1、前置知识：子集与真子集

在开始之前，我们先定义两个集合 A 和 B 和两个条件 $p: x \subseteq A$ 和 $q: x \subseteq B$。这两个条件并不会让下面的解释变得更通俗易懂，但是出题人似乎很喜欢考。

当集合 A 中的东西，B 中也有，B 中的东西 A 中也有，那么 $A = B$。此时 p 是 q 的充分且必要条件（充要条件）。

当集合 A 中的东西，B 中也有，那么 $A \subseteq B$。此时 p 是 q 的充分条件。一个特例是 $A = \varnothing$，此时条件依然成立。空集是任何集合的子集。

当集合 A 中的东西，B 中也有，但 B 中至少有一个东西 A 是没有的，那么 $A \subsetneqq B$。此时 p 是 q 的充分但不必要条件。同样，一个特例是 $A = \varnothing, B \neq \varnothing$，此时条件依然成立。空集是任何非空集合的真子集。 在考场上，当出题人说 p 是 q 的充分不必要条件时，请及时反应过来，他是在说 $A \subsetneqq B$。

2、认真分析每个集合中的元素是否可以在另一个集合中出现

例题：$A = \{x | x = 5k + 3, k \in Z\}, B = \{x | x = 5k - 2, k \in Z\}, C = \{x | x = 10k + 3, k \in Z\}$，则以下选项中哪个是对的？请注意此题多选。

A. $A = B$

B. $A \subsetneqq B$

C. $B \subsetneqq A$

D. $A = C$

E. $A \subsetneqq C$

F. $C \subsetneqq A$

正确答案是 AF。可以发现题中的 k 并没有限制正负性，我们可以发现 $5k - 2 = 5(k - 1) + 3$，因此无论 A 中的元素是什么，我们都有办法在 B 中将其表示出来。同样，B 中的所有元素，都可以在 A 中表示出来。所以极其反直觉的结论就是，$A = B$，A 选项正确。

再看看 A 和 C 的关系。可以发现 $10k + 3 = 5 \times 2k + 3$，但是 $2k$ 必须是一个偶数而 k 可以是奇数。因此，C 中的元素一定在 A 出现，A 却不是所有元素都在 C 中出现。所以，F 选项正确。

好，再上点难度。若集合 $A = \{x | x = \frac{1}{9}(2k + 1), k \in Z\}, B = \{x | x = \frac{4}{9}k \pm \frac{1}{9}, k \in Z\}$，则 A 与 B 之间的关系是？

请读者认真思考一会。

可以发现，$\frac{1}{9}(2k + 1) = \frac{2}{9}k + \frac{1}{9}$。当 k 取奇数时，$\frac{2}{9}k + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}(k + 1) \div 2 - \frac{1}{9}$，而 $(k + 1) \div 2$ 当然一定是个正整数，符合集合 B 的要求。当 k 取偶数时就更简单了，$\frac{2}{9}k + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}k \div 2 + \frac{1}{9}$，同样可以在集合 B 中表示出来。

而如果考虑 B 集合里的所有元素是否能在 A 里表示出来？答案是当然可以。$\frac{4}{9}k+\frac{1}{9}=\frac{2}{9}\times 2k+\frac{1}{9}$，而 $\frac{4}{9}k-\frac{1}{9}=\frac{2}{9}\times(2k-1)+\frac{1}{9}$。

综上所述，$A=B$。

对于此类题型，可以尝试将集合 A 的定义式化成与集合 B 的定义式相似的式子，再反过来将集合 B 的定义式化成与集合 A 的定义式相似的式子，再随便举几个例子证明自己的推断。

3、充分条件？必要条件？充要条件？

先来一道题引入。

已知 p 是 r 的充分不必要条件，q 是 r 的充分条件，s 是 r 的必要条件，q 是 s 的必要条件，则正确的选项是？请注意本题多选。

A. s 是 q 的充要条件

B. p 是 q 的充分不必要条件

C. r 是 q 的必要不充分条件

D. r 是 s 的充分不必要条件

对于这道题，我们可以像这样在草稿纸上画张图。如果 a 是 b 的充分条件，那么就从 a 到 b 画一条有向边。显然，如果 b 是 a 的必要条件，那么 a 就是 b 的充分条件，换个说法而已。

```
flowchart LR
    p([p])
    r([r])
    s([s])
    q([q])
    p-->r
    q-->r
    r-->s
    s-->q
```

接下来，判断每个选项。在上面那张图中，如果可以从 a 出发到达 b，那么 a 就是 b 的充分条件，否则不是。神奇吧？

因此，根据这幅图，我们判断出 AB 是正确答案。根据图片，r、s、q 互为充要条件，因此 A 正确，CD 错误。从 p 可以走到 q，但是从 q 不能走到 p，因此 B 正确。

~~论信息学知识“有向图的连通性”在文化课的妙用。~~

在生物学中也可以使用信息学的知识“有向无环图的动态规划”数生物链的数量，在这里按下不表。

4、容斥原理

某个班有很多人。这个班 $\frac{3}{8}$ 的人喜欢语文，这个班喜欢数学的人比喜欢语文的人多 3 人，同时喜欢两门科目的人比同时不喜欢两门科目的人少 7 人。请问，此班有多少人？

对于这道题，应使用容斥原理分析，再用方程求解。设全班 x 人，同时喜欢两门科目的人有 a 人，同时不喜欢两门科目的人有 b 人。由此，我们可以列出方程，$\frac{3}{8}x+\frac{3}{8}x+3-a+b=x$。

这时我们发现这是一个三元一次方程，不会解。但是吧，注意题目有一句“同时喜欢两门科目的人比同时不喜欢两门科目的人少 7 人”，这就是说 $b-a=7$。将这一条代入原方程，解得 $x=40$。~~自己吐槽自己：对于信竞生来说，才 40 个人也好意思说多？~~

验证一下，这意味着 12 人只喜欢语文，15 人只喜欢数学，3 人既喜欢语文又喜欢数学，10 人都不喜欢。

5、当集合的内容为不等式解集时，集合间的关系

5-1、集合互斥

当 $A=\{x|1<x<3\},B=\{x|2m<x<1-m\}$ 时，若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 m 的取值范围。

可以发现集合 A 已经被锁死了，不会变的。并且集合 A 并不是空集。因此可以分几种情况。

情况 1：B 为空集。换句话说，B 里面的那个不等式无解。显然，当 $2m\geq 1-m$ 时，这个不等式无解。即 $m\geq\frac{1}{3}$。

请一定要注意并思考 $2m\geq 1-m$ 中的那个不等号能不能取等号。 具体来说，可以发现集合 B 的数 x 的范围是 $2m<x<1-m$。如果这两个不等号有一个是不取等号的，那么可以 $2m\geq 1-m$。否则，当 $2m\leq x\leq 1-m$ 时，只有当 $2m>1-m$ 时才无解，因为当 $2m=1-m$ 时，x 可以取 $2m$，不等式仍然有解，即使是唯一解。

情况 2：B 集合中的最大值比 A 集合中的最小值还要小。此时 $1-m\leq 1$ ，即 $m\geq 0$。再次强调，注意能不能取等号。判断方法和上方大同小异。也可以尝试取一下等号，再判断 A 和 B 是否有交集，哪怕只有一个数同时出现也不行。

情况 3：B 集合中的最小值比 A 集合中的最大值还要大。此时 $2m\geq 3$，也就是 $m\geq\frac{3}{2}$。虽然说这个时候 B 集合都是空集了。

综上所述，m 的取值范围为 $m\geq 0$。

在做此类问题时，请善用数轴。如果你对你的脑子很有自信，可以在脑海里想一个数轴。如果你对你的脑子没啥自信，就拿出草稿纸。

5-2、集合互相包含

已知集合 $A=\{x|-2\leq x\leq 5\},B=\{x|m+1\leq x\leq 2m-1\}$，设 $p:x\in A;q:x\in B$，若 p 是 q 的必要不充分条件，求实数 m 的范围。

首先，我们先要求出 A 和 B 的关系。如果不会，把前面的内容再认真读一遍吧。

> 在考场上，当出题人说 p 是 q 的充分不必要条件时，请及时反应过来，他是在说 $A\subsetneqq B$。

> 显然，如果 b 是 a 的必要条件，那么 a 就是 b 的充分条件，换个说法而已。

因此，我们可以得出 $B \subsetneqq A$ 的结论。

首先，空集是任何非空集合的真子集。

什么时候 B 为空集？是 $m+1>2m-1$ 时，还是 $m+1 \geq 2m-1$ 时？

当然是前者，因为当 $m+1=x=2m-1$ 时集合 B 仍有元素。

然后，当 $-2 \leq m+1 \leq 2m-1 \leq 5$ 时，集合 B 是 A 的子集。请注意，当 $-2=m+1<2m-1=5$ 时，$B \subsetneqq A$ 不成立！ 虽然本题中不会出现这种情况，但请务必提防出题人的套路，分清“子集”和“真子集”的区别。

因此再分 2 种情况，第一种是 $-2 \leq m+1$ 且 $2m-1<5$，第二种是 $-2<m+1$ 且 $2m-1 \leq 5$。

最终答案是 $m<3$。

5-3、集合有交集但不要求互相包含

若 $B=\{x|2 \leq x \leq 6-m\}, C=\{x|m-1 \leq x \leq 1+2m\}$，若 $B \cap C \neq \varnothing$，求 m 的取值范围。

如果两个集合的并集不为空集，那么要求：

1. 两个集合都不为空集，也就是说 $\begin{cases} 2 \leq 6-m, \\ m-1 \leq 1+2m, \end{cases}$，不难解得 $-2 \leq m \leq 4$；
2. 其中一个集合的左端点在另一个集合的区域内，也就是说 $m-1 \leq 2 \leq 1+2m$ 或者 $2 \leq m-1 \leq 6-m$。不难解得 $\frac{1}{2} \leq m \leq 3$ 或者 $3 \leq m \leq \frac{7}{2}$。

综上，$\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{7}{2}$。