

cyrxdzj的文化课学习笔记 数学008 废话满篇：浅谈怎么运用灵活的思维做一道数学题

创建	内容更新	导出
2024-03-08 22:41:12	2024-03-17 11:05:00	2024-03-17 11:38:53

原文链接: <https://blog.cyrxdzj.eu.org/2024-03-08-CyrxNote-Math-008/>
作者: cyrxdzj
本文件仅为静态文件。如有条件, 建议访问原文链接。

这篇文章将讲解, 我在做一道数学题时运用的思维。
可能有点难懂, 不过后文将附上例子详细说明。
可能废话很多, 毕竟这种文章我也不太会怎么写……
可能没什么作用, 额, 毕竟思维这种东西不太会教, 我自己数学也不敢说很好……

1、从条件思考

题干大概分两种, “条件”和“要求”。本段将讲讲“条件”。

1-1、读题

拿到一道数学题之后, 可以看一下, 这些题有什么条件。
不要试图盯着一整道题看。你不可能一口吃下一大碗饭吧? 所以, 一句一句, 以标点符号为分割地读吧。
给与题目无关的干扰条件是小学才做的事情, 我上初中之后就没见过了。
对于每一个条件, 有些条件很简单, 就只是为了其它条件服务的。所以, 第一次读题, 如果十秒钟之内不知道一个条件是什么作用的, 就跳过去吧, 或许它只是为了后面的条件服务的。

1-2、寻找破题点

所谓破题点, 指的是这道题应该从哪里开始。
看起来越复杂的条件, 越有可能成为破题点。
例如, 如果某个条件只是“某个变量=某个数”, “某条边的长度=? ? ?”之类的, 那么它大概只是为后面的条件服务的; 而如果某个条件在定义的时候还包含其它条件, 例如, $a = ?, b = ?, f(x) = a \times b + x$ 中 $f(x)$ 包含 a 和 b , 那么这个条件就很有可能是破题点。
如果一个条件不被任何其它条件所包含, 那么它就很有可能是破题点。那么我们可以一层一层地找这个条件包含了哪些条件, 一层一层地分析每个条件, 就能拼凑出破题点条件的全貌。
我们也可以根据已知的条件, 想想有哪些等式或不等式可以套用在这个条件上。例如, 如果题目给出了三角形的部分的边或角的数据, 我们可以使用正/余弦定理, 求出剩余的数据。

1-3、分析条件

当找到觉得有作用的条件时，我们可以想一下，这个条件意味着什么？根据这个条件，可以推出怎样的条件以供继续解题？有什么知识点是符合这个条件的？

条件的转化一定要有依据。一个依据也是要符合要求才能用的。如果看到一个条件差一点就可以根据一个依据转化，我们可以试试把这个条件通过一些变换，先让这个条件符合要求，再使用这个依据。

这里的依据，可以来自课本，也可以来自平常学习中积累的一些 Trick。

条件的转化最好转化为充分必要条件，使得这两个条件可以互相双向转化。如果不能，需要注意分类讨论。

一般情况下，足够多的“必要非充分条件”合并起来，也可以成为“充分必要条件”。对此有个俗称叫“细心”，“注意到了题目的坑点”。

而足够多的“充分非必要条件”合并起来，也可以成为“充分必要条件”。这就是所谓的“分类讨论”。

例如，我们看到“两个非零向量， $\vec{a} + t\vec{b}$ 与 $\vec{a} - t\vec{b}$ 互相垂直，向量 \vec{a} 、 \vec{b} 不共线且长度已给出”，我们就应该转化为， $(\vec{a} + t\vec{b}) \cdot (\vec{a} - t\vec{b}) = 0$ ，然后，由于向量与自己的数量积等于向量长度的平方，我们就可以将其转化为一个一元二次方程，进而求解问题。反之亦然。

1-4、耐心点，能做什么做什么，一步一步慢慢来

看看一道式子，能做什么就做什么吧，搞不好会与其它条件搭配，成为一个很厉害的条件。如果不确定的话，还是在草稿纸上多算算吧。

这里的“能做什么”，其实有时候你认真看题就会发现，也没啥可做……

条件转换在一道题里通常很多。没有关系，别着急。

1-5、别忘记所有条件

在做题时别忘了之前所有的条件。比如说，有一次，我在作业里写“当 $m > 0$ 时怎么怎么样，当 $m = 0$ 时怎么怎么样，当 $m < 0$ 时怎么怎么样”。结果写完了，抬头看看题，“今有正实数 m ……”。我都被气死了……

再比如，在某次周测上，我求出了 $t \in (-2, +\infty)$ 就兴冲冲地结束了，却忘了题目中的“今有正实数 t ”。

2、从要求思考

接着看看“要求”。

所谓“要求”，其实就是题目要求的東西，或者题目要证明的式子。

我们可以看看，要先算出/证明出这个要求，需要先算出/证明出哪些条件，这又要算出/证明出哪些条件。如果“从条件思考”和“从要求思考”能汇合，这道题就解出来了。

例如，题目问“函数 $f(x)$ 的取值范围”，一般情况下，我们首先得把解析式算出来吧？

然后，我们可以找到题中 $f(x) = \dots$ 的内容，看看里面还有没有没算出来的东西，再想想怎么化简。

其实从某种程度上来讲，“要求”也是一种“条件”。

3、关于未知数

3-1、带着未知数计算

有些时候，题目中的一些式子是需要用未知数表示的。但未知数也是数，也可以进行四则运算。所以，结合上文的“1-2、分析条件”，列出算式和方程后，便可进行求解。

3-2、使用少量未知数表示出很多东西

这个方法的典型运用是几何中动点（或者动线、动角）问题。我们可以将“时间 t ”作为“少量变量”，然后将与解題有关的点的坐标、线段长度等用这个 t 表示。接着，根据题目要求，可以列个方程，完成求解。

尽可能使未知数少，如果可以的话最好只有一个。这样在列方程的时候，由于未知数很少，更方便解出来。

4、好好利用知识点

看到一些条件之后，我们可以想想，书上的哪些公式或知识点，可以套用这些条件？

有些时候，要学会反着使用公式。有些公式，可以做到“知道其中的几个数据，就可以求出另外剩余的数据。这个剩余的数据是谁都没关系”。

就好比，我们小学时就学会了 $s = x_1 + x_2$ 的公式（就是加法），其中 s 代表 x_1 和 x_2 的和。我们只要知道了 s, x_1, x_2 中的任意两个，就可以求出另外一个了。

把不知道的数据一个一个求出来，就可以算出这道题了。

5、例子

让我们来看一道题。

今有定义域为 R 的奇函数 $f(x)$ ，且 $f(3) = 3$ 。对于所有的 $x_1, x_2 \in [0, +\infty), x_1 \neq x_2$ ，都有 $\frac{x_1 f(x_1) - x_2 f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 。试求不等式 $(x+2)f(x+2) < 9$ 的解。

首先，我们看到这个 $\frac{x_1 f(x_1) - x_2 f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 。这并不意味着 $f(x)$ 单调递增，因为题目可没说 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 。可见，依据也是要符合要求才能用的。

但是，我们注意到这里的函数，格式都很统一，都是 $x \times f(x)$ 的形式。那么，我们便可以重构函数，设 $g(x) = x \times f(x)$ 。接着，重写整个题目中的 $f(x)$ ，变成 $g(3) = 3 \times f(3) = 3 \times 3 = 9$ ，对于所有的 $x_1, x_2 \in [0, +\infty), x_1 \neq x_2$ ，都有 $\frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 。试求不等式 $g(x+2) < 9$ 的解。可见，转化条件可以依靠平常积累的 Trick，因为这个做法课本上没讲……

接着，回顾所有条件。我们终于得到了一个在 $[0, +\infty)$ 单调递增的函数 $g(x)$ 。但是， $g(x)$ 只是在 $[0, +\infty)$ 单调递增啊，区间 $(-\infty, 0]$ 可没说。

我们想想，这么个将一个区间的条件推广到另一个区间的做法（还是 y 轴左右两边的区间），一般会用什么知识点？对，奇偶函数。数学考试争分夺秒，熟练掌握各种知识点，才能在考场上快速想出来，并使用。

但是 $g(x)$ 是奇函数还是偶函数呢？我们再想想，证明一个函数的奇偶性，一般用什么方法？对，计算 $g(-x) = (-x) \times f(-x) = x \times f(x) = g(x)$ ，所以函数 $g(x)$ 是偶函数。等等， $f(-x) = -f(x)$ 怎么来的？因为题目的第一句话就是 $f(x)$ 是奇函数啊。可见，我们可以根据式子的形式，推测出需要知识点，并回顾之前所有条件，找出条件证明。

好，我们集齐了 $g(-3) = g(3) = 9, g(x+2) < 9$ ，因此 $g(x+2) < g(3), -3 < x+2 < 3$ 。等等，为什么 $-3 < x+2$ ？可以画个标准的二次函数看看，设 $f(x) = x, g(x) = x \times f(x) = x^2$ ，这个函数符合题目中所有条件。然后，再画一条 $y = 9$ 的横线，我们需要让函数值在这条横线之下。

最后，根据 $-3 < x + 2 < 3$ 可以算出 $x \in (-5, 1)$ 。搞定。

5、后记

我有一位初中同学，上了高中之后，在学习上我还会和她有一些交流。

她的文科还算可以，语文和英语和我差不多，但数学的成绩，实在是太差了……

她偶尔会找我请教一下数学。在这个过程中，我渐渐地发现了很多疑点。看起来，书上的知识点，她是会的。我自认为高一上学期最难背的“和差角公式”，她也能背下来。

我也问过她，课上的例题会做吗？她给出的答复是，“会。课上的例题比较简单”。

虽然我倒是觉得，她会做就是简单，不会就是难，而不是指知识点本身的难易程度。

同时，在给她讲解一些比较难的题目时，我也注意到，她听得懂我的讲解，看得懂答案。但刚刚给出这道题时，她并不会做。

这不禁引起了我的思考。

数学考试不考背诵，而考察对知识点的灵活应用。在着重于知识点本身的同时，如果不会用知识点，那又能怎样呢？

因此，我写下了这篇与之前的 7 篇文章风格都不同的文章，不谈知识点，只谈如何使用知识点。

希望这篇文章能对读者有所帮助。