

# Analyse Complexe

cyrilskrill

July 31, 2025

## Part I

# Introduction à l'Analyse Complexe

## 1 Rappels sur les nombres complexes

### Définition 1

*Nombres complexes. Lois de Compositions.*

### Proposition 1

$(\mathbb{C}, +, \times)$  est un corps

### Corollaire 1

$\mathbb{R} < \mathbb{C}$  est un sous-corps

### Corollaire 2

$\pm i$  sont les deux seules racines de  $-1$

### Remarque 1

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$  tandis que  $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$

**Définition 2** *Partie réelle et imaginaire. Relations avec le conjugué.*

## 2 Géométrie et linéarité complexe

### Proposition 2

- Homothétie de rapport  $\rho \in \mathbb{R}$  et de centre 0

$$z \in \mathbb{C} \mapsto \rho \cdot z$$

- Rotation d'angle  $\theta$  de centre 0

$$z \in \mathbb{C} \mapsto z \cdot e^{i\theta}$$

- Réflexion par rapport à l'axes des abscisses

$$z \in \mathbb{C} \mapsto \bar{z}$$

**Définition 3** *Similitudes*

C'est la composée d'une homothétie de rapport strictement positif et d'une rotation - toutes deux centrées en zéro.

**Proposition 3**

$(\forall u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}))$

$$\begin{aligned} u : \mathbb{C}\text{-linéaire} & \iff \\ u(i) = i \cdot u(1) & \iff \\ \text{Mat}_{(1,i)} u = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} & \iff \\ u = 0 \text{ XOR } u \text{ est une similitude} & \iff \end{aligned}$$

Lorsque  $u \neq 0$ ,  
 $u$  est  $\mathbb{C}$ -linéaire, si et seulement si, c'est une similitude.

**Définition 4**

Un endomorphisme (ie un morphisme de  $\mathbb{C}$  dans lui-même), est dit **conforme** s'il est bijectif,  $\mathbb{R}$ -linéaire, et préserve les angles.

**Proposition 4**

Soit  $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$   $u \neq 0$

$$u : \mathbb{C}\text{-linéaire} \iff u \text{ est conforme}$$

### 3 Différentiabilité au sens complexe

**Définition 5**

$\mathbb{C}$ -différentiable ou dérivable

**Définition 6**

$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$  est  $\mathbb{R}$ -différentiable

**Théorème 1**

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}\text{-dérivable en } a & \\ \iff & \\ f : \mathbb{R}\text{-différentiable en } a \quad \text{et} \quad Df_a : \mathbb{C}\text{-linéaire} & \end{aligned}$$

## 4 Fonctions holomorphes

### Définition 7

*Ensembles des fonctions holomorphes*

### Exemple 1

- *La propriété d'holomorphie est conservée: par l'addition, la multiplication d'un scalaire complexe, ainsi que le produit de fonctions.*
- *L'ensemble des fonctions holomorphes est une sous-algèbre des fonctions continues.*
- *Les polynômes à coefficients complexes sont holomorphes*
- *Une fraction rationnelle complexe est holomorphe sur le complémentaire dans  $\mathbb{C}$  de l'ensemble de ses pôles.*
- *La composée de fonctions est holomorphe, et suit la dérivation des fonctions composées.*