Date : 20 octobre 2022

Modélisation des Courbes S-N en régime de fatigue LCF

Cyril THOMMERET

Safran Aircraft Engines
&
Laboratoire de Probabilités,
de Statistiques et de Modélisation
de la Sorbonne Univeristé

Encadrants :
Claire ROMAN - *SAE YQS3*
Jean-Patrick BAUDRY - *LPSM*
Directeur :
Michel BRONIATOWSKI - *LPSM*

Essai de fatigue

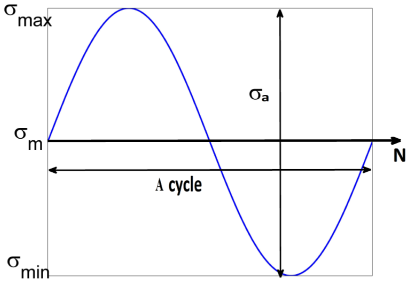

Figure – Application d'un effort sur un matériau

Données d'études : $(N_k, \sigma_k)_{1 \leq k \leq n}$

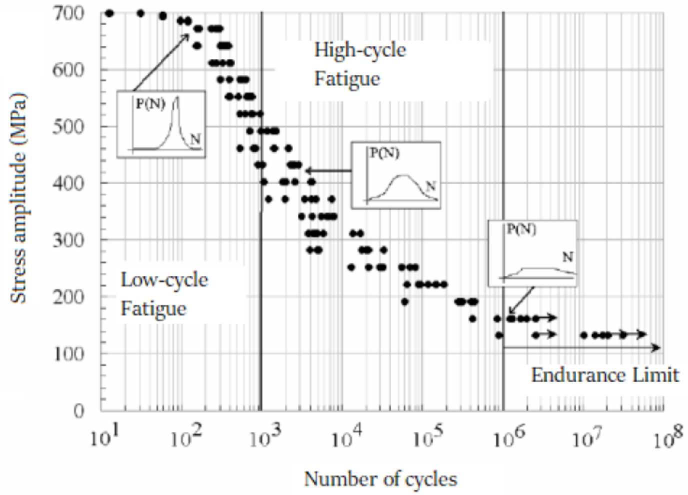

Figure – Schéma d'une courbe de Wöhler

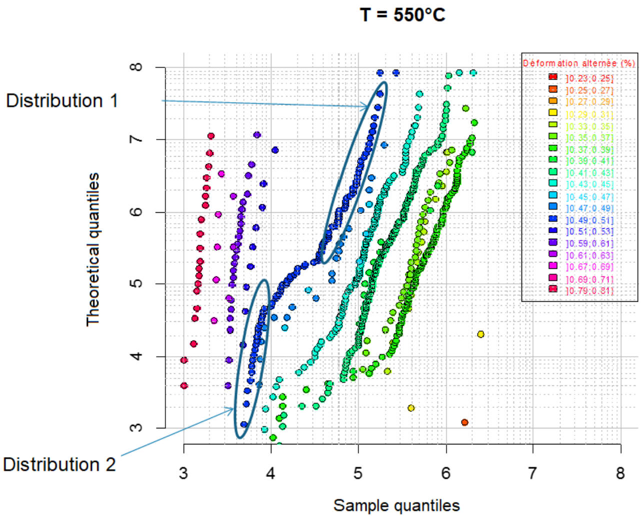

Figure – QQplot de la normalité du logarithme du nombre de cycles à rupture par niveau de déformation alternée (10-12 ASTM, T = 550°C)

Soit $\mathcal{F} = \{f_j\}$ une classe de densités de probabilités *paramétriques*.

Definition

$$g_{\pi,\theta}(x) = \sum_{j=1}^{g} \pi_j \cdot f_j(x|\theta_j)$$

avec $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_g) \in \Theta$ et pour tout j, $\pi_j \in [0, 1]$ avec $\sum_j \pi_j = 1$.

Test sur le nombre de composante d'un mélange :

$$\mathcal{H}_0 : g = g_0 \qquad \text{contre} \qquad \mathcal{H}_a : g = g_0 + 1$$

Mélange à deux composantes :

$$X \sim g_{\pi^\star,\theta^\star} \equiv (1-\pi^\star)\cdot f_1(\circ|\theta_1^\star) + \pi^\star \cdot f_2(\circ|\theta_2^\star)$$

$$\text{avec } \pi^\star \in [0,1] \text{ et } \theta^\star = (\theta_1^\star, \theta_2^\star) \in \Theta_1 \times \Theta_2$$

Test d'homogénéité :

$$\mathcal{H}_0 : \pi^\star = 0 \quad \text{contre} \quad \mathcal{H}_{\mathrm{a}} : \pi^\star \in (0,1]$$

Problème **non-régulier**, car π_0 est au bord de l'espace des paramètres.

Statistique du Rapport de Vraisemblance (pour $\hat{\pi}_n$ estimateur de $\pi^\star$) :

$$\Lambda(\hat{\pi}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \frac{\chi^2(1)+\delta_0}{2} \qquad \text{(sous } H_0\text{, à param. connus)}$$

Brève bibliographie :

- Ghosh & Sen (1985)
- Titterington (1981, 1985) & Hartigan (1985)
- Berdai & Garel (1996)
- Dacunha-Castelle & Gassiat (1997)

Definition

Soient P, Q deux lois de probabilités,
et φ une fonction convexe telle que : $\varphi(1) = 0$.

$$D_\varphi(Q||P) := \int \varphi(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P})\mathrm{d}P$$

est la divergence de Q par rapport à P pour la fonction génératrice φ.

Forme duale de la divergence

Sous réserve d'une condition d'intégrabilité,

$$D_\varphi(g||g_{\pi^\star,\theta^\star}) = \sup_{\pi,\theta\in V}\Big[\int(\varphi'\circ\frac{g}{g_{\pi,\theta}})(t)\cdot g(t)\,\mathrm{d}t - \int(\varphi^{\#}\circ\frac{g}{g_{\pi,\theta}})(x)\cdot g_{\pi^\star,\theta^\star}(x)\mathrm{d}x\Big]$$

$X \sim P^\star$ de densité $g_{\pi^\star,\theta^\star}$

g : densité de même support que $g_{\pi^\star,\theta^\star}$

φ' : dérivée de φ

$\varphi^{\#} \equiv \mathrm{id}\cdot\varphi' - \varphi$

Écriture en tant que M-estimateur

Pour tout fonction g mesurable,

$$m_{\pi,\theta} : x \longmapsto \int (\varphi' \circ \frac{g}{g_{\pi,\theta}})(t) \cdot g(t)\,\mathrm{d}t - (\varphi^{\#} \circ \frac{g}{g_{\pi,\theta}})(x)$$

φ : fonction génératrice d'une divergence

De sorte que :

$$\begin{cases} D_\varphi(g \,||\, g_{\pi^\star,\theta^\star}) & = \sup_{\pi,\theta} \mathbb{P}^* \, m_{\pi,\theta} \qquad \text{(Forme duale)} \\ (\pi^*, \theta^*) & = \arg\sup_{\pi,\theta} \mathbb{P}^* \, m_{\pi,\theta} \end{cases}$$

Nous regarderons : $\boxed{(\hat{\pi}, \hat{\theta}_1) = \arg\max_{\pi,\theta_1 \in V} \; \mathbb{P}_n \, m_{\pi,\theta_1,\theta_2}}$ avec θ_2 **fixé**.

V **pouvant inclure des** π **négatifs.**

Theorem

Fixons $\theta_2 \in \Theta_2$, sous certaines conditions (dont celle que $(\pi^*, \theta_1^*) \in \mathrm{Int}\big([a,b] \times \Theta_1\big)$,
Nous avons, si $\pi^* = 0$ ou si $\theta_2^* = \theta_2$, le résultat de convergence suivant,

$$\sqrt{n} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\pi} - \pi^* \\ \hat{\theta}_1 - \theta_1^* \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, H^{-1} \cdot \mathbb{P}^*\{\Psi_{\pi^*,\theta_1^*} {}^t\Psi_{\pi^*,\theta_1^*}\} \cdot {}^tH^{-1})$$

où H est la Hessienne de l'application $(\pi, \theta) \longmapsto \mathbb{P}\, m_{\pi,\phi}$ évaluée en $(\pi^*, \theta_1^*, \theta_2)$,
et où $\Psi_{\pi^\star,\theta_1^\star} = \begin{bmatrix} \partial_\pi\, m_{\pi,\theta_1} \\ \partial_{\theta_1}\, m_{\pi,\theta_1} \end{bmatrix}_{\big|\pi^\star,\theta_1^\star\theta_2}$.

Corollary

Sous certaines conditions (dont celle que $(\pi^*, \theta_1^*) \in \mathrm{Int}\big([a,b] \times \Theta_1\big)$*,*
Nous avons, si $\pi^* = 0$ *ou si* $\theta_2^* = \theta_2$*, le résultat de convergence suivant,*

$$\sqrt{\frac{n}{a_n}} \cdot (\hat{\pi} - \pi^*) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

où a_n *est le terme* $(1,1)$ *de* $H_n^{-1} \cdot \{\mathbb{P}_n \Psi_{\hat{\pi},\hat{\theta}_1} {}^t\Psi_{\hat{\pi},\hat{\theta}_1}\} \cdot {}^t H_n^{-1}$*, avec* H_n *la Hessienne de l'application* $(\pi, \phi) \longmapsto \mathbb{P}_n\, m_{\pi,\phi}$ *évaluée en* $(\hat{\pi}, \hat{\theta}_1, \theta_2)$*.*

Definition

La statistique de test sur le nombre de composantes :

$$\boxed{T_n := \sup_{\theta_2} \sqrt{\frac{n}{a_n}} \cdot \hat{\pi}}$$

(Supremum d'un processus gaussien)

Exemple : Mélange de Lois Uniformes avec $\eta^\star \in (0,1)$:

$$X \sim g_{\pi^\star,\theta^\star} \equiv (1-\pi^\star)\cdot \mathbb{1}_{\overline{(0,1)}} + \frac{\pi^\star}{\eta^\star}\cdot \mathbb{1}_{\overline{(0,\eta^\star)}}$$

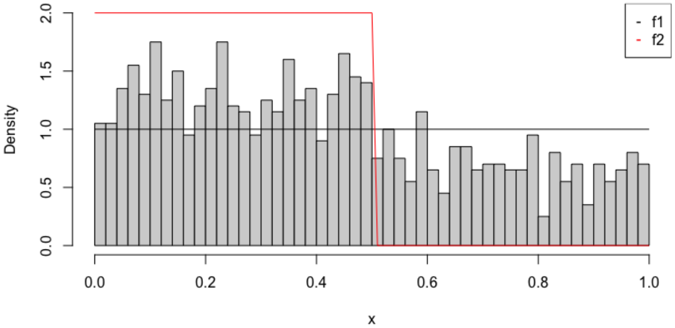

Figure – Histogramme pour $(\pi^\star,\eta^\star) = (0.5, 0.5)$ d'un échantillon de taille $n = 10^3$

I$^{\text{er}}$ cas d'application : Divergence de Kullback-Leiber modifiée.

$$\varphi(x) := x \cdot \log x - x + 1$$

$$m_{\pi,\eta}(x) := \log g_{\pi,\eta}(x) - \log g(x) \quad \& \quad \hat{\pi}(\mathbb{X}, \eta) := \arg\max_{\pi} \mathbb{P}_n\, m_{\pi,\eta}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\hat{\pi}(\mathbb{X}, \eta) = (1 + \frac{\eta}{1-\eta}) \cdot \frac{n_-}{n} - \frac{\eta}{1-\eta}}$$

n_- : Nombre de données inférieures à η

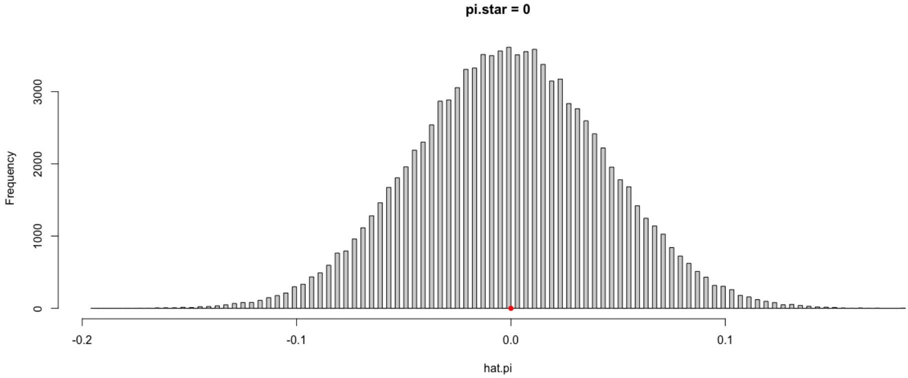

Figure – Histogramme des $\hat{\pi}_n$ pour $n = 500$, $k = 10^5$

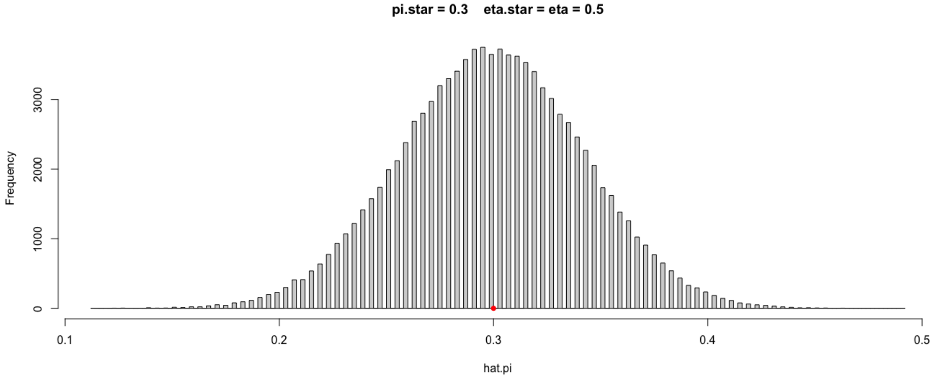

Figure – Histogramme des $\hat{\pi}_n$ pour $n = 500$, $k = 10^5$

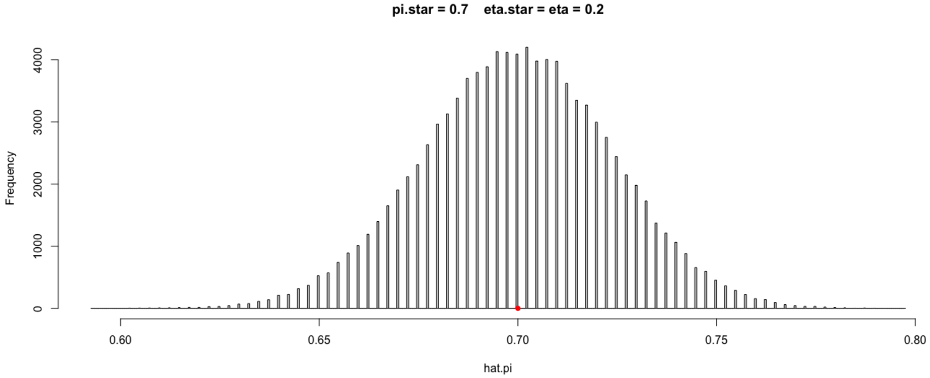

Figure – Histogramme des $\hat{\pi}_n$ pour $n = 500$, $k = 10^5$

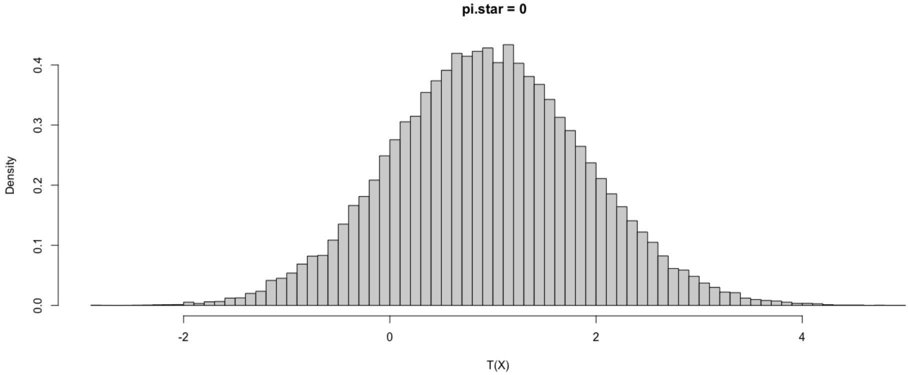

Figure – Histogramme de la statistique T_n pour $n = 500$, $k = 10^5$

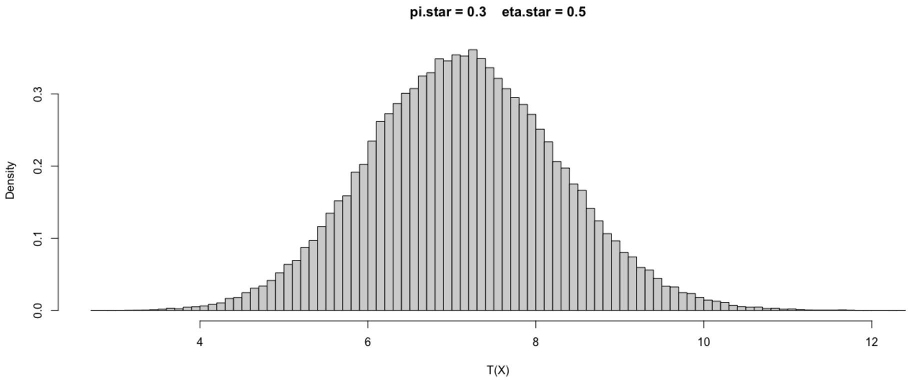

Figure – Histogramme de la statistique T_n pour $n = 500$, $k = 10^5$

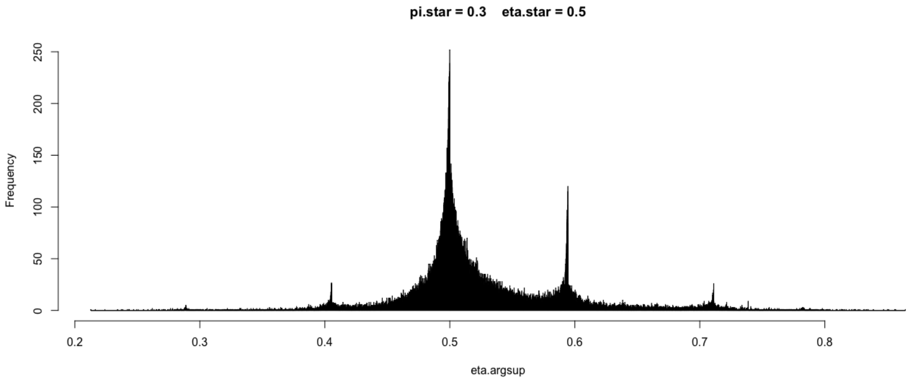

Figure – Histogramme des $\hat{\eta}_n$ pour $n = 500$, $k = 10^5$

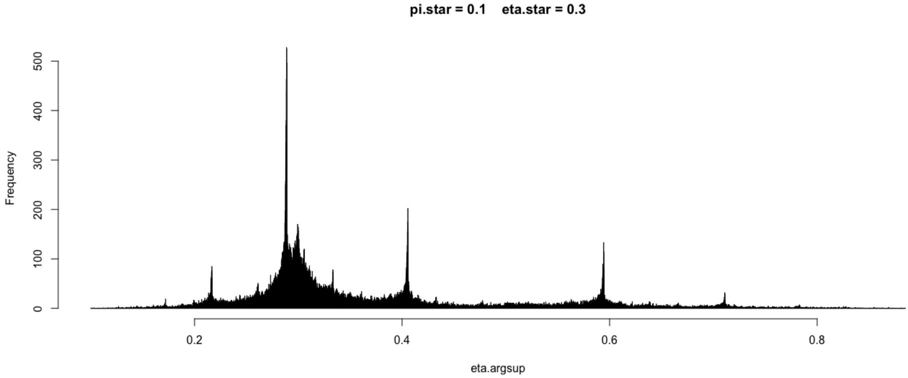

Figure – Histogramme des $\hat{\eta}_n$ pour $n = 500$, $k = 10^5$

Deuxième exemple : Divergence du χ^2. $\varphi(x) := (x-1)^2/2$

$$\mathbb{P}_n\, m_{\pi,\eta} = \frac{1}{ab} \cdot \left[b \cdot \eta + a \cdot (1-\eta) \right] - \frac{1}{2} \cdot \left[1 + \frac{1}{n} \cdot \left\{ \frac{n_-}{a^2} + \frac{n_+}{b^2} \right\} \right]$$

où $a = 1 + \pi \cdot (\frac{1}{\eta} - 1)$ et $b = 1 - \pi$

$$\Longrightarrow \boxed{\hat{\pi}(\mathbb{X}, \eta) \text{ racine d'un polynôme de degré } 5}$$

- Différentes méthodes de recherches.

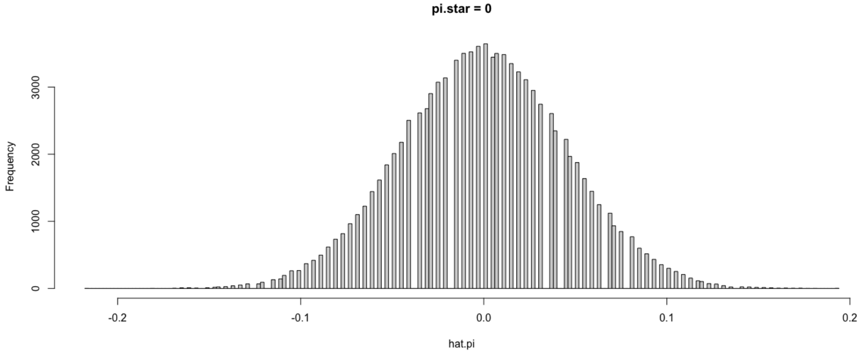

Figure – Histogramme des $\hat{\pi}_n$ pour $n = 500$, $k = 10^5$ dans le cadre χ^2

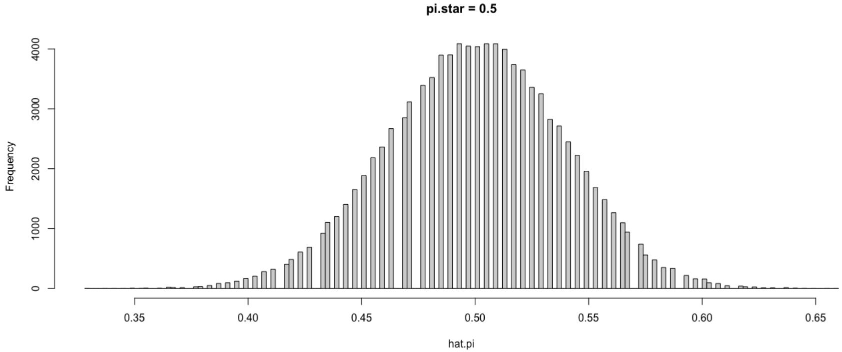

Figure – Histogramme des $\hat{\pi}_n$ pour $n = 500$, $k = 10^5$ dans le cadre χ^2

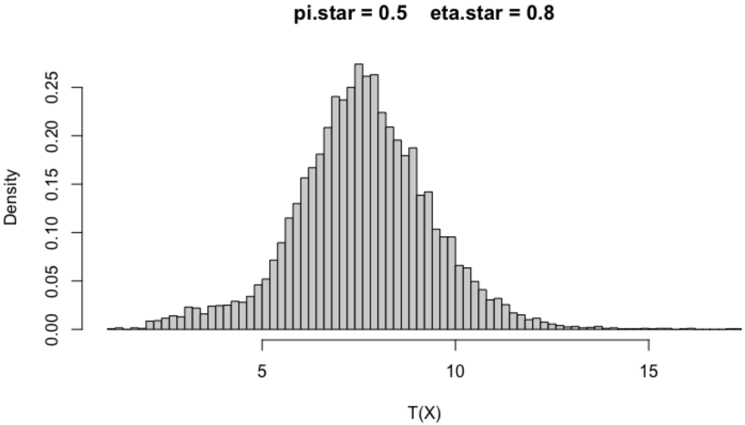

Figure – Histogramme des $\hat{\pi}_n$ pour $n = 500$, $k = 10^4$ dans le cadre χ^2

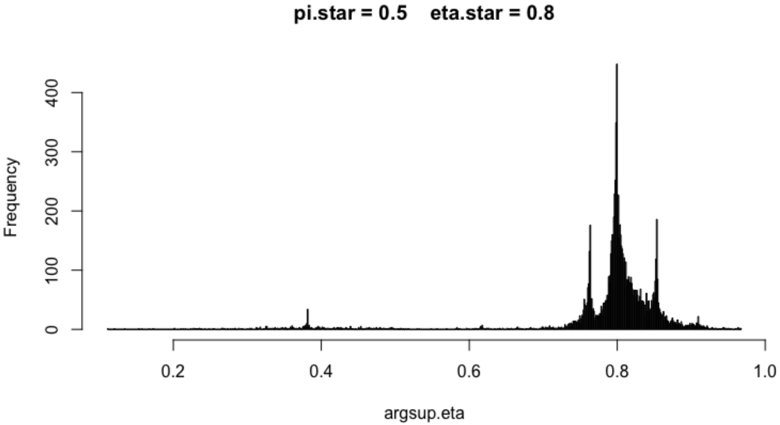

Figure – Histogramme des $\hat{\pi}_n$ pour $n = 500$, $k = 10^4$ dans le cadre χ^2

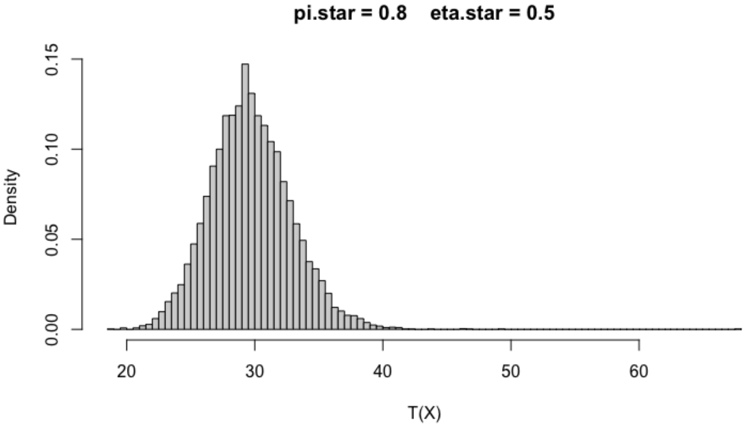

Figure – Histogramme des $\hat{\pi}_n$ pour $n = 500$, $k = 10^4$ dans le cadre χ^2

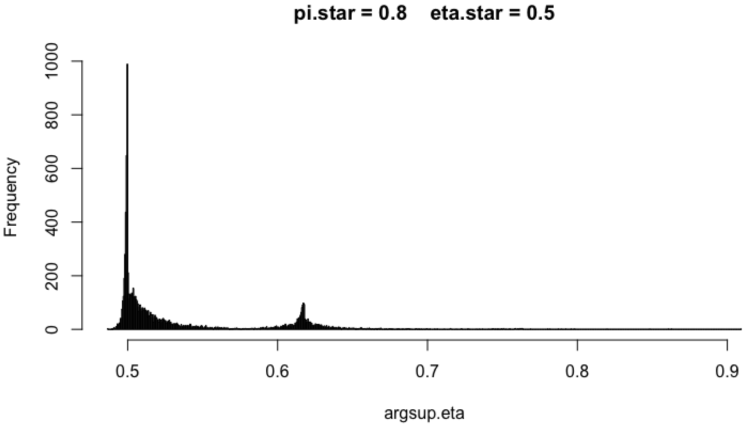

Figure – Histogramme des $\hat{\pi}_n$ pour $n = 500$, $k = 10^4$ dans le cadre χ^2

Merci ♣