

Le chemin du dragon

*Défi mathématique adressé aux collégiens désireux de prouver
leur connaissance des fonctions usuelles*

par Cyrille PRAZ

23.06.2015

1 Introduction

Le domaine de définition d'une fonction réelle f d'une variable réelle x est le sous-ensemble de \mathbb{R} contenant tous les nombres qui possèdent une image par la fonction f . Le but de l'exercice présenté à la Section 3 de ce document est de trouver le domaine de définition de chacune des 100 fonctions proposées, en moyenne classées par ordre croissant de difficulté. En plus de permettre une révision des fonctions usuelles, cet exercice peut être vu comme un entraînement aux études de signe, aux techniques de factorisation de polynômes et aux méthodes de résolution d'équations du premier et du deuxième degré à une inconnue. La Section 2 ci-dessous présente quelques-unes des notations et conventions utilisées dans ce document ; comme celles-ci sont relativement classiques, la lecture de cette section n'est pas nécessaire dans un premier temps. Finalement, la Section 4 contient un corrigé succinct de l'exercice.

2 Notations et conventions

Ci-dessous sont listées quelques notations et conventions utilisées dans ce document :

1. La fonction arcsinus, notée \arcsin , est la réciproque de la fonction bijective $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ définie par $f(x) = \sin(x)$.
2. La fonction arccosinus, notée \arccos , est la réciproque de la fonction bijective $f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ définie par $f(x) = \cos(x)$.
3. La fonction arctangente, notée \arctan , est la réciproque de la fonction bijective $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \tan(x)$.
4. Les arguments des fonctions sinus, cosinus et tangente ainsi que les images des fonctions arcsinus, arccosinus et arctangente sont exprimés en radians.
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction racine $2n$ -ième, notée $\sqrt[n]{\cdot}$ ou simplement $\sqrt{\cdot}$ dans le cas $n = 1$, est la réciproque de la fonction bijective $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^{2n}$.
6. Pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $a \in \mathbb{Z}^*$, on écrit $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$. Suivant la même logique, on considère que si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $x^0 = 1$. De plus, on adopte la convention $0^0 = 1$.
7. Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $p, q \in \mathbb{N}^*$, on définit $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$. Si de plus x est non nul, on définit $x^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{x^p}}$.
8. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}$, on généralise la définition de puissance selon la relation $x^y = e^{y \ln(x)}$. De plus, on généralise la relation $0^z = 0$ pour tout $z \in \mathbb{R}_+^*$.
9. Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction logarithme en base a , notée \log_a ou simplement \log dans le cas $a = 10$ ou encore \ln dans le cas $a = e$, est la réciproque de la fonction bijective $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par $f(x) = a^x$.
10. Pour $n \in \mathbb{N}$, les notations $\sin^n(x)$ et $\ln^n(x)$ sont respectivement équivalentes aux expressions $[\sin(x)]^n$ et $[\ln(x)]^n$.

3 Exercice

Trouver le domaine de définition des fonctions réelles à variable réelle suivantes :

1. $f(x) = 1$
2. $f(x) = x$
3. $f(x) = -x$
4. $f(x) = \frac{1}{x}$
5. $f(x) = |x|$
6. $f(x) = 2x$
7. $f(x) = \frac{x}{2}$
8. $f(x) = x^2$
9. $f(x) = \sqrt{x}$
10. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
11. $f(x) = 10^x$
12. $f(x) = \log(x)$
13. $f(x) = e^x$
14. $f(x) = \ln(x)$
15. $f(x) = \sin(x)$
16. $f(x) = \arcsin(x)$
17. $f(x) = \cos(x)$
18. $f(x) = \arccos(x)$
19. $f(x) = \tan(x)$
20. $f(x) = \arctan(x)$
21. $f(x) = x^1$
22. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$
23. $f(x) = x^0$
24. $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$
25. $f(x) = x^{-1}$
26. $f(x) = (x+7)^1$
27. $f(x) = (x+7)^{\frac{1}{2}}$
28. $f(x) = (x+7)^0$
29. $f(x) = (x+7)^{-\frac{1}{2}}$
30. $f(x) = (x+7)^{-1}$
31. $f(x) = x^2 + 2x + 3$
32. $f(x) = \sqrt{3}x^4 - x^3 + \pi x^2 - 11x + e$
33. $f(x) = \frac{1}{x+7}$
34. $f(x) = \frac{1}{2x-\pi}$
35. $f(x) = \frac{1}{x^2+4x-5}$
36. $f(x) = \frac{1}{2x^2-5x+3}$
37. $f(x) = \frac{1}{x^3-x^2-2x}$
38. $f(x) = \frac{\pi x^2+7x-3}{2x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}}$
39. $f(x) = \frac{6x-1}{x^3-15x^2+75x-125}$
40. $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x^2-2} + \frac{3}{x^3-3}$
41. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}}$
42. $f(x) = \sqrt{x^2}$
43. $f(x) = \sqrt{1-2x}$
44. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
45. $f(x) = \sqrt{5-\frac{1}{2}x} + \sqrt{3x+4}$
46. $f(x) = \sqrt{x^2-x-1}$
47. $f(x) = \sqrt{(4x^2-7x)^3}$
48. $f(x) = \sqrt{\frac{1-9x}{4x^4-12x^2+9}}$
49. $f(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{x^3-\frac{1}{4}x}}$
50. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-3}-4}$
51. $f(x) = e^{x^2-5x}$
52. $f(x) = \frac{1}{e^{8x-9}}$
53. $f(x) = \frac{10^x-2}{x-2}$
54. $f(x) = \frac{x-2}{10^x-2}$
55. $f(x) = \sqrt{3^{6-7x}}$
56. $f(x) = \ln(x^2-5x)$
57. $f(x) = \frac{1}{\ln(8x-9)}$
58. $f(x) = \frac{\log(x)-2}{x-2}$
59. $f(x) = \frac{x-2}{\log(x)-2}$
60. $f(x) = \sqrt{\log_3(6-7x)}$
61. $f(x) = \sin(10x-1)$
62. $f(x) = \cos(10x-2)$
63. $f(x) = \tan(10x-3)$
64. $f(x) = \arcsin(10x-4)$
65. $f(x) = \arccos(10x-5)$
66. $f(x) = \arctan(10x-6)$
67. $f(x) = \frac{1}{\sin(10x-7)}$
68. $f(x) = \frac{1}{\cos(10x-8)}$
69. $f(x) = \frac{1}{\tan(10x-9)}$
70. $f(x) = \frac{1}{\arcsin(10x-10)}$
71. $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{x^2}} + \sqrt{1-2x}$

$$72. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + (e - \pi)x - e\pi}}$$

$$73. f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 8}{x^3 + 8}}$$

$$74. f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x^2 - 1}}$$

$$75. f(x) = \sqrt{x - |x - 2|}$$

$$76. f(x) = \sqrt{\sin(x)}$$

$$77. f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1} - \sqrt{3x-4}}$$

$$78. f(x) = \sqrt{\sqrt{2 - \frac{1}{3}x} - \sqrt{3x + 1}}$$

$$79. f(x) = \sqrt{\frac{2x^2 + 4x - 5}{\sqrt{2} - \sqrt{x + 10}}}$$

$$80. f(x) = \sqrt{\frac{9x - 8\sqrt{x} - 1}{x - 2\sqrt{x} + \frac{3}{4}}}$$

$$81. f(x) = e^{\frac{8t^5 - 3t^4 + 7}{t^4 + 2t^2 + 1}}$$

$$82. f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{e^{7x-1} - e^{3-8x}}$$

$$83. f(x) = \sqrt{5 - e^{x^2-5}}$$

$$84. f(x) = \frac{\pi^x}{(2^x - 5)(7^x - 11)(e^x - 3)}$$

$$85. f(x) = \frac{1}{2 \cdot 3^{6x-3} - 7 \cdot 3^{4x-2} + 5 \cdot 3^{2x-1}}$$

$$86. f(x) = \frac{\ln(2x-3)}{\ln(2x)-3}$$

$$87. f(x) = \ln \left[-\frac{\sqrt{6}x^2 + (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})x - 6}{2x^2 + 3x - 5} \right]$$

$$88. f(x) = \ln |\log(x)|$$

$$89. f(x) = \sqrt{\ln \sqrt{3 - x^2}}$$

$$90. f(x) = \frac{\ln[\ln^2(x) + 10 \ln(x) + 25]}{\ln^2(x) - \ln(x)}$$

$$91. f(x) = \arctan \left[\sqrt{\log_2 \left(\frac{2 \sin(-e^\pi)}{7^{-7}} \right)} \right]$$

$$92. f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{5x^2 + 3x} - 2}$$

$$93. f(x) = \frac{1}{||\ln(|x|-1)-2|-3|}$$

$$94. f(x) = \frac{\arcsin(x) \arccos(2x) \arctan(3x)}{\sin(4x) \cos(5x) \tan(6x)}$$

$$95. f(x) = \frac{1}{\ln|\sin(x^2+x)|}$$

$$96. f(x) = \frac{\sqrt{-|30x^3 - x^2 - x|}}{x^4 + \frac{329}{30}x^3 + \frac{148}{5}x^2 - \frac{41}{30}x - 1}$$

$$97. f(x) = \sqrt{\frac{14^x - 11 \cdot 7^x + 3 \cdot 2^x - 33}{x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1}}$$

$$98. f(x) = \arcsin(x) + \sqrt{\frac{x^2 + 3|x| + 2}{\ln|\frac{1}{2} + \cos(3x+2)|}}$$

$$99. f(x) = \frac{\log(5x-4)}{\log(5x-4)} + \frac{\cos(x)-x}{\cos(x)-x} + \frac{x^2-2^x}{x^2-2^x}$$

$$100. f(x) = \frac{\sqrt{-\ln^4(x) + 2\ln^3(x) + \ln^2(x) - 2\ln(x)}}{|-\sin^4(x) + 2\sin^3(x) + \sin^2(x) - 2\sin(x)|}$$

4 Corrigé

1. $D_f = \mathbb{R}$
2. $D_f = \mathbb{R}$
3. $D_f = \mathbb{R}$
4. $D_f = \mathbb{R}^*$
5. $D_f = \mathbb{R}$
6. $D_f = \mathbb{R}$
7. $D_f = \mathbb{R}$
8. $D_f = \mathbb{R}$
9. $D_f = \mathbb{R}_+$
10. $D_f = \mathbb{R}_+^*$
11. $D_f = \mathbb{R}$
12. $D_f = \mathbb{R}_+^*$
13. $D_f = \mathbb{R}$
14. $D_f = \mathbb{R}_+^*$
15. $D_f = \mathbb{R}$
16. $D_f = [-1, 1]$
17. $D_f = \mathbb{R}$
18. $D_f = [-1, 1]$
19. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$
20. $D_f = \mathbb{R}$
21. $D_f = \mathbb{R}$
22. $D_f = \mathbb{R}_+$
23. $D_f = \mathbb{R}$
24. $D_f = \mathbb{R}_+^*$
25. $D_f = \mathbb{R}^*$
26. $D_f = \mathbb{R}$
27. $D_f = [-7, +\infty[$
28. $D_f = \mathbb{R}$
29. $D_f =]-7, +\infty[$
30. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-7\}$
31. $D_f = \mathbb{R}$
32. $D_f = \mathbb{R}$
33. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-7\}$
34. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$
35. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5, 1\}$
36. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ 1, \frac{3}{2} \right\}$
37. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 2\}$
38. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{4}, 1 \right\}$
39. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{5\}$
40. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1, \pm\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}\}$
41. $D_f = \mathbb{R}_-^*$
42. $D_f = \mathbb{R}$
43. $D_f =]-\infty, \frac{1}{2}]$
44. $D_f = \mathbb{R}$
45. $D_f = \left[-\frac{4}{3}, 10\right]$
46. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left] \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right[$
47. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left] 0, \frac{7}{4} \right[$
48. $D_f =]-\infty, \frac{1}{9}] \setminus \left\{ -\sqrt{\frac{3}{2}} \right\}$
49. $D_f =]-\infty, -1] \cup \left] -\frac{1}{2}, 0 \right[\cup \left] \frac{1}{2}, 1 \right[$
50. $D_f = (\mathbb{R} \setminus]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[) \setminus \{\pm\sqrt{19}\}$
51. $D_f = \mathbb{R}$
52. $D_f = \mathbb{R}$
53. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
54. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\log(2)\}$
55. $D_f = \mathbb{R}$
56. $D_f = \mathbb{R} \setminus [0, 5]$
57. $D_f = \left] \frac{9}{8}, +\infty \right[\setminus \left\{ \frac{5}{4} \right\}$
58. $D_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{2\}$
59. $D_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{100\}$
60. $D_f =]-\infty, \frac{5}{7}]$
61. $D_f = \mathbb{R}$
62. $D_f = \mathbb{R}$
63. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{10} \left(3 + \frac{\pi}{2} + k\pi \right) : k \in \mathbb{Z} \right\}$
64. $D_f = \left[\frac{3}{10}, \frac{1}{2} \right]$
65. $D_f = \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5} \right]$
66. $D_f = \mathbb{R}$
67. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{10} (7 + k\pi) : k \in \mathbb{Z} \right\}$
68. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{10} \left(8 + \frac{\pi}{2} + k\pi \right) : k \in \mathbb{Z} \right\}$
69. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{10} \left(9 + k\frac{\pi}{2} \right) : k \in \mathbb{Z} \right\}$
70. $D_f = \left[\frac{9}{10}, \frac{11}{10} \right] \setminus \{1\}$
71. $D_f = \left[-1, \frac{1}{2} \right]$
72. $D_f = \mathbb{R} \setminus [-e, \pi]$
73. $D_f = [-2\sqrt{2}, -2[\cup [2\sqrt{2}, +\infty[$
74. $D_f = [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$
75. $D_f = [1, +\infty[$
76. $D_f = \{a + 2k\pi : a \in [0, \pi], k \in \mathbb{Z}\}$

77. $D_f = [\frac{4}{3}, +\infty[\setminus \{3\}$
78. $D_f = [-\frac{1}{3}, \frac{3}{10}]$
79. $D_f = [-10, -8[\cup [\frac{-2-\sqrt{14}}{2}, \frac{-2+\sqrt{14}}{2}]$
80. $D_f =]\frac{1}{4}, 1] \cup]\frac{9}{4}, +\infty[$
81. $D_f = \mathbb{R}$
82. $D_f = [-2, +\infty[\setminus \{\frac{4}{15}\}$
83. $D_f = [-\sqrt{5 + \ln(5)}, \sqrt{5 + \ln(5)}]$
84. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\log_2(5), \log_7(11), \ln(3)\}$
85. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\log_3(\frac{5}{2})+1}{2} \right\}$
86. $D_f =]\frac{3}{2}, +\infty[\setminus \left\{ \frac{e^3}{2} \right\}$
87. $D_f =]-\frac{5}{2}, -\sqrt{2}[\cup]1, \sqrt{3}[$
88. $D_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$
89. $D_f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
90. $D_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{\frac{1}{e^5}, 1, e\}$
91. $D_f = \mathbb{R}$
92. $D_f = \left[\frac{\sqrt{9+4\log_5(2)}-3}{2}, \frac{\sqrt{15}-3}{2} \right]$
93. $D_f = (\mathbb{R} \setminus [-1, 1]) \setminus \{\pm(e^{-1}+1), \pm(e^5+1)\}$
94. $D_f = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \setminus \{0, \pm\frac{\pi}{10}, \pm\frac{\pi}{12}\}$
95. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-1 \pm \sqrt{1+2n\pi}}{2} : n \in \mathbb{N} \right\}$
96. $D_f = \{0\}$
97. $D_f = \mathbb{R} \setminus [-1, \log_2(11)[$
98. $D_f =]-\frac{\pi+8}{12}, \frac{\pi-8}{12}[$
99. $D_f =]\frac{4}{5}, +\infty[\setminus \{2, 4\}$
100. $D_f = [\frac{1}{e}, 1] \cup [e, e^2] \setminus \{\pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$