

χ^2 et Mélanges Uniformes

Cyril THOMMERET
LPSM - Sorbonne Université
SAFRAN Aircraft Engines

2 octobre 2023

Table des matières

1	Le contexte dans le cas χ^2	2
1.1	Cas général	2
1.1.1	Calcul du critère	2
1.1.2	Calculs des dérivées du critères	3
1.2	Applications aux mélange de lois uniformes	4
1.2.1	Étude et calcul de $\hat{\pi}(\mathbb{X}, \eta)$	5
1.2.2	Calcul des a_n et b_n	9
2	Encodage de l'algorithme	10
2.1	Étape préliminaire : la spécification du mélange	11
2.2	Première étape	13
2.3	Deuxième étape :	14
2.3.1	Encodage des sous-fonctions	14
2.3.2	Encodage du vecteur	16
2.4	Troisième étape	16
3	Past work...	17
4	Etude de l'algorithme dans le cas χ^2	17
4.1	Calcul de $\hat{\pi}$	17
4.2	Calcul de a_n	18
4.3	Encodage de l'étape 2	18
4.3.1	Méthode de maximisation - celle de R	18
4.4	Calcul des $b(\eta, \eta')$	18

Nous avons défini, pour une fonction φ génératrice d'une divergence, le critère suivant :

$$m_{\pi, \theta} : x \in \text{supp } g \mapsto \int (\varphi' \circ \frac{g}{g_{\pi, \theta}})(t) \cdot g(t) dt - (\varphi^\# \circ \frac{g}{g_{\pi, \theta}})(x)$$

où φ' est la dérivée de φ et où $\varphi^\# \equiv \text{id} \circ \varphi' - \varphi$.

1 Le contexte dans le cas χ^2

1.1 Cas général

Du point de vue de la divergence du χ^2 , la fonction génératrice s'écrit : $\varphi_{\chi^2}(t) = \frac{\{t-1\}^2}{2}$ (avec $\text{dom } \varphi_{\chi^2} = \mathbb{R}$).

Nous avons,

$$\begin{aligned}\varphi'_{\chi^2}(t) &= t-1 \\ \varphi^{\#}_{\chi^2}(t) &= t \cdot \varphi'_{\chi^2}(t) - \varphi_{\chi^2}(t) = \frac{t^2-1}{2}\end{aligned}$$

Nous détaillons dans ce qui suit la forme du point de vue de la divergence du χ^2 , des différents quantités intervenant dans la considération de la résolution de nos tests pour une densité de mélange $g_{\pi,\theta}$ arbitraire (nous verrons ensuite le cas des mélanges uniformes.)

1.1.1 Calcul du critère

D'après ce qui précède, pour toute fonction g mesurable d'intégrale 1, et pour tout $x \in \text{supp } g$,

$$\begin{aligned}\int (\varphi'_{\chi^2} \circ \frac{g}{g_{\pi,\theta}})(t) \cdot g(t) dt &= \int \left\{ \frac{g(t)}{g_{\pi,\theta}(t)} - 1 \right\} \cdot g(t) dt \\ &= \int \frac{(g(t))^2}{g_{\pi,\theta}(t)} dt - 1 \\ \text{et} \quad (\varphi^{\#}_{\chi^2} \circ \frac{g}{g_{\pi,\theta}})(x) &= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left(\frac{g(x)}{g_{\pi,\theta}(x)} \right)^2 - 1 \right\}\end{aligned}$$

Nous pouvons dès lors donner, dans le cadre de la divergence du χ^2 , la forme générale (au sens où la densité de mélange n'a pas encore été spécifiée) du critère $m_{\pi,\theta}$:

$$\begin{aligned}m_{\pi,\theta}^{\chi^2}(x) &:= \int (\varphi'_{\chi^2} \circ \frac{g}{g_{\pi,\theta}})(t) g(t) dt - (\varphi^{\#}_{\chi^2} \circ \frac{g}{g_{\pi,\theta}})(x) && \text{(par définition)} \\ &= \int \frac{(g(t))^2}{g_{\pi,\theta}(t)} dt - 1 - \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{g(x)}{g_{\pi,\theta}(x)} \right)^2 - 1 \right] && \text{(par substitution)} \\ \Rightarrow m_{\pi,\theta}^{\chi^2}(x) &= \int \frac{(g(t))^2}{g_{\pi,\theta}(t)} dt - \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{g(x)}{g_{\pi,\theta}(x)} \right)^2 + 1 \right]\end{aligned}$$

Dans les applications, nous serons amenés à considérer les deux premières dérivées (selon π et θ) du critère précédemment explicité. Nous procédons ici à leurs déterminations ¹

1. Ici, seules les dérivées par rapport à π sont calculées puisque nous nous consacrons au cas d'exemple où θ_1^* est connu.

1.1.2 Calculs des dérivées du critères

Calcul de $\partial_\pi m_{\pi,\theta}$

Sous réserve d'une inversion entre dérivation-intégrale, nous obtenons :

$$\partial_\pi m_{\pi,\theta}(x) = \int (g(t))^2 \cdot \partial_\pi g_{\pi,\theta}^{-1}(t) \cdot dt - \frac{1}{2} \cdot (g(x))^2 \cdot \partial_\pi g_{\pi,\theta}^{-2}(x)$$

Premièrement,

$$\begin{aligned} \partial_\pi g_{\pi,\theta}^{-1}(x) &= - \frac{\partial_\pi g_{\pi,\theta}(x)}{(g_{\pi,\theta}(x))^2} \\ &= \frac{f_1(x|\theta_1) - f_2(x|\theta_2)}{(g_{\pi,\theta}(x))^2} \end{aligned}$$

Deuxièmement,

$$\begin{aligned} \partial_\pi g_{\pi,\theta}^{-2}(x) &= -2 \cdot \frac{\partial_\pi g_{\pi,\theta}(x)}{(g_{\pi,\theta}(x))^3} \\ &= 2 \cdot \frac{\{f_1(x|\theta_1) - f_2(x|\theta_2)\}}{(g_{\pi,\theta}(x))^3} \end{aligned}$$

Nous avons donc, finalement,

$$\partial_\pi m_{\pi,\theta}(x) = \int (f_1(t|\theta_1) - f_2(t|\theta_2)) \cdot \left\{ \frac{g(t)}{g_{\pi,\theta}(t)} \right\}^2 \cdot dt - \{f_1(x|\theta_1) - f_2(x|\theta_2)\} \cdot \frac{(g(x))^2}{(g_{\pi,\theta}(x))^3}$$

Calcul de $\partial_\pi^2 m_{\pi,\theta}$

Il vient, d'après le calcul précédent de $\partial_\pi m_{\pi,\theta}$, toujours sous réserve d'un théorème de dérivation sous le signe intégrale,

$$\partial_\pi^2 m_{\pi,\theta}(x) = \int \{f_1(t|\theta_1) - f_2(t|\theta_2)\} \cdot \{g(t)\}^2 \cdot \partial_\pi g_{\pi,\theta}^{-2}(t) \cdot dt - \{f_1(x|\theta_1) - f_2(x|\theta_2)\} \cdot g(x)^2 \cdot \partial_\pi g_{\pi,\theta}^{-3}(x)$$

En outre,

$$\begin{aligned} \partial_\pi g_{\pi,\theta}^{-3}(x) &= -3 \cdot \frac{\partial_\pi g_{\pi,\theta}(x)}{\{g_{\pi,\theta}(x)\}^4} \\ &= 3 \cdot \frac{f_1(x|\theta_1) - f_2(x|\theta_2)}{\{g_{\pi,\theta}(x)\}^4} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\partial_\pi^2 m_{\pi,\theta}(x) = 2 \cdot \int \frac{[\{f_1(t|\theta_1) - f_2(t|\theta_2)\} \cdot g(t)]^2}{\{g_{\pi,\theta}(t)\}^3} \cdot dt - 3 \cdot \frac{[\{f_1(x|\theta_1) - f_2(x|\theta_2)\} \cdot g(x)]^2}{\{g_{\pi,\theta}(x)\}^4}$$

1.2 Applications aux mélange de lois uniformes

Plus particulièrement, nous pouvons développer ces formules en l'appliquant au modèle de mélange uniforme, défini à travers la densité,²

$$g_{\pi,\eta} \equiv (1 - \pi) \cdot \mathbb{1}_{(0,1)} + \frac{\pi}{\eta} \cdot \mathbb{1}_{(0,\eta)} \quad (\forall \pi \in \overline{(0,1)}) (\forall \eta \in (0,1))$$

Par convenance nous prenons, $g \equiv \mathbb{1}_{\text{supp } g_{\pi,\eta}} (\equiv \mathbb{1}_{[0,1]})$.

En vue de quantifier le test issu du résultat de notre théorème, nous souhaitons pouvoir appliquer numériquement l'algorithme suivant :

Algorithm 1: Algorithme général : Test d'homogénéité

Données a priori : $\phi, \{f_1\}, \{f_2\}, \theta^*$

Input : $n, n_{exp}, \tilde{n}, \mathcal{D}(\Theta_2), \tilde{\mathcal{D}}(\Theta_2), p$

$$1. \text{ Générer le plan d'échantillonnage } \mathbb{X}_{n_{exp},n} = \begin{bmatrix} \mathbb{X}^{(1)} \\ \mathbb{X}^{(2)} \\ \dots \\ \mathbb{X}^{(n_{exp})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & \dots & X_{1,n} \\ X_{2,1} & X_{2,2} & \dots & X_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n_{exp},1} & X_{n_{exp},2} & \dots & X_{n_{exp},n} \end{bmatrix}$$

où $X_{i,j} \sim g_{\pi^*,\theta^*}$.

2. Générer le vecteur $(t_k)_{1 \leq k \leq n_{exp}}$ où $t_k := \text{Max}_{\eta \in \mathcal{D}(\Theta_2)} s_k(\eta)$ avec $s_k(\eta) := s(\mathbb{X}^{(k)}, \eta)$.

3. Générer la matrice $[t_{k,\tilde{k}}]_{1 \leq k \leq n_{exp}, 1 \leq \tilde{k} \leq \tilde{n}}$ où $t_{k,\tilde{k}} := \text{Max}_{\eta \in \tilde{\mathcal{D}}(\Theta_2)} Y_\eta(\mathbb{X}^{(k)})$

$$\text{avec } (Y_\eta(\mathbb{X}))_{\eta \in \tilde{\mathcal{D}}(\Theta_2)} \sim \mathcal{N}(0, \Sigma(\mathbb{X})) \text{ et } \Sigma(\mathbb{X}) := \left[\frac{b(\mathbb{X}, \eta, \eta')}{\sqrt{a(\mathbb{X}, \eta) \cdot a(\mathbb{X}, \eta')}} \right]_{\eta, \eta' \in \tilde{\mathcal{D}}(\Theta_2)}$$

5. Calculer le vecteur des probabilités de rejet $r := \frac{1}{n_{exp}} \cdot \sum_{k=1}^{n_{exp}} \mathbb{1}_{\{t_k \geq t_{k,(\lceil \tilde{n} \cdot (1-p) \rceil)}\}}$

avec,

$$\begin{aligned} \hat{\pi}(\mathbb{X}, \eta) &:= \arg \max_{\pi} P_{\mathbb{X}} m_{\pi, \eta} \\ a(\mathbb{X}, \eta) &:= P_{\mathbb{X}} \{ (\partial_{\pi} m_{\hat{\pi}, \eta})^2 \} \setminus \left[\partial_{\pi}^2 P_{\mathbb{X}} m_{\hat{\pi}, \eta} \right]^2 \\ s(\mathbb{X}, \eta) &:= \sqrt{\frac{|\mathbb{X}|}{a(\mathbb{X}, \eta)}} \cdot \hat{\pi}(\mathbb{X}, \eta) \\ \text{et, } b_n(\eta, \eta') &:= \frac{P_{\mathbb{X}} \left[\partial_{\pi} m_{\hat{\pi}(\eta), \eta} \cdot \partial_{\pi} m_{\hat{\pi}(\eta'), \eta'} \right]}{P_{\mathbb{X}} \left[\partial_{\pi\pi}^2 m_{\hat{\pi}(\eta), \eta} \right] \cdot P_{\mathbb{X}} \left[\partial_{\pi\pi}^2 m_{\hat{\pi}(\eta'), \eta'} \right]} \end{aligned}$$

2. Rappelons ici que nous considérons un modèle de mélange à deux composantes où θ_1^* , le paramètre des données de la première composante f_1 est supposé connu. En outre, θ_2 sera substitué à η . Ainsi, θ_2^* , le paramètre des données de la seconde composante sera noté η^* .

Notons que dans le cas de la divergence du χ^2 , l'identité de Fisher n'est pas vérifiée, nous ne pouvons donc pas simplifier les expressions des dérivées (comme c'était le cas dans le cas de la divergence de Kullback-Leibler *modifiée*.)

Compte tenu de la forme particulière de la densité de mélange, nous pouvons en revanche toujours tenter de donner des expressions explicites au critère, ainsi qu'à ces dérivées première et seconde, afin que ces derniers puissent être calculables numériquement.

1.2.1 Étude et calcul de $\hat{\pi}(\mathbb{X}, \eta)$

Comme dans le cas de la divergence de Kullback-Leibler *modifiée*, la densité de mélanges de lois uniformes tels que nous les considérons nous permet d'explicitier un peu plus, les différentes quantités intervenants.

Rappelons la forme du critère,

$$m_{\pi, \theta}^{\chi^2}(x) = \int_{\text{supp } g} \frac{(g(t))^2}{g_{\pi, \theta}(t)} dt - \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{g(x)}{g_{\pi, \theta}(x)} \right)^2 + 1 \right]$$

Pour tout $\eta \in (0, 1)$, par définition, nous avons que,

$$g_{\pi, \eta}(x) = \begin{cases} (1 - \pi) \cdot 1 + \frac{\pi}{\eta} = 1 + \frac{1 - \eta}{\eta} \cdot \pi & \text{si } x \in (0, \eta) \\ 1 - \pi & \text{si } x \in (\eta, 1] \end{cases}$$

Ainsi, la partie intégrale du critère $\int \frac{(g(t))^2}{g_{\pi, \theta}(t)} dt$ devient $\int_0^\eta \frac{dt}{1 + \frac{1 - \eta}{\eta} \cdot \pi} + \int_\eta^1 \frac{dt}{1 - \pi}$ qui est égal à $\frac{\eta}{1 + \frac{1 - \eta}{\eta} \cdot \pi} + \frac{1 - \eta}{1 - \pi}$.

D'autre part, $\left\{ \frac{g(x)}{g_{\pi, \eta}(x)} \right\}^2$ prend la forme $\frac{1}{\left(1 + \frac{1 - \eta}{\eta} \cdot \pi \right)^2} \times \mathbb{1}_{(0, \eta)}(x) + \frac{1}{(1 - \pi)^2} \times \mathbb{1}_{(\eta, 1]}(x)$.

Par conséquent, dans le cas des mélanges uniformes tels que considérés, le critère s'écrit :

$$m_{\pi, \eta}(x) = \frac{\eta}{1 + \frac{1 - \eta}{\eta} \cdot \pi} + \frac{1 - \eta}{1 - \pi} - \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\mathbb{1}_{(0, \eta)}(x)}{\left(1 + \frac{1 - \eta}{\eta} \cdot \pi \right)^2} + \frac{\mathbb{1}_{(\eta, 1]}(x)}{(1 - \pi)^2} + 1 \right]$$

Soit $\mathbb{X}(\omega) = \mathbf{x}$ un échantillon de données. Il vient immédiatement que,

$$P_{\mathbb{X}} m_{\pi, \eta} = \frac{\eta}{1 + \frac{1 - \eta}{\eta} \cdot \pi} + \frac{1 - \eta}{1 - \pi} - \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{p_-}{\left(1 + \frac{1 - \eta}{\eta} \cdot \pi \right)^2} + \frac{p_+}{(1 - \pi)^2} + 1 \right]$$

avec p_- (respectivement p_+) la proportion des données inférieures (respectivement supérieures) à η .

Ainsi, la fonction à qui π associe $P_{\mathcal{X}} m_{\pi, \eta}$, est continue sur tout compact $\overline{(0, \alpha)}$ avec $\alpha < 1$. Nous pouvons donc dire que dès lors que $\pi \neq 1$, la fonction atteint ses bornes, et donc que l'argument du maximum $\hat{\pi}$ existe.

En outre, nous constatons par les graphes suivants que la fonction dont nous cherchons un maximum présente un aspect convexe, et cela pour différente valeur de η .

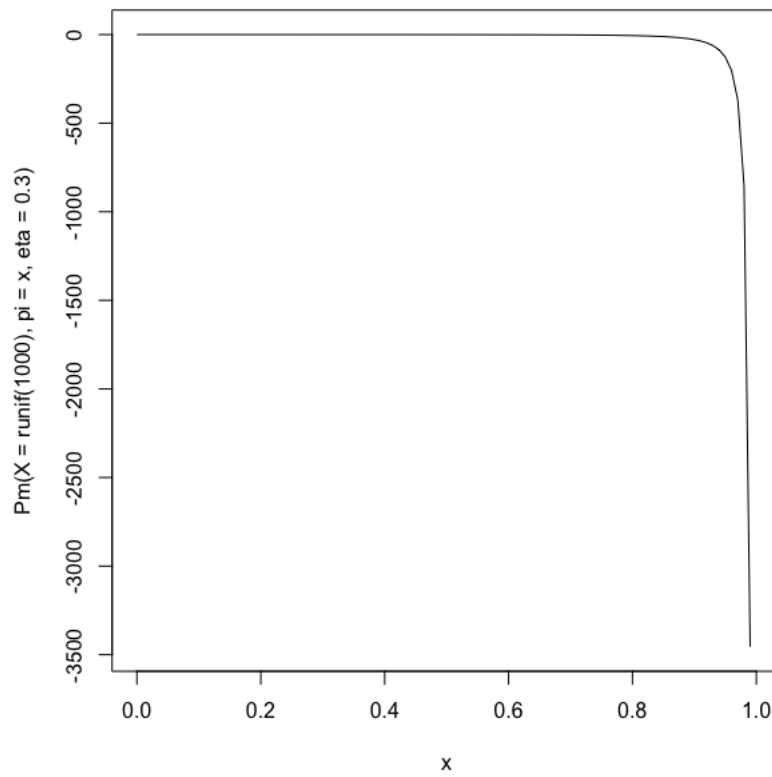


FIGURE 1 – Graphe de la fonction $\pi \mapsto P_{\mathcal{X}} m_{\pi, \eta}$ pour un échantillon de loi uniforme sur $\overline{(0, 1)}$ de taille 10^3 avec $\eta^* = \eta = 0.3$ ($\pi^* = 0$).

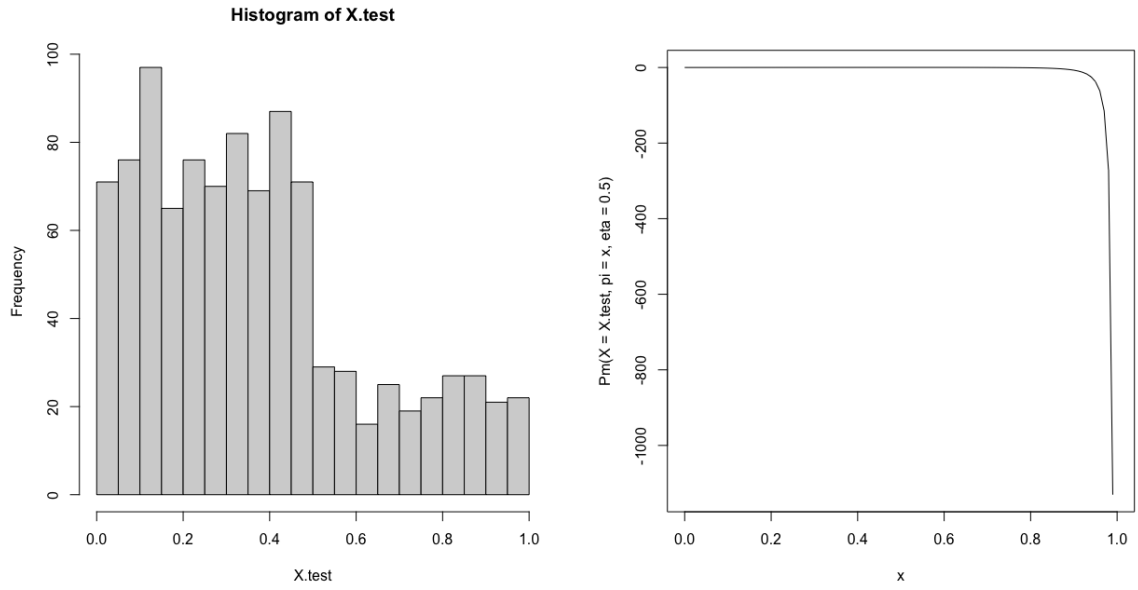


FIGURE 2 – À droite : Histogramme d'un échantillon de loi de mélange de lois uniformes de taille 10^3 avec $\eta^* = 0.5$ et $\pi^* = 0.5$. À gauche : Graphe de la fonction $\pi \mapsto P_{\mathcal{X}} m_{\pi, \eta}$ pour un échantillon de loi uniforme sur $(0, 1)$ de taille 10^3 avec $\eta = \eta^* = 0.5$ ($\pi^* = 0.5$).

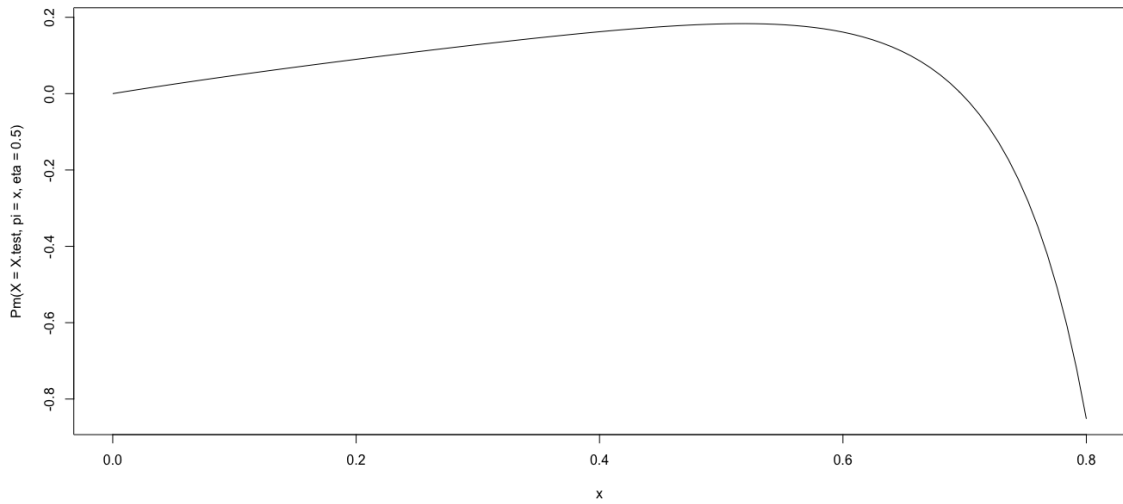


FIGURE 3 – Zoom sur le graphe de la fonction $\pi \mapsto P_{\mathcal{X}} m_{\pi, \eta}$ pour un échantillon de loi uniforme sur $(0, 1)$ de taille 10^3 avec $\eta^* = \eta = 0.5$ ($\pi^* = 0.5$).

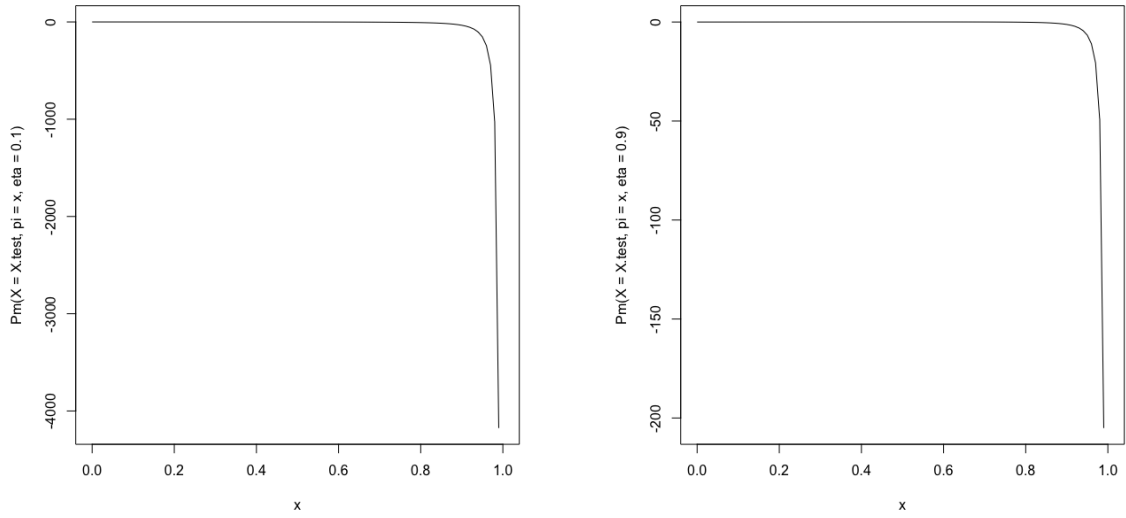


FIGURE 4 – Graphes de la fonction $\pi \mapsto P_{\mathbb{X}} m_{\pi, \eta}$ pour un échantillon de loi uniforme sur $\overline{(0, 1)}$ de taille 10^3 avec $\eta = 0.1$ à gauche et $\eta = 0.9$ à droite ($\pi^* = 0.5, \eta^* = 0.5$).

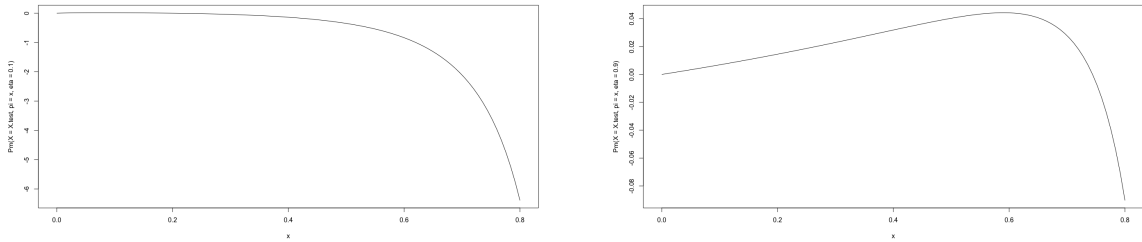


FIGURE 5 – Zoom sur les graphes de la fonction $\pi \mapsto P_{\mathbb{X}} m_{\pi, \eta}$ pour un échantillon de loi uniforme sur $\overline{(0, 1)}$ de taille 10^3 avec $\eta = 0.1$ à gauche et $\eta = 0.9$ à droite ($\pi^* = 0.5, \eta^* = 0.5$).

Refaire avec une valeur de η^* différente de π^* pour éviter la confusion.

Tentons de démontrer la convexité de cette fonction par la positivité de sa dérivée seconde. Appliquons la formule trouvée précédemment au modèle de mélanges de lois uniformes.

$$\begin{aligned} \partial_{\pi}^2 m_{\pi, \eta}(x) &= 2 \cdot \int \frac{[\mathbb{1}_{(0,1)}(t) - \frac{1}{\eta} \cdot \mathbb{1}_{(0,\eta)}(t)]^2}{\{g_{\pi, \eta}(t)\}^3} \cdot dt - 3 \cdot \frac{[\mathbb{1}_{(0,1)}(x) - \frac{1}{\eta} \cdot \mathbb{1}_{(0,\eta)}(x)]^2}{\{g_{\pi, \eta}(x)\}^4} \\ &= 2 \cdot \left[\frac{\eta \cdot \{1 - 1/\eta\}^2}{\{1 + \frac{1-\eta}{\eta} \cdot \pi\}^3} + \frac{1-\eta}{\{1-\pi\}^3} \right] - 3 \cdot \left[\frac{\{1 - 1/\eta\}^2}{\{1 + \frac{1-\eta}{\eta} \cdot \pi\}^4} \cdot \mathbb{1}_{(0,\eta)}(x) + \frac{1}{\{1-\pi\}^4} \cdot \mathbb{1}_{(\eta,1)}(x) \right] \end{aligned}$$

Peut-on prouver que cette fonction est strictement positive, quel que soient x, π et η ?

1.2.2 Calcul des a_n et b_n

$$a(\mathbb{X}, \eta) := P_{\mathbb{X}}\{(\partial_{\pi} m_{\hat{\pi}, \eta})^2\} \setminus [\partial_{\pi}^2 P_{\mathbb{X}} m_{\hat{\pi}, \eta}]^2$$

$$\text{et, } b_n(\eta, \eta') := \frac{P_{\mathbb{X}}[\partial_{\pi} m_{\hat{\pi}(\eta), \eta} \cdot \partial_{\pi} m_{\hat{\pi}(\eta'), \eta'}]}{P_{\mathbb{X}}[\partial_{\pi}^2 m_{\hat{\pi}(\eta), \eta}] \cdot P_{\mathbb{X}}[\partial_{\pi}^2 m_{\hat{\pi}(\eta'), \eta'}]}$$

D'après ce qu'il précède,

$$\partial_{\pi} m_{\pi, \eta}(x) = \frac{\eta \cdot \{1 - 1/\eta\}}{\{1 + \frac{1-\eta}{\eta} \cdot \pi\}^2} + \frac{1-\eta}{\{1-\pi\}^2} - \left[\frac{1-1/\eta}{\{1 + \frac{1-\eta}{\eta} \pi\}^3} \cdot \mathbb{1}_{(0, \eta)}(x) + \frac{1}{\{1-\pi\}^3} \cdot \mathbb{1}_{(\eta, 1]} \right]$$

On s'arrête là pour la computation\encodage de la fonction $P_{\mathbb{X}}\{(\partial_{\pi} m_{\pi, \eta})^2\}$.

En revanche, du fait que l'on puisse écrire $\partial_{\pi}^2 P_{\mathbb{X}} m_{\hat{\pi}, \eta} = P_{\mathbb{X}} \partial_{\pi}^2 m_{\hat{\pi}, \eta}$, il vient,

$$\partial_{\pi}^2 P_{\mathbb{X}} m_{\hat{\pi}, \eta} = 2 \cdot \left[\frac{\eta \cdot \{1 - 1/\eta\}^2}{\{1 + \frac{1-\eta}{\eta} \cdot \hat{\pi}\}^3} + \frac{1-\eta}{\{1-\hat{\pi}\}^3} \right] - 3 \cdot \left[\frac{\{1 - 1/\eta\}^2}{\{1 + \frac{1-\eta}{\eta} \cdot \hat{\pi}\}^4} \cdot p_{-} + \frac{1}{\{1-\hat{\pi}\}^4} \cdot p_{+} \right]$$

2 Encodage de l'algorithme

Algorithm 2: Algorithme général : Test d'homogénéité

Données a priori : $\phi, \{f_1\}, \{f_2\}, \theta_1^*$

Input : $n, n_{exp}, \tilde{n}, \mathcal{D}(\Theta_2), \tilde{\mathcal{D}}(\Theta_2), p$

$$1. \text{ Générer le plan d'échantillonnage } \mathbb{X}_{n_{exp}, n} = \begin{bmatrix} \mathbb{X}^{(1)} \\ \mathbb{X}^{(2)} \\ \dots \\ \mathbb{X}^{(n_{exp})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & \dots & X_{1,n} \\ X_{2,1} & X_{2,2} & \dots & X_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n_{exp},1} & X_{n_{exp},2} & \dots & X_{n_{exp},n} \end{bmatrix}$$

où $X_{i,j} \sim g_{\pi^*, \theta^*}$.

$$2. \text{ Générer le vecteur } (t_k)_{1 \leq k \leq n_{exp}} \text{ où } t_k := \text{Max}_{\eta \in \mathcal{D}(\Theta_2)} s_k(\eta) \text{ avec } s_k(\eta) := s(\mathbb{X}^{(k)}, \eta).$$

$$3. \text{ Générer la matrice } [t_{k,\tilde{k}}]_{\substack{1 \leq k \leq n_{exp} \\ 1 \leq \tilde{k} \leq \tilde{n}}} \text{ où } t_{k,\tilde{k}} := \text{Max}_{\eta \in \tilde{\mathcal{D}}(\Theta_2)} Y_\eta(\mathbb{X}^{(k)})$$

$$\text{avec } (Y_\eta(\mathbb{X}))_{\eta \in \tilde{\mathcal{D}}(\Theta_2)} \sim \mathcal{N}(0, \Sigma(\mathbb{X})) \text{ et } \Sigma(\mathbb{X}) := \left[\frac{b(\mathbb{X}, \eta, \eta')}{\sqrt{a(\mathbb{X}, \eta) \cdot a(\mathbb{X}, \eta')}} \right]_{\eta, \eta' \in \tilde{\mathcal{D}}(\Theta_2)}$$

$$5. \text{ Calculer le vecteur des probabilités de rejet } r := \frac{1}{n_{exp}} \cdot \sum_{k=1}^{n_{exp}} \mathbb{1}\{t_k \geq t_{k,(\lceil \tilde{n} \cdot (1-p) \rceil)}\}$$

avec,

$$\begin{aligned} \hat{\pi}(\mathbb{X}, \eta) &:= \arg \max_{\pi} P_{\mathbb{X}} m_{\pi, \eta} \\ a(\mathbb{X}, \eta) &:= P_{\mathbb{X}} \{(\partial_{\pi} m_{\hat{\pi}, \eta})^2\} \setminus [\partial_{\pi}^2 P_{\mathbb{X}} m_{\hat{\pi}, \eta}]^2 \\ s(\mathbb{X}, \eta) &:= \sqrt{\frac{|\mathbb{X}|}{a(\mathbb{X}, \eta)}} \cdot \hat{\pi}(\mathbb{X}, \eta) \\ \text{et, } b_n(\eta, \eta') &:= \frac{P_{\mathbb{X}} [\partial_{\pi} m_{\hat{\pi}(\eta), \eta} \cdot \partial_{\pi} m_{\hat{\pi}(\eta'), \eta'}]}{P_{\mathbb{X}} [\partial_{\pi\pi}^2 m m_{\hat{\pi}(\eta), \eta}] \cdot P_{\mathbb{X}} [\partial_{\pi\pi}^2 m_{\hat{\pi}(\eta'), \eta'}]} \end{aligned}$$

2.1 Étape préliminaire : la spécification du mélange

Fonction 3: Spécification du modèle de mélange ‘spec’

Arguments : `nomDistribution.1`, `nomDistribution.2`, `parametrage.1`

optionnels : `nombreParametres.distribution_2`, `positionParam.2_inconnu`,
`valeurParam.2_connue`

- `nomDistribution.1`, `nomDistribution.2` : sont les noms des distributions des composantes du mélanges. Elles sont de types *string*.

Les valeurs admises sont : "exp", "norm", "lnorm", "weibull", "unif".

Exemple : `nomDistribution.1 = "unif"`, `nomDistribution.2 = "unif"`

- `parametrage.1` : est le paramétrage (supposé connu) de la première composante.

Exemples :

`nomDistribution.1 = "norm"`, `parametrage.1 = c(0,1)` pour une loi normale centrée réduite.

`nomDistribution.1 = "unif"`, `parametrage.1 = c(-1,1)` pour une loi uniforme sur $[-1, 1]$.

`nomDistribution.1 = "exp"`, `parametrage.1 = 0.5` pour une loi exponentielle de moyenne 2.

- `nombreParametres.distribution_2` : est le nombre de paramètre de la seconde composante (sa valeur par défaut vaut 1.)

Exemples : `nomDistribution.2 = "norm"`, `nombreParametres.distribution_2 = 2`

- `positionParam.2_inconnu` : est la position du paramètre inconnu intervenant dans la définition des loi sous R (sa valeur par défaut vaut 1.)

Exemples :

`nomDistribution.1 = "norm"`, `positionParam.2_inconnu = 1` si la moyenne est inconnue.

`nomDistribution.1 = "norm"`, `positionParam.2_inconnu = 1` si c'est l'écart-type qui n'est pas connu.

- `valeurParam.2_connue` : valeur du paramètre connue de la seconde composante (sa valeur par défaut est NaN.)
-

N.B. : Les arguments optionnels sont nécessaires si et seulement si la seconde composante admet deux paramètres.

Script 1 – Spécification du mélange

```

1      specificationDuMélange = function(nomDistribution.1,
2                                     nomDistribution.2,
3                                     parametrage.1,
4                                     nombreParametres.distribution_2 = 1,
5                                     positionParam.2_inconnu = 1,
6                                     valeurParam.2_connue = NaN){
7
8      distributionList = c("exp", "norm", "lnorm", "weibull", "unif")
9      test = (nomDistribution.1 %in% distributionList) & (nomDistribution.1 %in% distributionList)
10     if( test == FALSE ){ print("Erreur de saisie dans le nom d'une des composantes")}
11
12     # PREMIERE COMPOSANTE #
13     if(length(parametrage.1) == 1){
14         rf1 = function(n) get(paste0("r", nomDistribution.1))(n, parametrage.1)
15         df1 = function(x) get(paste0("d", nomDistribution.1))(x, parametrage.1)
16     }
17     if(length(parametrage.1) == 2){
18         rf1 = function(n) get(paste0("r", nomDistribution.1))(n, parametrage.1[1], parametrage.1[2])
19         df1 = function(x) get(paste0("d", nomDistribution.1))(x, parametrage.1[1], parametrage.1[2])
20     }
21     assign("rf1", rf1, envir = .GlobalEnv)
22     assign("df1", df1, envir = .GlobalEnv)
23
24     # DEUXIEME COMPOSANTE #
25     if(nombreParametres.distribution_2 == 1){
26         rf2 = function(n,eta) get(paste0("r", nomDistribution.2))(n, eta)
27         df2 = function(x,eta) get(paste0("d", nomDistribution.2))(x, eta)
28     }
29     else{ # nombreParametres.distribution_2 == 2
30         if(nombreParametres.distribution_2 != 2) return("Erreur: Le nombre de paramètres de la composante
↪ ne peut que prendre les valeurs 1 ou 2.")
31         if(positionParam.2_inconnu == 1){
32             rf2 = function(n,eta) get(paste0("r", nomDistribution.2))(n, eta, valeurParam.2_connue)
33             df2 = function(x,eta) get(paste0("d", nomDistribution.2))(x, eta, valeurParam.2_connue)
34         }
35         else{ # positionParam.2_inconnu == 2
36             if(positionParam.2_inconnu != 2) return("Erreur: La position du paramètre inconnu de la seconde
↪ composante.")
37             rf2 = function(n,eta) get(paste0("r", nomDistribution.2))(n, valeurParam.2_connue, eta)
38             df2 = function(x,eta) get(paste0("d", nomDistribution.2))(x, valeurParam.2_connue, eta)
39         }
40     }
41     assign("rf2", rf2, envir = .GlobalEnv)
42     assign("df2", df2, envir = .GlobalEnv)
43
44     # FONCTIONS DU MELANGE #
45     rmix = function(n,pi,eta){
46         output = sample(x = c(0,1), size = n, replace = TRUE, prob = c(1-pi,pi))
47
48         nb1 = sum(output)
49
50         output[output == 1] = rf2(nb1,eta)
51         output[output == 0] = rf1(n-nb1)
52
53         return(output)
54     }
55     dmix = function(x,pi,eta) (1-pi)*df1(x) + pi*df2(x,eta)
56
57     assign("rmix", rmix, envir = .GlobalEnv)
58     assign("dmix", dmix, envir = .GlobalEnv)
59 }

```

2.2 Première étape

$$\text{Générer le plan d'échantillonnage } \mathbb{X}_{n_{exp}, n} = \begin{bmatrix} \mathbb{X}^{(1)} \\ \mathbb{X}^{(2)} \\ \dots \\ \mathbb{X}^{(n_{exp})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} & \dots & X_{1,n} \\ X_{2,1} & X_{2,2} & \dots & X_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n_{exp},1} & X_{n_{exp},2} & \dots & X_{n_{exp},n} \end{bmatrix}$$

Fonction 4: Génération du plan d'échantillonnage `MATRICE_ECHANTILLONAGE`

Données a priori : Spécification du mélange via la fonction `SPECIFICATIION_DU_MELANGE`.

Arguments : `nexp`, `n`, `pi.star`, `eta.star`

- `nexp` : nombre d'échantillon à générer.
- `n` : taille des échantillons.

Définit lors de l'exécution : Dans l'environnement global (*i.e.* : `.GlobalEnv`) la matrice `matrice.dechantillonnage` de taille $(n_{exp} \times n)$ où pour tout i, j : $\mathbf{x}_{i,j} \sim g_{\pi^*, \theta^*}$.

```

1      MATRICE_ECHANTILLONAGE = function(nexp, n, pi.star, eta.star){
2          if(!exists("rmix")) "La spécification du mélange n'a pas opérée."
3
4          matrice.dechantillonnage = matrix(data = rmix(n = n*nexp, pi = pi.star, eta = eta.star), nrow =
↪  nexp, byrow = TRUE)
5          assign("matrice.dechantillonnage", matrice.dechantillonnage, envir = .GlobalEnv)
6      }
```

Script 2 – Génération de la matrice d'échantillonnage

2.3 Deuxième étape :

Générer le vecteur $(t_k)_{1 \leq k \leq n_{exp}}$ où $t_k := \text{Max}_{\eta \in \mathcal{D}(\Theta_2)} s_k(\eta)$ avec $s_k(\eta) := s(\mathbb{X}^{(k)}, \eta) = \sqrt{\frac{|\mathbb{X}|}{a(\mathbb{X}^{(k)}, \eta)}} \cdot \hat{\pi}(\mathbb{X}^{(k)}, \eta)$

2.3.1 Encodage des sous-fonctions

Fonction 5: Sous-fonction CALCUL_STATISTIQUE \ \ Mélanges Uniformes dans le cas χ^2

Données a priori : $\mathbb{X}(\omega) = \mathbf{x}$

Arguments : `echantillon`, `eta`

- `echantillon` : le vecteur des données \mathbf{x} .
- `eta` : le paramètre η sous lequel les calculs sont effectués.

Sortie : `hatpi`, `an`, `s`

- `hatpi` : il s'agit de $\hat{\pi}(\mathbf{x}, \eta)$;
 - `an` : correspond à $a(\mathbf{x}, \eta)$;
 - `s` : renvoie à $s(\mathbf{x}, \eta)$.
-

$$(\mathbb{X}, \eta) \longmapsto (\hat{\pi}(\mathbb{X}, \eta), a(\mathbb{X}, \eta), s(\mathbb{X}, \eta))$$

Fonction 6: MATRICE_STATISTIQUE

Arguments : `matrice.dechantillonnage`, `eta`

`matrice.dechantillonnage` : $\mathbb{X}_{n_{exp}, n}$

`eta` : η

Définit lors de l'exécution : Dans l'environnement global (*i.e.* : `.GlobalEnv`) la matrice `matrice.statistique`.

$$(\mathbb{X}_{n_{exp}, n}, \eta) = \left(\begin{bmatrix} \mathbb{X}^{(1)} \\ \mathbb{X}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbb{X}^{(n_{exp})} \end{bmatrix}, \eta \right) \longmapsto \begin{bmatrix} \hat{\pi}(\mathbb{X}^{(1)}, \eta) & a(\mathbb{X}^{(1)}, \eta) & s(\mathbb{X}^{(1)}, \eta) \\ \hat{\pi}(\mathbb{X}^{(2)}, \eta) & a(\mathbb{X}^{(2)}, \eta) & s(\mathbb{X}^{(2)}, \eta) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{\pi}(\mathbb{X}^{(n_{exp})}, \eta) & a(\mathbb{X}^{(n_{exp})}, \eta) & s(\mathbb{X}^{(n_{exp})}, \eta) \end{bmatrix}$$

Script 3 – Calcul des statistiques

```

1
2 Pm = function(echantillon, pi, eta){
3   a = 1 + pi*(1/eta-1)
4   b = 1 - pi
5
6   n.moins = sum(echantillon<eta)
7   n = length(echantillon)
8   n.plus = n - n.moins
9
10  A = (b*eta + a*(1-eta))/(a*b)
11  B = 0.5*(1+(n.moins/a**2 + n.plus/b**2)/n)
12
13  output = A - B
14  return(output)
15 }
16
17 partial.pi_m = function(pi,eta,x){
18   premier.term = eta*(1-1/eta)/(1+(1-eta)*pi/eta)**2 + (1-eta)/(1-pi)**2
19
20   if(x < eta) second.membre = (1-1/eta)/(1+(1-eta)*pi/eta)**3
21   else second.membre = 1/(1-pi)**3
22
23   return(premier.term - second.membre)
24 }
25
26 partial.pi_m__SQUARED = function(pi,eta,x) partial.pi_m(pi,eta,x)**2
27
28 partial2.pi_Pm = function(pi,eta,echantillon){
29   n = length(echantillon)
30   n.moins = sum(echantillon < eta)
31   p.moins = sum(echantillon < eta)/n
32   p.plus = (n - n.moins)/n
33
34   premier.term = 2*( eta*(1-1/eta)**2/(1+(1-eta)*pi/eta)**3 + (1-eta)/(1-pi)**3 )
35   second.term = 3*( p.moins*(1-1/eta)**2/(1+(1-eta)*pi/eta)**4 + p.plus/(1-pi)**4 )
36
37   return(premier.term - second.term)
38 }
39
40 HATPI = function(echantillon, eta){
41   temp.fun = function(pi) Pm(echantillon = echantillon, pi = pi, eta = eta)
42   return(optimise(f = temp.fun, interval = c(0,1), maximum = TRUE)$maximum)
43 }
44
45 AN = function(echantillon,hatpi,eta){
46
47   numerateur = mean(sapply(echantillon, partial.pi_m__SQUARED, pi = hatpi, eta = eta))
48   denominateur = partial2.pi_Pm(pi = hatpi, eta = eta, echantillon = echantillon)**2
49
50
51   return(numerateur/denominateur)
52 }
53
54
55
56
57 CALCUL_STATISTIQUE = function(echantillon, eta){
58   n = length(echantillon)
59
60   hatpi = HATPI(echantillon = echantillon, eta = eta)
61   an = AN(echantillon = echantillon, hatpi = hatpi, eta = eta)
62
63   sn = sqrt(n/an)*hatpi
64
65   # return(data.frame(hatpi,an,s))
66   return(c(hatpi,an,sn))
67 }
68
69
70 }
71

```

Script 4 – Matrice de statistiques

```

1  MATRICE_STATISTIQUE = function(matrice.dechantillonnage, eta){
2  matrice.statistique = t(apply(X = matrice.dechantillonnage, eta = eta, FUN = CALCUL_STATISTIQUE,
↪  MARGIN = 1))
3
4  matrice.statistique = data.frame(matrice.statistique)
5  names(matrice.statistique) = c("hatpi", "an", "t")
6
7  assign("matrice.statistique", matrice.statistique, envir = .GlobalEnv)
8  }

```

2.3.2 Encodage du vecteur

Fonction 7: VECTEUR_T

Script 5 – VECTEUR_T

```

1  VECTEUR_T = function(matrice.dechantillonnage, discretisation.Theta_2){
2  vecteur.s = sapply(X = discretisation.Theta_2, FUN = (function(eta)
↪  MATRICE_STATISTIQUE(matrice.dechantillonnage, eta)$s) )
3  assign("vecteur.s", vecteur.s, envir = .GlobalEnv)
4  vecteur.t = apply(X = vecteur.s, FUN = max, MARGIN = 1)
5  assign("vecteur.t", vecteur.t, envir = .GlobalEnv)
6  }

```

2.4 Troisième étape

Générer la matrice $[t_{k,\tilde{k}}]_{\substack{1 \leq k \leq n_{exp} \\ 1 \leq \tilde{k} \leq \tilde{n}}}$ où $t_{k,\tilde{k}} := \text{Max}_{\eta \in \tilde{\mathcal{D}}(\Theta_2)} Y_{\eta}(\mathbb{X}^{(k)})$

avec $(Y_{\eta}(\mathbb{X}))_{\eta \in \tilde{\mathcal{D}}(\Theta_2)} \sim \mathcal{N}(0, \Sigma(\mathbb{X}))$ et $\Sigma(\mathbb{X}) := \left[\frac{b(\mathbb{X}, \eta, \eta')}{\sqrt{a(\mathbb{X}, \eta) \cdot a(\mathbb{X}, \eta')}} \right]_{\eta, \eta' \in \tilde{\mathcal{D}}(\Theta_2)}$

3 Past work...

Nous reprenons le même algorithme que précédemment, cette fois appliqué pour la divergence du χ^2 .

4 Etude de l'algorithme dans le cas χ^2

Etape 1 : Générer $\mathbb{X}_{n_{exp}, n}$ idem que pour KL_m car indépendante de la divergence.

Etape 2 : Générer le vecteur $(t_k)_{1 \leq k \leq n_{exp}}$.

$$t_k := \max_{\eta \in \mathcal{D}(\Theta_2)} s_k(\eta) \text{ avec } s_k(\eta) := \sqrt{\frac{|\mathbb{X}|}{a(\mathbb{X}, \eta)}} \cdot \hat{\pi}(\mathbb{X}, \eta)$$

Ici les notions dépendent de la divergence, nous explicitons donc un peu plus en ce sens.

4.1 Calcul de $\hat{\pi}$

Nous avons toujours : $\hat{\pi}(\mathbb{X}, \eta) = \max_{\pi} P_{\mathbb{X}} m_{\pi, \eta}$

D'après nos calculs (vérifiée [OK]) nous avons, pour toute fonction g d'intégrale 1,

$$P_{\mathbb{X}} m_{\pi, \eta} = \frac{1}{a \cdot b} \left\{ b \cdot \int_0^\eta (g(t))^2 dt + a \cdot \int_\eta^1 (g(t))^2 dt \right\} - \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{n} \left[\sum_{x_i \leq \eta} \left(\frac{g(x_i)}{a} \right)^2 + \sum_{x_i > \eta} \left(\frac{g(x_i)}{b} \right)^2 \right] \right\}$$

où $a = 1 + \pi \cdot \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right)$ et $b = 1 - \pi$.

En particulier, lorsque nous faisons le choix $g \equiv \mathbb{1}_{\overline{(0,1)}}$,

$$P_{\mathbb{X}} m_{\pi, \eta} = \frac{1}{ab} \left[b \cdot \eta + a \cdot (1 - \eta) \right] - \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n_-}{a^2} + \frac{n_+}{b^2} \right) \right]$$

où n_+ (respectivement n_-) est le nombre de données x_i de $\mathbb{X}(\omega)$ supérieures à η (respectivement inférieures à η).

Nous devons trouver $\hat{\pi}_n(\eta) := \max_{\pi} P_{\mathbb{X}} m_{\pi, \eta}$ si toutefois il existe.

Remarquons alors, que la fonction qui à π associe $P_{\mathbb{X}} m_{\pi, \eta}$ (comme formulé précédemment) est continue (sauf peut-être en 0), et cela quel que soit η . Ainsi dès lors que π appartient au compact $\overline{(0,1)}$, cette fonction atteint ses bornes. Prouvant ainsi l'existence d'un tel maxima.

En outre, si nous arrivions à démontrer la convexité de $\pi \mapsto P_{\mathbb{X}} m_{\pi, \eta}$ quel que soit η . Nous pourrions affirmer qu'il existe un unique maximum $\hat{\pi}$ à cette fonction.

Malheureusement cela semble assez fastidieux à démontrer lorsque l'on cherche à prouver la positivité stricte de la dérivée seconde.

D'après mes calculs, nous serions ramener à devoir démontrer l'inégalité stricte suivante :

$$\frac{2}{3} \int_0^1 \frac{\{f_1(t) - f_2(t, \eta)\}^2}{(g_{\pi, \eta}(t))^3} dt > \frac{\{f_1(t) - f_2(t, \eta)\}^2}{(g_{\pi, \eta}(t))^4}$$

Autrement dit, que :

$$\frac{2}{3} \cdot \left[\frac{\eta(1 - 1/\eta)^2}{\{1 - (1 - 1/\eta)\pi\}^3} + \frac{1 - \eta}{(1 - \pi)^3} \right]$$

est strictement supérieur à : **affirmation douteuse...!**

$$\frac{1}{(1 - \pi)^4} \text{ et } \frac{(1 - 1/\eta)^2}{(1 - (1 - 1/\eta)\pi)^4} \text{ à la fois}$$

Nous détaillons les calculs amenant ces des dernières affirmations en annexe!

Il nous faudra discuter de la méthode de maximisation d'une telle fonction!

4.2 Calcul de a_n

Par définition :

$$\begin{aligned} a(\mathbb{X}, \eta) &:= \frac{P_{\mathbb{X}} \Psi_{\hat{\pi}}^2}{H_n^2} \\ &= P_{\mathbb{X}} \{(\partial_{\pi} m_{\hat{\pi}, \eta})^2\} \setminus [\partial_{\pi}^2 P_{\mathbb{X}} m_{\hat{\pi}, \eta}]^2 \end{aligned}$$

N'ayant pas d'identité de Fisher pour la divergence du χ^2 , la simplification faite à ce moment là dans le cas KL_m n'est plus possible ici. Nous calculons alors directement le numérateur et dénominateur.

Nous sommes à présent en mesure de calculer $a(\mathbb{X}, \eta)$ (ou a_n).

À ce stade, l'étape 2 de l'algorithme est alors réalisable numériquement.

4.3 Encodage de l'étape 2

4.3.1 Méthode de maximisation - celle de R

4.4 Calcul des $b(\eta, \eta')$

$b(\eta, \eta')$ est le coefficient (1,1) de la matrice,

$$\{P_{\mathbb{X}} H_n^t\}^{-1} \cdot \{P_{\mathbb{X}} \Psi_n^{\eta} \Psi_n^{\eta'}\} \cdot \{P_{\mathbb{X}} H_n^t\}^{-1}$$

Avec, lorsque θ_1^* est supposé connu :

$$\begin{aligned} \Psi_n^{\eta} &:= \partial_{\pi} m_{\hat{\pi}, \theta^*(\eta)} \\ H_n^{\eta} &:= \partial_{\pi}^2 m_{\hat{\pi}, \theta^*(\eta)} \end{aligned}$$

Attention : L'égalité dite de Fisher $\partial_{\pi\pi}^2 m_{\hat{\pi}(t),t} = -\{ \partial_{\pi} m_{\hat{\pi}(t),t} \}^2$ n'est vérifiée uniquement dans le cas de la divergence KL_m

Ainsi,

$$b_n(t, t') := \frac{P_{\mathbb{X}} \left[\partial_{\pi} m_{\hat{\pi}(t),t} \cdot \partial_{\pi} m_{\hat{\pi}(t'),t'} \right]}{P_{\mathbb{X}} \left[\partial_{\pi\pi}^2 m m_{\hat{\pi}(t),t} \right] \cdot P_{\mathbb{X}} \left[\partial_{\pi\pi}^2 m m_{\hat{\pi}(t'),t'} \right]}$$