# Johann Radon



Johann Radon (1887 - 1956, Autriche)

## Transformation de Radon (1/2)



- Rayon  $L(\theta, t)$  paramétré par  $\theta$  et  $t$
- $L(\theta, t) := \{\cos \theta x + \sin \theta y = t, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$
- $p_\theta(t) =$  mesure de l'atténuation  $\ln \frac{I_{in}}{I_{out}}$  du rayon  $L(\theta, t)$

## Transformation de Radon (2/2)

La transformée de Radon de  $f$ , notée  $\text{TR}\{f\}$ , est définie par :

$$\text{TR}\{f\}(\theta, t) := p_\theta(t) = \int_{L(\theta, t)} f(z) dz$$

Cette transformation est linéaire :  $\text{TR}\{f + \lambda g\} = \text{TR}\{f\} + \lambda \text{TR}\{g\}$

## Paramétrage des rayons

---

- Pour paramétrier facilement le rayon  $L(\theta, t)$ , on applique au repère une rotation d'angle  $\theta$

## Paramétrage des rayons

---

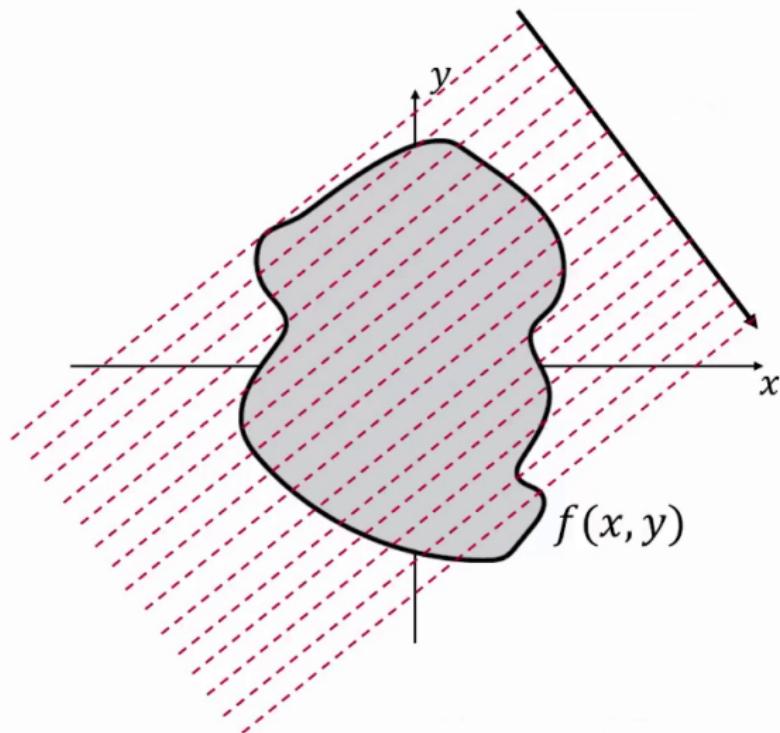
- Pour paramétrier facilement le rayon  $L(\theta, t)$ , on applique au repère une rotation d'angle  $\theta$
- Dans ce repère,  $L(\theta, t) := \{(u, v) \mid u = t\}$

## Paramétrage des rayons

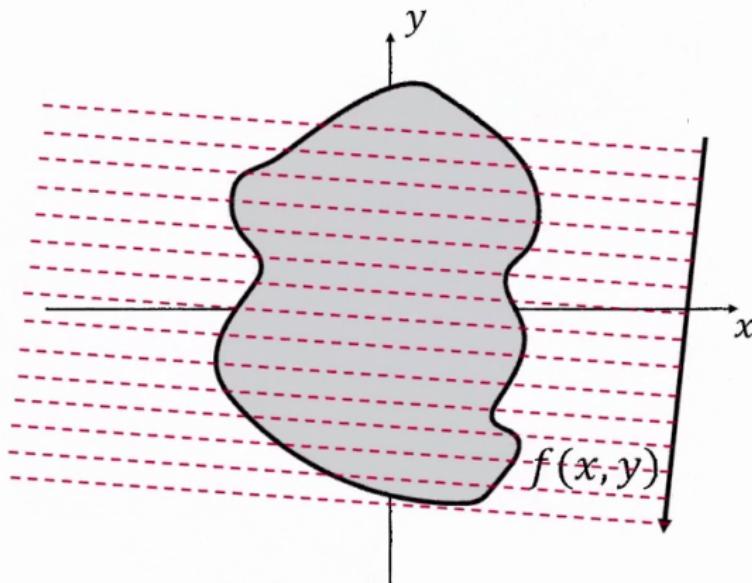
- Pour paramétrier facilement le rayon  $L(\theta, t)$ , on applique au repère une rotation d'angle  $\theta$
- Dans ce repère,  $L(\theta, t) := \{(u, v) \mid u = t\}$
- On pose :  $M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  de sorte que  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$
- Il vient donc :

$$\text{TR}\{f\}(\theta, t) := \int_{L(\theta, t)} f(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(M \begin{bmatrix} t \\ v \end{bmatrix}\right) dv$$

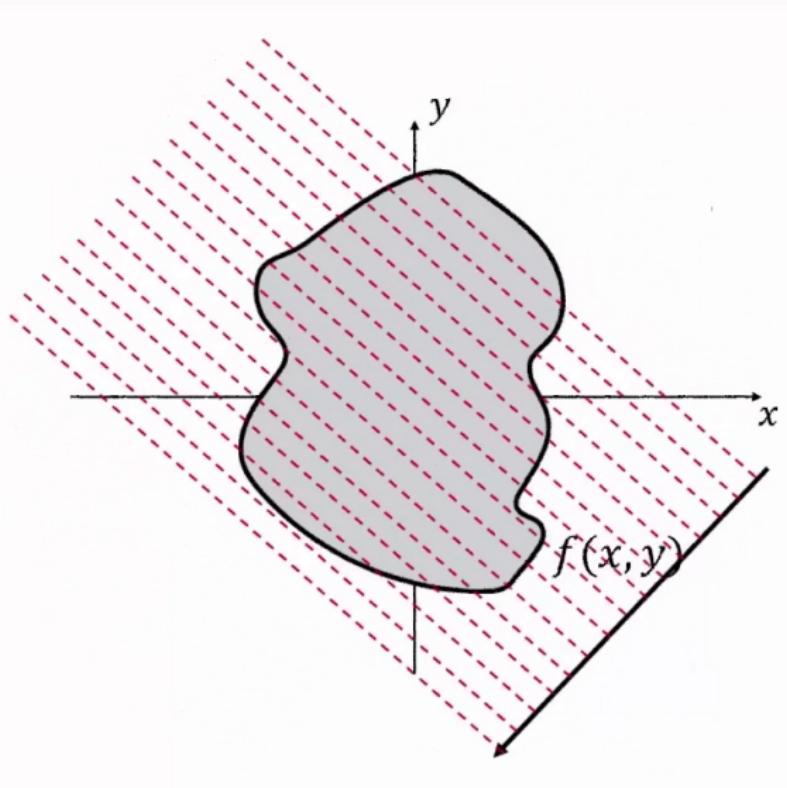
## Modèle à faisceaux parallèles



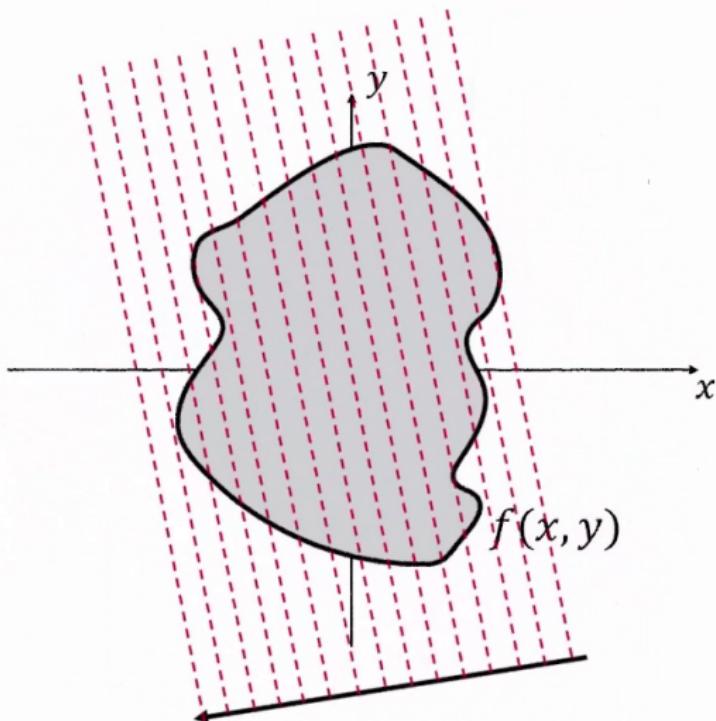
## Modèle à faisceaux parallèles



## Modèle à faisceaux parallèles

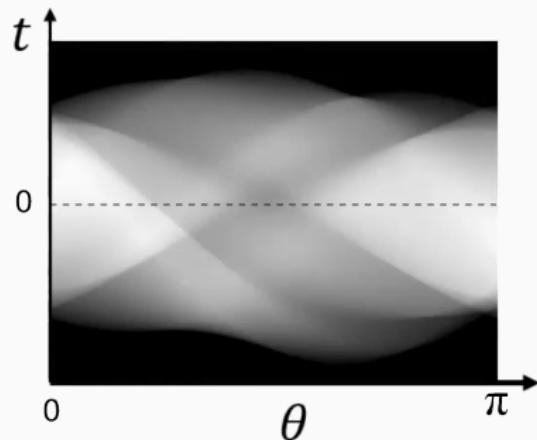


## Modèle à faisceaux parallèles

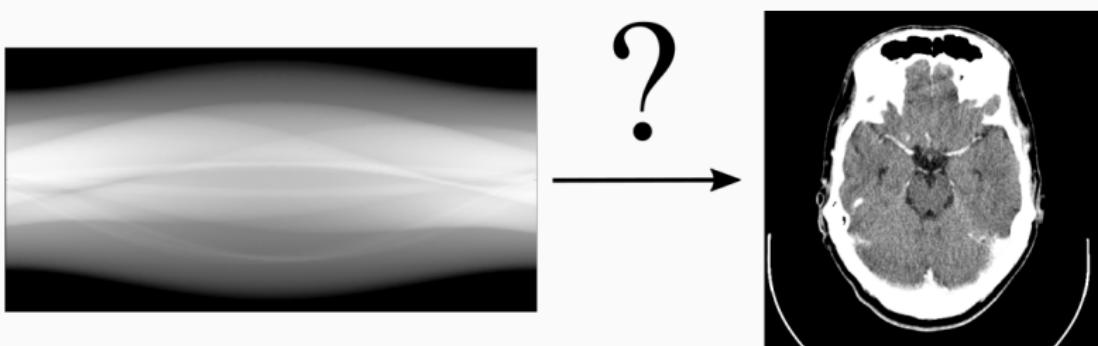


# Sinogramme

- $n_{rayons}$  rayons pour chaque position du capteur
- Les données sont représentées sous la forme d'un **sinogramme**



# Un problème inverse



# Inversion de la transformation de Radon

Pour un sinogramme  $S_0$ , on veut résoudre le problème variationnel suivant :

$$\min_f \iint_{(\theta,t)} (\text{TR}\{f\} - S_0)^2 + \lambda \iint_{(x,y)} \|\nabla f\|^2$$

- On cherche la fonction  $f$ , lisse, qui explique le mieux le sinogramme.

# Inversion de la transformation de Radon

Pour un sinogramme  $S_0$ , on veut résoudre le problème variationnel suivant :

$$\min_f \iint_{(\theta,t)} (\text{TR}\{f\} - S_0)^2 + \lambda \iint_{(x,y)} \|\nabla f\|^2$$

- On cherche la fonction  $f$ , lisse, qui explique le mieux le sinogramme.
- En pratique, cette modélisation pose problème

# Deux familles d'approches

- Méthodes algébriques : on discrétise le problème, on définit le système linéaire à résoudre et on utilise un solveur adapté.
- Méthodes analytiques : on cherche à inverser la transformation de Radon, si possible de manière astucieuse.

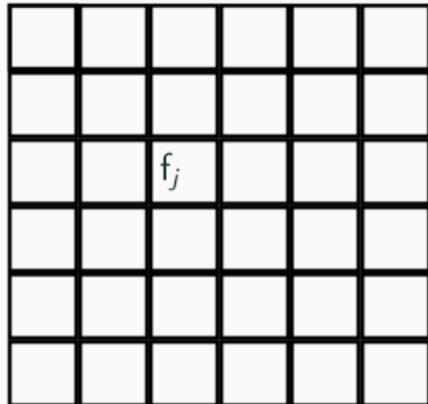
## En TP

Vous allez implémenter une méthode de chaque type.

# Méthode de résolution algébrique

---

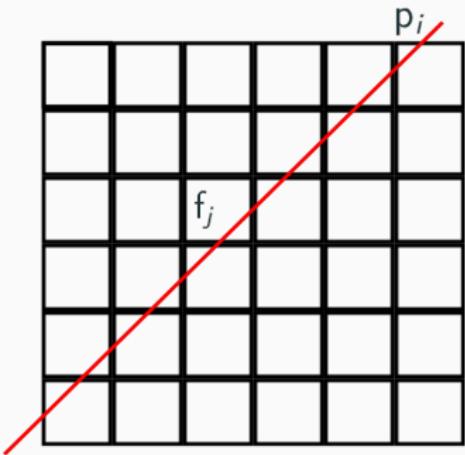
# Discrétisation



- $f_j = f(x, y)$  au pixel  $j$
- $p_i = i^{\text{ème}}$  mesure ( $\theta$  et  $t$  fixés)
- $W$  = matrice de projection  
 $W_{i,j}$  = contribution de  $f_j$  à  $p_i$

$$\Rightarrow Wf = p$$

# Discrétisation

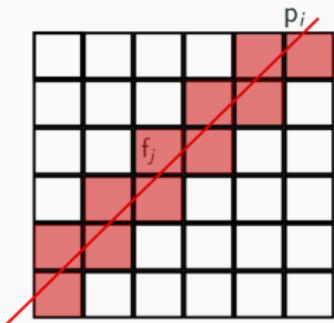


- $f_j = f(x, y)$  au pixel  $j$
- $p_i = i^{\text{ème}}$  mesure ( $\theta$  et  $t$  fixés)
- $W$  = matrice de projection
- $W_{i,j}$  = contribution de  $f_j$  à  $p_i$

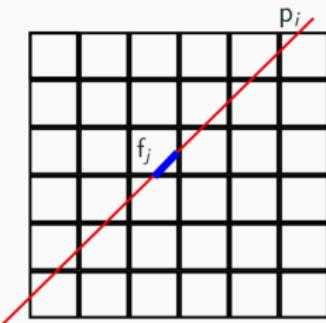
$$\Rightarrow Wf = p$$

# Matrice des contributions

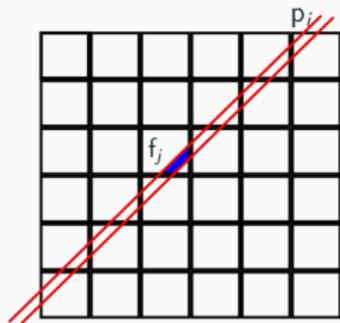
- Comment calculer la matrice W ?
- Différentes approches :



Approche binaire



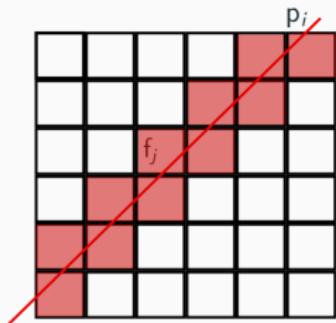
Longueur de l'intersection



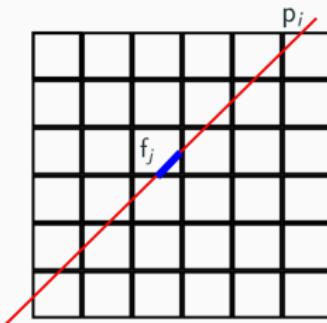
Aire de l'intersection

# Matrice des contributions

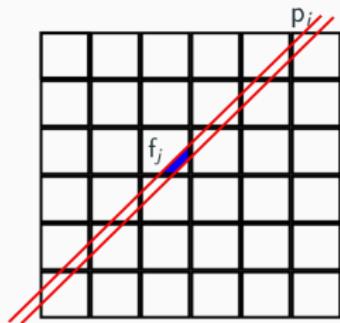
- Comment calculer la matrice W ?
- Différentes approches :



Approche binaire



Longueur de l'intersection



Aire de l'intersection

En TP :

La matrice W vous sera fournie

# Résolution du problème linéaire

---

$$Wf = p \quad \Rightarrow \quad \hat{f} = \operatorname{argmin}_f \|Wf - p\|^2$$

# Résolution du problème linéaire

$$Wf = p \quad \Rightarrow \quad \hat{f} = \operatorname{argmin}_f \|Wf - p\|^2$$

## Première approche : par pseudo-inverse

- Quelles sont les tailles de ces matrices ?
- $p$  : nombre de mesures  $n_{\text{mesures}} = n_\theta \times n_{\text{rayons}}$
- $f$  : nombre de pixels :  $n_{\text{lignes}} \times n_{\text{colonnes}}$   
⇒ Le système d'équations peut très vite devenir **énorme** !

## Algorithme de Kaczmarz (1/3)

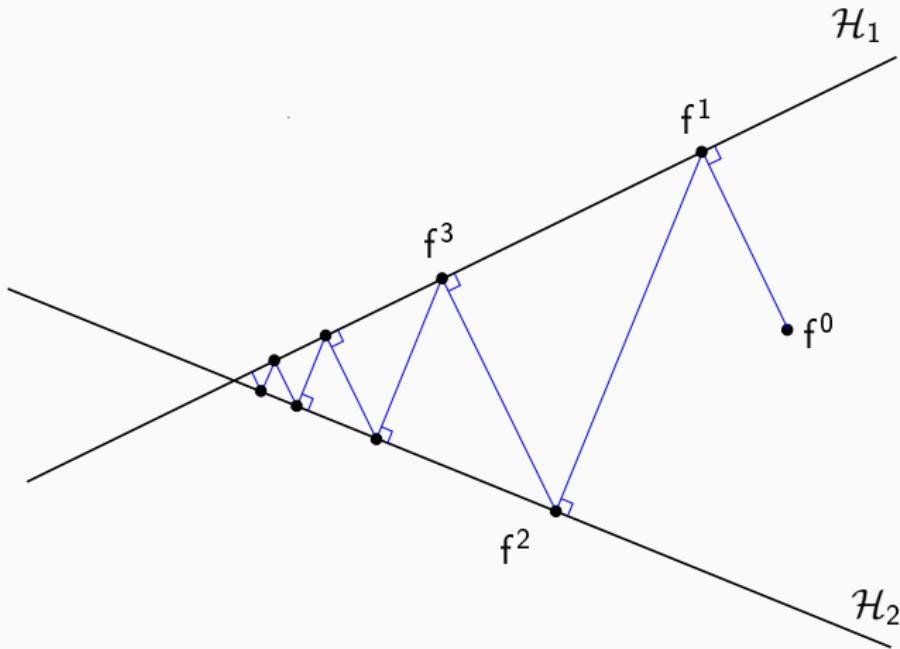
- Considérons  $w_i^\top$ , la  $i^{\text{ème}}$  ligne de  $W$
- Elle nous permet de définir l'hyperplan  $\mathcal{H}_i$ , via l'équation :

$$w_i^\top f = p_i \quad (1)$$

où :  $p_i$  est le  $i^{\text{ème}}$  élément de  $p$

- L'algorithme de Kaczmarz consiste en une suite de projections orthogonales sur ces différents hyperplans

## Algorithme de Kaczmarz (2/3)



Une succession de projections orthogonales sur les hyperplans  $\mathcal{H}_i$  permet de converger vers la solution

## Algorithme de Kaczmarz (3/3)

- Plus formellement, on considère  $f^k$  la solution à l'itération  $k$ , projeté orthogonal de  $f^{k-1}$  sur  $\mathcal{H}_{i-1}$
- $w_i$  est orthogonal à  $\mathcal{H}_i$ , et donc parallèle à  $f^{k+1} - f^k$
- On a donc :  $f^{k+1} = f^k + \beta w_i$
- Comme  $f^{k+1} \in \mathcal{H}_i$ , on peut ré-injecter dans (1), il vient :

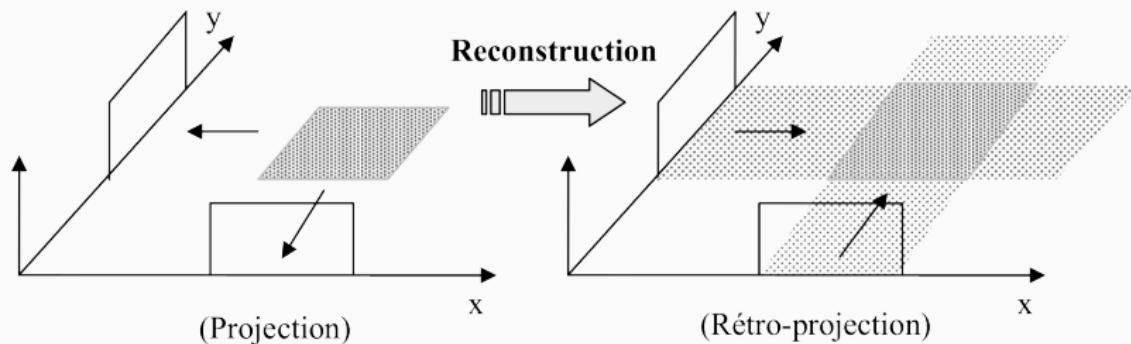
$$f^{k+1} = f^k + \frac{p_i - w_i^\top f^k}{\|w_i\|^2} w_i$$

- En pratique, l'ensemble des itérations est répété  $k_{max}$  fois.

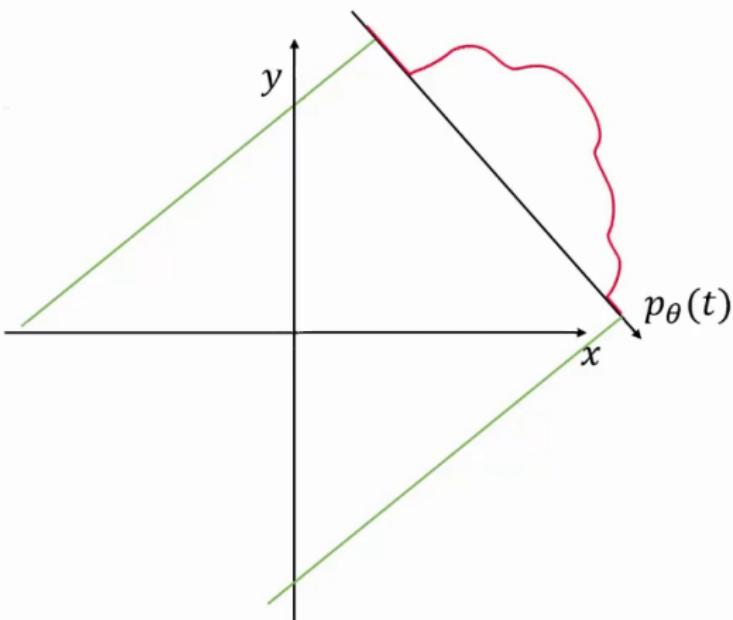
## Rétro-projection filtrée

---

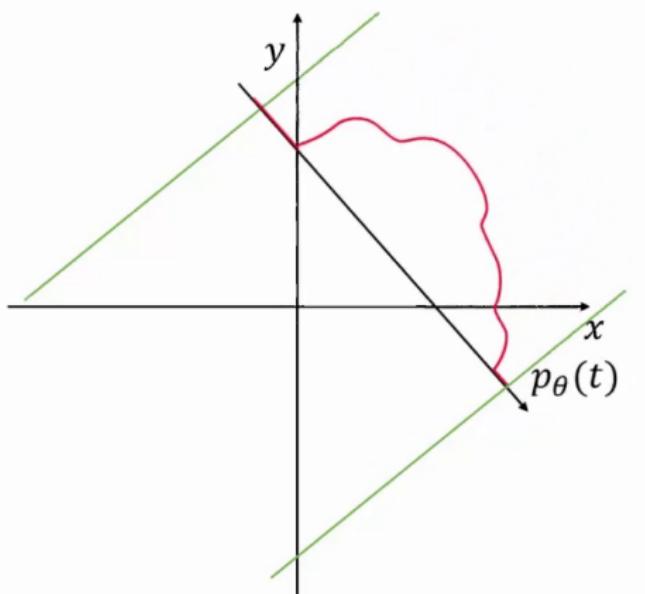
# Principe de la rétro-projection



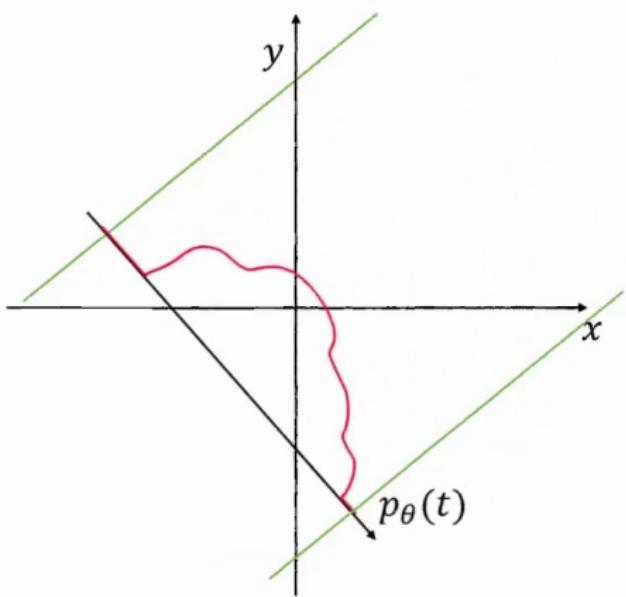
## Rétro-projection : application à la transformation de Radon



## Rétro-projection : application à la transformation de Radon

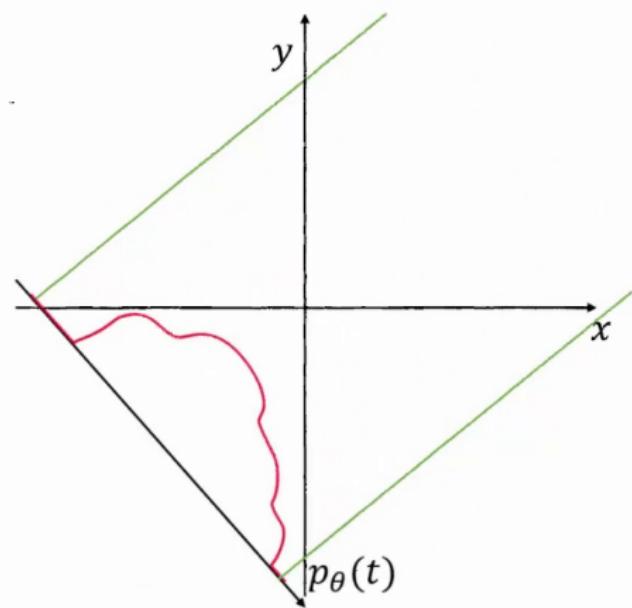


## Rétro-projection : application à la transformation de Radon



5

## Rétro-projection : application à la transformation de Radon



# Inversion de la transformation de Radon

- Chaque projection apporte de l'information sur  $f$
- Pour chaque projection, pour chaque rayon, on recopie la valeur mesurée dans l'ensemble des pixels traversés
- On a :

$$f(x, y) \approx \frac{1}{n_\theta} \sum_{\theta} p_\theta(x \cos \theta + y \sin \theta)$$

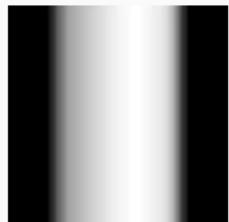
- Pour obtenir une bonne approximation de  $f$  : utiliser le plus de mesures possibles !

## En TP

Chaque pixel n'étant pas forcément traversé par un rayon, une interpolation sera nécessaire !

# Résultats

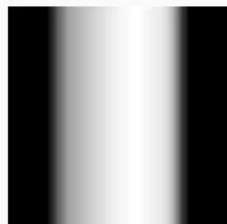
---



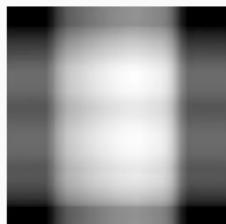
1 angle

# Résultats

---



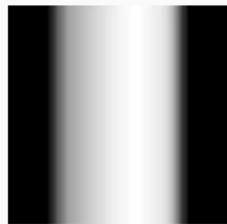
1 angle



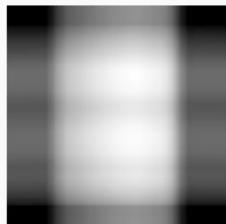
2 angles

# Résultats

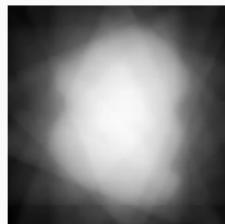
---



1 angle



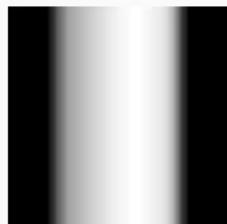
2 angles



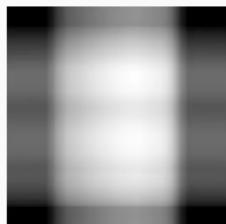
8 angles

# Résultats

---



1 angle



2 angles



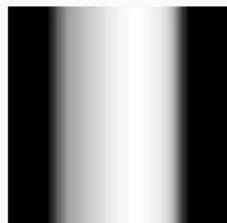
8 angles



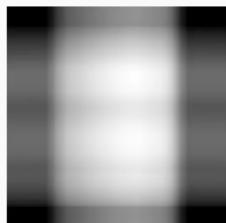
45 angles

# Résultats

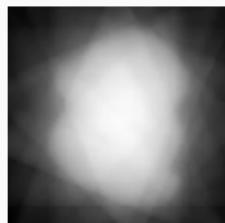
---



1 angle



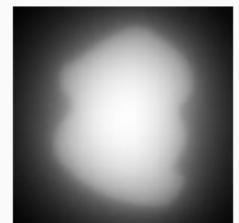
2 angles



8 angles



45 angles



180 angles

# Résultats



1 angle

2 angles

8 angles

45 angles

180 angles

## Conclusion

- Image reconstruite, mais floue

# Résultats



## Conclusion

- Image reconstruite, mais floue
- Seules les **basses fréquences** de l'image ont été reconstruites

## Rappel : décomposition « structure + texture »



Image



Structure



Texture

### Rappel du TP8

L'image est décomposée en une composante « structure » et une composante « texture ». La « structure » peut être assimilée aux basses fréquences de l'image.

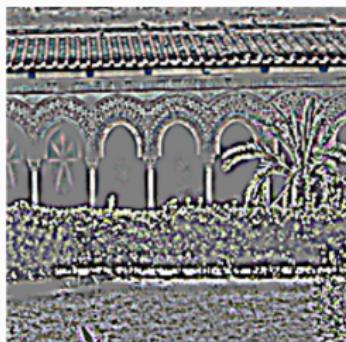
## Rappel : décomposition « structure + texture »



Image



Structure



Texture

### Rappel du TP8

L'image est décomposée en une composante « structure » et une composante « texture ». La « structure » peut être assimilée aux basses fréquences de l'image.

### Idée !

Allons voir ce qui se passe dans le domaine fréquentiel !

# Transformation de Fourier

## Transformation de Fourier d'un signal 1D

$$\text{TF}\{p_\theta\} : \hat{p}_\theta(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\theta(t) e^{-2\pi i \omega t} dt$$

## Transformation de Fourier d'un signal 2D

$$\text{TF}\{f\} : \hat{f}(\eta, \zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-2\pi i (\eta x + \zeta y)} dx dy$$

## Théorème du profil central (1/2)

---

$$\widehat{p}_\theta(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\theta(t) e^{-2\pi i \omega t} dt$$

## Théorème du profil central (1/2)

---

$$\begin{aligned}\widehat{p}_\theta(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_\theta(t) e^{-2\pi i \omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{TR}\{f\}(\theta, t) e^{-2\pi i \omega t} dt\end{aligned}$$

## Théorème du profil central (1/2)

---

$$\begin{aligned}\widehat{p}_\theta(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_\theta(t) e^{-2\pi i \omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{TR}\{f\}(\theta, t) e^{-2\pi i \omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(M \begin{bmatrix} t \\ v \end{bmatrix}\right) dv \right) e^{-2\pi i \omega t} dt\end{aligned}$$

## Théorème du profil central (1/2)

$$\begin{aligned}\widehat{p}_\theta(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_\theta(t) e^{-2\pi i \omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{TR}\{f\}(\theta, t) e^{-2\pi i \omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f \left( M \begin{bmatrix} t \\ v \end{bmatrix} \right) dv \right) e^{-2\pi i \omega t} dt\end{aligned}$$

On procède au changement de variable :  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} t \\ v \end{bmatrix}$  :

$$\widehat{p}_\theta(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-2\pi i \omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy$$

## Théorème du profil central (2/2)

---

$$\widehat{p}_\theta(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-2\pi i \omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy$$

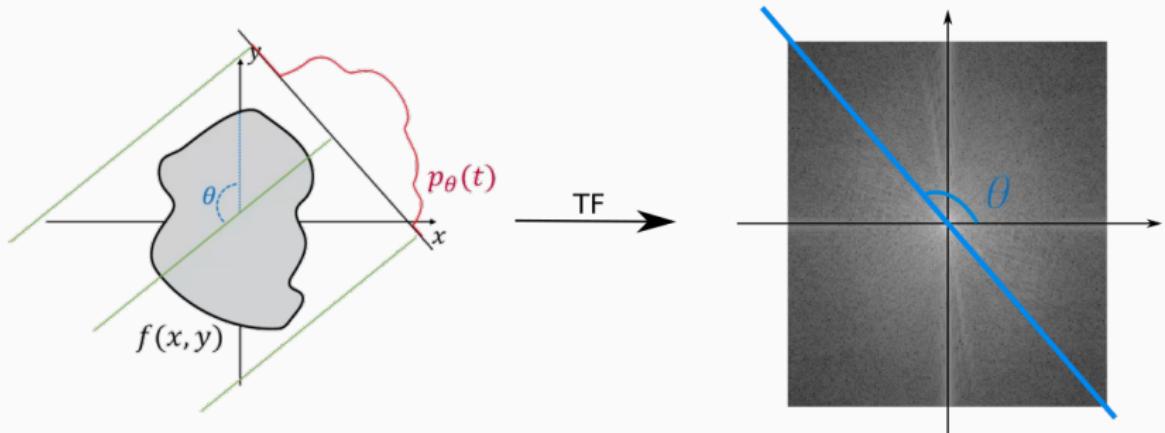
## Théorème du profil central (2/2)

$$\widehat{p}_\theta(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-2\pi i \omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy$$

Théorème du profil central

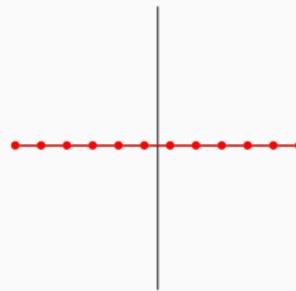
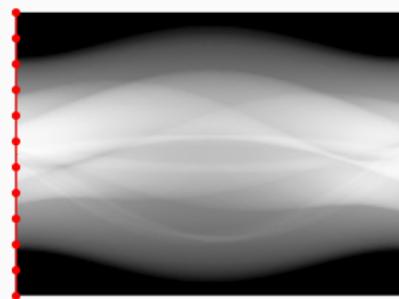
$$\widehat{p}_\theta(\omega) = \widehat{f}(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta)$$

# Illustration du théorème du profil central

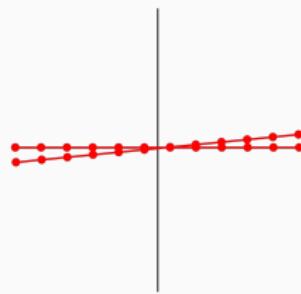
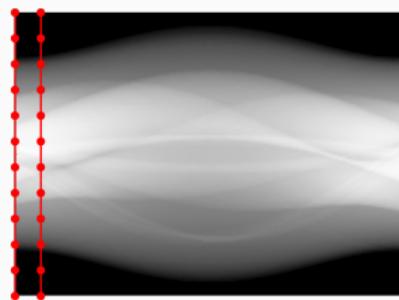


La TF du signal 1D  $p_\theta(t)$  (en rouge) coïncide avec la coupe de la TF 2D de  $f$  selon la droite passant par l'origine, d'angle polaire  $\theta$  (en bleu)

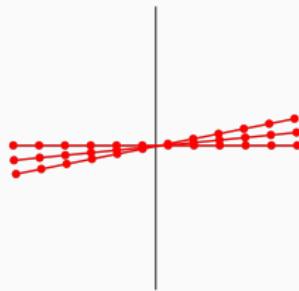
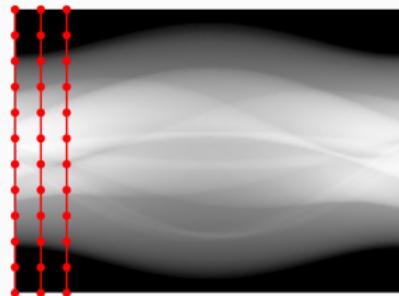
# Illustration du théorème du profil central



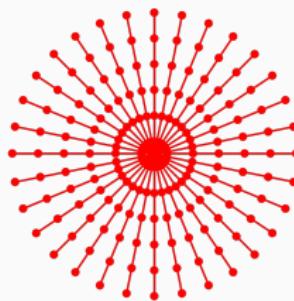
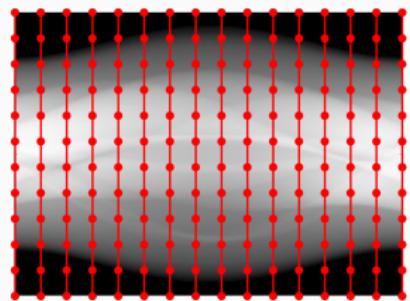
# Illustration du théorème du profil central



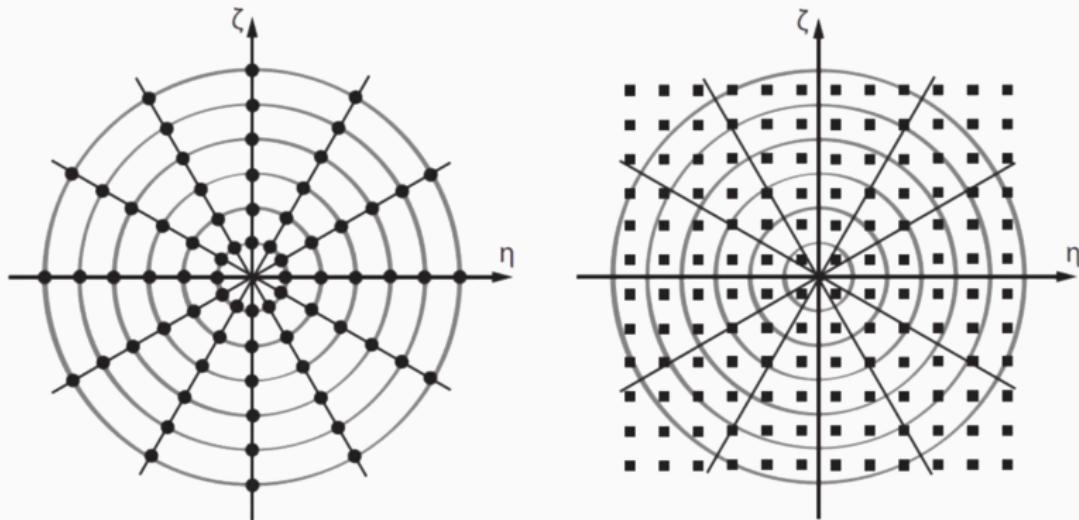
# Illustration du théorème du profil central



# Illustration du théorème du profil central



# Échantillonnage



Échantillons de  $\text{TF}\{f\}$  fournis par la tomographie (à gauche), et nécessaires à la transformation inverse (à droite)

Les basses fréquences sont sur-représentées  $\Rightarrow$  Résultat attendu !

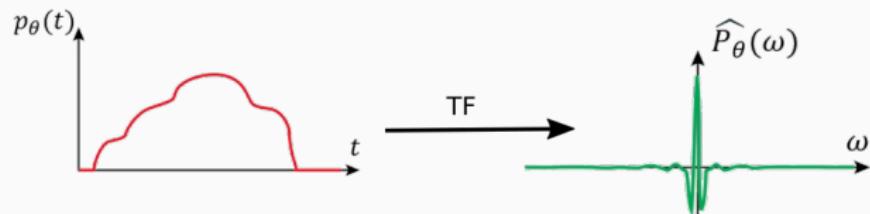
# Filtrage des mesures

Application d'un filtre passe-haut dans le domaine fréquentiel :



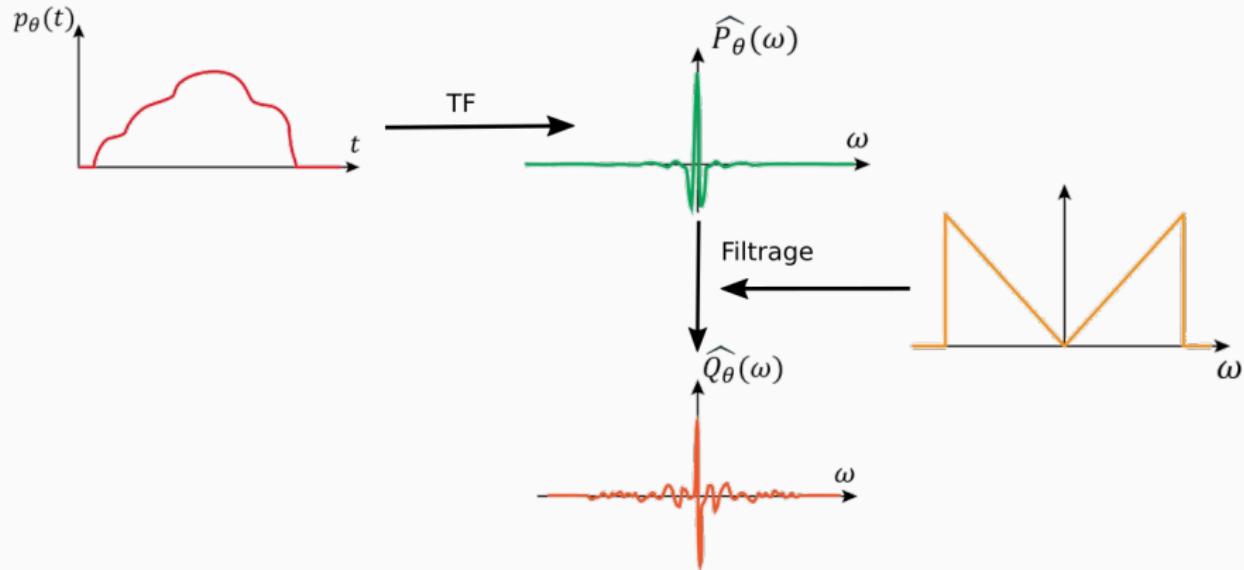
# Filtrage des mesures

Application d'un filtre passe-haut dans le domaine fréquentiel :



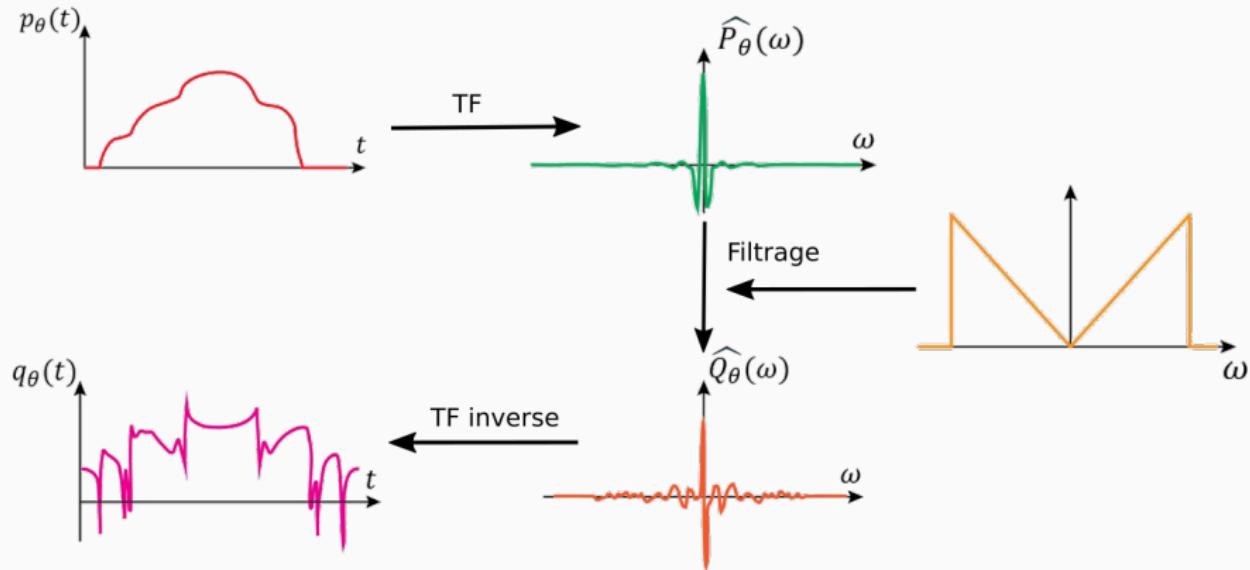
# Filtrage des mesures

Application d'un filtre passe-haut dans le domaine fréquentiel :

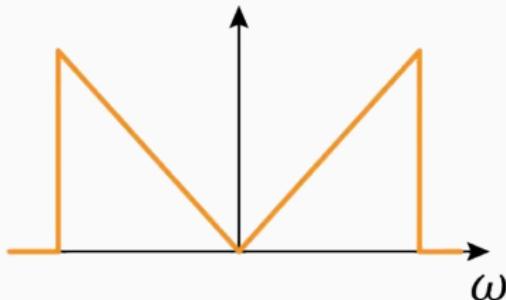


# Filtrage des mesures

Application d'un filtre passe-haut dans le domaine fréquentiel :



# Filtre de Ram-Lak

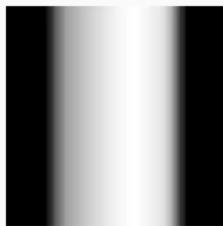


Profil du filtre Ram-Lak

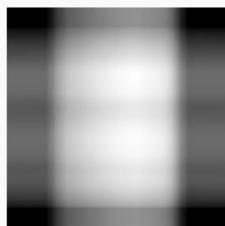
- Filtre passe-haut, classique en tomographie
- D'autres filtres sont communément utilisés : Shepp-Logan, Hamming, etc...
- À présent, on rétro-projecte les mesures filtrées :

$$f(x, y) \approx \frac{1}{n_\theta} \sum_{\theta} q_\theta(x \cos \theta + y \sin \theta)$$

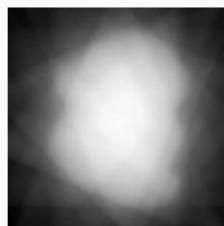
# Résultats



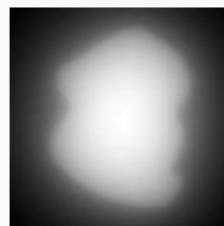
1 angle



2 angles



8 angles

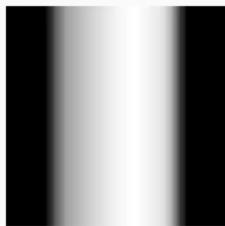


45 angles

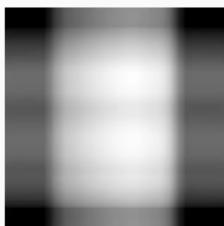


180 angles

# Résultats



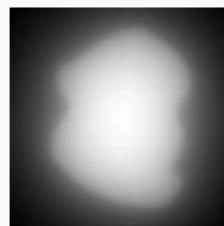
1 angle



2 angles



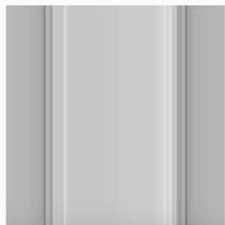
8 angles



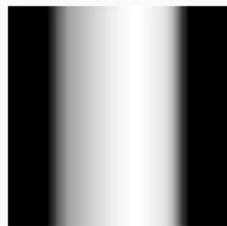
45 angles



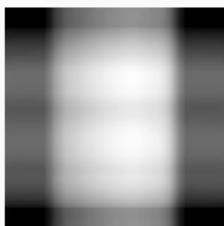
180 angles



# Résultats



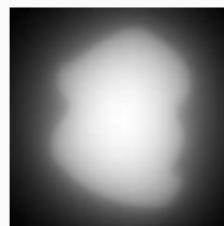
1 angle



2 angles



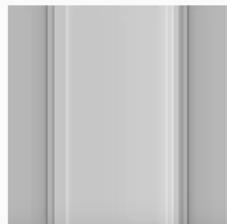
8 angles



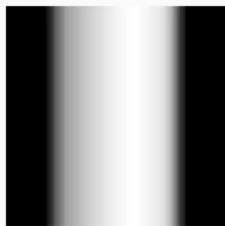
45 angles



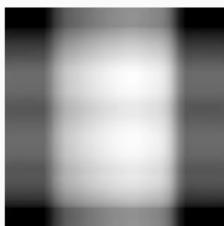
180 angles



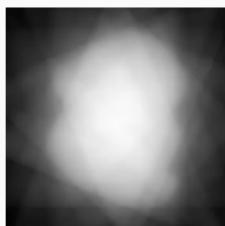
# Résultats



1 angle



2 angles



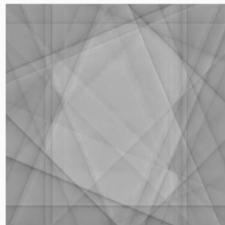
8 angles



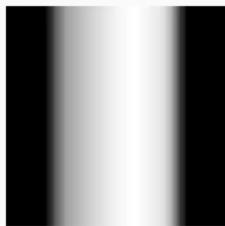
45 angles



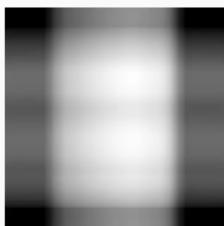
180 angles



# Résultats



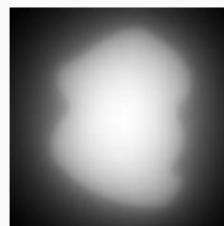
1 angle



2 angles



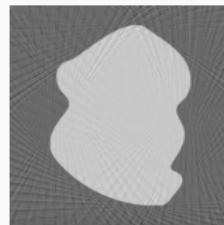
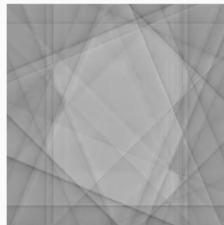
8 angles



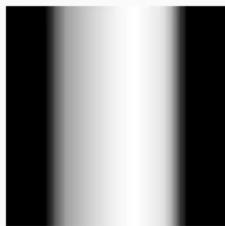
45 angles



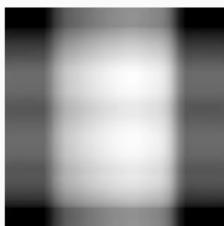
180 angles



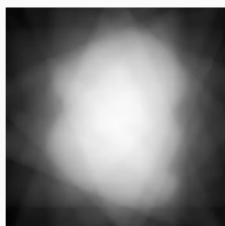
# Résultats



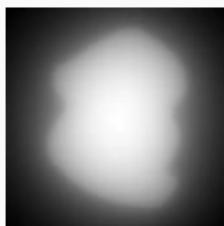
1 angle



2 angles



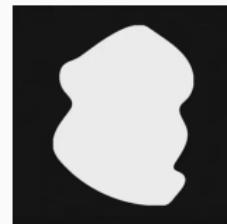
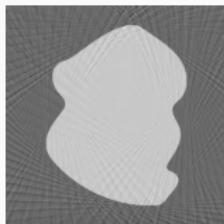
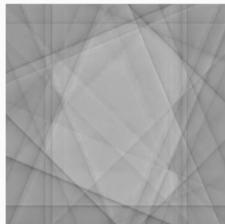
8 angles



45 angles



180 angles



## Une formule pour la transformation inverse ?

- Les différentes étapes présentées ici peuvent être représentées mathématiquement
- Filtrage dans le domaine fréquentiel  $\Rightarrow$  noyau de Hilbert dans le domaine spatial :

$$h(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(t)}{s - t} dt$$

- Les liens entre dérivation dans le domaine spatial et multiplication dans le domaine spectral donnent une formule de la Transformation de Radon Inverse :

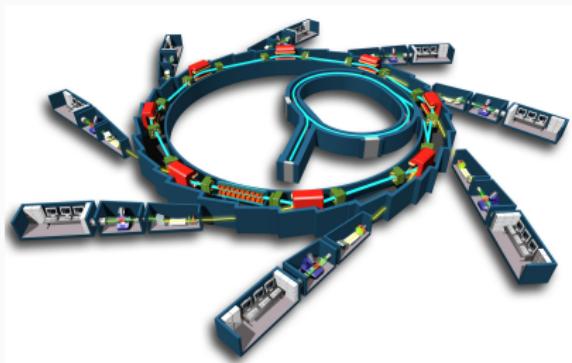
$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial t} \text{TR}\{f\}(\theta, t)}{x \cos \theta + y \sin \theta - t} dt d\theta$$

## Méthodes d'acquisition par rayons parallèles

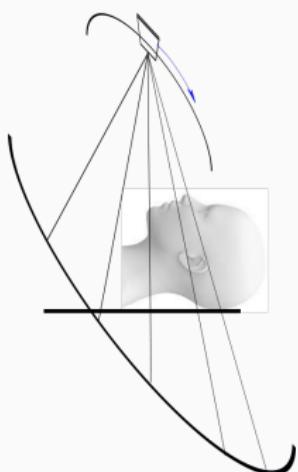
- Avantage évident : géométrie très simple !
- Mais peut nécessiter de grosses machines...

# Méthodes d'acquisition par rayons parallèles

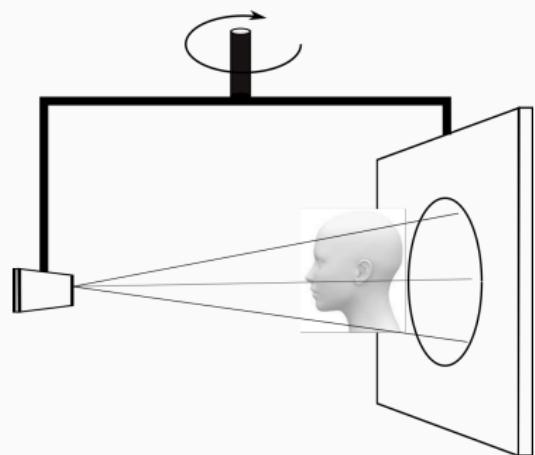
- Avantage évident : géométrie très simple !
- Mais peut nécessiter de grosses machines...



# Méthodes d'acquisition pour la médecine



Rayons en éventail



Rayons en cône

## Ce qu'on a laissé de côté

- Le bruit, causé par la diffusion Compton
- D'autres interactions avec les électrons peuvent survenir
- Beaucoup de cas avec données manquantes (en particulier en mammographie)
- En pratique, le nombre de mesures est limité, en médecine
- Le patient n'est pas immobile (respiration, circulation sanguine)

# Stages

Stages (2A, 3A) en laboratoire :

- François Lauze, DIKU, Copenhague, Danemark
- Tomographie, géométrie différentielle, océanographie
- Méthodes variationnelles, apprentissage profond

