

# Доверительные интервалы

Александр Миленькин  
Биоинформатик в GERO





# Александр Миленькин

Биоинформатик в GERO

## О спикере

- Преподаватель в Нетологии
- Активный участник соревнований по Data Science
- Выпускник МФТИ

Аккаунты в соц.сетях:



@Aleron



@Aleron75infskin



# План занятия

1

Доверительные интервалы

2

Статистическая проверка гипотез  
для несвязанных выборок



# План урока

- 1 Доверительные интервалы
- 2 Статистическая проверка гипотез для несвязанных выборок

## Наши цели

- Познакомиться с “доверительным интервалом”
- Подбирать **уровень значимости**
- Корректно интерпретировать **p-value**
- Уметь применять *t*-критерий Стьюдента (**t-test**)



# Наши цели

- Познакомиться с “доверительным интервалом”
- Уметь подбирать **уровень значимости**
- Корректно интерпретировать **p-value**
- Уметь применять *t*-критерий Стьюдента (**t-test**)

А **уровень значимости** как использовать?

Слышали про **доверительный интервал**?

Вы и про **p-value** знаете?

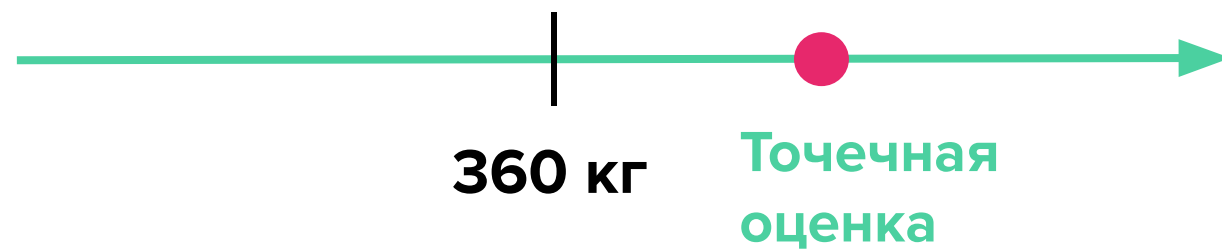
И даже **t-test** умеете использовать?



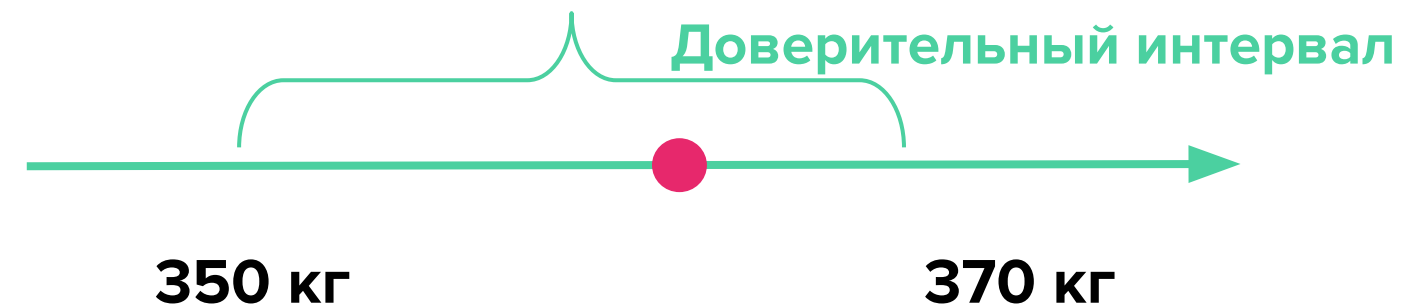
# Что такое доверительный интервал?

**Доверительный интервал** - интервал, который покрывает возможные значения параметра с некоторой вероятностью

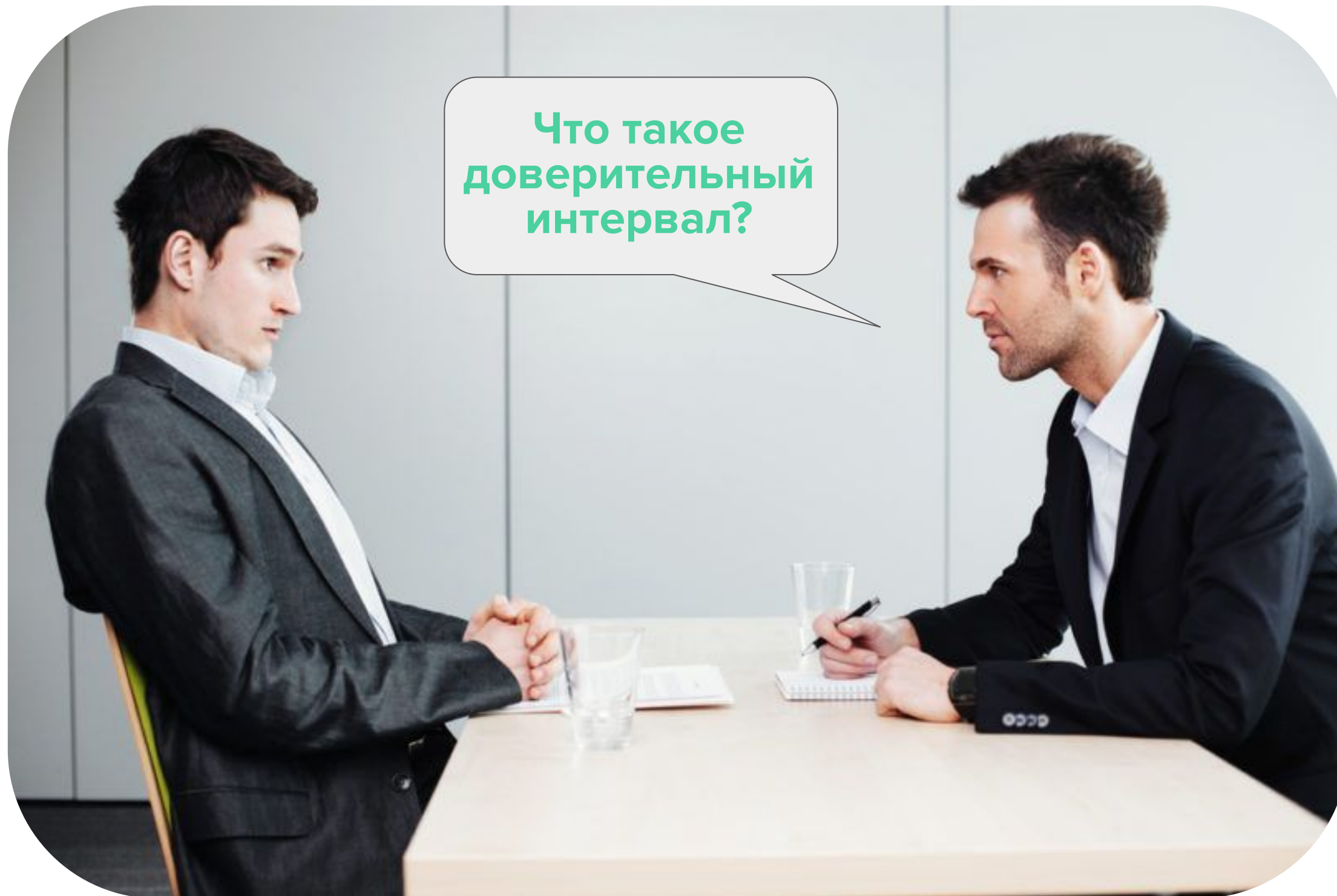
Параметр находится где-то  
вокруг точки



Параметр находится где-то  
здесь с 95% вероятностью



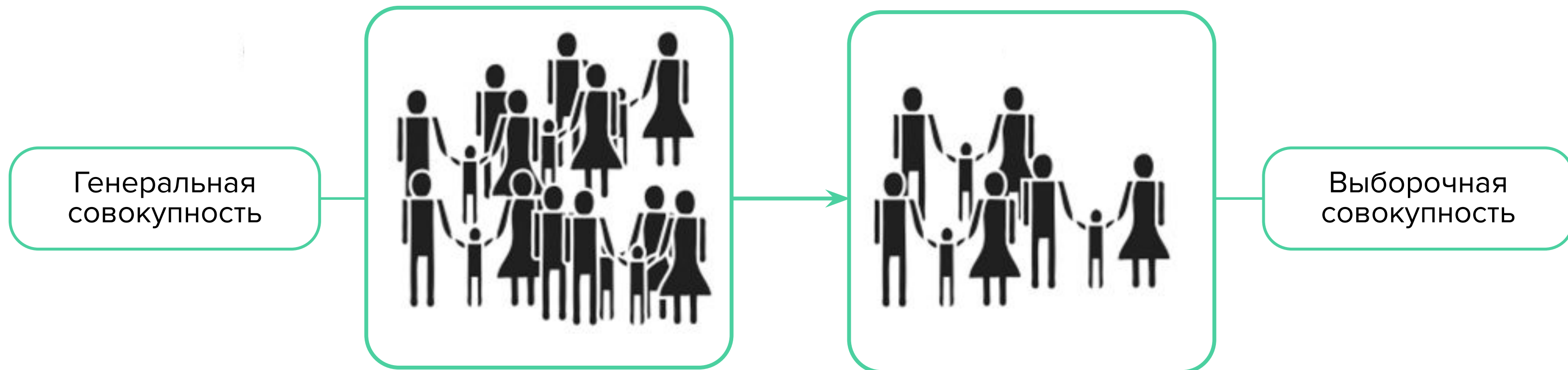
# Собеседование





# Почему доверительный интервал полезен? Пример

**Пример:** Мы провели опрос с целью выявить средний вес инопланетян на какой-то планете. Взвешивание 1000 взрослых инопланетян с этой планеты показало, что средний вес инопланетянина — это 368 кг. Это только показатель по малой выборке по сравнению со всей планетой, поэтому такая оценка может не всё говорить о реальной картине. Что в таком случае делать?





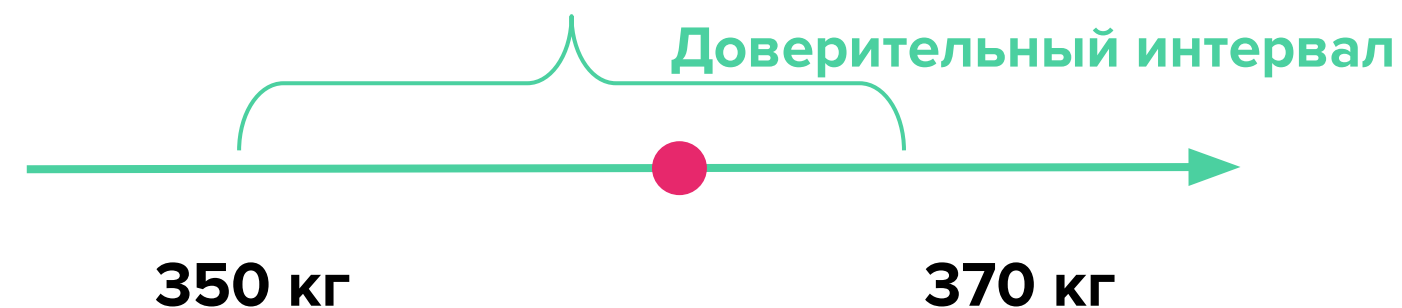
# Что такое доверительный интервал?

**Доверительный интервал** - интервал, который покрывает возможные значения параметра с некоторой вероятностью

Параметр находится где-то  
вокруг точки 360 кг



Параметр находится где-то  
здесь с 95% вероятностью

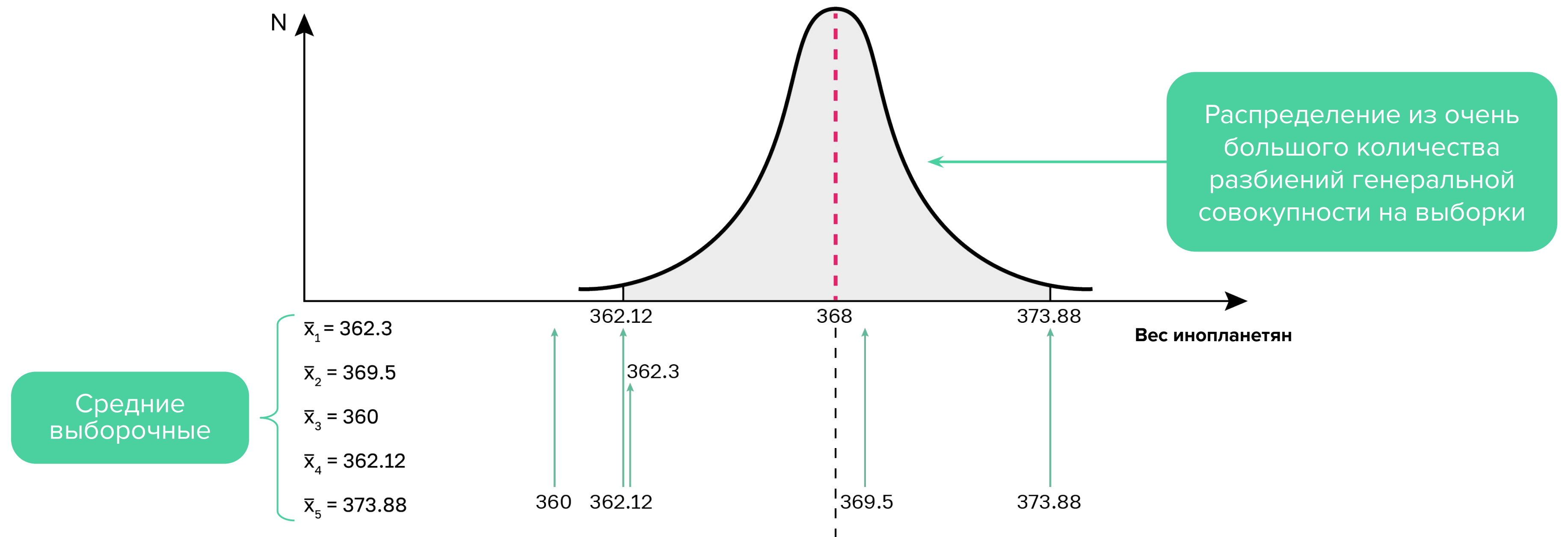


Намного лучше знать не просто оценку 360, а интервал, в котором с большей вероятностью будет находиться реальный средний вес инопланетян. Скажем, с вероятностью 95% средний вес инопланетян лежит в интервале от 350 кг до 370 кг.



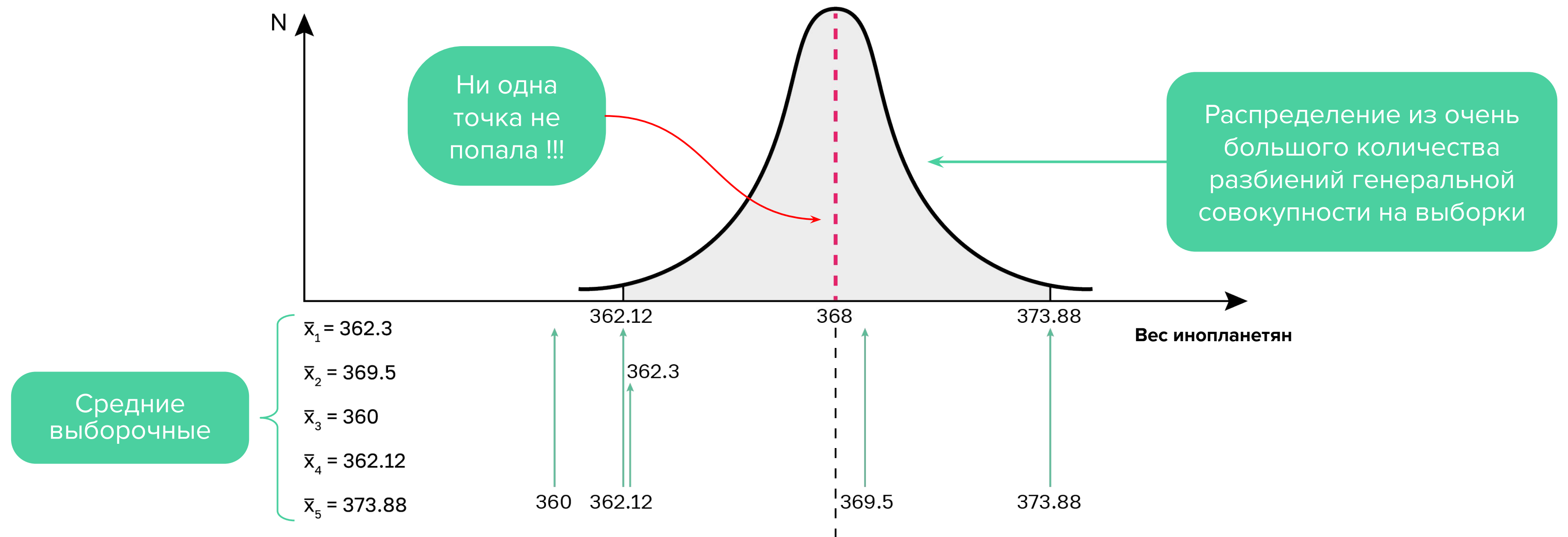
# Почему доверительный интервал полезен?

Проведём несколько таких независимых взвешиваний на 1000 инопланетян.



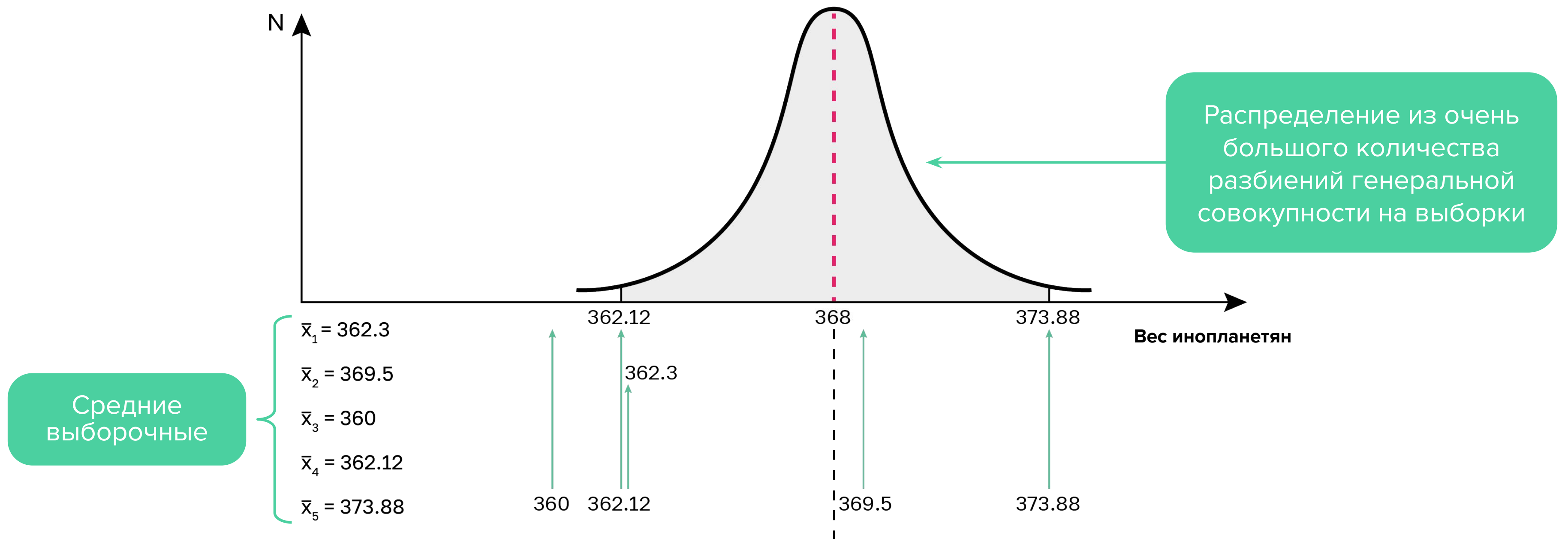
# Почему доверительный интервал полезен?

Проведём несколько таких независимых взвешиваний на 1000 инопланетян.



# Почему доверительный интервал полезен?

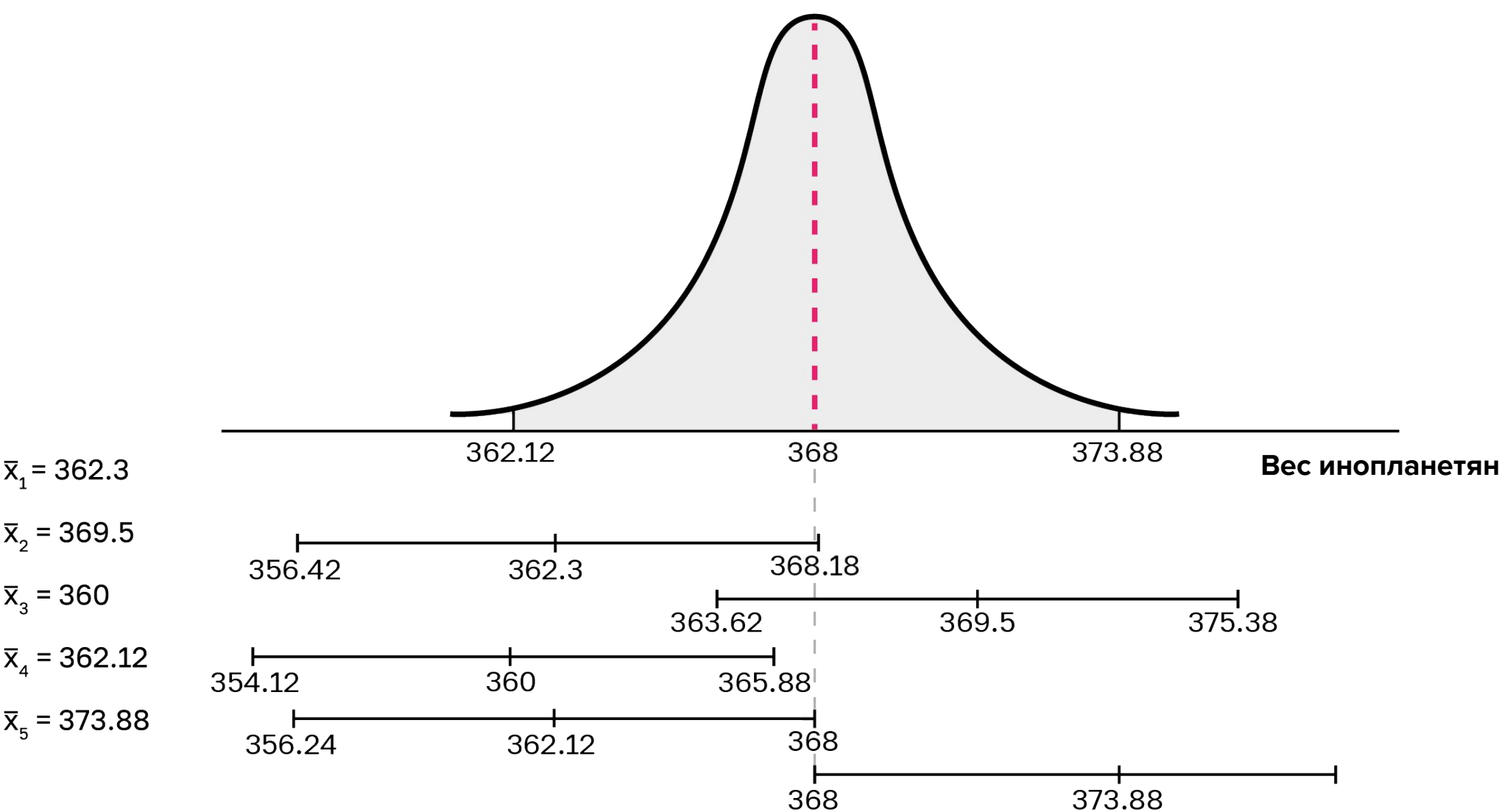
Вывод: **точечная оценка** не так информативна, как **Доверительный интервал**!



# Точечная оценка **vs.** доверительный интервал


Доверительный интервал — это интервал, который с заданной вероятностью накрывает оцениваемый нами параметр ГС.

Заметим, что ДИ для разных выборок одной и той же ГС могут отличаться!



# Первый шаг пройден!

## Наши цели

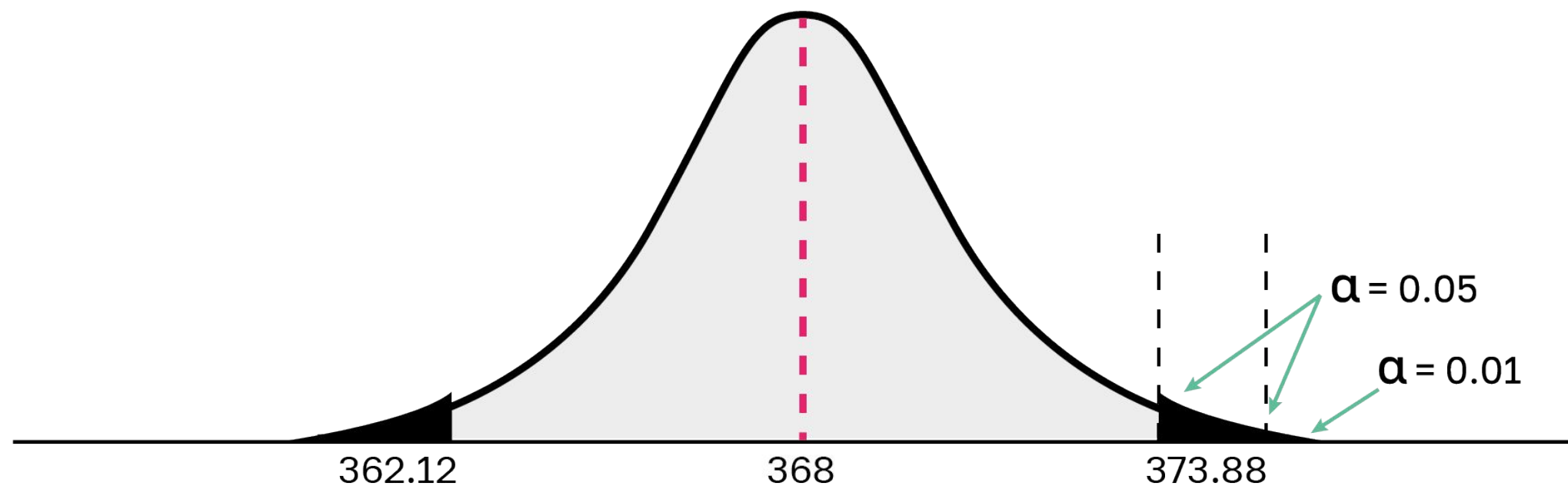
- Познакомиться с “доверительным интервалом” 
- Подбирать **уровень значимости**
- Корректно интерпретировать **p-value**
- Уметь применять  $t$ -критерий Стьюдента (**t-test**)



# Уровень значимости и уровень доверия

**Уровень значимости  $\alpha$**  — это вероятность, с которой значение параметра **НЕ** попадает в доверительный интервал.

**Уровень доверия  $\beta = 1 - \alpha$**  — это вероятность, с которой значение параметра попадает в доверительный интервал.



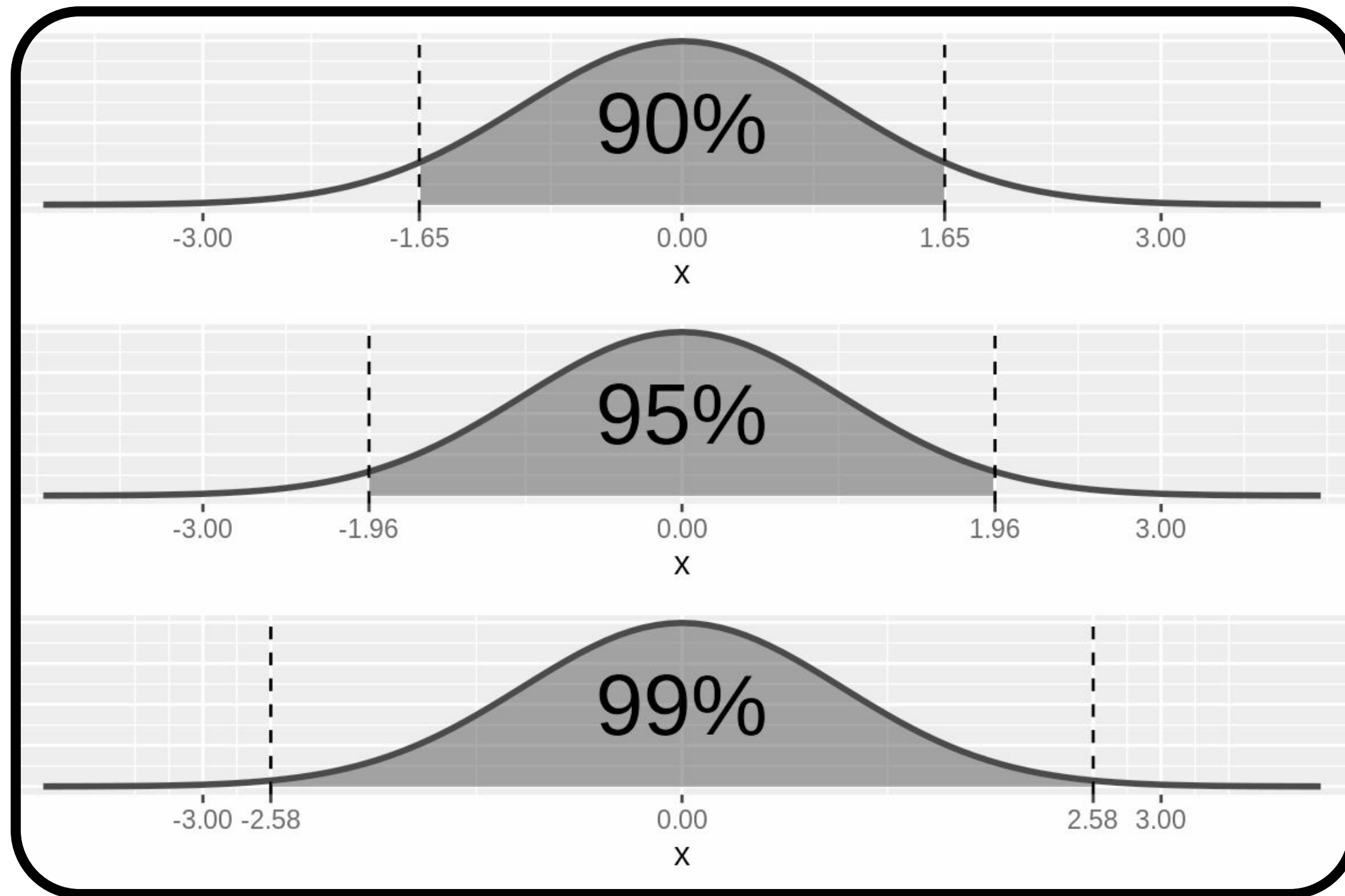
**Уровни значимости** 0.1, 0.05 и 0.01 соответствуют **уровням доверия** 0.90, 0.99 и 0.95.

Величины могут выражаться в процентах, то есть **уровень доверия** 0.99 и 99% — это одно и то же.





# Как подобрать уровень значимости и уровень доверия?



Уровни значимости 0.1, 0.05 и 0.01 соответствуют уровням доверия 0.90, 0.95 и 0.99.



Величины могут выражаться в процентах, то есть уровень доверия 0.99 и 99% — это одно и то же.

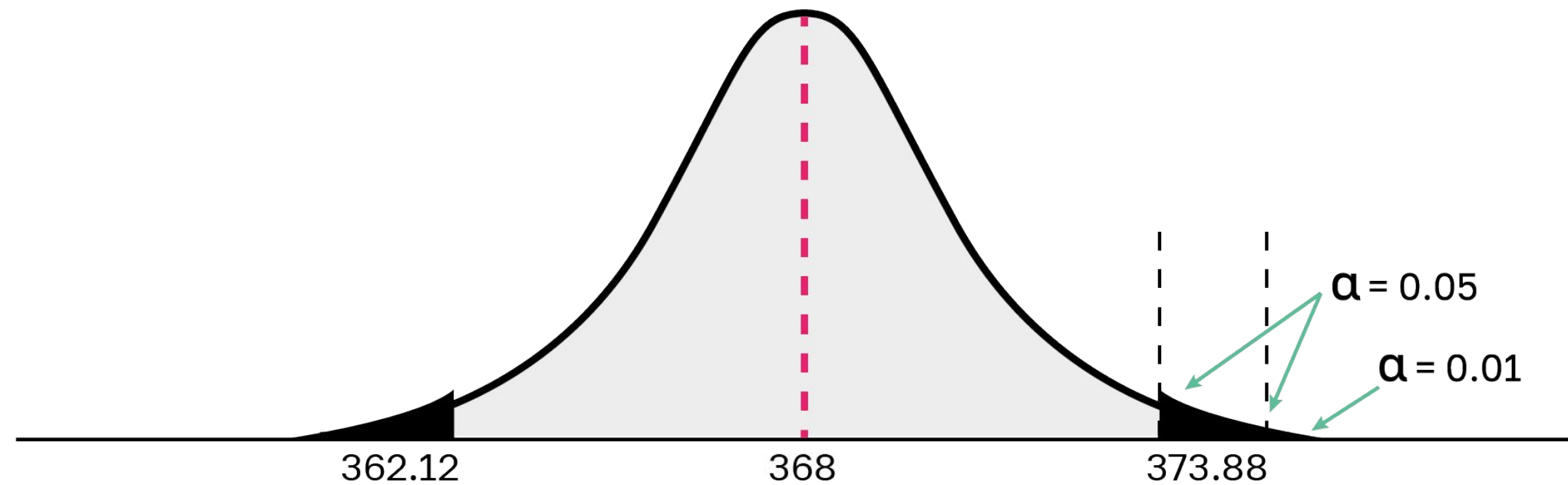


# Уровень значимости и уровень доверия

«Что-то доказано на уровне значимости 5%».

Что это значит в терминах доверительного интервала?

В какой области лежит наше значение?



# Второй шаг пройден!

## Наши цели

- Познакомиться с “доверительным интервалом” ✓
- Подбирать **уровень значимости** ✓
- Корректно интерпретировать **p-value**
- Уметь применять  $t$ -критерий Стьюдента (**t-test**)



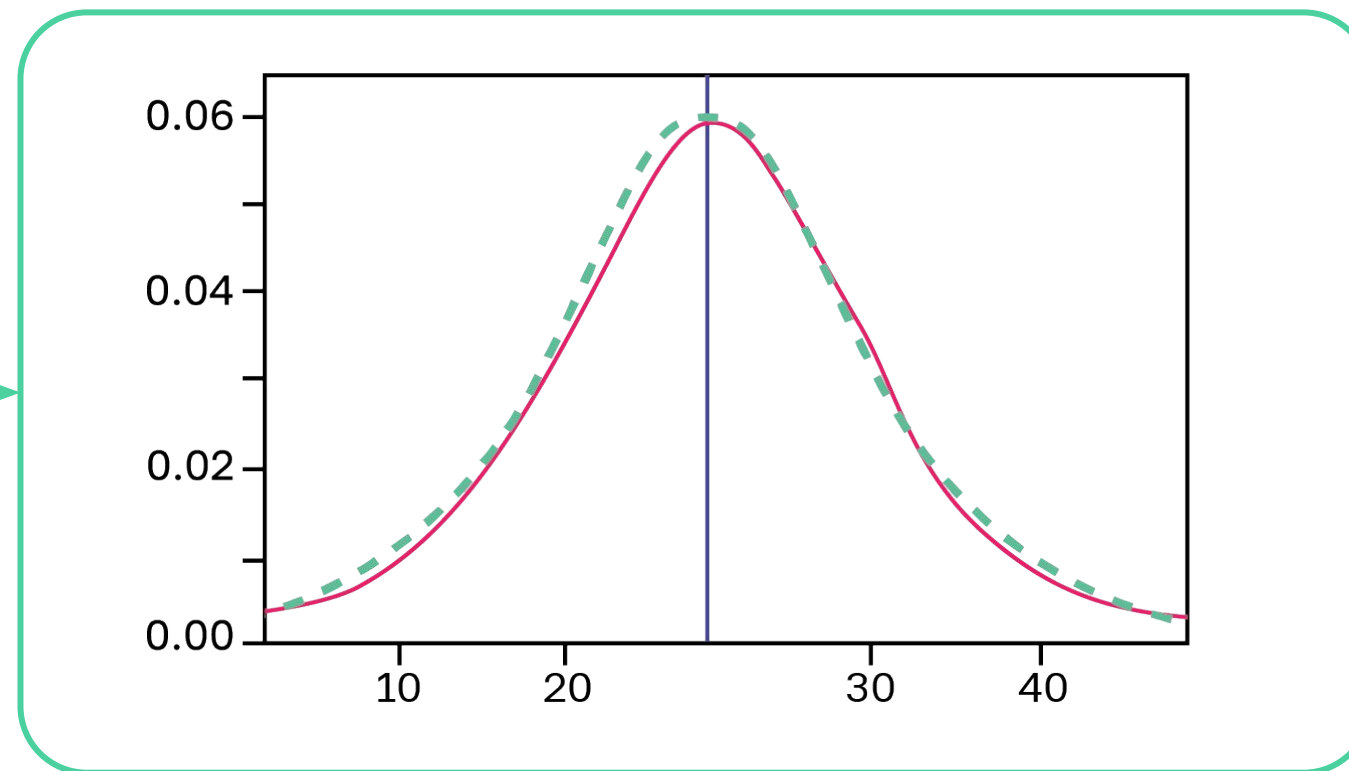
**Как построить доверительный интервал?**



# Условия для построения доверительного интервала

**Теорема\*:** Если распределение генеральной совокупности имеет **конечные математическое ожидание и дисперсию**, то при  $n \rightarrow \infty$  основные выборочные характеристики (среднее, дисперсия, эмпирическая функция распределения) являются нормальными.

**Важно!** Далее мы часто будем предполагать, что генеральная совокупность имеет нормальный закон распределения.



\*Центральная предельная теорема

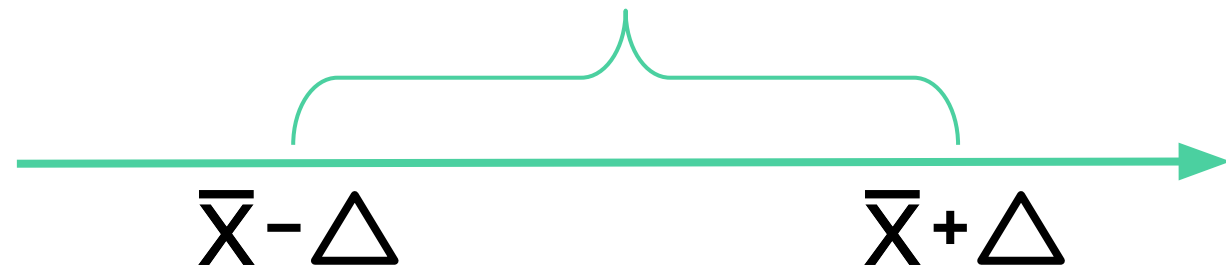


# Подсчёт доверительного интервала

Рассмотрим случайную выборку объема  $n$ , вычислим среднее значение  $\bar{X}$  по выборке и зададим уровень значимости  $\beta$ .

Доверительный интервал для среднего имеет вид  $(\bar{x} - \Delta; \bar{x} + \Delta)$   
где  $\Delta$  — точность интервальной оценки.

Параметр находится где-то  
здесь с вероятностью  $\beta\%$ !



# Подсчёт доверительного интервала

Вычисление  $\Delta$  зависит от наших знаний о ГС и от выборки, с которой мы имеем дело. Допустим нам известно стандартное отклонение  $\sigma$  генеральной совокупности. Тогда  $\Delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_a$  где  $Z_a$  это квантиль нормального распределения уровня  $1 - \alpha/2$ .

**Теорема:** Доверительный интервал для среднего с известной дисперсией имеет следующий вид.

$$\left( \bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_a; \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_a \right)$$

Двусторонняя область





# Подсчёт доверительного интервала

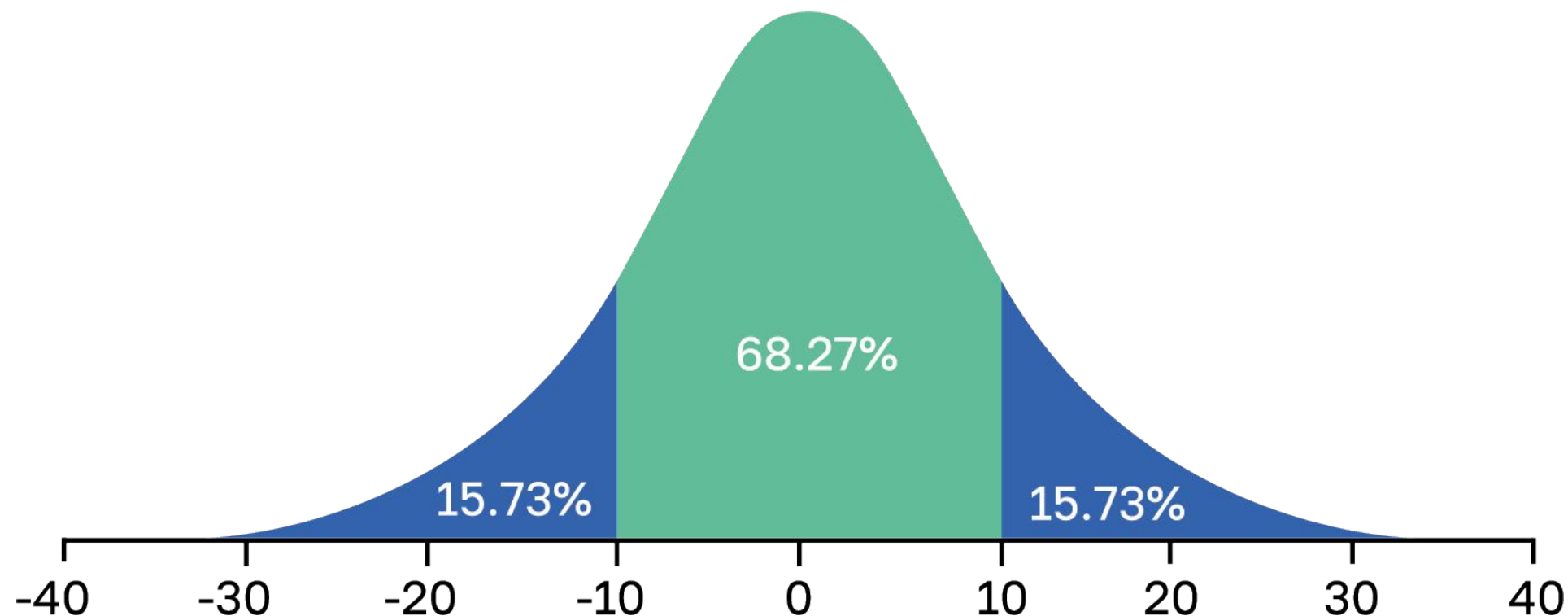
Вычисление  $\Delta$  зависит от наших знаний о ГС и от выборки, с которой мы имеем дело.

Допустим нам известно стандартное отклонение  $\sigma$  генеральной совокупности.

Тогда  $\Delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha}$  где  $z_{\alpha}$  это квантиль нормального распределения уровня  $1 - \alpha/2$ .

**Квантиль** — значение, которое наша величина не превышает с фиксированной вероятностью. Если вероятность задана в процентах, то квантиль называется **процентилем** или **перцентилем**.

Например, фраза «80-й процентиль времени выхода из строя станка на заводе 3 года» означает, что 80% станков работает 3 года или меньше, а 20% станков работает больше 3-х лет.



Подсчет квантилей на Python:  
<https://stackoverflow.com/questions/48879587/using-python-scipy-or-numpy-how-do-i-calculate-the-2-5th-and-97-5th-percentile>



# Подсчёт доверительного интервала

Вычисление  $\Delta$  зависит от наших знаний о ГС и от выборки, с которой мы имеем дело. Допустим нам известно стандартное отклонение  $\sigma$  генеральной совокупности. Тогда  $\Delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha}$  где  $Z_{\alpha}$  это квантиль нормального распределения уровня  $1 - \alpha/2$ .

## А где найти этот квантиль?

Надо взять из таблички!  
(легко гуглится)

уровень	0,90	0,95	0,975	0,98	0,99	0,995	0,999	0,9995	0,9999
односторонняя	1,282	1,645	1,960	2,054	2,326	2,576	3,090	3,291	3,719
двусторонняя	1,645	1,960	2,241	2,326	2,576	2,807	3,291	3,481	3,891



# Подсчёт доверительного интервала на Python

Вычисление  $\Delta$  зависит от наших знаний о ГС и от выборки, с которой мы имеем дело. Допустим нам известно стандартное отклонение  $\sigma$  генеральной совокупности. Тогда  $\Delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha}$  где  $Z_{\alpha}$  это квантиль нормального распределения уровня  $1 - \alpha/2$ .

А где найти этот квантиль?

Можно посчитать библиотекой **scipy**!  
(легко гуглится)

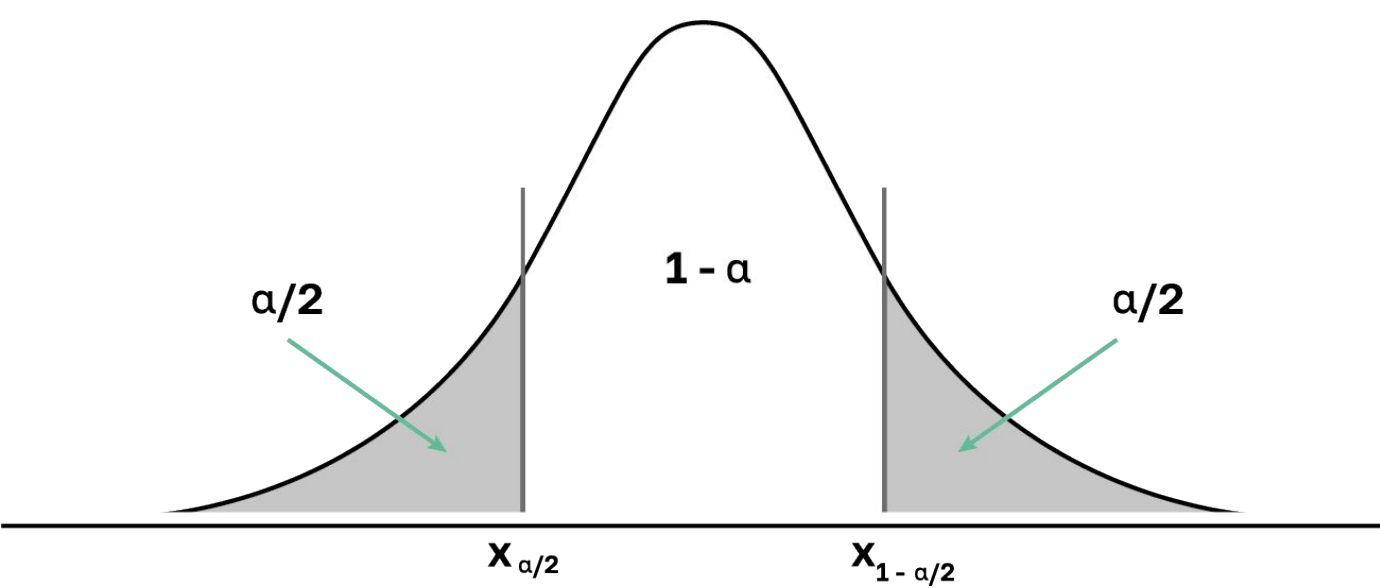
```
>>> import scipy.stats as st
>>> st.norm.ppf(0.95)
1.6448536269514722
```



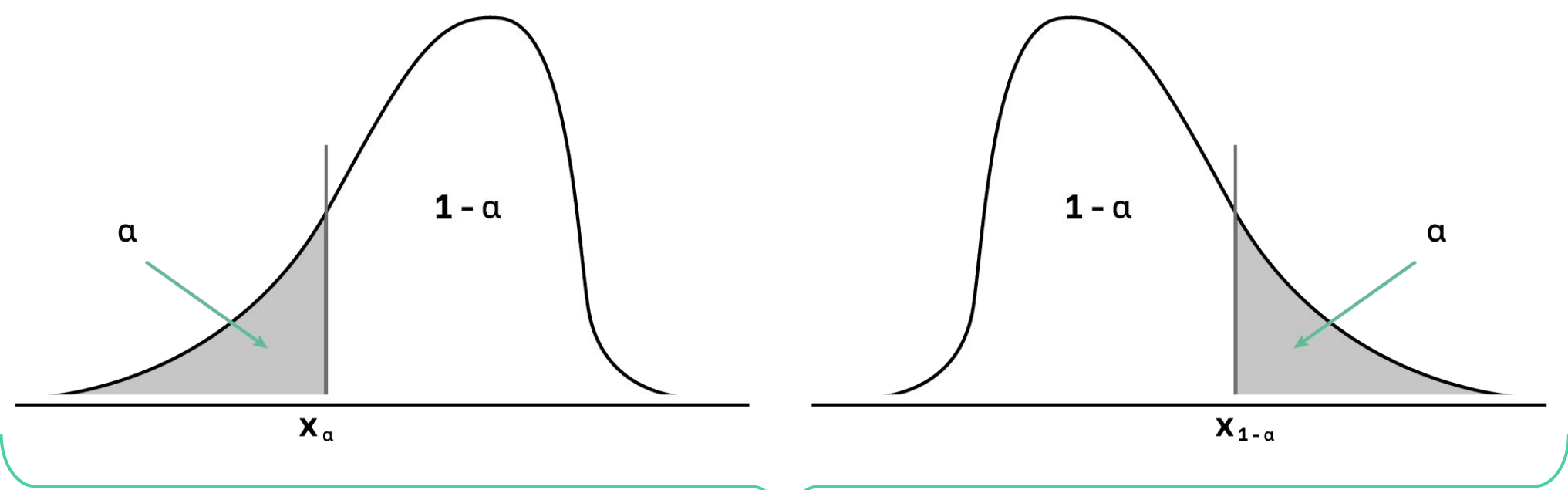
# Области доверительного интервала

Какой выбрать?

уровень	0,90	0,95	0,975	0,98	0,99	0,995	0,999	0,9995	0,9999
односторонняя	1,282	1,645	1,960	2,054	2,326	2,576	3,090	3,291	3,719
двусторонняя	1,645	1,960	2,241	2,326	2,576	2,807	3,291	3,481	3,891



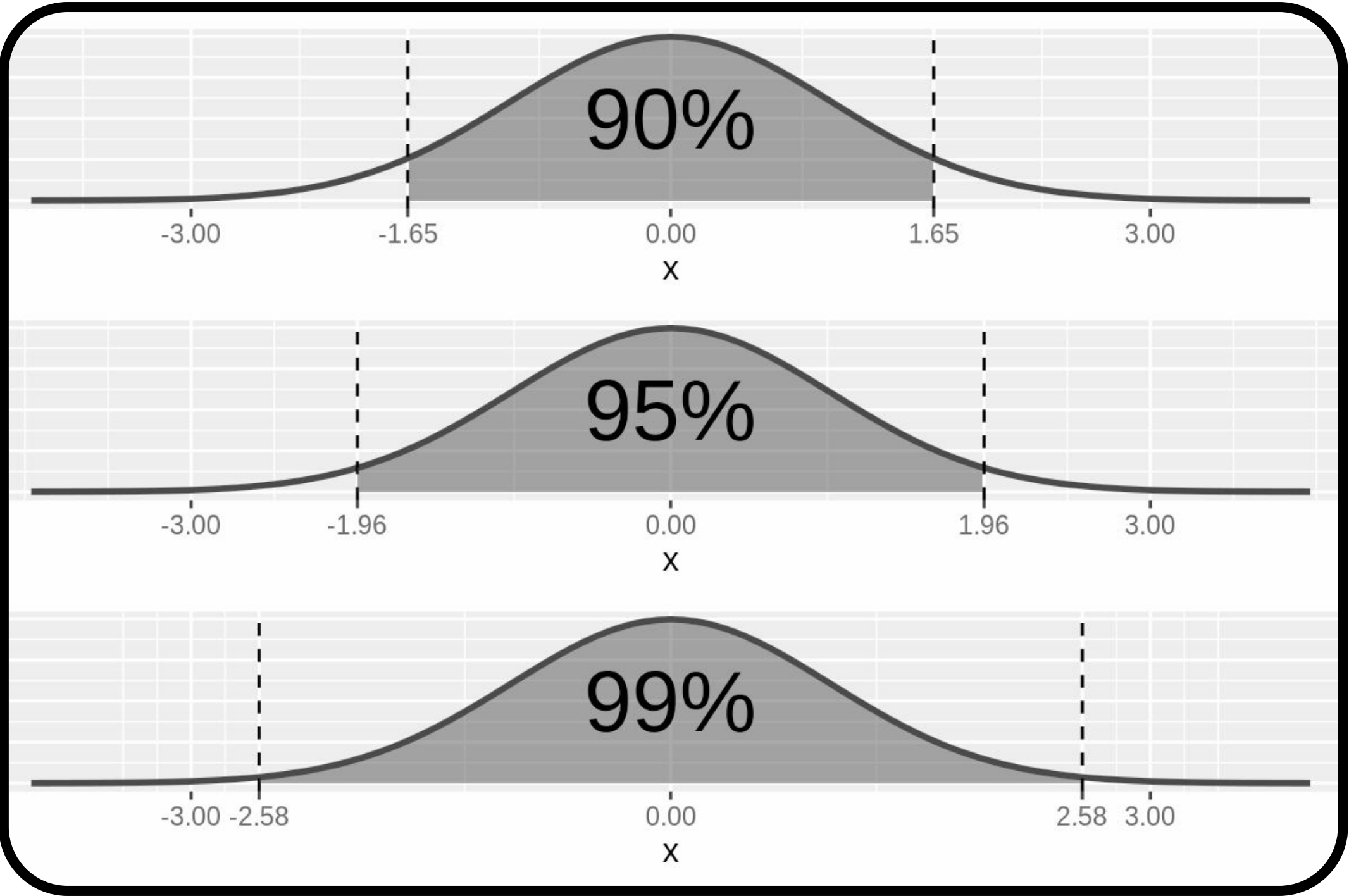
Двусторонняя область



Односторонние области



# Подсчёт доверительного интервала



Какой выбрать?

уровень	0,90	0,98	0,99
односторонняя	1,282	2,054	2,326
двусторонняя	1,645	2,326	2,576



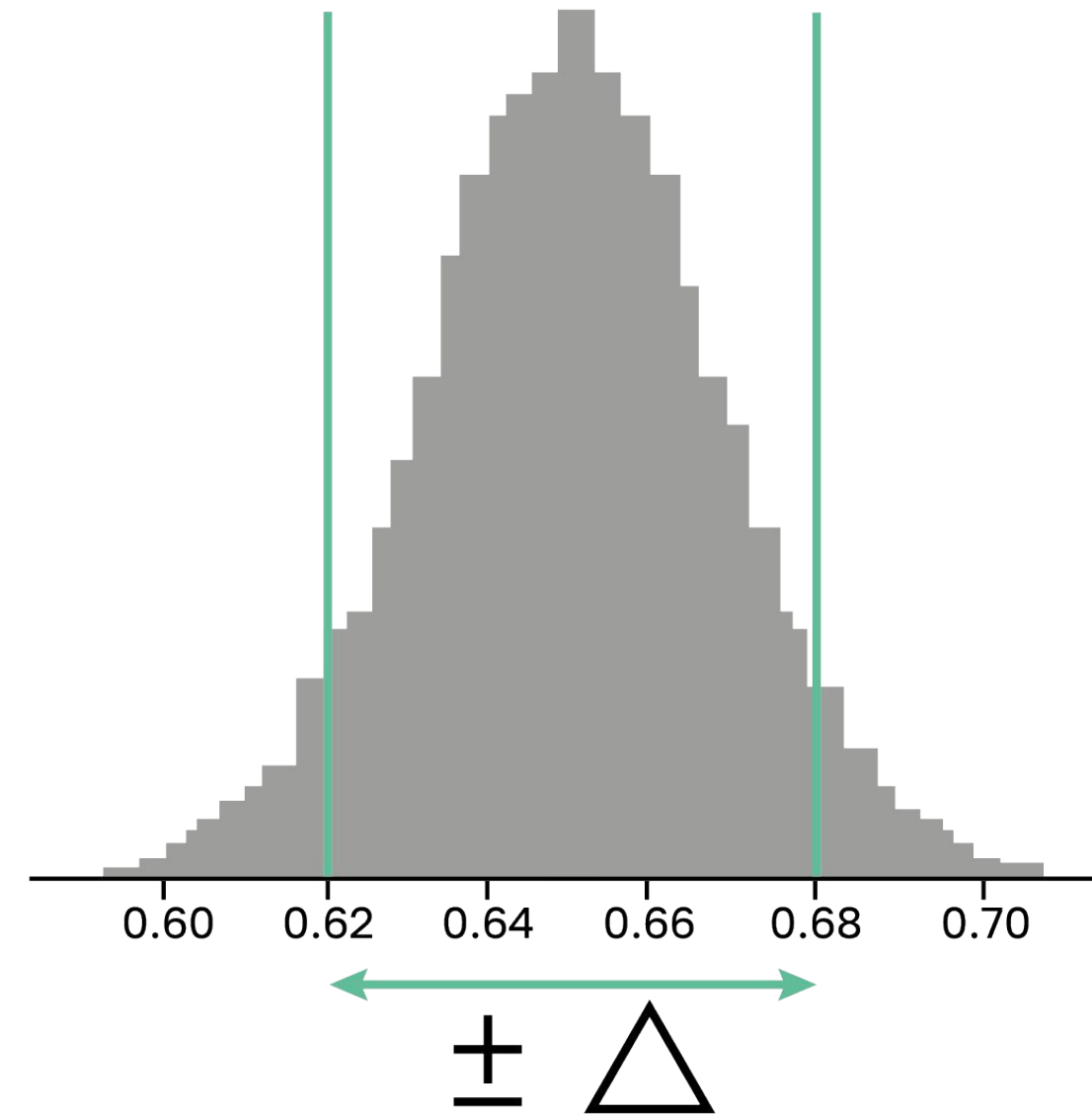
# Задача

## Пример

Дана выборка 9, 5, 7, 7, 4, 10, дисперсия  $\sigma^2 = 1$ .  
Постройте доверительный интервал 99%.

$$(\bar{x} - \Delta; \bar{x} + \Delta)$$

$$\Delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha}$$



# Задача

## Задача

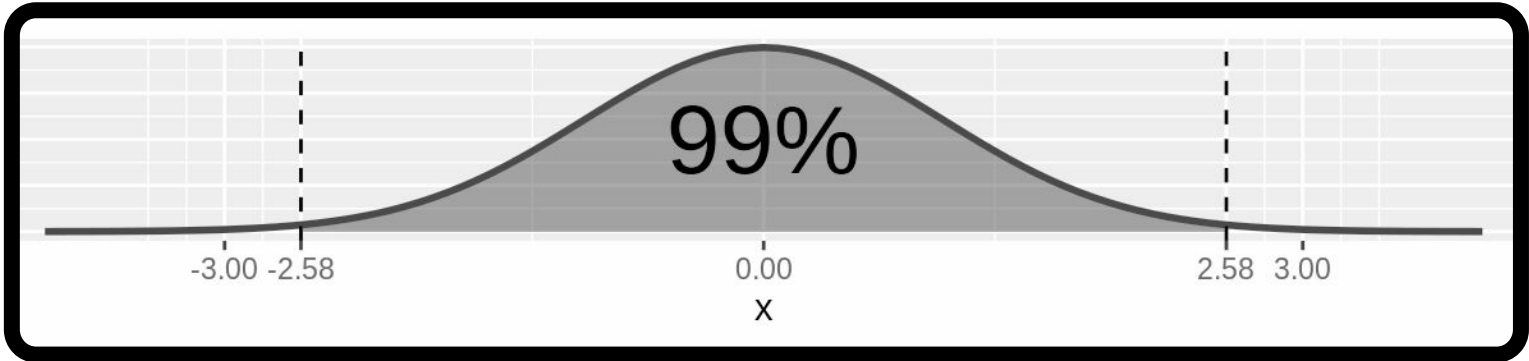
Дана выборка 9, 5, 7, 7, 4, 10, дисперсия  $\sigma^2 = 1$ .  
Постройте доверительный интервал 99%.

## Решение:

Среднее значение равно  $\bar{x} = (9+5+7+7+4+10) / 6 = 7$ .  
Доверительный интервал имеет вид  $(\bar{x} - \Delta; \bar{x} + \Delta)$ .  
По таблице нормального распределения находим  $1 - \alpha/2 = 0.995$  и определяем квантиль  $z_{\alpha} = 2.81$ .

Теперь можем найти точность  $\Delta = (\sigma/\sqrt{n}) * z_{\alpha} = 1/ \sqrt{6} * 2.81 \approx 1.14$   
(здесь мы воспользовались тем, что известна дисперсия генеральной совокупности). Искомый 99%-доверительный интервал имеет вид  $(7 - 1.14; 7 + 1.14) = (5.86; 8.14)$ .

уровень	0,90	0,95	0,99	0,995	0,999
односторонняя	1,282	1,645	2,326	2,576	3,090
двусторонняя	1,645	1,960	2,576	2,807	3,291





# Вернёмся к нашим марсианинам

Сколько марсиан надо взвесить, чтобы наши результаты давали 95% точность?

Обратная задача: раз мы знаем ДИ, то можно ли найти минимальный объем выборки марсиан, для того, чтобы с заданной точностью и уровнем доверия найти среднее?

**Важно!** Чтобы найти минимальный необходимый объём выборки для построения доверительного интервала для среднего значения с заданной точностью  $\Delta$  и уровнем значимости  $\alpha$ , достаточно применить формулу:





$$n = \left( \frac{z_{\alpha} \sigma}{\Delta} \right)^2$$

Теперь понятно, как определить объем выборки при проведении собственных исследований!



# Шаг пройден!

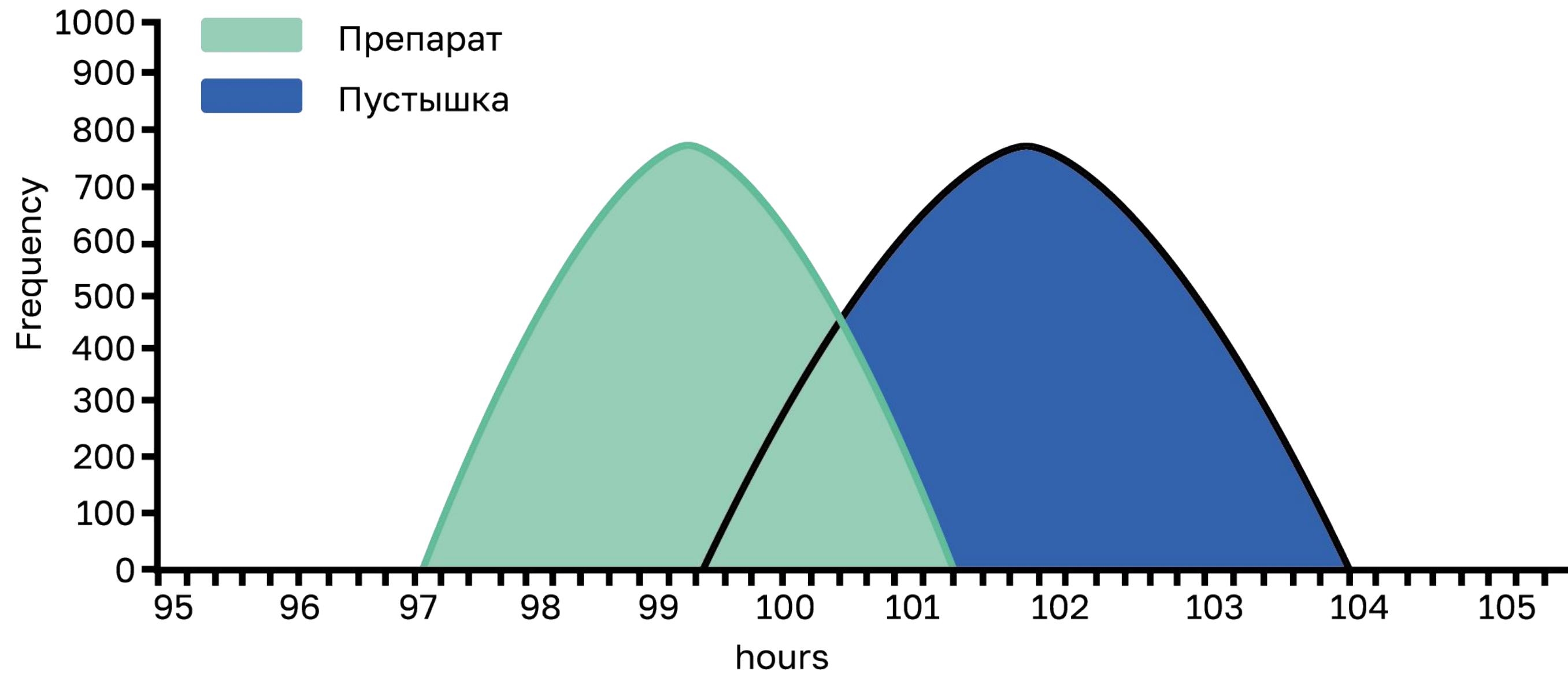
## Наши цели

- Доверительный интервал   
- Уровень значимости 
- p-value
- $t$ -критерий Стьюдента



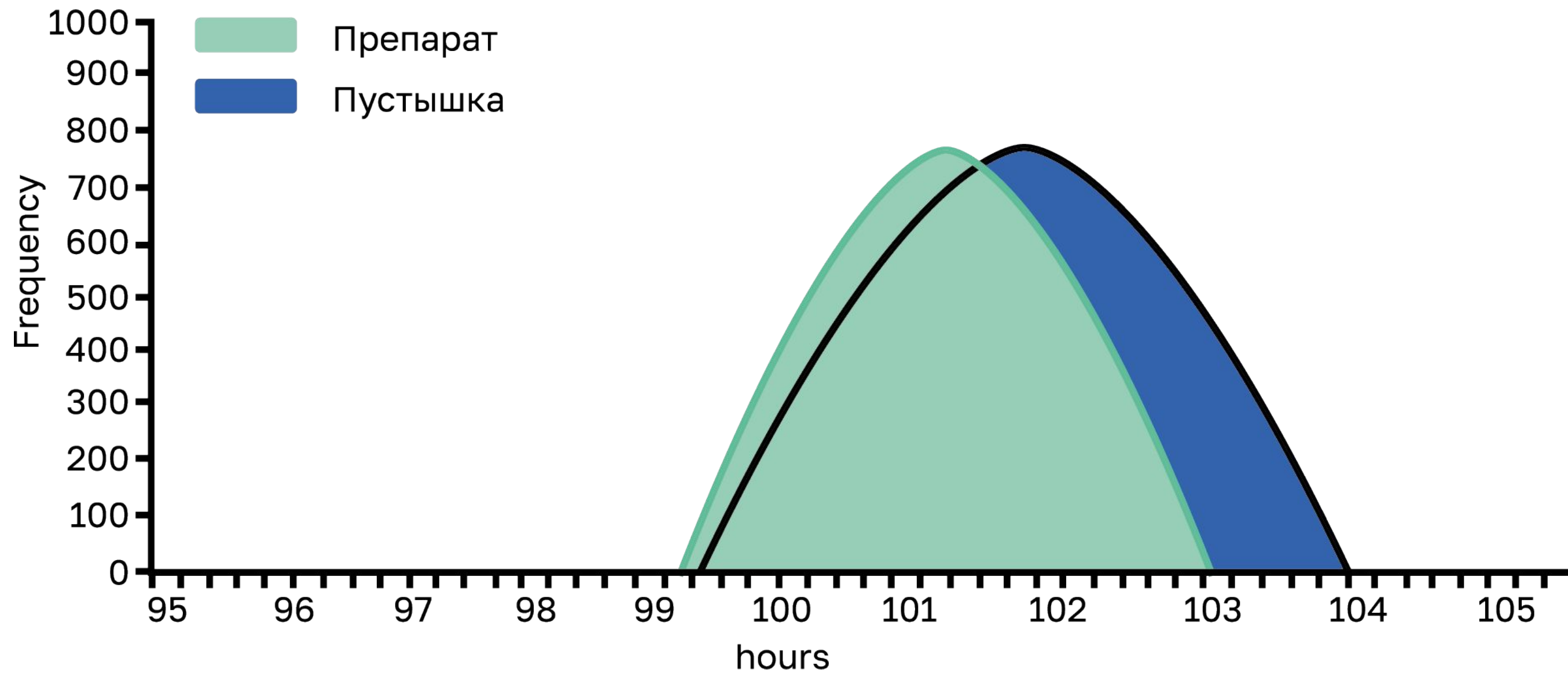
# Проверка гипотез

Что можно сказать о результативности препарата?



# Проверка гипотез

Что можно сказать о результативности препарата?



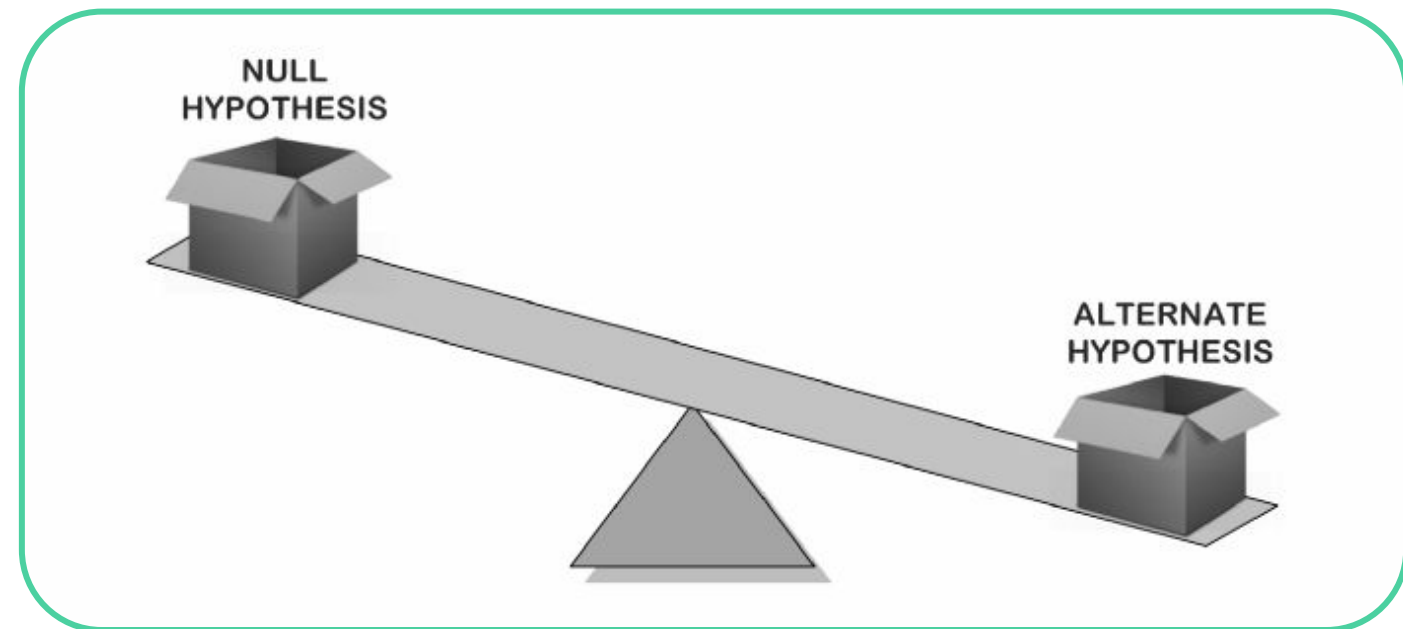
# Проверка гипотез

Этот процесс известен как **проверка гипотез** — проверка статистических гипотез или проверка значимости.

В рамках проверки гипотезы мы либо отвергаем **нулевую гипотезу** и принимаем **альтернативную**, либо **НЕ** отвергаем **нулевую гипотезу**.

## Замечание

Нулевая гипотеза всегда относится к популяции, представляющей больший интерес.



# Логика проверки гипотез

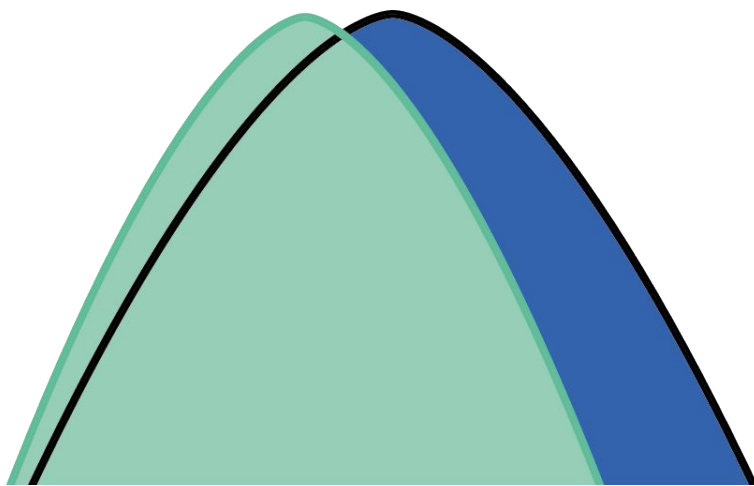
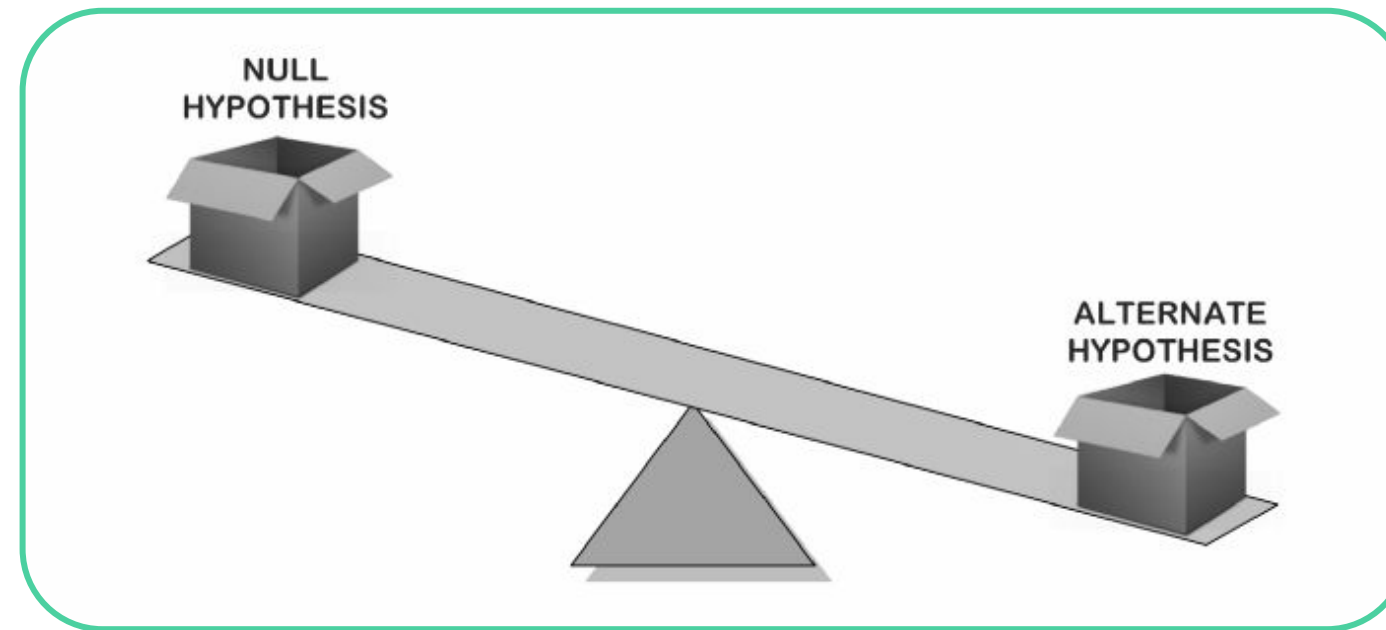
1. Всегда составляют и проверяют нулевую гипотезу ( $H_0$ ), которая отвергает эффект (например, эффект случайный) в генеральной совокупности. Например, при времени выздоровления пациентов — **нулевая гипотеза  $H_0$**  означала бы, что показатели времени выздоровления **не отличаются** от времени выздоровления без лекарства.
2. Затем определяют и проверяют альтернативную гипотезу ( $H_1$ ), которая принимается, если нулевая гипотеза неверна. Альтернативная гипотеза больше относится к той теории, которую собираются исследовать.

**Уровень значимости.** Важным этапом проверки статистических гипотез является определение уровня **статистической значимости**, т. е. максимально допускаемой исследователем вероятности ошибочного отклонения нулевой гипотезы.

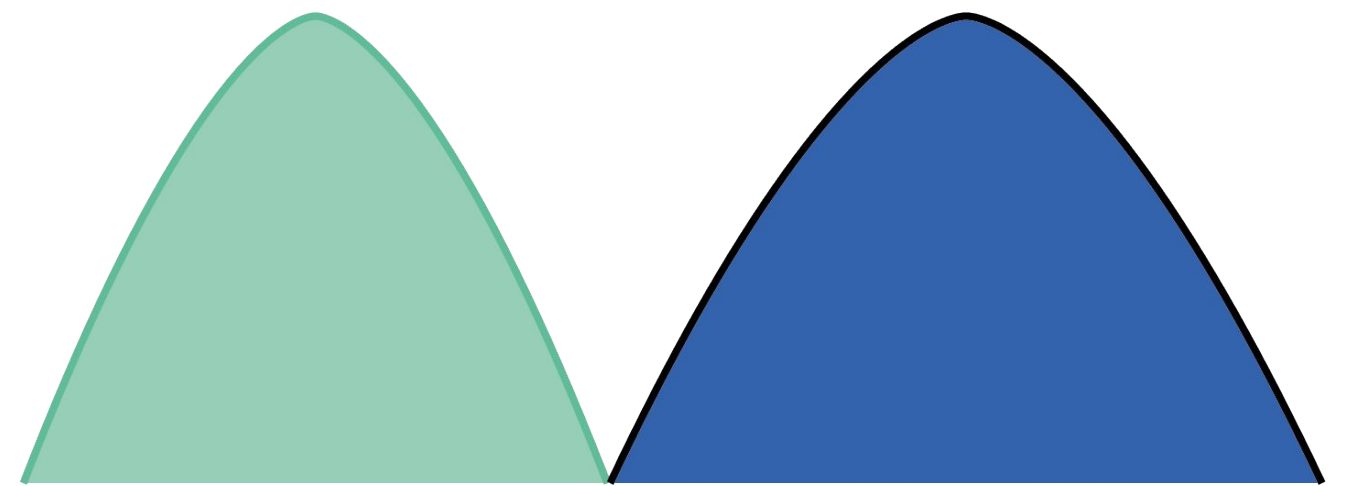
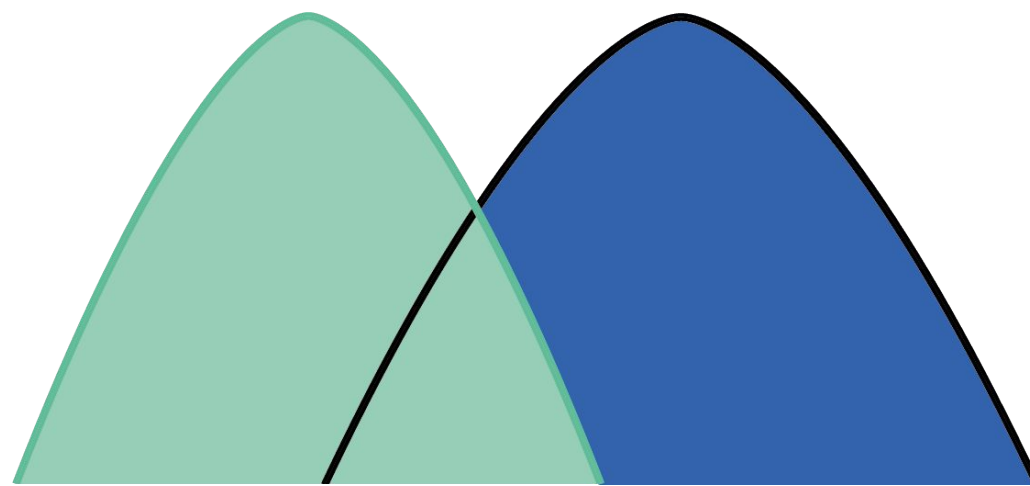
**Зачастую за уровень значимости принимается 5%**



# Логика проверки гипотез



Выборки не отличаются  
Эффект случайный



Выборки отличаются  
Эффект не случайный





# Применение p-value

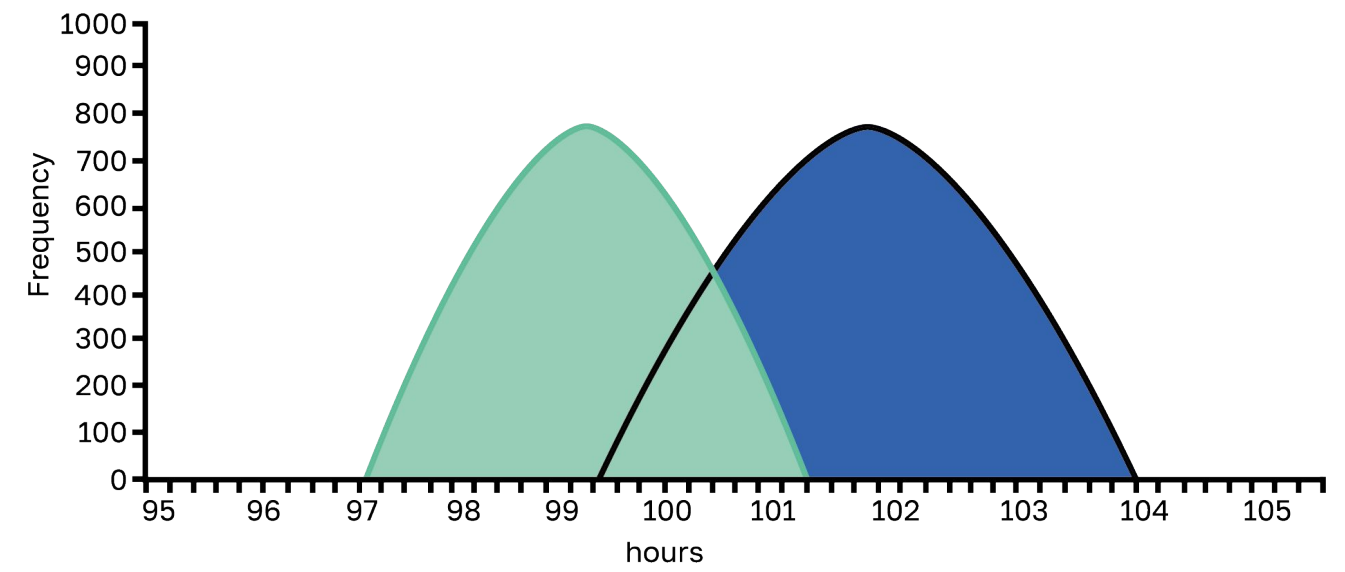
Значение статистики критерия, полученное из выборки, связывают с уже известным распределением, которому она подчиняется, чтобы получить значение  $p$ , площадь обоих «хвостов» (или одного «хвоста» в случае односторонней гипотезы) распределения вероятности.

Большинство компьютерных пакетов обеспечивают автоматическое вычисление двустороннего значения  $p$  (Python).

## Определение:

Значение  $p$  — это вероятность получения нашего вычисленного значения или его ещё большего значения, если нулевая гипотеза верна.

Иными словами,  $p$  — это вероятность отвергнуть нулевую гипотезу при условии, что она верна.



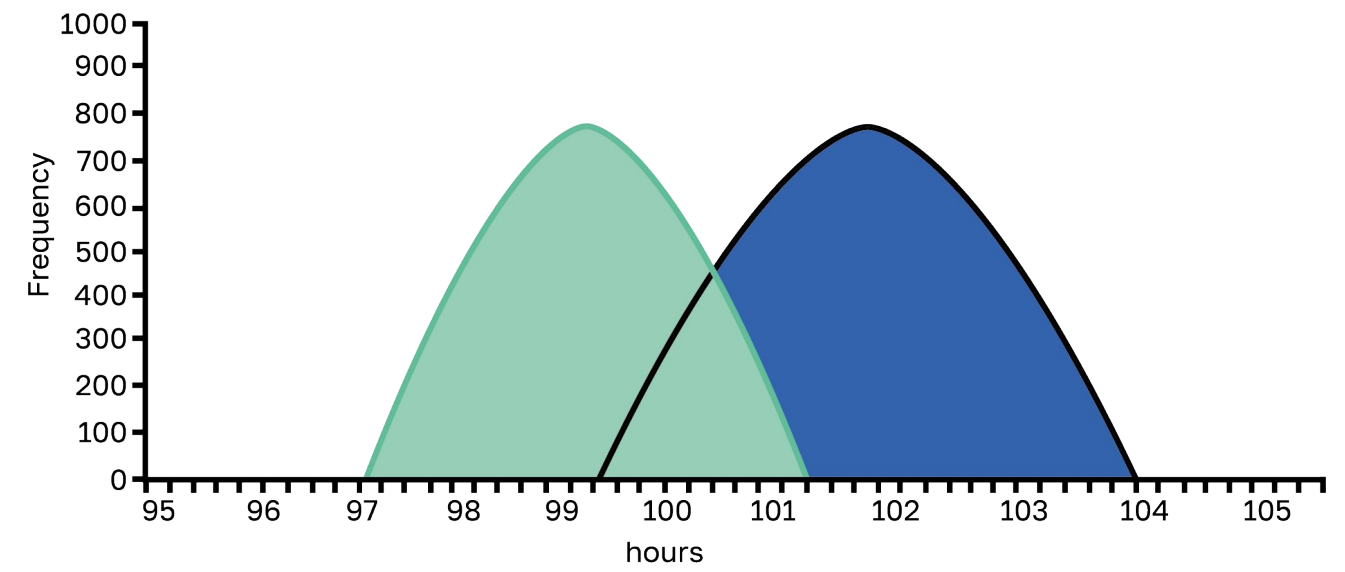
# Применение значения P-value

Как по p-value определить, есть ли основания отвергнуть нулевую гипотезу? Тут важно сначала зафиксировать уровень значимости  $\alpha$ , а потом уже делать выводы.

**Уровень значимости  $\alpha$**  — это вероятность отвергнуть нулевую гипотезу при условии, что она верна.

**p-value** — это минимальный уровень значимости, на котором нулевая гипотеза может быть отвергнута.

Соответственно, если **p-value** меньше нашего фиксированного **уровня значимости  $\alpha$** , на котором мы проверяем гипотезу, то **нулевую гипотезу** следует отвергнуть, если больше — оснований отвергать нулевую гипотезу нет.



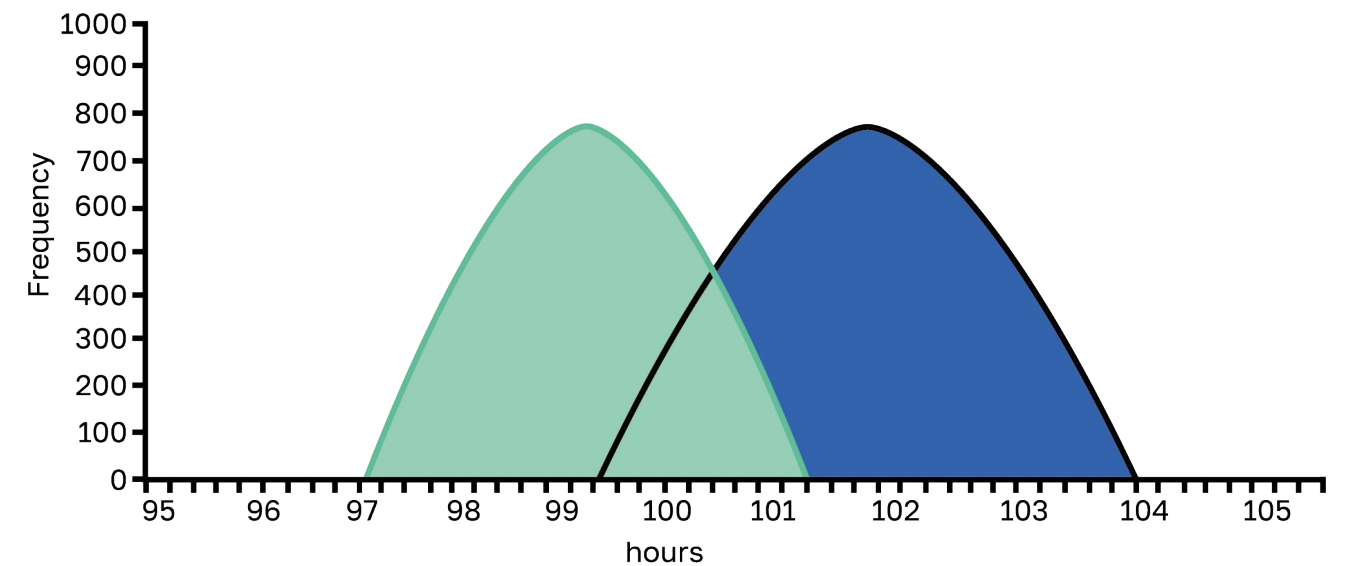
# Применение значения P-value - это просто!

Как по p-value определить, есть ли основания отвергнуть нулевую гипотезу? Тут важно сначала зафиксировать уровень значимости  $\alpha$ , а потом уже делать выводы.

**Уровень значимости  $\alpha$**  — это вероятность отвергнуть нулевую гипотезу при условии, что она верна.

**p-value** — это минимальный уровень значимости, на котором нулевая гипотеза может быть отвергнута.

Соответственно, если **p-value** меньше нашего фиксированного **уровня значимости  $\alpha$** , на котором мы проверяем гипотезу, то **нулевую гипотезу** следует отвергнуть, если больше — отвергать нулевую гипотезу нельзя (**и принимать тоже**).



**НЕПРАВИЛЬНЫЕ**, но **понятные**  
определения **p-value**

**p-value** — это вероятность, получить различия случайно

**p-value** — это вероятность ошибки

**НЕ говорите** никому, что я вас такому учил =)



# Подбор необходимого уровня значимости

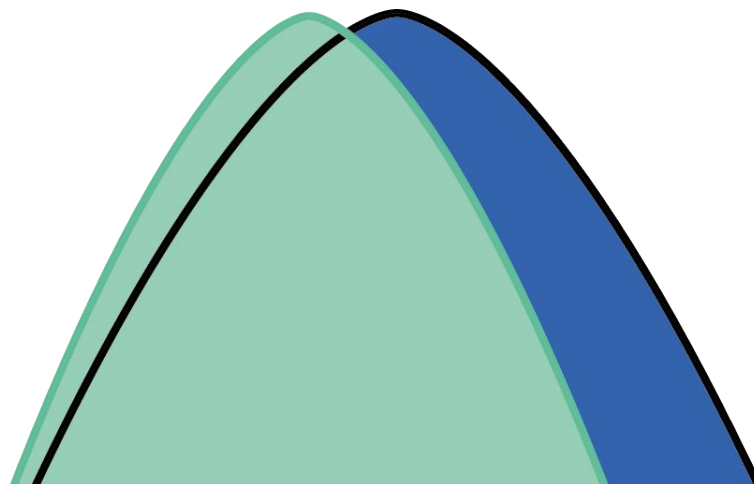
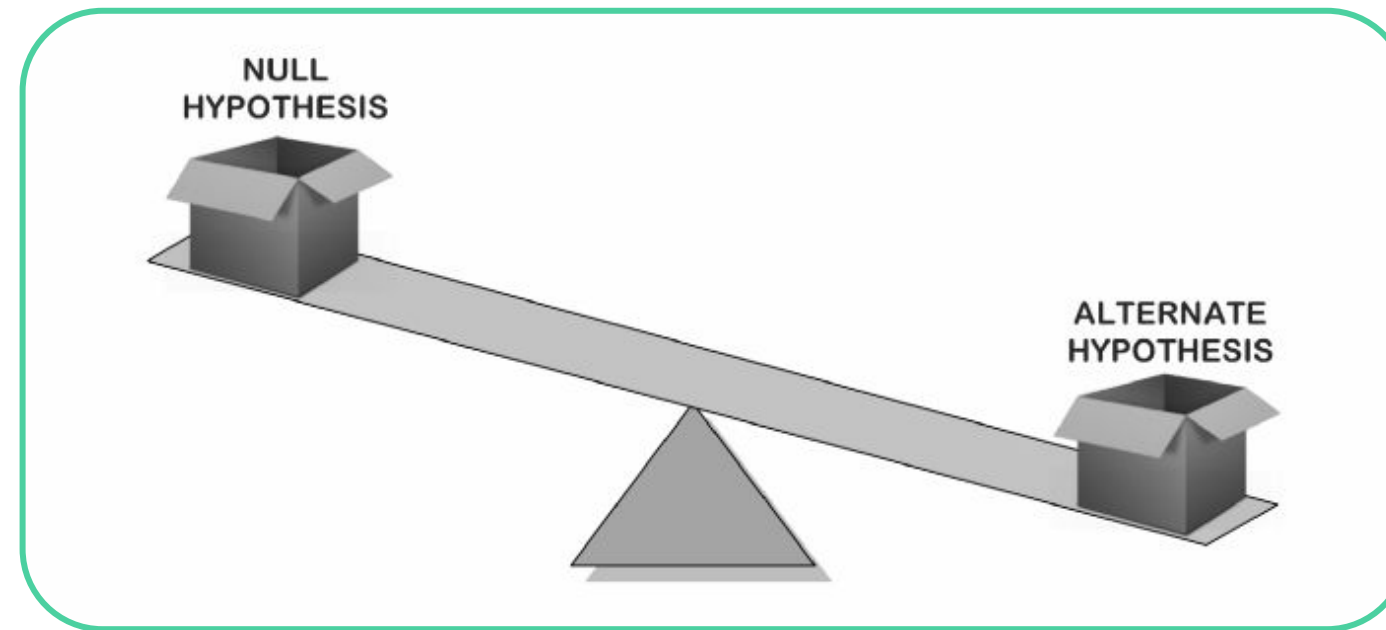
Следует решить, сколько аргументов позволяют отвергнуть нулевую гипотезу в пользу альтернативной — чем меньше значение  $p$ , тем сильнее аргументы против нулевой гипотезы.

Если это может привести к серьёзным последствиям, необходимо потребовать более веских аргументов, например, выбрать значение 0,01 или 0,001 — например в случае исследования эффективности лекарств.

Напротив, если  $p > 0.05$ , то аргументов недостаточно, чтобы отвергнуть нулевую гипотезу. **Не отвергая нулевую гипотезу**, можно заявить, что результаты не значимы на уровне 5%. Данное заключение не означает, что нулевая гипотеза истинна, просто недостаточно аргументов (возможно, маленький объём выборки), чтобы её отвергнуть.



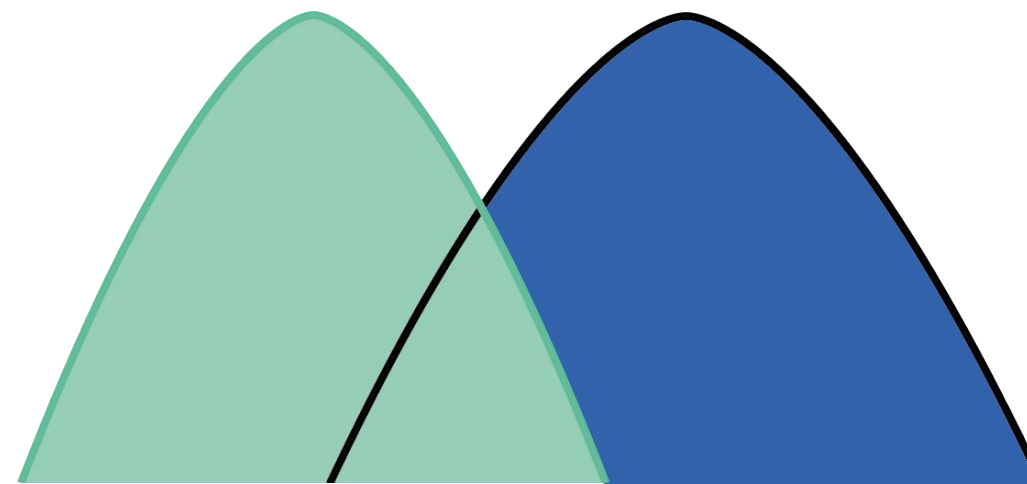
# Логика проверки гипотез



Выборки не отличаются  
Эффект случайный

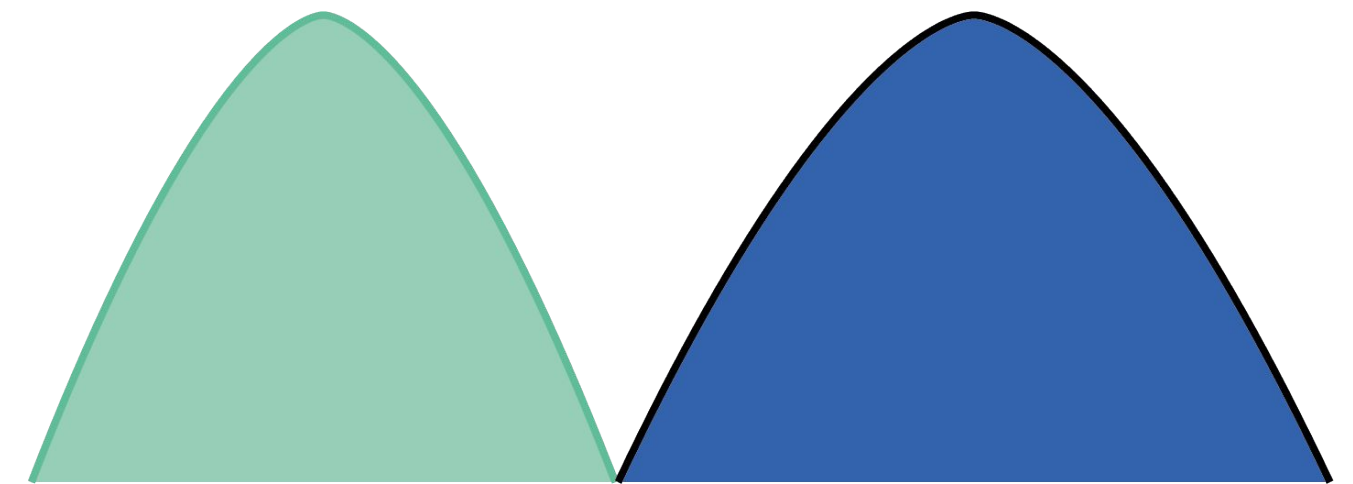
$p\text{-value} > 0.05$

Мы ничего не можем доказать



Неоднозначно

$p\text{-value} = 0.05$

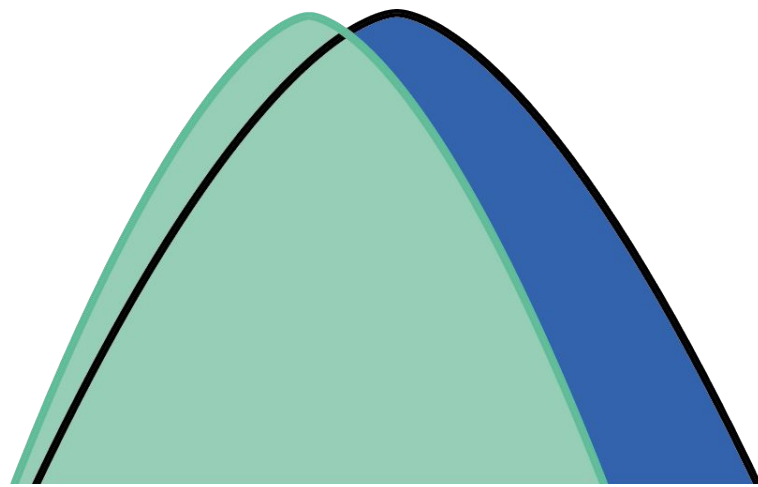


Выборки отличаются  
Эффект не случайный

$p\text{-value} < 0.05$

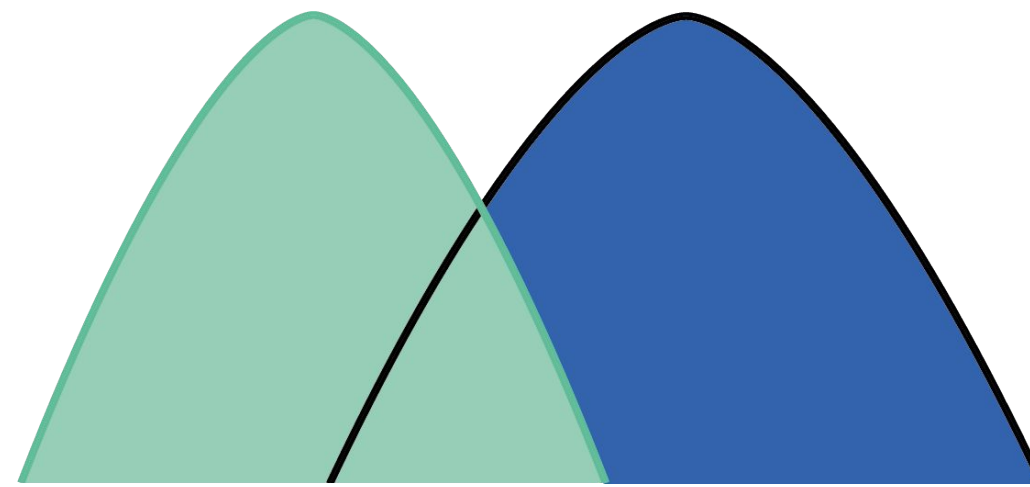


# Логика проверки гипотез



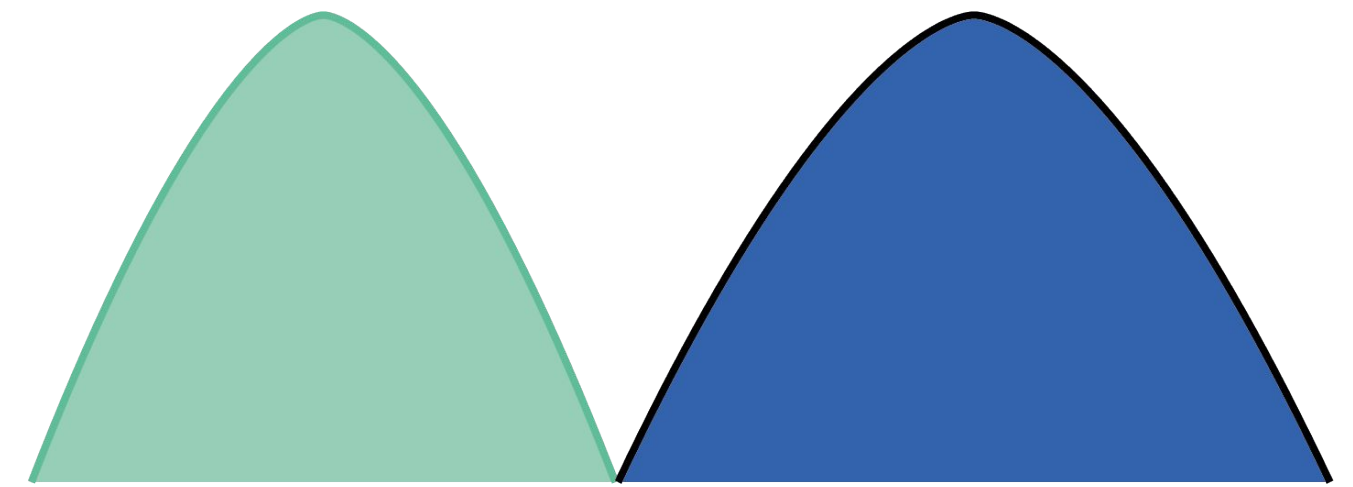
Выборки не отличаются  
Эффект случайный

$p\text{-value} > 0.05$



Неоднозначно

$p\text{-value} = 0.05$



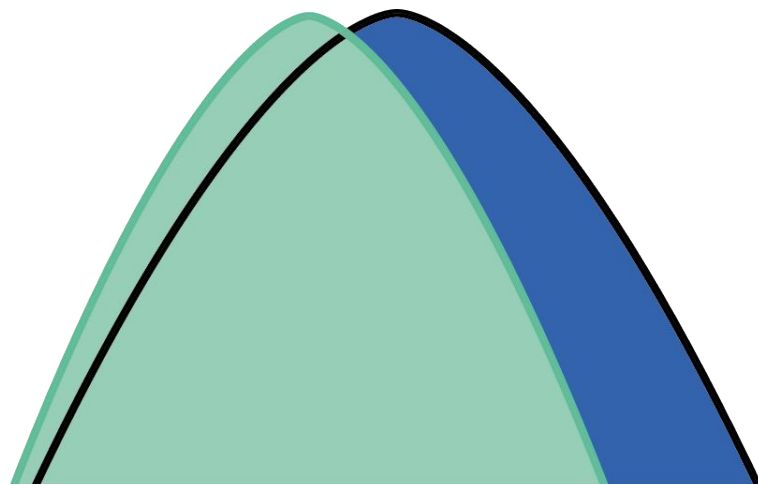
Выборки отличаются  
Эффект не случайный

$p\text{-value} < 0.05$

$p\text{-value}$  превосходит уровень значимости 5%

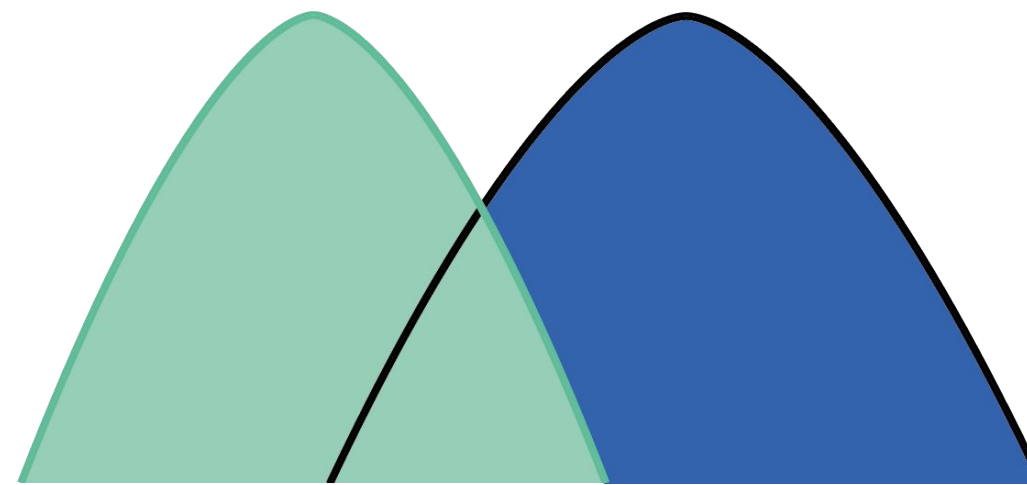


# Ловушка!



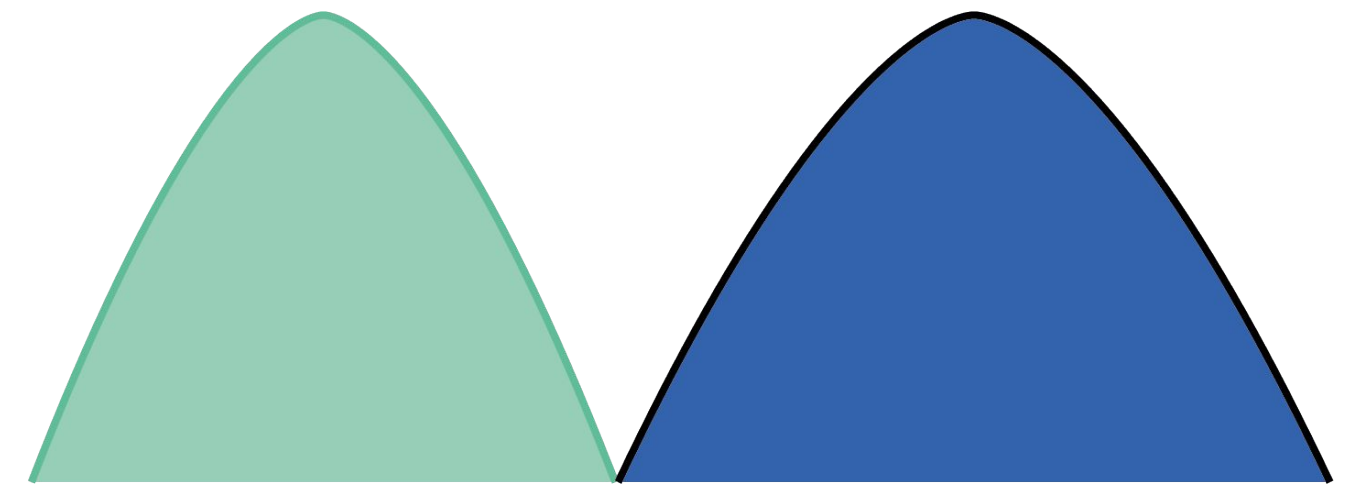
Выборки не отличаются  
Эффект случайный

$p\text{-value} > 0.05$



Неоднозначно

$p\text{-value} = 0.05$



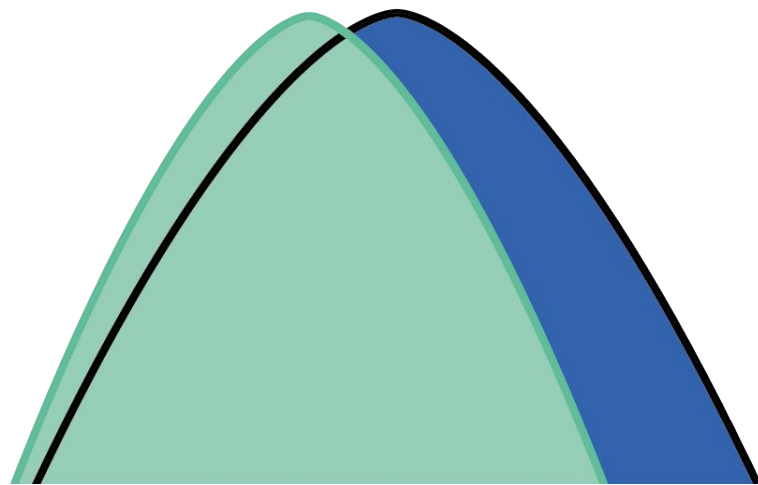
Выборки отличаются  
Эффект не случайный

$p\text{-value} < 0.05$

**Какому случаю соответствует фраза:**  
p-value превосходит уровень значимости 5%?

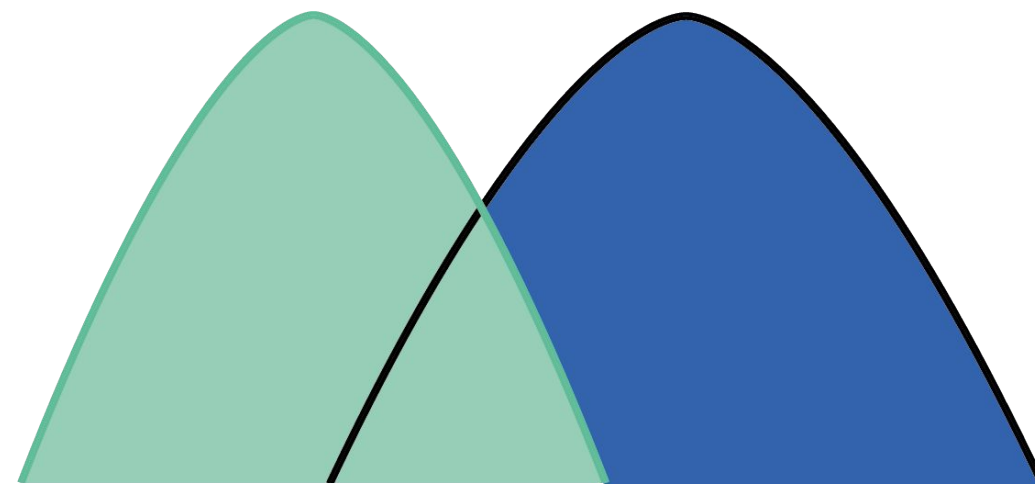


# Ловушка!



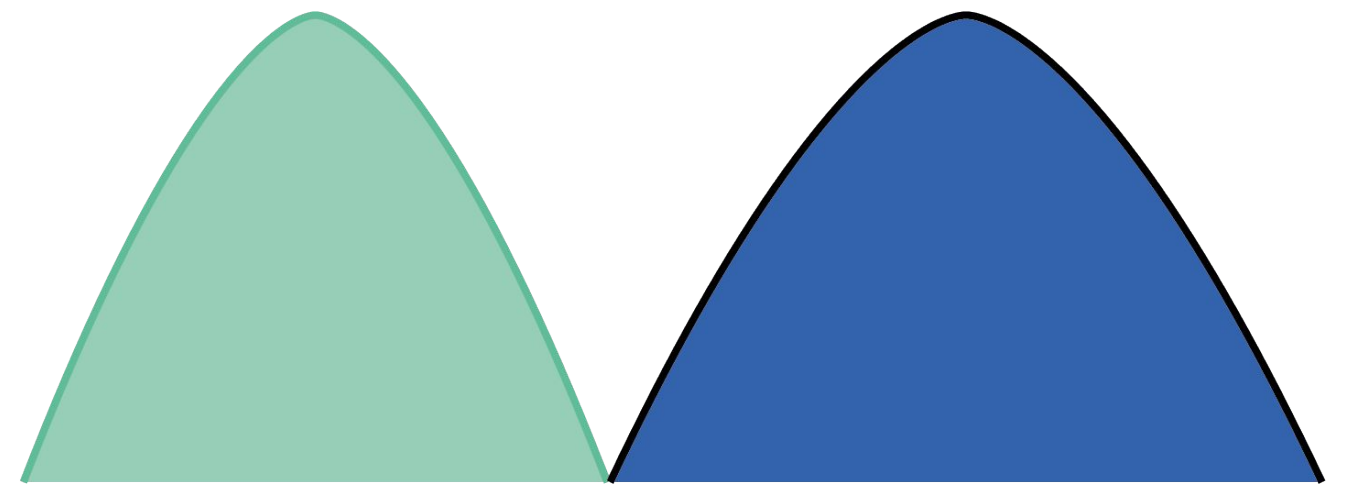
Выборки не отличаются  
Эффект случайный

$p\text{-value} > 0.05$



Неоднозначно

$p\text{-value} = 0.05$



Выборки отличаются  
Эффект не случайный

$p\text{-value} < 0.05$

**Какому случаю соответствует фраза:**  
p-value превосходит уровень значимости 5%?

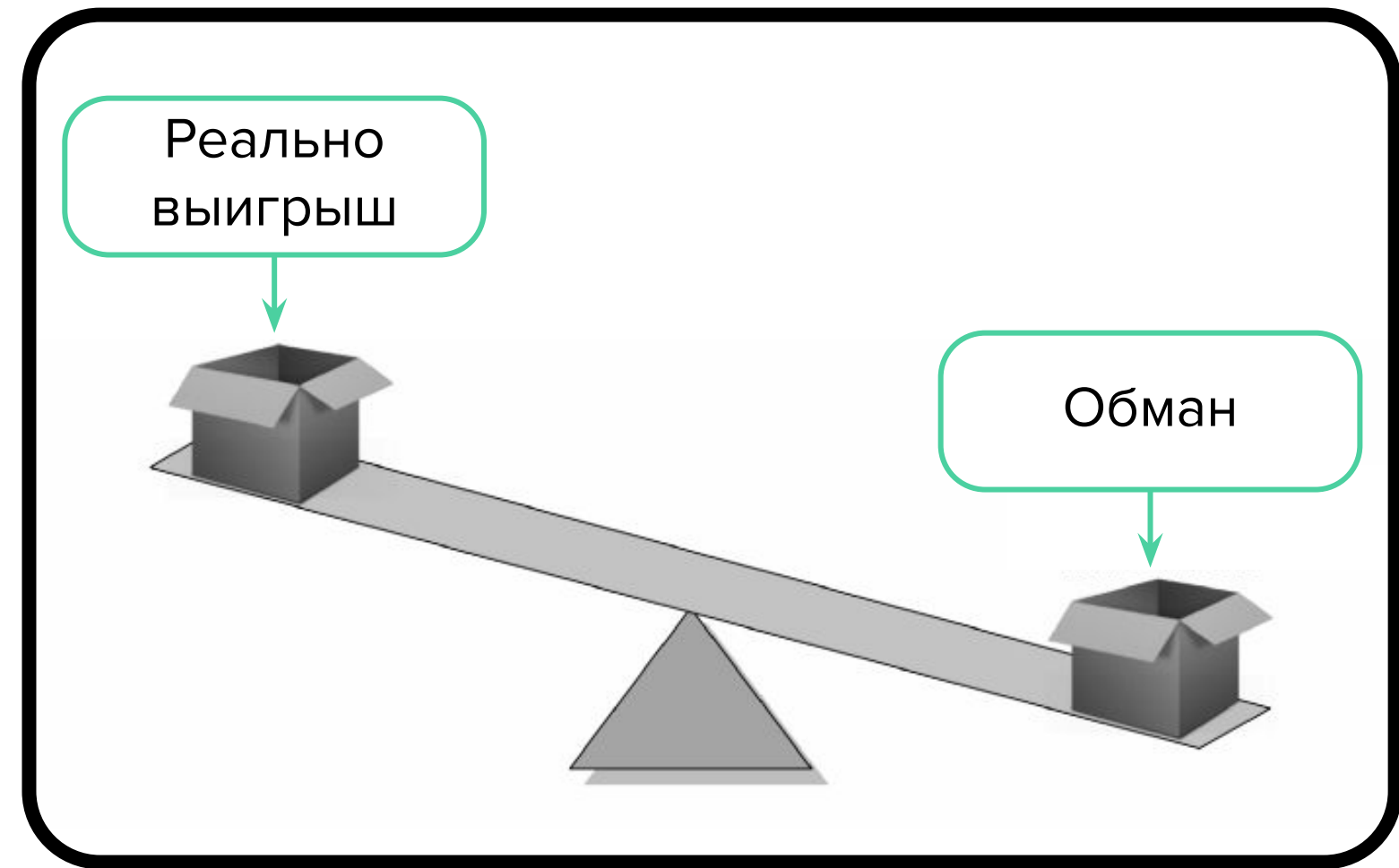




# Вы уже давно знаете про p-value!



Мы обычно интуитивно отвергаем гипотезу выигрыша, т. к. вероятность низкая и так часто это событие происходить не может.



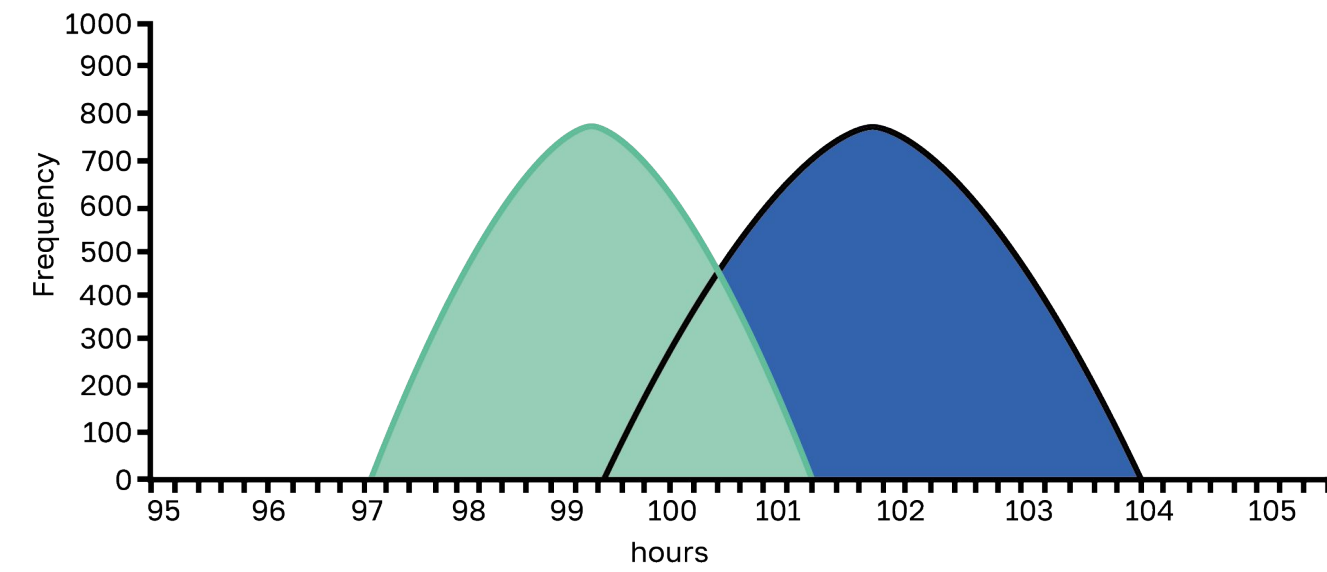
Отвергаем гипотезу выигрыша, т. к. вероятность низкая и так часто это событие происходить не может, но на практике выиграли все.



# Применение p-value



**Да кто это такой ваш p-value?**



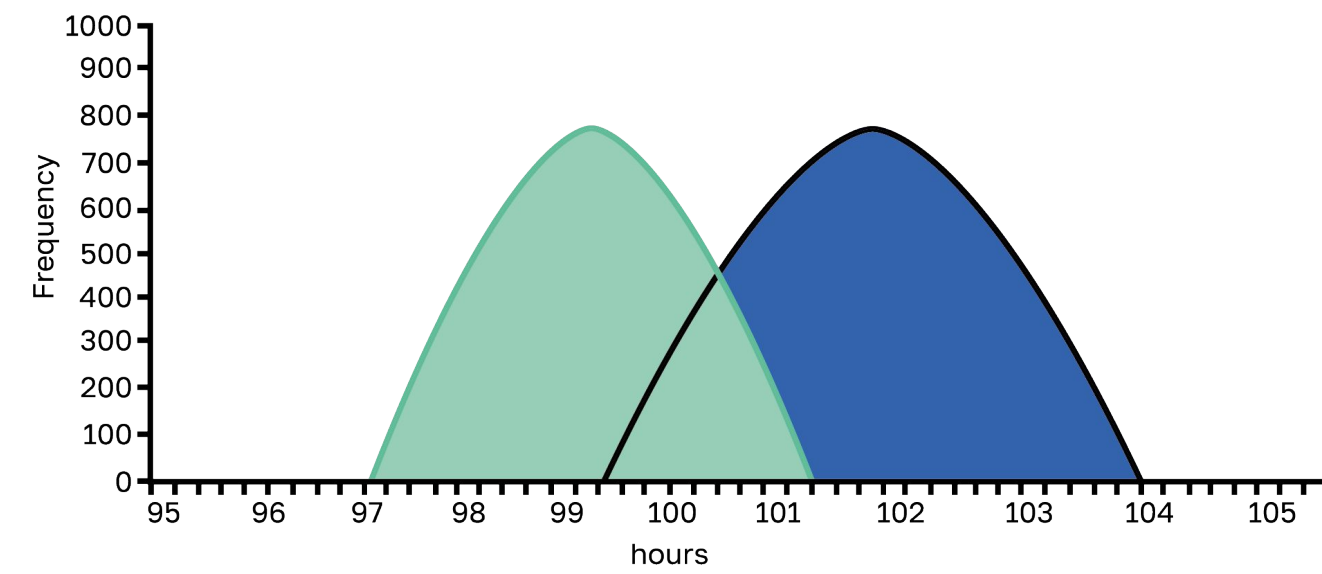
# Применение значения p-value

По сути, это вероятность оказаться в критической области — в области редких событий

Значит ли это, что эффект есть?

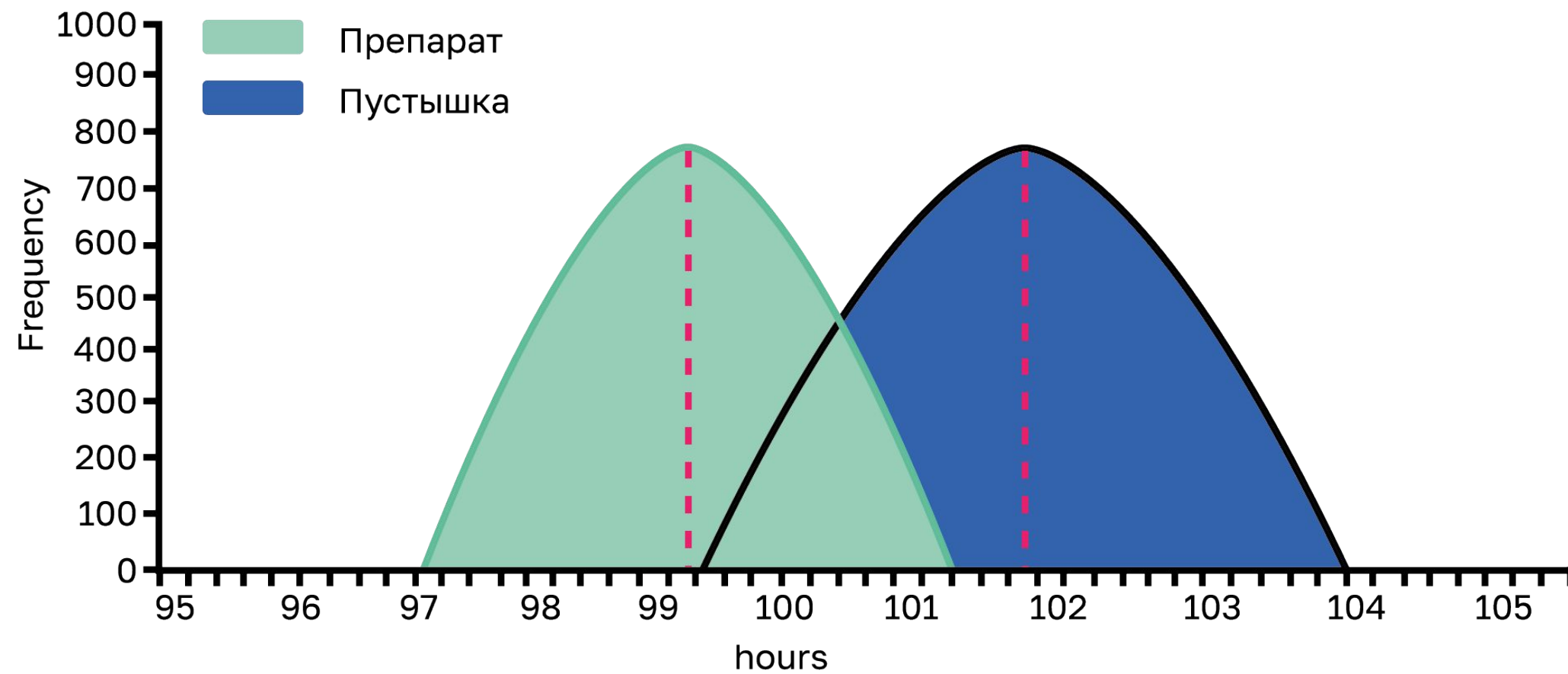
Является ли это вероятностью того, что препарат помогает?

Является ли это вероятностью того, что препарат **НЕ** помогает?



# Применение p-value

Можно ли по графику сказать, что наше лекарство помогает в лечении, если  $p\text{-value} = 1\%$ ?



Низкие значения  $p$  — это хорошо. Они указывают на то, что ваши данные не были случайными.



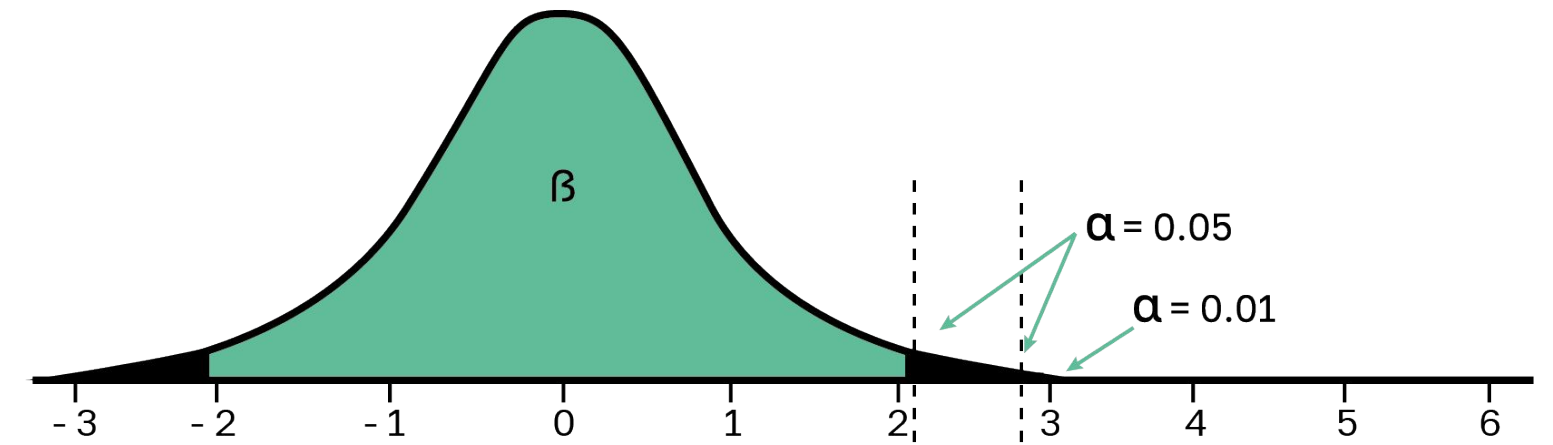
# Проверка гипотез **vs** доверительных интервалов

Первоначальная цель проверки гипотезы состоит в том, чтобы принять решение и предоставить точное значение  $p$ .

**ДИ** предоставляют интервал вероятных значений для истинного эффекта, поэтому его также можно использовать для принятия решения даже без точных значений  $p$ .

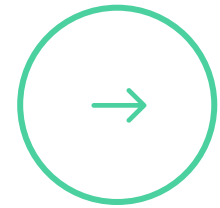
Например, если бы гипотетическое значение для данного эффекта находилось вне 95% ДИ, можно было бы счесть гипотетическое значение неправдоподобным и отвергнуть.

В этом случае станет известно, что  $p < 0,05$ , но не станет известно его точное значение.

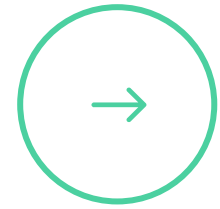


# Проверим себя\*

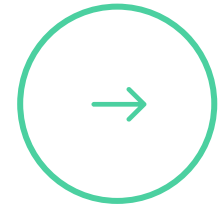
В нашем исследовании  $p$  уровень значимости равен 0.02



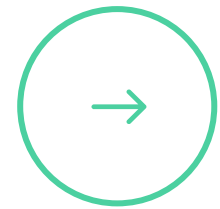
Вероятность того, что верна нулевая гипотеза (новый препарат не влияет на скорость выздоровления) также равняется всего лишь 0.02.



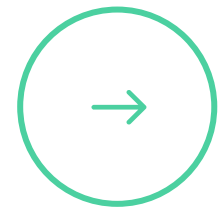
Если бы в исследовании мы получили  $p = 0.5$ , то верна нулевая гипотеза, и новый препарат не влияет на скорость выздоровления.



Чем меньше  $p$  уровень значимости, тем сильнее получаемые различия. Например, если бы  $p$  уровень значимости в нашем исследовании был бы равен 0.0001, значит новый препарат ещё сильнее бы влиял на скорость выздоровления.



Статистически значимый результат, всегда означает ценный и осмысленный результат.



Вероятность случайно получить такие различия равняется 0.02.

\*Задача по мотивам задачи из курса Анатолия Карпова



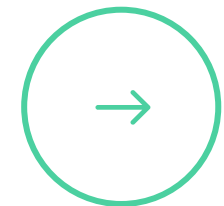
3-5

**минут  
на размышления**

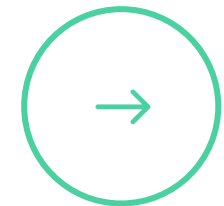


# Проверим себя

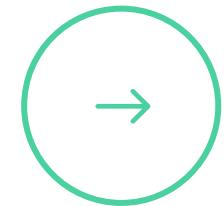
В нашем исследовании  $p$  уровень значимости равен 0.02



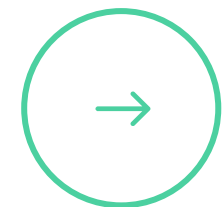
Вероятность того, что верна нулевая гипотеза (новый препарат не влияет на скорость выздоровления) также равняется всего лишь 0.02.



Если бы в исследовании мы получили  $p = 0.5$ , то верна нулевая гипотеза, и новый препарат не влияет на скорость выздоровления.



Чем меньше  $p$  уровень значимости, тем сильнее получаемые различия. Например, если бы  $p$  уровень значимости в нашем исследовании был бы равен 0.0001, значит новый препарат ещё сильнее бы влиял на скорость выздоровления.



Статистически значимый результат, всегда означает ценный и осмысленный результат.



Вероятность случайно получить такие различия равняется 0.02.

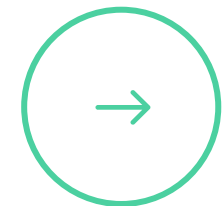
**Внимание!  
Нет верных!!!**





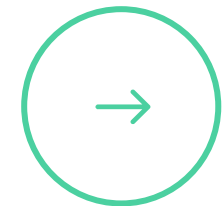
# Проверим себя

В нашем исследовании  $p$  уровень значимости равен 0.02



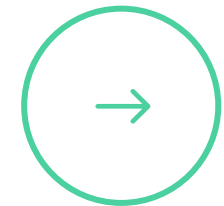
Вероятность того, что верна нулевая гипотеза (новый препарат не влияет на скорость выздоровления) также равняется всего лишь 0.02.

Скорее наоборот



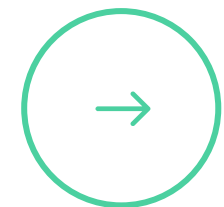
Если бы в исследовании мы получили  $p = 0.5$ , то верна нулевая гипотеза, и новый препарат не влияет на скорость выздоровления.

Это значит, что мы не можем отвергнуть нулевую гипотезу, но это не значит, что она верна



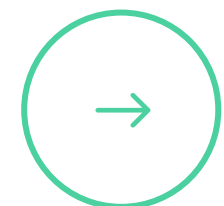
Чем меньше  $p$  уровень значимости, тем сильнее получаемые различия. Например, если бы  $p$  уровень значимости в нашем исследовании был бы равен 0.0001, значит новый препарат ещё сильнее бы влиял на скорость выздоровления.

Со скоростью это никак не связано



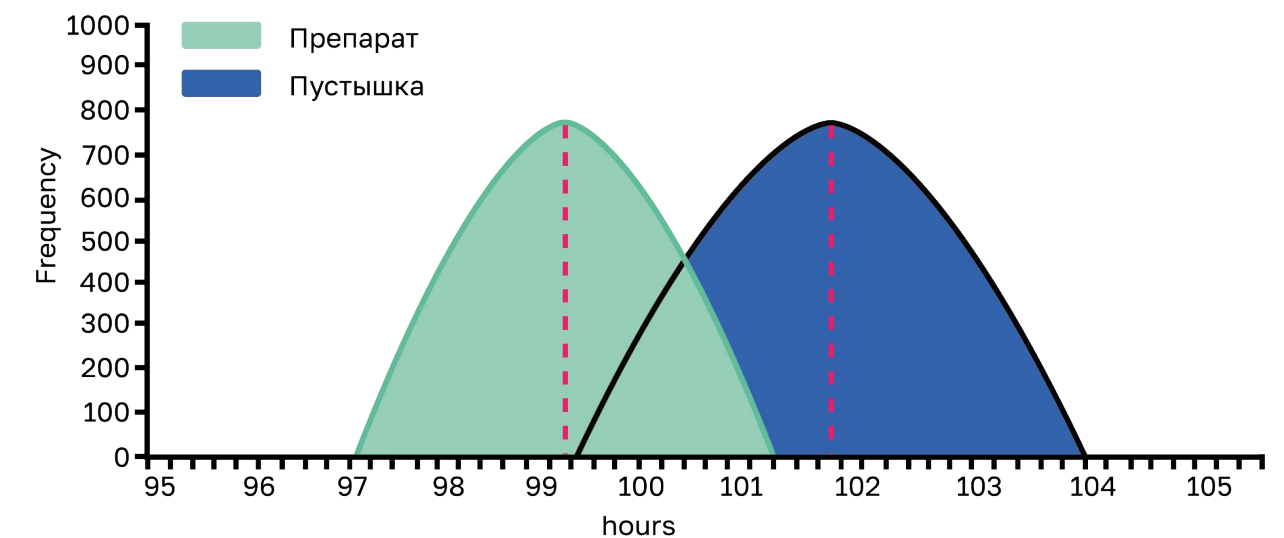
Статистически значимый результат, всегда означает ценный и осмысленный результат.

Отнюдь нет, доказывают разные примеры



Вероятность случайно получить такие различия равняется 0.02.

Близко к определению, но всё равно не то



# Проверим себя

Использование доверительных интервалов зачастую рассматривают как альтернативный способ проверки гипотез. В нашем случае, если значение 20 (предполагаемое среднее значение в генеральной совокупности) не будет принадлежать 95%-доверительному интервалу, рассчитанному по выборочным данным, у нас будет достаточно оснований отклонить нулевую гипотезу.

Проверьте, согласуются ли результаты двух этих подходов:  
рассчитайте 95%-доверительный интервал для среднего значения на примере с тестированием нового препарата.

**$n = 64$ ,  $sd = 4$ ,  $M = 18.5$ , и пусть 95%-й квантиль = 2**

Выберите верное утверждение:

- 20 принадлежит доверительному интервалу — отклоняем  $H_1$
- 20 не принадлежит доверительному интервалу — отклоняем  $H_1$
- 20 принадлежит доверительному интервалу — отклоняем  $H_0$
- 20 не принадлежит доверительному интервалу — отклоняем  $H_0$



3

**минуты  
на размышления**



# Проверим себя

Использование доверительных интервалов зачастую рассматривают как альтернативный способ проверки гипотез. В нашем случае, если значение 20 (предполагаемое среднее значение в генеральной совокупности) не будет принадлежать 95%-доверительному интервалу, рассчитанному по выборочным данным, у нас будет достаточно оснований отклонить нулевую гипотезу.

Проверьте, согласуются ли результаты двух этих подходов: рассчитайте 95%-доверительный интервал для среднего значения на примере с тестированием нового препарата.

$n = 64$ ,  $sd = 4$ ,  $M = 18.5$ , и пусть 95%-й квантиль = 2

Выберите верное утверждение:

- 20 принадлежит доверительному интервалу — отклоняем  $H_1$
- 20 не принадлежит доверительному интервалу — отклоняем  $H_1$
- 20 принадлежит доверительному интервалу — отклоняем  $H_0$
- 20 не принадлежит доверительному интервалу — отклоняем  $H_0$



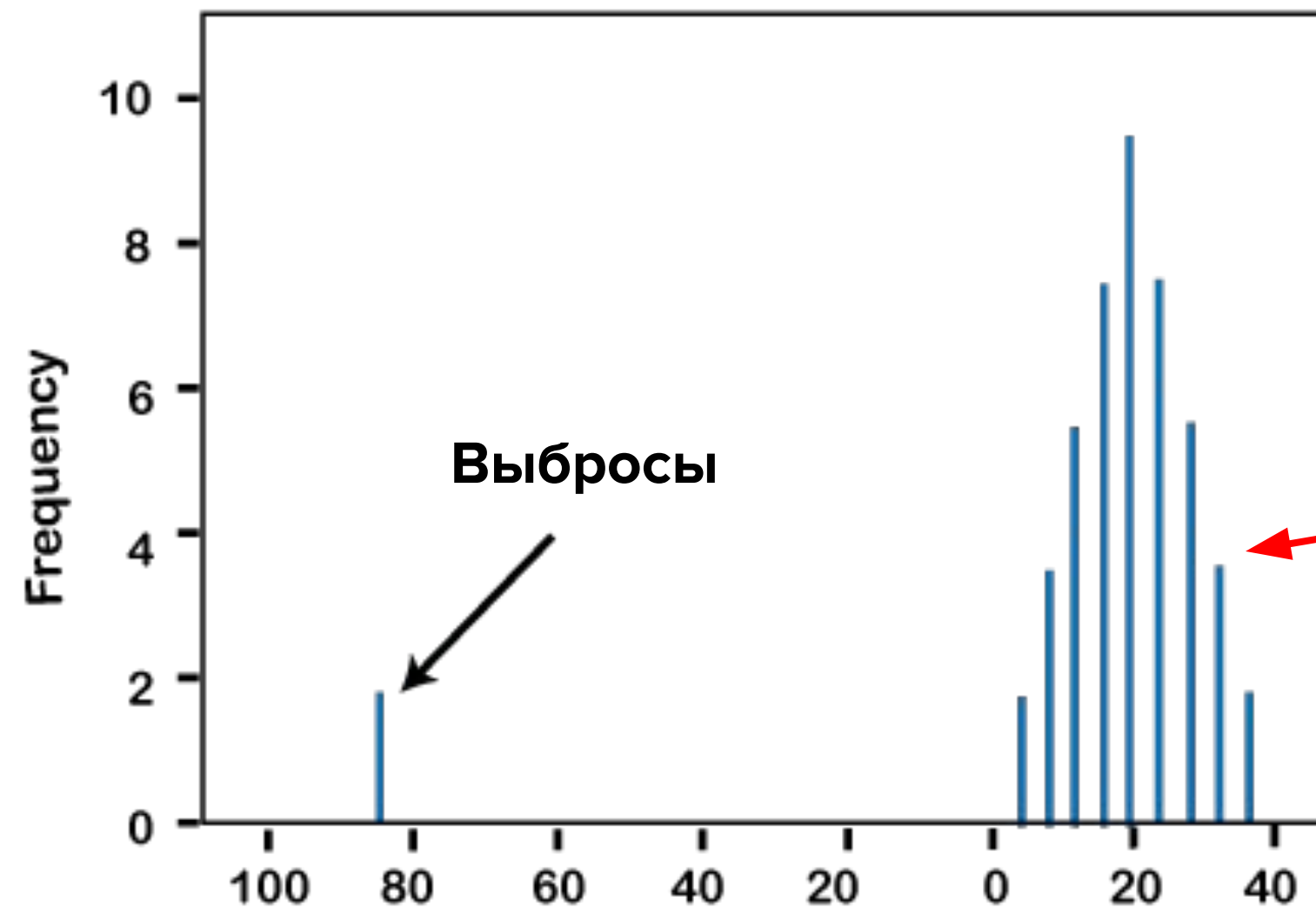
# Шаг пройден!

## Наши цели

- |   |                         |   |   |   |
|---|-------------------------|---|---|---|
| → | Доверительный интервал  | ✓ | ✓ | ✓ |
| → | Уровень значимости      | ✓ |   |   |
| → | p-value                 | ✓ |   |   |
| → | $t$ -критерий Стьюдента |   |   |   |



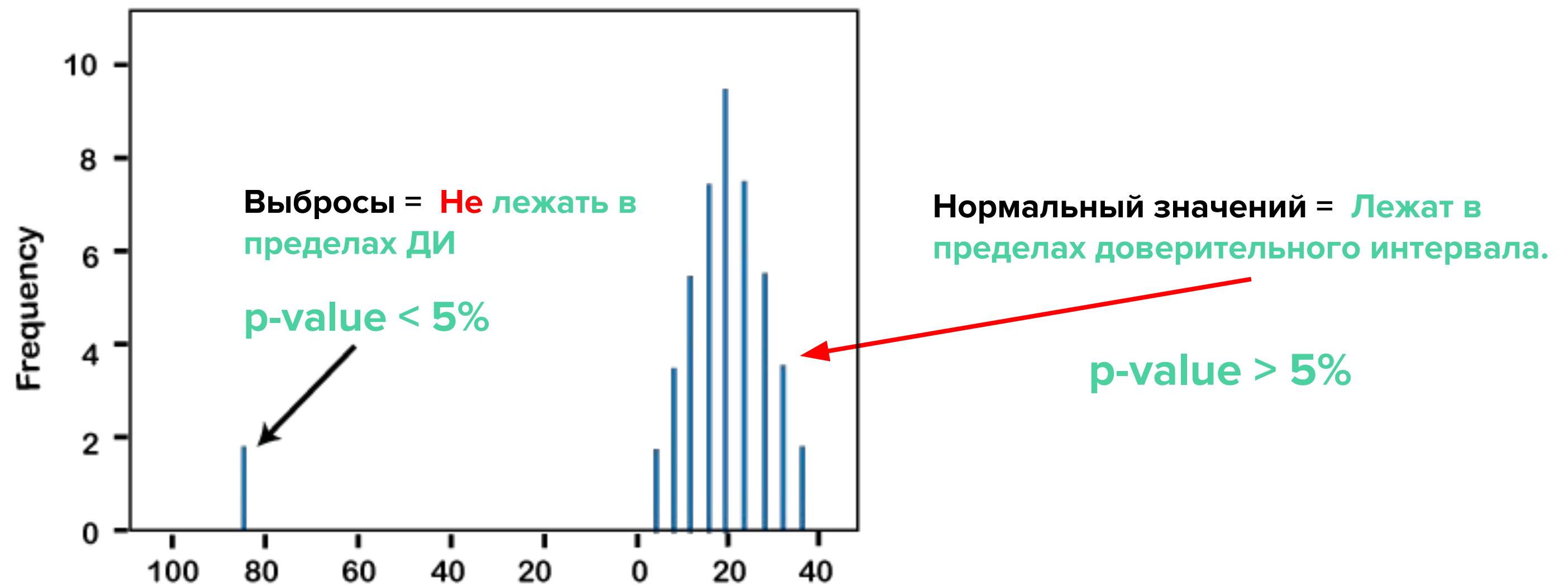
**Все еще непонятно зачем нам все это нужно?!?! -  
Тогда задумайтесь, что если значение не попало в  
доверительный интервал?**



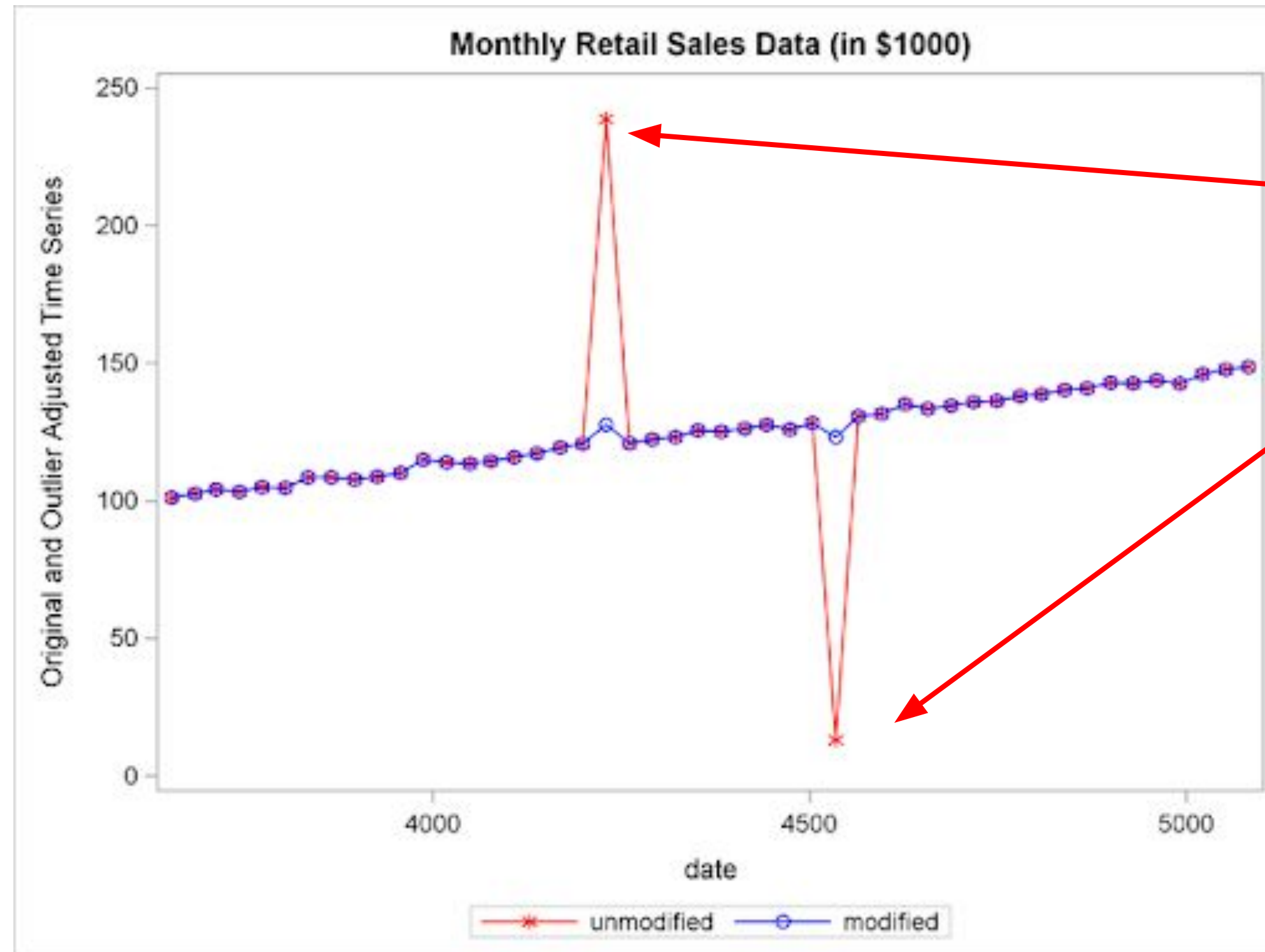
Нормальный значений = Лежат в пределах доверительного интервала.



# А p-value тут причем?! - А как иначе тут определить выброс?



# p-value спасает, при работе с временными рядами

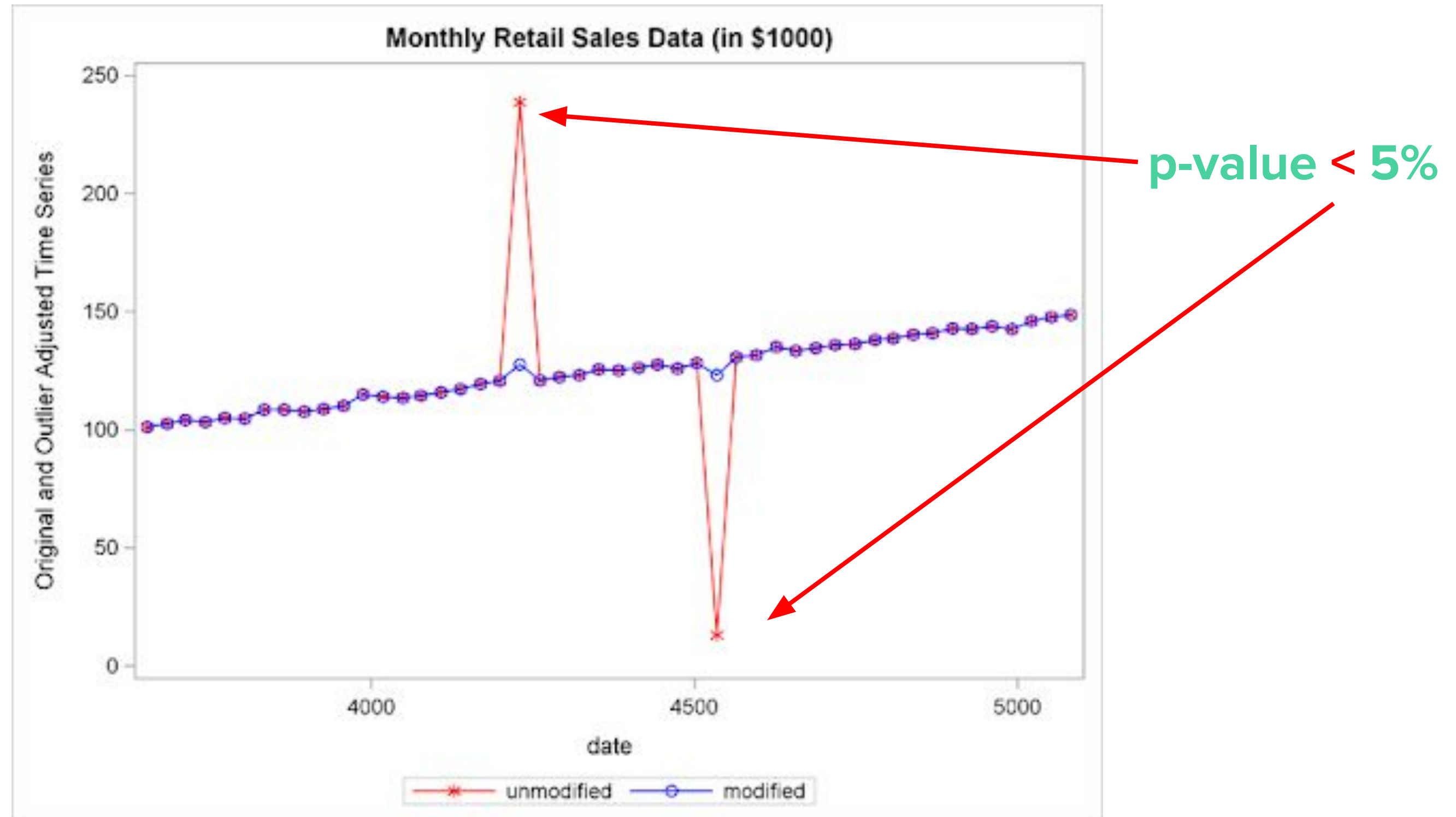


p-value ?? 5%





# p-value спасает, при работе с временными рядами



# Проверка гипотез и критерии

**Статистический критерий** - это решающее правило, обеспечивающее надежное поведение, то есть принятие истинной и отклонение ложной гипотезы с высокой вероятностью. (Суходольский Г.В)

Статистические критерии обозначают также метод расчета определенного числа и само это число.

# Проверка гипотез и критерии (визуально)

Если наблюдаемое значение критерия ( $K$ ) принадлежит критической области ( $K_{кр}$ ), заштрихованная область на рисунке), гипотезу отвергают, если не принадлежит — не отвергают.

Для краткости можно записать и так:

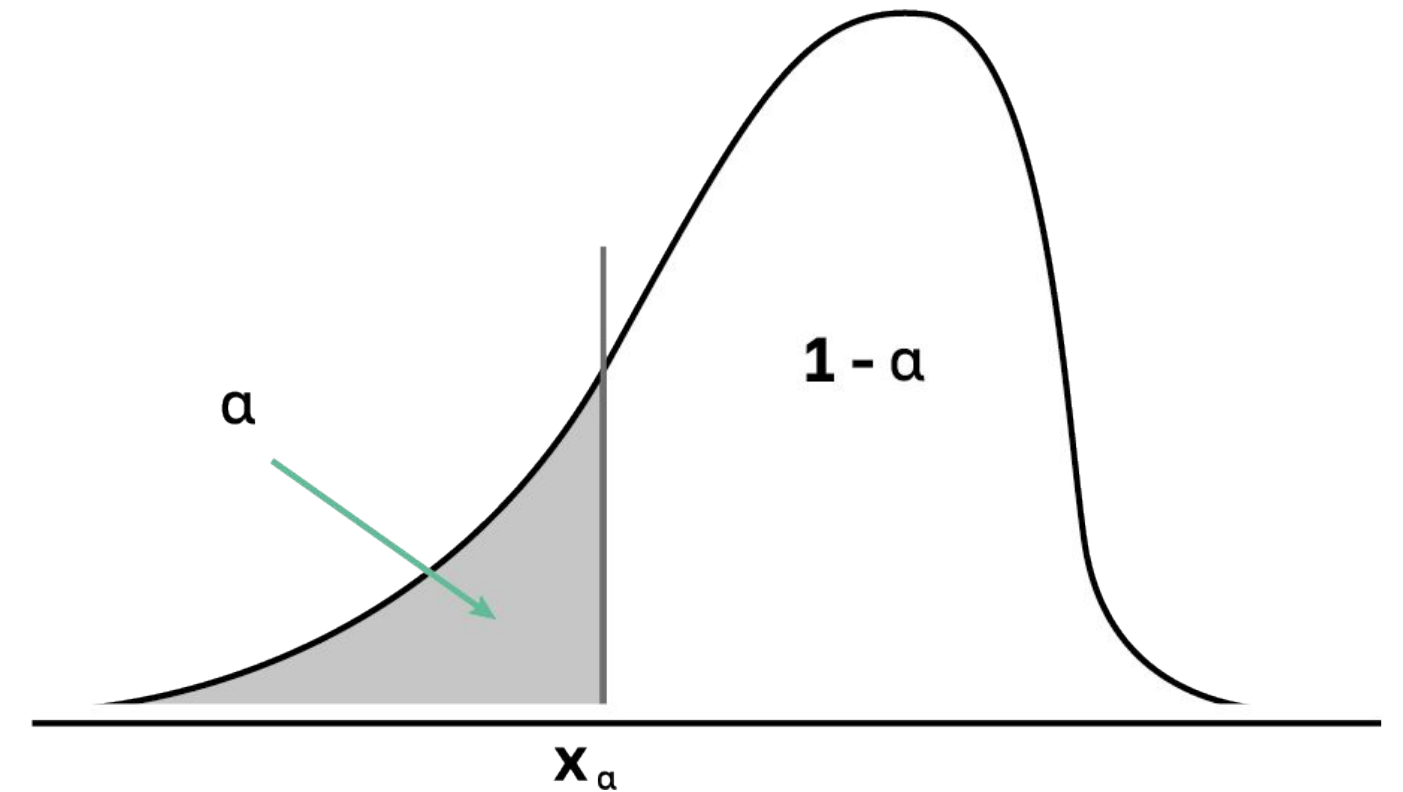
$|K| > K_{кр}$  — отклоняем  $H_0$

$|K| < K_{кр}$  — не отклоняем  $H_0$

После того как данные будут собраны, значения из выборки подставляют в формулу для вычисления статистики критерия (об этом чуть позже).

Эта величина количественно отражает аргументы в наборе данных против нулевой гипотезы.

Критерием  $K$  называем величину, характеризующую отличие двух выборок.  
 $\alpha$  — заданный исследователем уровень значимости.

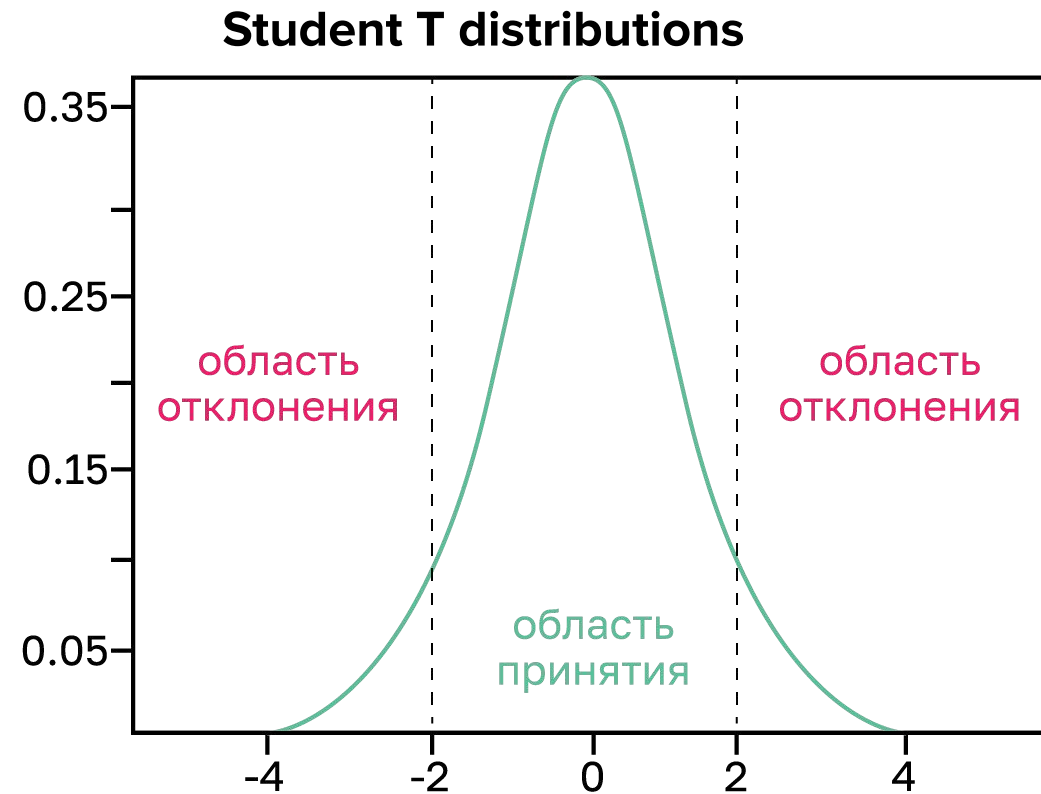


# Тесты проверки гипотез

## t-тест

С помощью t-теста (также называемого t-критерием Стьюдента) можно сравнить два средних значения. Этот метод анализа также показывает, насколько значительны различия. Другими словами, он позволяет узнать, могли ли эти различия возникнуть случайно.

- Требует нормального распределения.
- Легко интерпретируемый - смотрит на **разницу средних** двух выборок



$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Эта величина количественно отражает аргументы в наборе данных против нулевой гипотезы



# Проверка гипотез и критерии

Когда мы говорим, что достоверность различий определялась по критерию Стьюдента, то имеем в виду, что использовали метод t-test - для расчета определенного числа. (Поговорим про этот критерий ниже)

Когда мы говорим, далее, что  $t=12,676$ , то имеем в виду определенное число, рассчитанное по методу t-Критерия Стьюдента. Это число обозначается как **эмпирическое значение критерия**.

По **соотношению эмпирического и критического значений** критерия мы можем судить о том, подтверждается ли или опровергается нулевая гипотеза. Например, если  $|t_{\text{эмп}}| > |t_{\text{кр}}|$ ,  $H_0$  отвергается.

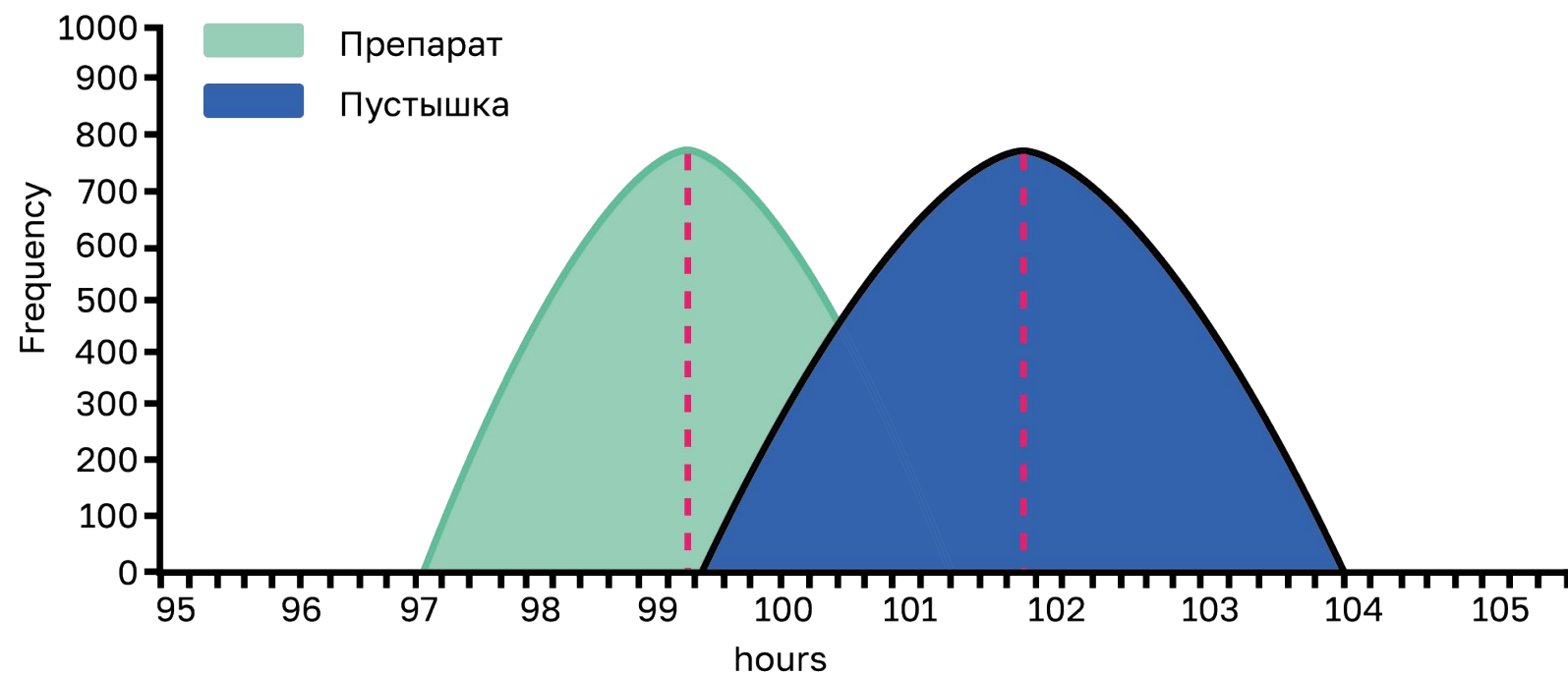
В большинстве случаев для того, чтобы мы признали различия значимыми, необходимо, чтобы эмпирическое значение критерия превышало критическое, хотя есть критерии (например, критерий Манна-Уитни или критерий знаков), в которых мы должны придерживаться противоположного правила.

Эти правила оговариваются в описании каждого из представленных в руководстве критериев.

# Стат. тесты для проверки гипотез

## t-тест

С помощью t-теста (также называемого t-критерием Стьюдента) можно сравнить два средних значения. Этот метод анализа также показывает, насколько значительны различия. Другими словами, он позволяет узнать, могли ли эти различия возникнуть случайно.



$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Эта величина количественно отражает аргументы в наборе данных против нулевой гипотезы



# Стат. тесты для проверки гипотез

## t-тест

Позже воспользуемся его реализацией на python в библиотеке **scipy**.

```
from scipy import stats #Подключаем библиотеку  
t, p = stats.ttest_ind(A, B) # Получаем t-value и p-value
```

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Эта величина количественно отражает аргументы в наборе данных против нулевой гипотезы







Какие будут  
выводы?

Мы провели исследование.  
Использовали t-test для двух  
выборок.  
Получили  $p\text{-value}=0.01$ .





Еще один критерий, позволяющий  
работать с категориальными  
значениями - Критерий Пирсона.



# Тесты проверки гипотез

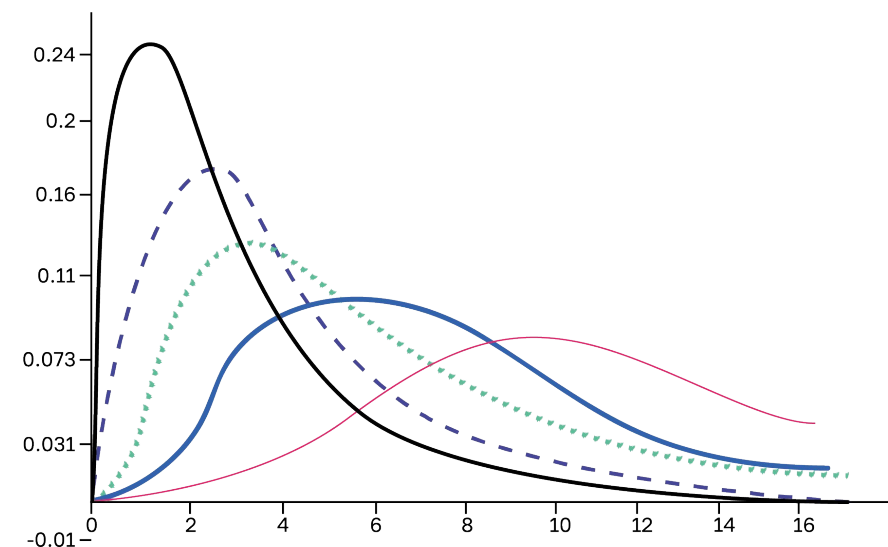
Если мы хотим сравнить распределения категориальных переменных, то обычно строят таблицы сопряжённости и используют критерий  $\chi^2$ .

$$\chi^2 = \sum \frac{(H - O)^2}{O},$$

На самом деле тестов больше, но мы пока остановимся на самых важных.

Если одно из ожидаемых значений меньше 5,  
то следует использовать тест Фишера:

107	74
93	45



# Тесты проверки гипотез

Например, вы хотите проверить нет ли дискриминации по половому признаку в сфере Data Science.

Вы узнали, что в какой-то компании после серии собеседований 107 мужчин взяли на работу, а отказали 93-м мужчинам. А среди женщин 74 взяли, а отказали 45-и.

Относится ли руководство компании предвзято к мужчинам или к женщинам?

М	Ж
107	74
93	45

+

—

$$\chi^2 = \sum \frac{(H - O)^2}{O},$$



# Тесты проверки гипотез

Например, вы хотите проверить нет ли дискриминации по половому признаку в сфере Data Science.

Вы узнали, что в какой-то компании после серии собеседований 107 мужчин взяли на работу, а отказали 93-м мужчинам. А среди женщин 74 взяли, а отказали 45-и.

Относится ли руководство компании предвзято к мужчинам или к женщинам?

p-value = 0.16 (стало быть, сексизма в этой компании выявить не удалось)

М	Ж
107	74
93	45

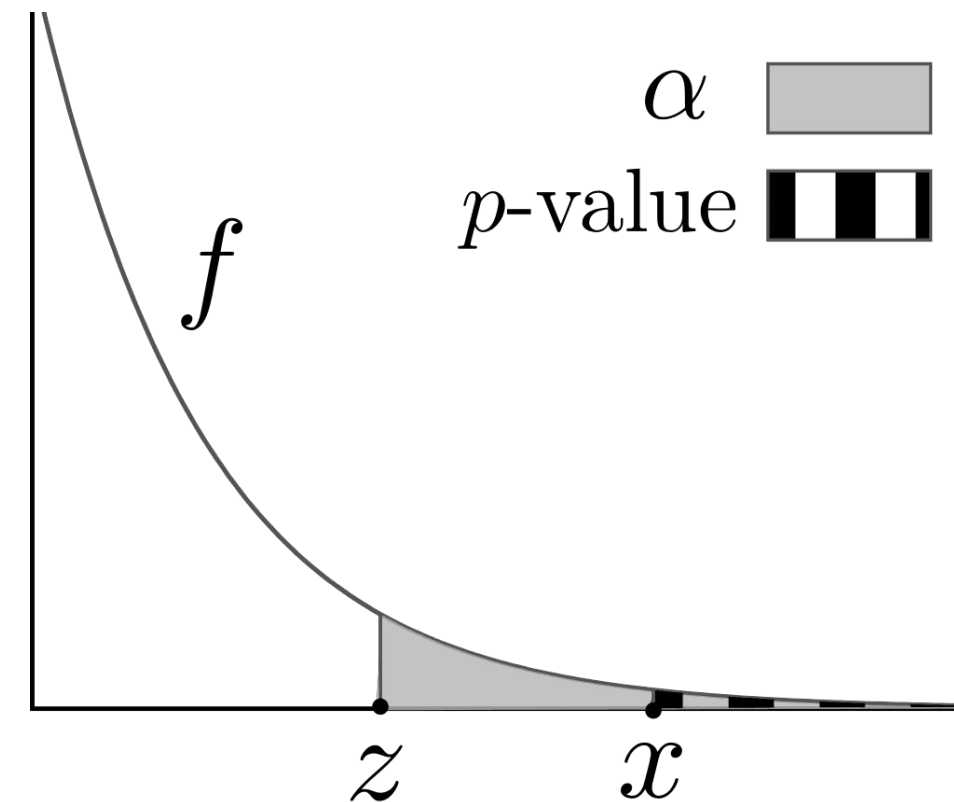
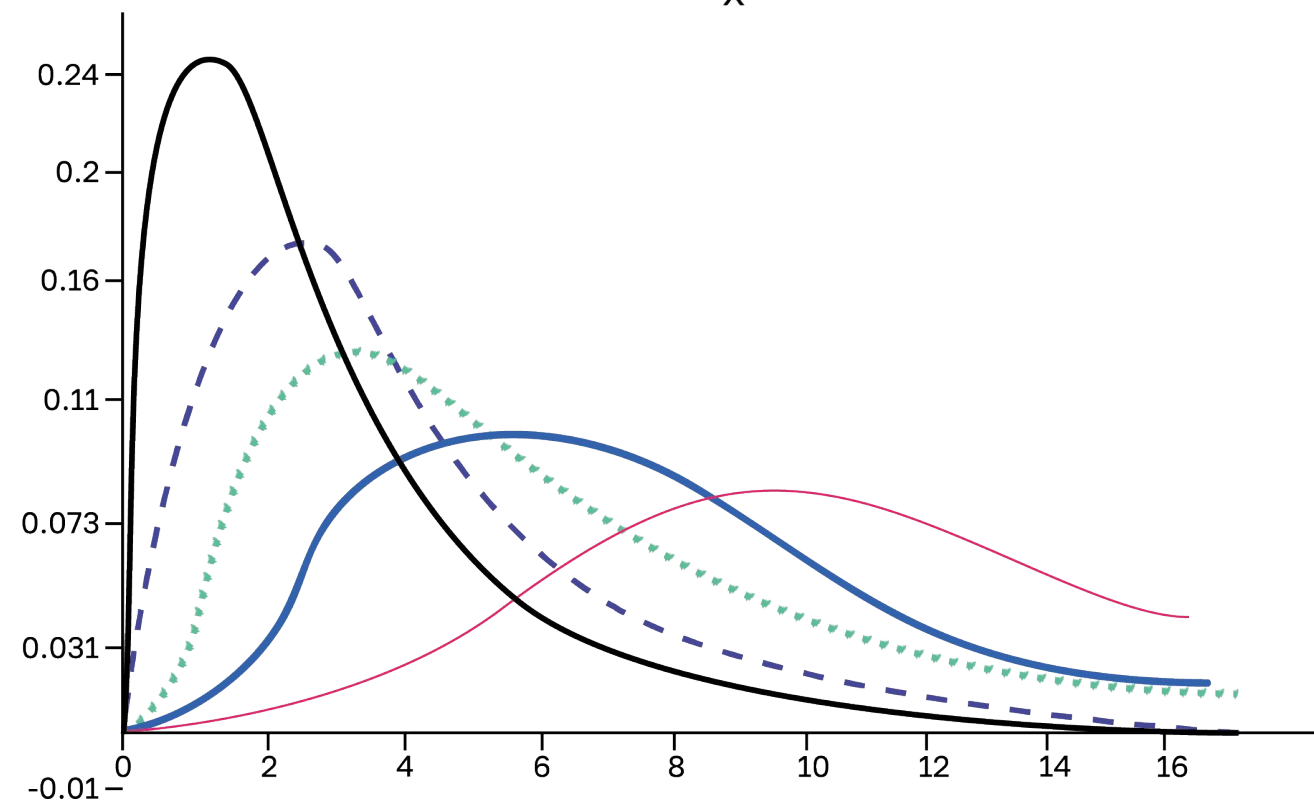
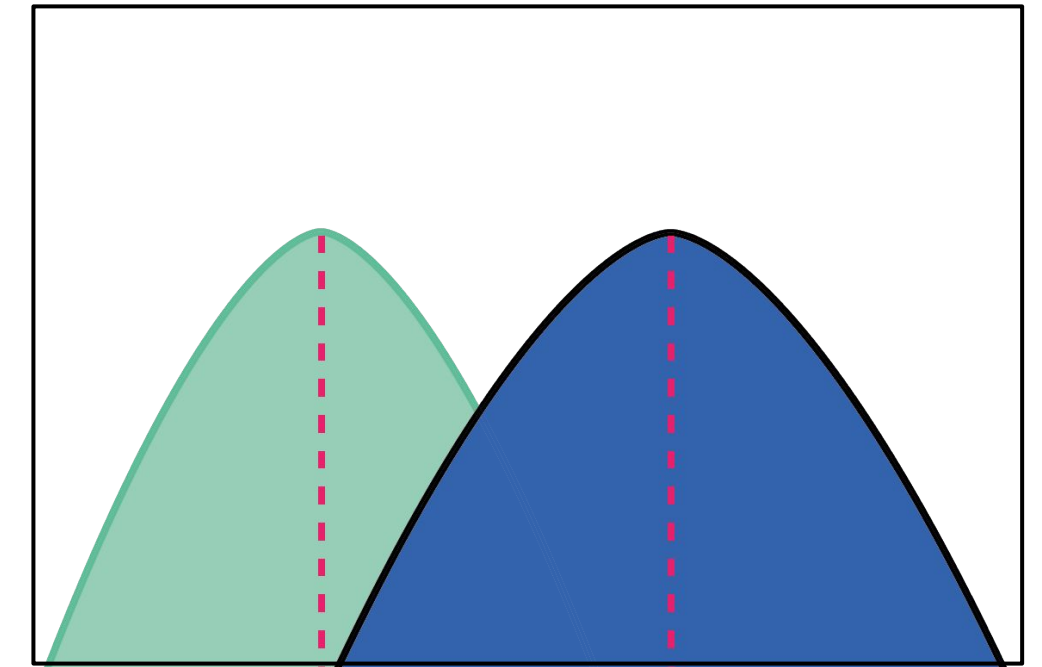
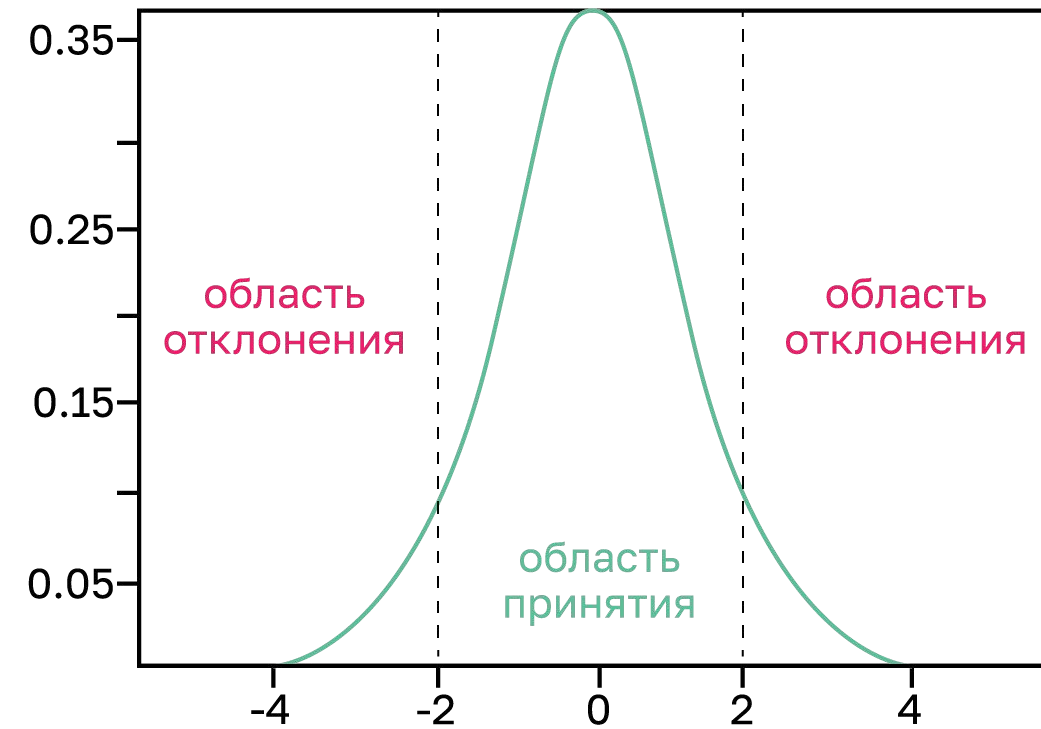
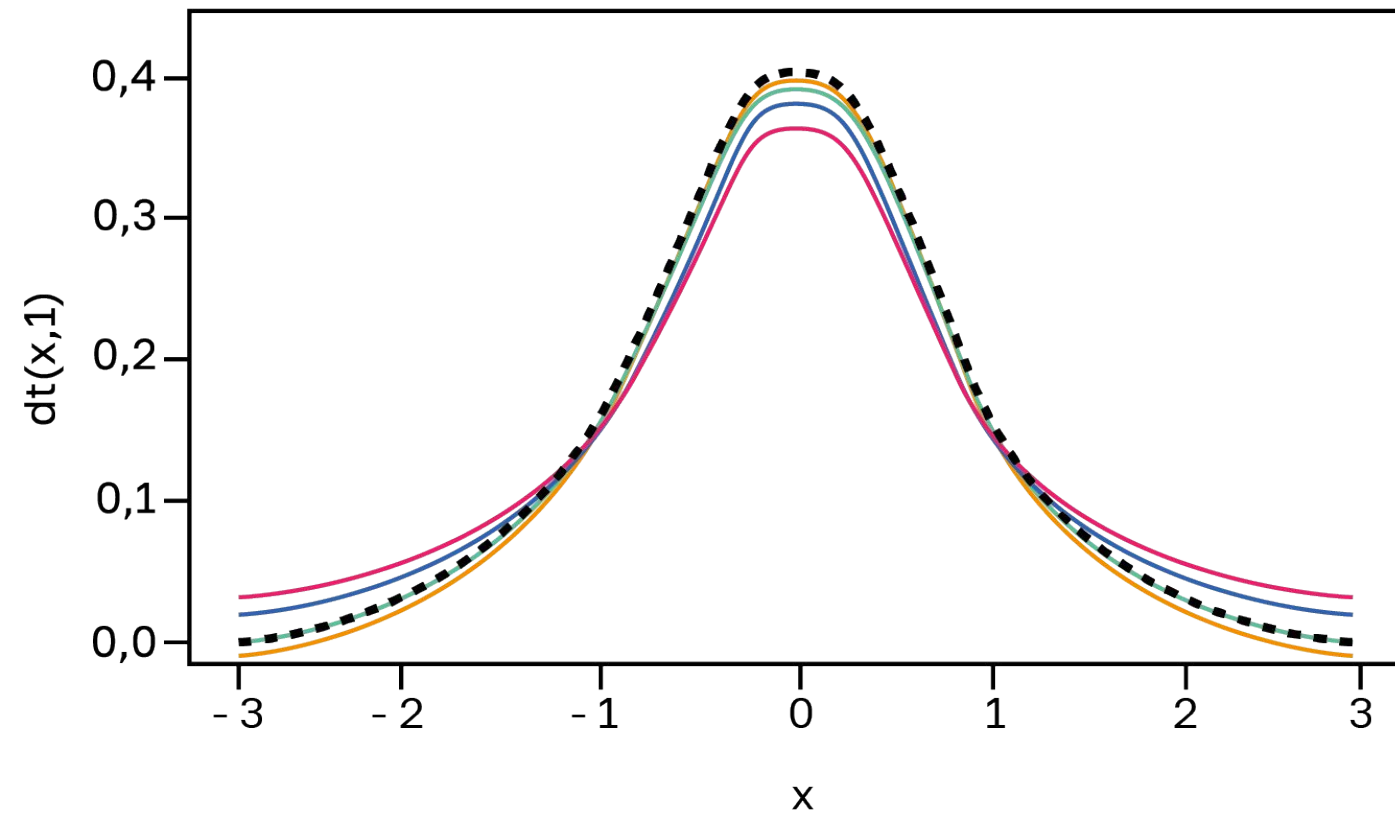
+

—

$$\chi^2 = \sum \frac{(H - O)^2}{O},$$



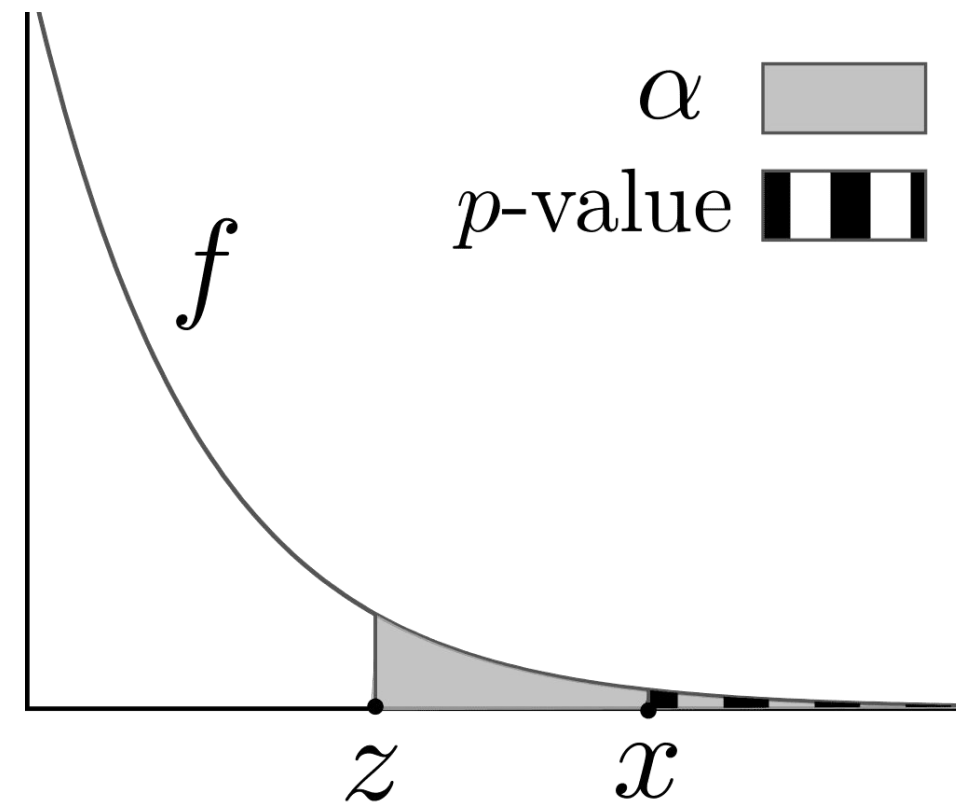
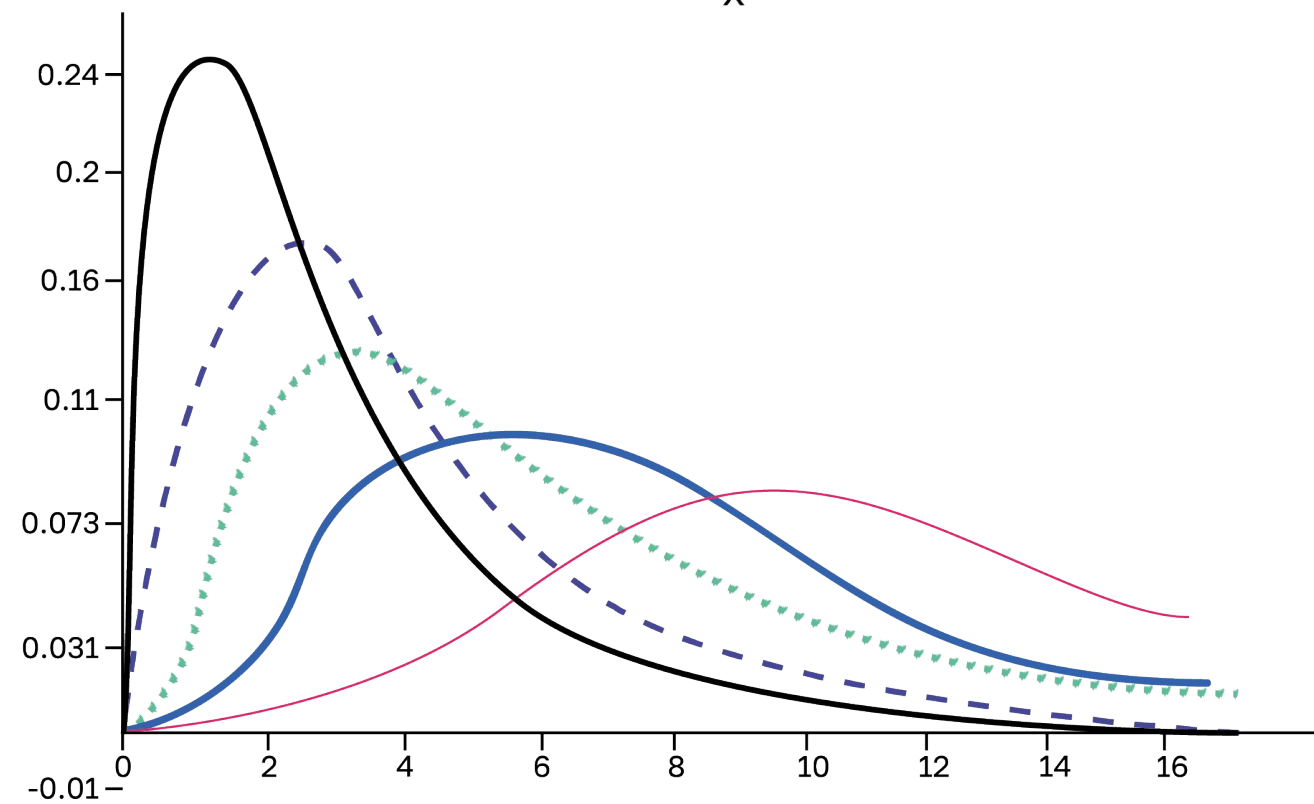
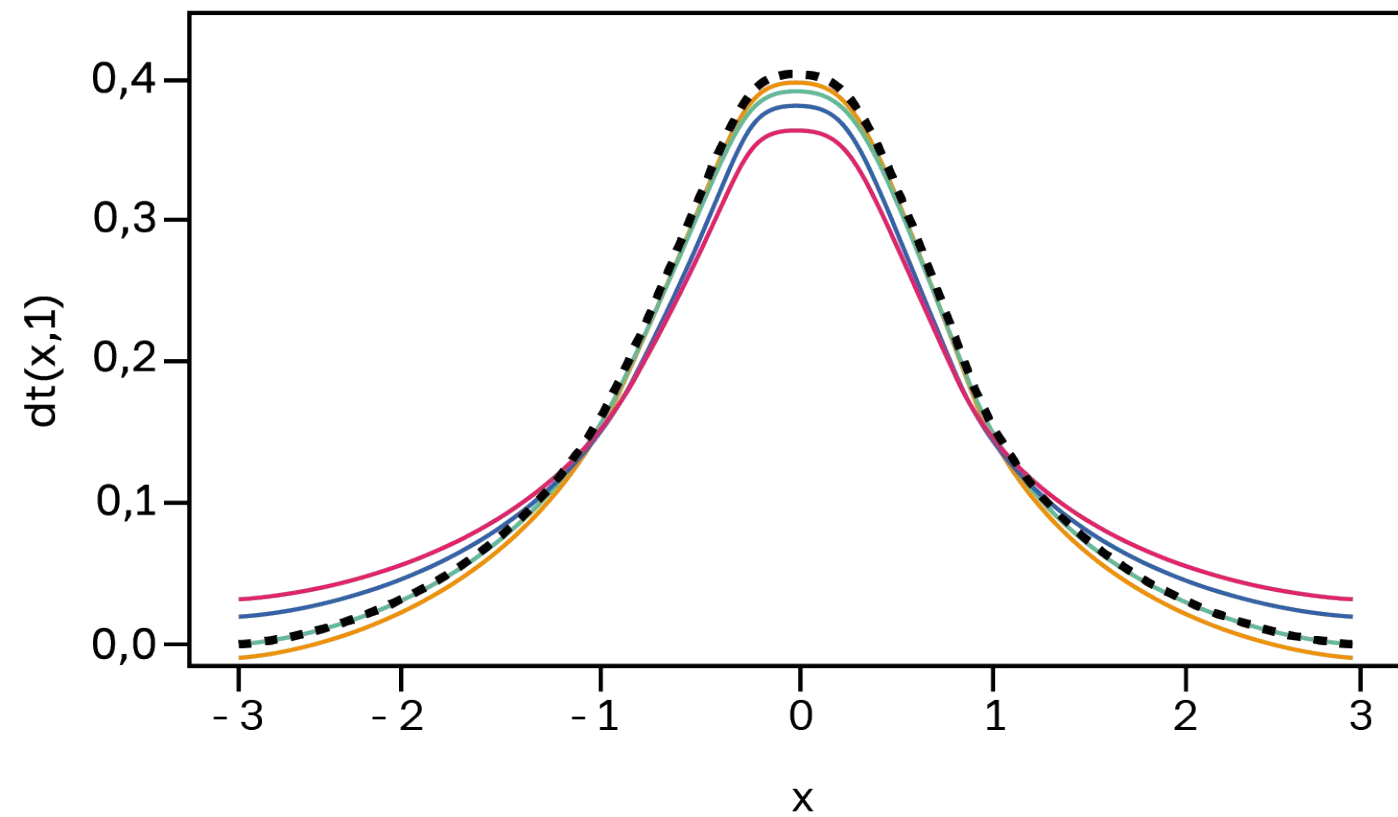
# Тесты проверки гипотез



Для каждой величины статистики  
есть своё эквивалентное значение  
для критической области



# Тесты проверки гипотез



Для каждой величины статистики  
есть своё эквивалентное значение  
для критической области



# Шаг пройден!

## Наши цели

→	Доверительный интервал	✓	✓	✓
→	Уровень значимости	✓		
→	p-value	✓		
→	$t$ -критерий Стьюдента	✓		



**А как же Python?  
Время практики!**





# Что еще можно почитать?

- Статистика и котики (Владимир Савельев)
- Доверительные интервалы: допущение о неточности оценок  
(<http://www.williamspublishing.com/PDF/978-5-8459-1367-8/part.pdf>)
- Наглядная математическая статистика (Михаил Лагутин)



Еще раз про доверительные интервалы и критерий.  
Полезные ссылки. Это не обязательно

Еще раз про гипотезы: <https://www.scribbr.com/statistics/hypothesis-testing/>

Виды гипотез:  
<https://machinelearningmastery.com/statistical-hypothesis-tests-in-python-cheat-sheet/>

Выбор критерия: <https://www.scribbr.com/statistics/statistical-tests/>

ДИ более строгим языком: <http://statistica.ru/theory/doveritelnye-intervaly/>

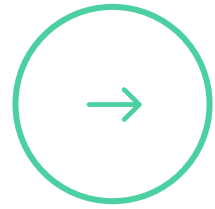
Выбор критерия 2: <https://lit-review.ru/biostatistika/vybor-statisticheskogo-kriteriya/>

Сравнение t-test'a и z-test'a

<https://www.analyticsvidhya.com/blog/2020/06/statistics-analytics-hypothesis-testing-z-test-t-test/>



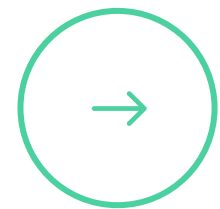
# Домашнее задание



Описание заданий находится  
в Jupyter Notebook.



# Дополнительно



Мой телеграмм-канал, где я делюсь полезными инструментами и подходами анализа данных



# Доверительные интервалы

Спасибо  
за внимание!



@Aleron75infskin



@Aleron

Александр Миленькин  
Биоинформатик в GERO

