1 Logik, big-$\mathcal{O}$ Notation und Matrizen

Diese Aufgabe besteht aus drei, voneinander unabhängigen Teilaufgaben.

1. Teil (2.5 Punkte)

Zeigen Sie durch Anwenden der Rechenregeln der propositionalen Logik, dass

$$\neg(\neg p \vee (s \rightarrow q)) \vee ((p \rightarrow s) \rightarrow (\neg p \vee q))$$

eine Tautologie ist (2 Punkte). Verwenden Sie zur Kontrolle folgende Wertetabelle (0.5 Punkte):

				A			B	
p	s	q	$s \rightarrow q$	$\neg p \vee (s \rightarrow q)$	$p \rightarrow s$	$\neg p \vee q$	$(p \rightarrow s) \rightarrow (\neg p \vee q)$	$A \vee B$
0	0	0						
0	0	1						
0	1	0						
0	1	1						
1	0	0						
1	0	1						
1	1	1						

2. Teil (1.5 Punkte)

Geben Sie (mit Begründung, d.h. Zeugen c und k) eine big-$\mathcal{O}$ Abschätzung für die Funktion

$$f(n) = \left(n^4 + n^3 \log n\right)(\log n + 1) + \left(8\log(n^3) + 16\right)\left(n^4 + 5\right), \; n \in \mathbb{N}.$$

3. Teil (1 Punkt)

Lösen Sie die folgenden Matrizengleichungen unter Anwendung der Rechenregeln für Matrizen nach $\mathbf{X}$ auf. Wir nehmen dabei an, dass alle (während der Rechnung) vorkommenden Matrizen quadratische und invertierbare ($n \times n$)-Matrizen sind.

$$(2\mathbf{X}\mathbf{B} + 7\mathbf{I}_n\mathbf{X})^T = 2\mathbf{B}^T + 7\mathbf{I}_n$$

Hier ist $\mathbf{I}_n$ die n-dimensionale Einheitsmatrix.

Verwenden Sie die Gesetze für das Rechnen mit Matrizen und schreiben Sie alle Zwischenschritte auf!

2 Beweise und Zählen

Diese Aufgabe besteht aus drei, voneinander unabhängigen Teilaufgaben.

1. Teil ($0.5 + 1.5 = 2$ Punkte)

1. Wie viele Möglichkeiten gibt es 10 Personen in zwei Arbeitsgruppen aufzuteilen, wenn die erste Gruppe 4 Personen und die zweite Gruppe die restlichen 6 Personen umfassen soll (0.5 Punkte)?
2. Nehmen wir jetzt an, dass sich unter den 10 Personen ein Paar befindet: Alice und Bob. In wie vielen der obigen Aufteilungen werden Alice und Bob nicht getrennt, d.h. befinden sich Alice und Bob in der selben Arbeitsgruppe (1.5 Punkte)?

Schreiben Sie Ihre Resultate mit Hilfe von Binomialkoeffizienten!

2. Teil (1 Punkt)

Zeigen Sie mit Hilfe eines Induktionsbeweises, dass $4^n > 2^n$ für jede natürliche Zahl n. Führen Sie dazu Induktionsverankerung und den Induktionsschritt detailliert durch!

3. Teil (2 Punkte)

Wieviele Lösungen hat die Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$$

wobei $x_i \in \mathbb{N}$ mit den Einschränkung $x_2 \geq 3$ und $x_4 \geq 4$. Schreiben Sie die Anzahl Lösungen als Binomialkoeffizient und erklären Sie, wie er zustande kommt!

3 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Diese Aufgabe besteht aus drei, voneinander unabhängigen Teilaufgaben.

1. Teil (1 Punkt)

Die Energieversorgung eines Rechenzentrums wird mit zwei separaten Stromversorgungen A und B sichergestellt. Dabei läuft A zu 93% ohne Störungen, B zu 88% ohne Störungen.

Wir legen zudem folgende Nomenklaturen fest:

(i) Ereignis $A =$ "*System A läuft ohne Störung*"

(ii) Ereignis $B =$ "*System B läuft ohne Störung*"

(iii) Die jeweiligen Gegenereignisse $\overline{A}$ und $\overline{B}$ bedeuten, dass das System nicht läuft.

Aufgaben:

(a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines der Systeme in Betrieb ist, wenn Sie annehmen können, dass die Systeme unabhängig voneinander ohne Störung laufen, resp. ausfallen (0.75 Punkte)?

(b) Aus Erfahrung weiss man nun, dass beide Systeme gleichzeitig zu 82% ohne Störung laufen. Folgern Sie nun, ob die Unabhängigkeitsannahme in Aufgabe (a) zu Recht postuliert wurde (0.25 Punkte).

2. Teil (2 Punkte)

Eine Security Person hat den Auftrag in einer Stunde 59-Mal eine per Zufallsgenerator ausgewählte Web-Cams für eine gewisse Zeit zu beobachten. Nun liefern 3 der 32 Web-Cams Bilder schlechter Qualität. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Security Person in dieser Stunde genau 4 Web-Cams mit schlechter Bildqualität beobachten muss?

Berechnen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit anhand der 4 nachfolgenden Modelle/Verteilungen:

(a) Laplace-Gleichverteilung (0.25 Punkte)

(b) Binomialverteilung (0.75 Punkte)

(c) Hypergeometrische Verteilung (0.25 Punkte)

(d) Poissonverteilung (0.75 Punkte)

Sollte ein Modell für die Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit nicht geeignet sein, ist zu begründen, warum dieses Modell in diesem Fall nicht geeignet ist.

Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass etwaige Approximationsbedingungen erfüllt sind.

Verteilung	**Resultate oder Begründung, wieso die Verteilung nicht taugt.**
Laplace (0.25 Punkte)	
Binomial (0.75 Punkte)	
Hypergeometrische (0.25 Punkte)	
Poisson (0.75 Punkte)	

3. Teil ($1.25 + 0.75 = 2$ Punkte)

Nehmen wir an, dass es 3 Sorten von Tabletten zur Linderung von Halsschmerzen gibt. Leider hat jeder Tablettentyp Nebenwirkungen, z.B. dass das Halsweh verstärkt, statt gelindert wird. Bei einem grossen Feldtest wurden für die drei Tablettentypen die folgenden Werte ermittelt:

Typ 1: Bei total 3660 Anwendungen hatten 2.25% die beschriebene Nebenwirkung.

Typ 2: Bei total 4575 Anwendungen hatten 2.7% die beschriebene Nebenwirkung.

Typ 3: Bei total 5490 Anwendungen hatten 4.5% die beschriebene Nebenwirkung.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Proband die Nebenwirkung spürte (1.25 Punkte).

(b) Ein gewählter Proband spürt die Nebenwirkung. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser die Tablette vom Typ 1 eingenommen hat? Falls Sie die Aufgabe (a) nicht lösen konnten, können Sie annehmen, dass in der Aufgabe (a) der Wert 3.15 % erhalten wurde (0.75 Punkte).

4 Zahlentheorie

Diese Aufgabe besteht aus vier, voneinander unabhängigen Teilaufgaben.

1. Teil ($0.5 + 1 = 1.5$ Punkte)

(a) Berechnen Sie $(10 \oplus_5 9) \odot_{15} (6 \oplus_{12} 20)$ (0.5 Punkte).

(b) Berechnen Sie mit dem Square and Multiply Algorithmus **detailliert von Hand** $27^{19} \bmod 293$ (1 Punkt).

2. Teil (1 Punkt)

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte, ungerade, ganze Zahl mit exakt 274 Stellen eine Primzahl ist?

3. Teil ($1 + 1.5 = 2.5$ Punkte)

1. Zeigen Sie mit Hilfe des kleinen Satzes von Fermat, dass gilt

$$14^{2904} \bmod 23 \equiv 1 \qquad \text{und} \qquad 14^{2904} \bmod 13 \equiv 1$$

2. Zeigen Sie nun mit dem Chinesischen Restsatz, dass gilt

$$14^{2904} \bmod 299 \equiv 1$$

   Tipp: Verwenden Sie, dass gilt: $299 = 23 \cdot 13$.

Beachten Sie, dass die Berechnung formal durchgeführt werden muss und nicht einfach ein Programm verwendet werden kann: es muss also klar ersichtlich sein, wie Sie den kleinen Satz von Fermat und den Chinesischen Restsatz verwenden.

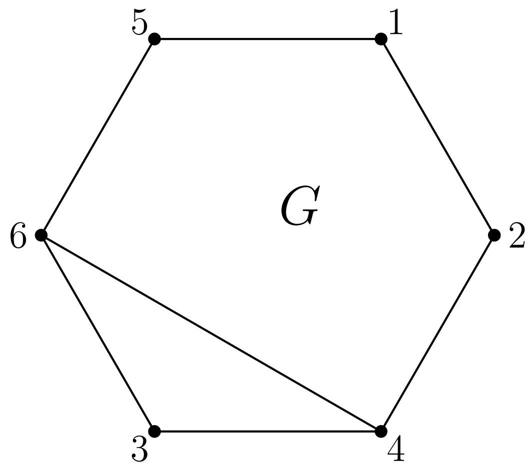
5 Graphentheorie

Diese Aufgabe besteht aus drei, voneinander unabhängigen Teilaufgaben.

1. Teil (3.5 Punkte)

Bestimmen Sie schrittweise unter Verwendung der Dekompositionsgleichung und dem zugehörigen Baumdiagramm das chromatische Polynom und die chromatische Zahl des nachfolgenden Graphen G (2.0 Punkte).

Färben Sie den Graphen G mit der minimalen Anzahl Farben und berechnen Sie wie viele Färbungen mit 3 Farben möglich sind (0.5 Punkte).



Wie lauten die Adjazenz-, Grad- und Admittanzmatrix des Graphen (1 Punkt)?

2. Teil (1.5 Punkt)

Wie viele Spannbäume hat der oben dargestellte Graph G? Begründen Sie Ihre Behauptung detailliert und von Hand!

LÖSUNGEN

1 Logik, big-$\mathcal{O}$ Notation und Matrizen

Diese Aufgabe besteht aus drei, voneinander unabhängigen Teilaufgaben.

1. Teil (2.5 Punkte)

Zeigen Sie durch Anwenden der Rechenregeln der propositionalen Logik, dass

$$\neg(\neg p \vee (s \to q)) \vee ((p \to s) \to (\neg p \vee q))$$

eine Tautologie ist (2 Punkte). Verwenden Sie zur Kontrolle folgende Wertetabelle (0.5 Punkte):

¬ Fehlt wohl?

p	s	q	$s \to q$	A $\neg p \vee (s \to q)$	C $p \to s$	D $\neg p \vee q$	B $(p \to s) \to (\neg p \vee q)$	$\neg A \vee B$
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

$$\neg(\neg p \vee (\neg s \vee q)) \vee ((\neg p \vee s) \to (\neg p \vee q))$$

$$\equiv \neg(\neg p \vee \neg s \vee q) \vee (\neg(\neg p \vee s) \vee (\neg p \vee q))$$

$$\equiv \neg(\neg p \vee \neg s \vee q) \vee ((p \wedge \neg s) \vee \neg p \vee q)$$

$$\equiv \neg(\neg p \vee \neg s \vee q) \vee ([\underbrace{(p \vee \neg p)}_{T} \wedge (\neg p \vee \neg s)] \vee q)$$

$$\equiv \underbrace{\neg(\neg p \vee \neg s \vee q)} \vee \underbrace{(\neg p \vee \neg s \vee q)}$$

$$\equiv \neg X \vee X$$

$X = \neg p \vee \neg s \vee q$

$$\equiv \underline{\underline{T}}$$

2. Teil (1.5 Punkte)

Geben Sie (mit Begründung, d.h. Zeugen c und k) eine big-$\mathcal{O}$ Abschätzung für die Funktion

$$f(n) = \left(n^4 + n^3 \log(n)\right)(\log n + 1) + \left(8\log(n^3) + 16\right)\left(n^4 + 5\right),\ n \in \mathbb{N}.$$

$$|f(n)| = (n^4 + n^3 \cdot \log(n)) \cdot \underbrace{(\log(n) + 1)}_{\leq n} + (24 \cdot \log(n) + 16) \cdot (n^4 + 5) \qquad | \, n \geq 1$$

$$\leq n^5 + n^4 \cdot \log(n) + 24 n^4 \cdot \log(n) + 16 n^4 + 120 \cdot \log(n) + 80$$

$$= n^5 + 25 n^4 \cdot \log(n) + \underbrace{16 n^4 + 120 \cdot \log(n) + 80}_{< 16 n^5} \qquad | \, n \geq 2$$

$$< n^5 + 25 n^4 \cdot \log(n) + 16 n^5$$

$$= 17 n^5 + \underbrace{25 n^4 \cdot \log(n)}_{4 n^5} \qquad | \, n \geq 2$$

$$< 17 n^5 + 4 n^5 = \underline{21 n^5}$$

$$\boxed{\mathcal{O}(n^5) \text{ mit den Zeugen } c = 21,\ k = 2}$$

3. Teil (1 Punkt)

Lösen Sie die folgenden Matrizengleichungen unter Anwendung der Rechenregeln für Matrizen nach $\mathbf{X}$ auf. Wir nehmen dabei an, dass alle (während der Rechnung) vorkommenden Matrizen quadratische und invertierbare $(n \times n)$-Matrizen sind.

$$(2\mathbf{XB} + 7\mathbf{I}_n\mathbf{X})^T = 2\mathbf{B}^T + 7\mathbf{I}_n$$

Hier ist $\mathbf{I}_n$ die n-dimensionale Einheitsmatrix.

Verwenden Sie die Gesetze für das Rechnen mit Matrizen und schreiben Sie alle Zwischenschritte auf!

$$(2XB + 7X)^T = 2B^T + 7 \cdot I_n$$

$$= 2 \cdot B^T \cdot X^T + 7 \cdot X^T = 2 \cdot B^T + 7 \cdot I_n$$

$$= (2 \cdot B^T + 7 \cdot I_n) \cdot X^T = 2 \cdot B^T + 7 \cdot I_n$$

$$= X^T = \underbrace{(2 \cdot B^T + 7 \cdot I_n)^{-1}}_{C^{-1}} \cdot \underbrace{(2 \cdot B^T + 7 \cdot I_n)}_{C}$$

$$= X^T = I_n$$

$$= X = I_n$$

2 Beweise und Zählen

Diese Aufgabe besteht aus drei, voneinander unabhängigen Teilaufgaben.

1. Teil ($0.5 + 1.5 = 2$ Punkte)

1. Wie viele Möglichkeiten gibt es 10 Personen in zwei Arbeitsgruppen aufzuteilen, wenn die erste Gruppe 4 Personen und die zweite Gruppe die restlichen 6 Personen umfassen soll (0.5 Punkte)?
2. Nehmen wir jetzt an, dass sich unter den 10 Personen ein Paar befindet: Alice und Bob. In wie vielen der obigen Aufteilungen werden Alice und Bob nicht getrennt, d.h. befinden sich Alice und Bob in der selben Arbeitsgruppe (1.5 Punkte)?

Schreiben Sie Ihre Resultate mit Hilfe von Binomialkoeffizienten!

1. $\binom{10}{6} = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = \underline{\underline{210}}$

2. I Alice und Bob sind in der 4er Gruppe.
Somit hat es noch zwei freie Plätze.
→ Aus den restlichen 8 Personen zwei auswählen : $\binom{8}{2}$

II Alice und Bob sind in der 6er Gruppe.
Analog sind noch vier Plätze zu vergeben
$\binom{8}{4}$

$\mathrm{I} + \mathrm{II} = \binom{8}{2} + \binom{8}{4} = 28 + 70 = \underline{\underline{98}}$

2. Teil (1 Punkt)

Zeigen Sie mit Hilfe eines Induktionsbeweises, dass $4^n > 2^n$ für jede natürliche Zahl n. Führen Sie dazu Induktionsverankerung und den Induktionsschritt detailliert durch!

1. Induktionsverankerung $n \stackrel{!}{=} 1$

$4^1 > 2^1 \Rightarrow$ das stimmt

2. Induktionsschritt

$4^{n+1} > 2^{n+1}$

$4 \cdot \underbrace{4^n > 2^n}_{\text{das ist bekannt}} \cdot 2$

$4 > 2$: das ist auch allgemein gültig

Somit ist die Aussage "$4^n > 2^n$" für alle $n \in \mathbb{N}$ gültig.

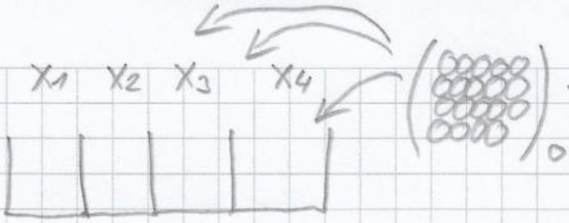
3. Teil (2 Punkte)

Wieviele Lösungen hat die Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$$

wobei $x_i \in \mathbb{N}$ mit den Einschränkung $x_2 \geq 3$ und $x_4 \geq 4$. Schreiben Sie die Anzahl Lösungen als Binomialkoeffizient und erklären Sie, wie er zustande kommt!

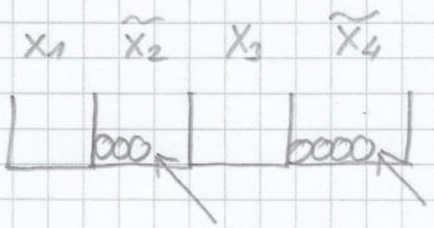
i)



o müssen in die Behälter verteilt werden.

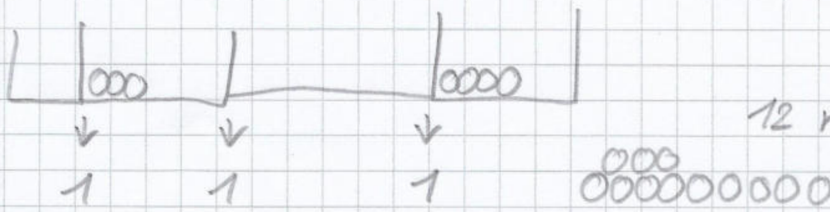
ii) mit der Einschränkung:

$x_2 \geq 3$, $x_4 \geq 4$



3 bzw 4 Kugeln werden bereits in die Behälter von x_2, x_4 gelegt

iii) $x_1 + \tilde{x}_2 + x_3 + \tilde{x}_4 = 12$



12 restliche "o"

0/0

Auswahl aus (3x "1" und 12x "0")

$$\frac{15!}{3! \cdot 12!}$$

"0" können auf 12! Arten verteilt werden

1ner können auf 3! Arten verteilt werden

$$\frac{15!}{3! \cdot 12!} = \binom{15}{3} = \underline{\underline{455}}$$

3 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Diese Aufgabe besteht aus drei, voneinander unabhängigen Teilaufgaben.

1. Teil (1 Punkt)

Die Energieversorgung eines Rechenzentrums wird mit zwei separaten Stromversorgungen A und B sichergestellt. Dabei läuft A zu 93% ohne Störungen, B zu 88% ohne Störungen.

Wir legen zudem folgende Nomenklaturen fest:

(i) Ereignis $A =$ "*System A läuft ohne Störung*"

(ii) Ereignis $B =$ "*System B läuft ohne Störung*"

(iii) Die jeweiligen Gegenereignisse $\overline{A}$ und $\overline{B}$ bedeuten, dass das System nicht läuft.

Aufgaben:

(a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines der Systeme in Betrieb ist, wenn Sie annehmen können, dass die Systeme unabhängig voneinander ohne Störung laufen, resp. ausfallen (0.75 Punkte)?

(b) Aus Erfahrung weiss man nun, dass beide Systeme gleichzeitig zu 82% ohne Störung laufen. Folgern Sie nun, ob die Unabhängigkeitsannahme in Aufgabe (a) zu Recht postuliert wurde (0.25 Punkte).

a) $p(A \vee B) = 1 - p(\bar{A} \wedge \bar{B}) = 1 - p(\bar{A}) \cdot p(\bar{B})$

$= 1 - 0{,}07 \cdot 0{,}12 = \underline{\underline{0{,}9916}}$

b)

$p(\bar{A} \wedge \bar{B}) \neq p(\bar{A}) \cdot p(\bar{B})$ $\leftarrow$ für unabhängige Ereignisse

$0{,}18 \neq 0{,}07 \cdot 0{,}12$

$0{,}18 \neq 0{,}0084$ Stimmt also nich Ereignisse sind nicht unabhängig

2. Teil (2 Punkte)

Eine Security Person hat den Auftrag in einer Stunde 59-Mal eine per Zufallsgenerator ausgewählte Web-Cams für eine gewisse Zeit zu beobachten. Nun liefern 3 der 32 Web-Cams Bilder schlechter Qualität. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Security Person in dieser Stunde genau 4 Web-Cams mit schlechter Bildqualität beobachten muss?

Berechnen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit anhand der 4 nachfolgenden Modelle/Verteilungen:

(a) Laplace-Gleichverteilung (0.25 Punkte)

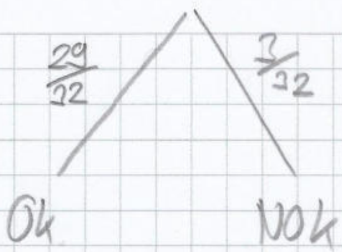
(b) Binomialverteilung (0.75 Punkte)

(c) Hypergeometrische Verteilung (0.25 Punkte)

(d) Poissonverteilung (0.75 Punkte)

Sollte ein Modell für die Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit nicht geeignet sein, ist zu begründen, warum dieses Modell in diesem Fall nicht geeignet ist.

Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass etwaige Approximationsbedingungen erfüllt sind.



a) $p(A) =$

b) $\binom{59}{4} \cdot \left(\frac{3}{32}\right)^{4} \cdot \left(\frac{29}{32}\right)^{55} = \underline{\underline{0,1566}}$

c) $\dfrac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

d) $\dfrac{\mu^{k}}{k!} \cdot e^{-\mu} =$

3. Teil ($1.25 + 0.75 = 2$ Punkte)

Nehmen wir an, dass es 3 Sorten von Tabletten zur Linderung von Halsschmerzen gibt. Leider hat jeder Tablettentyp Nebenwirkungen, z.B. dass das Halsweh verstärkt, statt gelindert wird. Bei einem grossen Feldtest wurden für die drei Tablettentypen die folgenden Werte ermittelt:

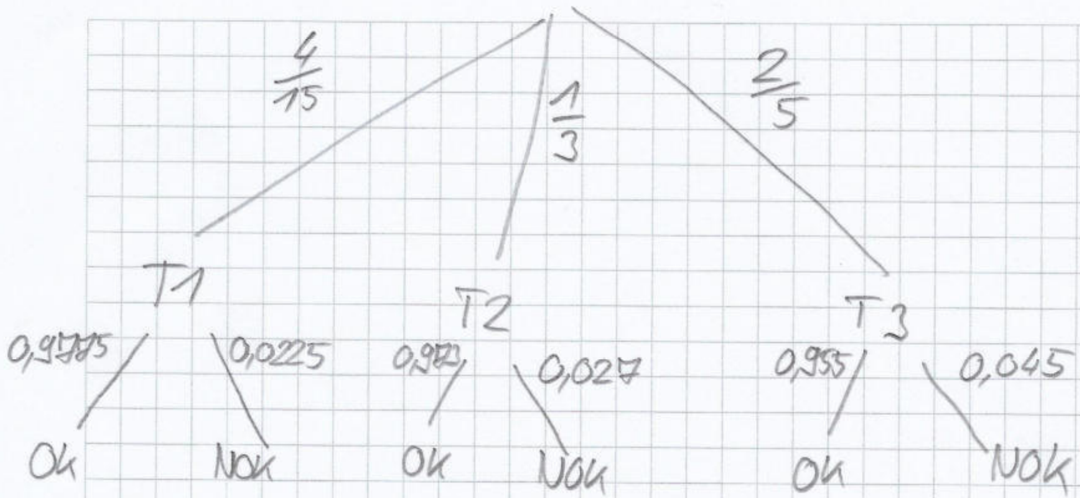
Typ 1: Bei total 3660 Anwendungen hatten 2.25% die beschriebene Nebenwirkung.

Typ 2: Bei total 4575 Anwendungen hatten 2.7% die beschriebene Nebenwirkung.

Typ 3: Bei total 5490 Anwendungen hatten 4.5% die beschriebene Nebenwirkung.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Proband die Nebenwirkung spürte (1.25 Punkte).

(b) Ein gewählter Proband spürt die Nebenwirkung. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser die Tablette vom Typ 1 eingenommen hat? Falls Sie die Aufgabe (a) nicht lösen konnten, können Sie annehmen, dass in der Aufgabe (a) der Wert 3.15 % erhalten wurde (0.75 Punkte).



a) $p(NOk) = \frac{4}{15} \cdot 0{,}0225 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}027 + \frac{2}{5} \cdot 0{,}045$

$= \underline{\underline{0{,}033}}$

b) $p(T1, NOk) = \frac{p(NOk \mid T1) \cdot p(T1)}{p(NOk)} = \frac{0{,}0225 \cdot \frac{4}{15}}{0{,}033}$

$= \underline{\underline{0{,}1818}}$

4 Zahlentheorie

Diese Aufgabe besteht aus vier, voneinander unabhängigen Teilaufgaben.

1. Teil ($0.5 + 1 = 1.5$ Punkte)

(a) Berechnen Sie $(10 \oplus_5 9) \odot_{15} (6 \oplus_{12} 20)$ (0.5 Punkte).

(b) Berechnen Sie mit dem Square and Multiply Algorithmus **detailliert von Hand** $27^{19} \bmod 293$ (1 Punkt).

a) $(10 \oplus_5 9) \odot_{15} (6 \oplus_{12} 20)$

$= 4 \odot_{15} 2$

$= \underline{\underline{8}}$

b) $19 = 10011_2$

~~QM~~ Q Q QM QM

$27 \xrightarrow{Q} 143 \xrightarrow{Q} 232 \xrightarrow{Q} 205 \xrightarrow{M} 261$

$(729) \quad (20449) \quad (53824) \quad (5535)$

$261 \xrightarrow{Q} 145 \xrightarrow{M} 106$

$(68121) \quad (3915)$

$27^{19} \bmod 293 = \underline{\underline{106}}$

2. Teil (1 Punkt)

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte, ungerade, ganze Zahl mit exakt 274 Stellen eine Primzahl ist?

- Grösste 274-Stellige Zahl : $10^{274} - 1$
- Grösste 273-Stellige Zahl : $10^{273} - 1$

$$\boxed{\pi(n) \sim \frac{n}{\ln(n)}}$$

$$\pi(10^{274} - 1) \approx \pi(10^{274}) = \frac{10^{274}}{\ln(10^{274})} = \frac{10^{274}}{274 \cdot \ln(10)}$$

$$\pi(10^{273} - 1) \approx \pi(10^{273}) = \frac{10^{273}}{273 \cdot \ln(10)}$$

$$m = \frac{10^{274}}{274 \cdot \ln(10)} - \frac{10^{273}}{273 \cdot \ln(10)} = \frac{10^{273}}{\ln(10)} \cdot \left(\frac{10}{274} - \frac{1}{273} \right)$$

$$= \frac{10^{273}}{\ln(10)} \cdot \left(\frac{2730 - 274}{274 \cdot 273} \right) \approx 1{,}1425 \cdot 10^{271}$$

$$p = \frac{1{,}1425 \cdot 10^{271}}{10^{271}(10^{3} - 10^{2})} = \underline{\underline{0{,}001584}}$$

3. Teil ($1 + 1.5 = 2.5$ Punkte)

1. Zeigen Sie mit Hilfe des kleinen Satzes von Fermat, dass gilt

$$14^{2904} \bmod 23 \equiv 1 \qquad \text{und} \qquad 14^{2904} \bmod 13 \equiv 1$$

2. Zeigen Sie nun mit dem Chinesischen Restsatz, dass gilt

$$14^{2904} \bmod 299 \equiv 1$$

Tipp: Verwenden Sie, dass gilt: $299 = 23 \cdot 13$.

Beachten Sie, dass die Berechnung formal durchgeführt werden muss und nicht einfach ein Programm verwendet werden kann: es muss also klar ersichtlich sein, wie Sie den kleinen Satz von Fermat und den Chinesischen Restsatz verwenden.

1. i) $14^{2904} \bmod 23 \equiv 1$

$(14^{22})^{132} \bmod 23 \equiv 1$

$1^{132} \bmod 23 \equiv 1$

ii) $14^{2904} \bmod 13 \equiv 1$

$(14^{12})^{242} \bmod 13 \equiv 1$

$1^{242} \bmod 13 \equiv 1$

2.

$m = 23 \cdot 13 = 299$

$M_1 = \frac{m}{23} = \frac{299}{23} = 13$

$M_2 = \frac{m}{13} = \frac{299}{13} = 23$

$M_1 \cdot y_1 \equiv 1 \mod 23$

$13 \cdot y_1 \equiv 1 \mod 23$

$y_1 = \underline{16}$

$23 = 13 + 10$
$13 = 10 + 3$
$10 = 3 \cdot 3 + 1$

$1 = 10 - 3 \cdot 3$
$1 = -3 \cdot 13 + 4 \cdot 10$
$1 = 4 \cdot 23 - 7 \cdot 13$

$1 = \underline{16} \cdot 13 - 9 \cdot 23$

$M_2 \cdot y_2 \equiv 1 \mod 13$

$23 \cdot y_2 \equiv 1 \mod 13$

$y_2 = \underline{4}$

$1 = \underline{4} \cdot 23 - 7 \cdot 13$

$x = 1 \cdot 23 \cdot 4 + 1 \cdot 13 \cdot 16 = 300$

$\underline{\underline{300 \mod 299 \equiv 1}}$

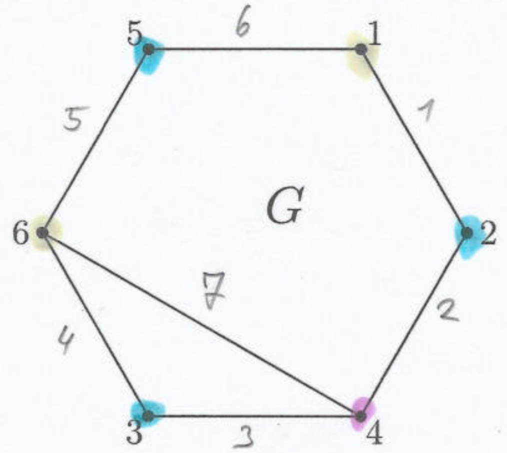
5 Graphentheorie

Diese Aufgabe besteht aus drei, voneinander unabhängigen Teilaufgaben.

1. Teil (3.5 Punkte)

Bestimmen Sie schrittweise unter Verwendung der Dekompositionsgleichung und dem zugehörigen Baumdiagramm das chromatische Polynom und die chromatische Zahl des nachfolgenden Graphen G (2.0 Punkte).

Färben Sie den Graphen G mit der minimalen Anzahl Farben und berechnen Sie wie viele Färbungen mit 3 Farben möglich sind (0.5 Punkte).



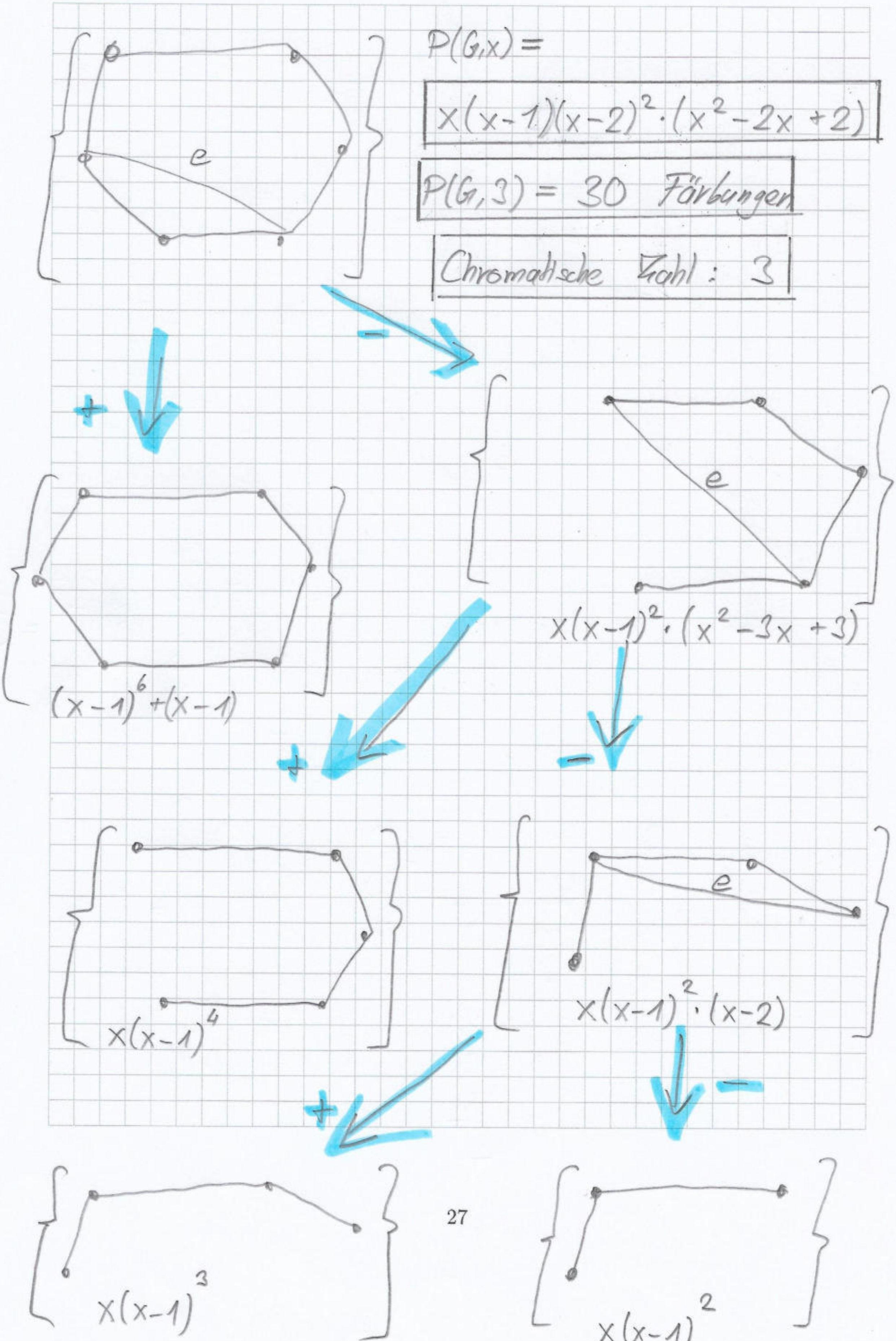
Wie lauten die Adjazenz-, Grad- und Admittanzmatrix des Graphen (1 Punkt)?

A D B

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$


P(G,x) =
x(x-1)(x-2)^2·(x^2-2x+2)
P(G,3) = 30 Färbungen
Chromatische Zahl: 3
e
−
+
e
(x-1)^6+(x-1)
x(x-1)^2·(x^2-3x+3)
+
−
x(x-1)^4
e
x(x-1)^2·(x-2)
+
−
x(x-1)^3
x(x-1)^2

2. Teil (1.5 Punkt)

Wie viele Spannbäume hat der oben dargestellte Graph G? Begründen Sie Ihre Behauptung detailliert und von Hand!