Analyse Complexe

cyrilschkrill

July 31, 2025

Part I
Introduction à l'Analyse Complexe

1 Rappels sur les nombres complexes

Définition 1
Nombres complexes. Lois de Compositions.

Proposition 1
$(\mathbb{C}, +, \times)$ *est un corps*

Corollaire 1
$\mathbb{R} < \mathbb{C}$ *est un sous-corps*

Corollaire 2
$\pm i$ *sont les deux seules racines de -1*

Remarque 1
$\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C} = 2$ *tandis que* $\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C} = 1$

Définition 2 *Partie rélle et imaginaire. Relations avec le conjugué.*

2 Géométrie et linéarité complexe

Proposition 2

- *Homothétie de rapport* $\rho \in \mathbb{R}$ *et de centre* 0

$$z \in \mathbb{C} \longmapsto \rho \cdot z$$

- *Rotation d'angle θ de centre* 0

$$z \in \mathbb{C} \longmapsto z \cdot \mathrm{e}^{i\theta}$$

- *Réflexion par rapport à l'axes des abscisses*

$$z \in \mathbb{C} \longmapsto \bar{z}$$

Définition 3 *Similitudes*
C'est la composée d'une homothétie de rapport scrictement positif et d'une rotation - toutes deux centrées en zéro.

Proposition 3
$(\forall u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}))$

$$\begin{aligned}
&u : \mathbb{C}\text{-}\textit{linéaire} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \Longleftrightarrow \\
&u(i) = i{\cdot}u(1) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \Longleftrightarrow \\
&Mat_{(1,i)}u = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \Longleftrightarrow \\
&u = 0 \ \textit{XOR} \ u \ \textit{est une similitude}
\end{aligned}$$

Lorsque $u \neq 0$,
u est $\mathbb{C}$-linéaire, si et seulement si, c'est une similitude.

Définition 4
Un endomorphisme (ie un morphisme de $\mathbb{C}$ dans lui-même), est dit ***conforme*** *s'il est bijectif, $\mathbb{R}$-linéaire, et préserve les angles.*

Proposition 4
Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) \quad u \neq 0$

$$u : \mathbb{C}\text{-}\textit{linéaire} \iff u \ \textit{est conforme}$$

3 Différentiabilité au sens complexe

Définition 5
$\mathbb{C}$-différentiable ou dérivable

Définition 6
$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est $\mathbb{R}$-différentiable

Théorème 1

$$\begin{gathered}
f : \mathbb{C}\text{-}\textit{dérivable en } a \\
\Longleftrightarrow \\
f : \mathbb{R}\text{-}\textit{différentiable en } a \quad \textit{et} \quad \mathrm{D}f_a : \mathbb{C}\text{-}\textit{linéaire}
\end{gathered}$$

4 Fonctions holomorphes

Définition 7
Ensembles des fonctions holomorphes

Exemple 1

- *La propriété d'holomorphie est conservée: par l'addition, la multiplication d'un scalaire complexe, ainsi que le produit de fonctions.*
- *L'ensemble des fonctions holomorphes est une sous-algèbre des fonctions continues.*
- *Les polynômes à coefficients complexes sont holomorphes*
- *Une fraction rationnelle complexe est holomorphe sur le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble de ses pôles.*
- *La composée de fonctions est holomorphe, et suit la dérivation des fonctions composées.*

Proposition 5 *Théorème des Accroissements finis complexe*

$$|f(z_1) - f(z_2)||z_1 - z_2| \sup_{[z_1,z_2]} |f'$$

Proposition 6
$\forall f \in \mathcal{O}(\Omega) \quad f' = 0 \implies f$ *est constante.*