

微分形式不变性以及 $dy, \Delta y, f'(x)$ 的区别和联系

cyrus28214

初学微积分的时候，看到课本上证明所谓的“一阶微分形式不变性”看得云里雾里，想着“ $dy = f'(x) dx$ 竟然也需要证？”。但当我仔细看了看微积分中导数 $f'(x)$ ，微分 dx 的定义，明晰了以前一直混淆的概念，发现这确实需要证明。不禁又一次感叹微积分的严谨（上一次是理解 $\varepsilon - \delta$ 语言时）。

导数

在现代的微积分里，是先有导数再有微分的。定义导数为

$$f'(x) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (1)$$

微分

若 $y = f(x)$ ，则对于自变量的增量 Δx ，因变量的增量为

$$\Delta y := f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x) \quad (2)$$

定义 y 的微分为

$$dy := f'(x)\Delta x \quad (3)$$

这便是课本上所谓的“ dy 是 Δy 的线性主部”。

一阶微分形式不变性

当 x 是自变量时，显然 $\Delta x = dx$ ，式 3 可以写成

$$dy = f'(x) dx \quad (4)$$

自然就有我们熟悉的

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \quad (5)$$

假如对一个可微函数积分，而不是一个自变量呢？当 $y = f(u), u = g(x)$ 时

$$dy = f'(g(x))g'(x) dx \quad (6)$$

又因为 $du = g'(x) dx$,

$$dy = f'(u) du \quad (7)$$

把式 4 和 式 7 结合起来，就是一阶微分形式不变性，也就是说无论是对于可微函数还是自变量，我们总是可以把微分写成这种形式。

高阶微分

对自变量做微分

对自变量 x 做微分时，无论多少阶都可以写成

$$d^n y = f^{(n)}(x) dx^n \quad (8)$$

证明：以二阶为例

$$d^2 y = d(dy) = d(f'(x) dx) \quad (9)$$

由定义

$$d(f'(x) dx) = (f'(x) dx)' dx \quad (10)$$

由于 $dx = \Delta x$ 只是一个**常数**，而非函数，有

$$d^2 y = (f'(x) dx)' dx = f''(x) dx^2 \quad (11)$$

□

也就是说我们熟悉的 $f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}$ 是正确的.

对可微函数做微分

然而，对可微函数做微分时，情况就不是这样了，若 $y = f(u), u = g(x)$ ，对于这种复合函数，可以采用最简单粗暴的方法，全部用 x 表示

$$\begin{aligned} d^2 y &= d(dy) = d(f'(g(x))g'(x) dx) \\ &= (f'(g(x))g'(x) dx)' dx \\ &= f''(g(x))(g'(x))^2 dx^2 + f'(g(x))g''(x) dx^2 \end{aligned} \quad (12)$$

由式 8，有

$$g'(x) dx = du \quad (13)$$

$$g''(x) dx^2 = d^2 u \quad (14)$$

代入式 12 有

$$\begin{aligned} d^2 y &= f''(g(x))\underline{(g'(x) dx)^2} + f'(g(x))\underline{g''(x) dx^2} \\ &= f''(g(x)) du^2 + f'(u) d^2 u \end{aligned} \quad (15)$$

也就是说高阶微分并不具有形式不变性，多出了一项 $f'(u)d^2 u$.

多元函数

另外，多元函数也具有一阶微分形式不变性，即

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \quad (16)$$

当 $z = f(u, v)$, f 具有连续偏导数, u, v 是自变量时, 式 16 也成立.

当 $z = f(u, v)$, $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$, f, φ, ψ 都具有连续偏导数时, 式 16 成立.

证明略.