

# Dynamiske Systemer



G4-104  
Aalborg Universitet  
Matematisk institut

Navne og underskrifter fra gruppemedlemmerne i gruppe G4-104:

Josefine Holm

Marianne Taul

*Underskrift*

---

*Underskrift*

---

Peter Sibbern Frederiksen

Rasmus Vestergaard Jensen

*Underskrift*

---

*Underskrift*

---

Søren Skov

Thomas Rune Hansen

*Underskrift*

---

*Underskrift*

---



**AALBORG UNIVERSITET**  
STUDENTERRAPPORT

**Institut for Matematiske Fag**  
Matematik-Teknologi  
Frederik Bajers Vej 7G  
9220 Aalborg Ø  
www.math.aau.dk

**Titel:**  
Dynamiske Systemer

**Projektperiode:**  
Efterårssemesteret 2014

**Projektgruppe:**  
G4-104

**Deltagere:**  
Josefine Holm  
Marianne Taul  
Peter Sibbern Frederiksen  
Rasmus Vestergaard Jensen  
Søren Skov  
Thomas Rune Hansen

**Vejledere:**  
Rafael Wisniewski  
Arne Jensen

**Oplagstal:** 10

**Sidetal:** 77

**Afleveringsdato:**  
19. december 2014

**Abstract:**

The purpose of this project is to acquire an understanding of dynamical systems and analysis of these systems. The focus is on the system of a crane and predicting its behavior. Differential equations and their use in analyzing dynamical systems are described. This includes general solutions, understanding their graphical significance and linearization of non-linear systems. To model the dynamical systems of a pendulum, a crane and its motor, different mechanical modelling techniques are used. The models are then simulated and analyzed. Lastly an experiment is performed with a scale model of a crane. This is used to validate the crane model. It is concluded that it is possible to classify the behaviors of these systems. It is also found, that the model of a crane is accurate for a few seconds.

*Rapportens indhold er frit tilgængeligt, men offentliggørelse (med kildeangivelse) må kun ske efter aftale med forfatterne.*

# Forord

Denne rapport er udarbejdet på tredje semester på bacheloruddannelsen matematik-teknologi på Aalborg Universitet, hvor emnet er dynamiske systemer. Projektet har været under kyndig vejledning af Rafael Wisniewski og Arne Jensen. Desuden har vi fået assistance af ingeniørassistent Simon Jensen til laboratoriarbejdet med portalkranen og Nanjing Port Machinery Plant har bidraget med det anvendte billede af en containerkran.

## Læsevejledning

Kildehenvisninger er angivet efter forfatter på følgende vis: [Forfatternavn]. Forfatternavnet kan være efterfulgt af specifikke sidetal eller afsnit. Yderligere informationer omkring kilderne kan findes i litteraturlisten sidst i rapporten, hvor alle kilderne er samlet. Der vil være henvist til kilder, enten i starten af afsnit, hvis hele afsnittet er baseret på en kilde, eller hvor kilderne anvendes.

Afsnit, figurer, tabeller og ligninger er nummereret efter kapitel på følgende vis: 'Objekt kapitelnummer.tæller'. Der kan i kapitel 1 eksempelvis findes nummereringerne 1.1, 1.2 og så videre. I tilfældet med ligninger, vil nummereringen være omsluttet af parenteser, altså (1.1).

Bilag vil enten være i slutningen af rapporten, eller ligge elektronisk på AAUs projektbibliotek. Der refereres til bilag ved 'bilag A' og elektronisk bilag ved '*filnavn* bilag B'.

Punktum anvendes som decimaltalsseperator.

Der anvendes nogle engelske termer i rapporten, hvor den danske terminologi er mangelfuld.

Et endt bevis markeres med en højrecentreret firkant ( $\square$ ).

# Indhold

<b>Indledning</b>	<b>9</b>
<b>1 Differentialligninger</b>	<b>10</b>
1.1 Løsninger på lukket form . . . . .	10
1.1.1 Lineære førsteordens differentiaalligninger . . . . .	10
1.1.2 Lineære homogene andenordens differentiaalligninger . . . . .	11
1.2 Systemer af differentiaalligninger . . . . .	12
1.3 Faseplan . . . . .	12
1.4 Faseportrætter . . . . .	14
1.4.1 Reelle forskellige egenverdier . . . . .	14
1.4.2 Komplekse egenverdier . . . . .	16
1.4.3 Gentagne egenverdier . . . . .	18
1.4.4 Nulegenverdier . . . . .	20
1.5 Nulkliner . . . . .	21
1.6 Putzers Algoritme . . . . .	22
1.7 Jacobimatricen . . . . .	24
1.8 Linearisering . . . . .	25
1.9 Eksistens og Entydighed . . . . .	27
<b>2 Mekanisk Modellering</b>	<b>33</b>
2.1 Variationsregning . . . . .	33
2.2 Hamiltons princip . . . . .	34
2.3 Lagrange-d'Alemberts princip . . . . .	35
<b>3 Pendul</b>	<b>36</b>
3.1 Pendulets differentiaalligning . . . . .	36
3.2 Analyse af pendulet . . . . .	37
<b>4 Kranmotor</b>	<b>41</b>
4.1 Elektrisk model . . . . .	41
4.2 Mekanisk model . . . . .	42
4.3 Systemidentifikation . . . . .	43

<b>5</b>	<b>Modellering af kran</b>	<b>47</b>
5.1	Modellering . . . . .	47
5.1.1	Friktion . . . . .	51
5.2	Validering af model med simulering . . . . .	52
5.3	Analyse af systemet uden friktion . . . . .	53
5.3.1	Systemet $(\theta, \dot{\theta})$ . . . . .	54
5.3.2	Systemet $(\theta, \dot{\theta}, k_x, k_x)$ . . . . .	56
5.3.3	Faserum . . . . .	57
5.4	Analyse af systemet med friktion . . . . .	59
<b>6</b>	<b>Eksperiment</b>	<b>61</b>
6.1	Forsøgsopstilling . . . . .	61
6.2	Dataopsamling . . . . .	62
6.3	Parameterbestemmelse . . . . .	63
6.4	Verifikation . . . . .	65
<b>7</b>	<b>Konklusion</b>	<b>67</b>
<b>Bilag</b>		
<b>A</b>	<b>Ligevægtspunktsanalyse</b>	<b>72</b>
<b>B</b>	<b>Elektronisk</b>	<b>77</b>

# Figurer

1.1	Faseplan . . . . .	13
1.2	Faseportræt af saddle . . . . .	15
1.3	Faseportræt for sink og source . . . . .	16
1.4	Spiral sink og -source . . . . .	17
1.5	Faseportræt af center . . . . .	18
1.6	Gentagne egenverdier . . . . .	20
1.7	Nulegenverdier . . . . .	20
1.8	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$ . . . . .	21
1.9	Basisfelter . . . . .	22
1.10	Nulkliner . . . . .	26
1.11	Faseportræt med nulkliner. . . . .	26
3.1	Nulkliner for pendulet med basisfelternes retning. . . . .	38
3.2	Faseportræt af pendul. . . . .	39
4.1	Kredsløb af DC motor . . . . .	41
4.2	Model af DC motor . . . . .	43
4.3	Input: 5V, $\omega(0) = 0$ . . . . .	45
4.4	Input: 5V, $\omega(0) = 1, u_k = 2.3V$ . . . . .	46
5.1	Kran (designed by Nanjing Port Machinery Plant) . . . . .	48
5.2	Faseportræt af systemet (5.20) . . . . .	55
5.3	3D plot af kranen . . . . .	58
6.1	Målinger uden filter. . . . .	63
6.2	Målinger med 15-ordens filter. . . . .	65
6.3	Plot af målinger og model med de bestemte parametre. . . . .	66
A.1	Centerligevægtspunkt uden friktion . . . . .	72
A.2	Sinkligevægtspunkt med friktion . . . . .	73
A.3	Saddleligevægtspunkt uden friktion . . . . .	74
A.4	Saddleligevægtspunkt med friktion . . . . .	75
A.5	Numerisk ustabilitet af saddle . . . . .	76

# Tabeller

4.1	Parametre . . . . .	44
6.1	Længden $l$ . . . . .	62
6.2	Position $k_x$ . . . . .	62
6.3	Vinklen $\theta$ . . . . .	62
6.4	Kvantifiseringsniveauer for portalkranens målelige parametre.	62
6.5	Parameterestimation. . . . .	64



# Indledning

Denne rapport omhandler dynamiske systemer, herunder differentiaalligninger. Specifik er der valgt at se på systemet, som repræsenterer en containerkran.

Et dynamisk system er en, eller flere, kontinuerte funktioner, der beskriver en tilstand til tiden  $t$ . Det kan eksempelvis være et punkts bevægelse i et geometrisk rum. Et dynamisk system kan beskrives med differentiaalligninger. Hvis disse kan løses, kendes systemets tilstand til alle tider. I denne rapport beskrives tilfælde, hvor det dynamiske system ikke kan løses på lukket form, og hvor alternative analysemetoder anvendes, for at undersøge systemets opførsel.

I rapporten gennemgås udvalgte analyseværktøjer og eksempler på deres anvendelse. Desuden introduceres mekaniske modelleringsværktøjer. Dette leder op til hovedeksemplet, hvor der opstilles et dynamisk system for en containerkran, som analyseres. Rapporten afsluttes med et eksperiment, hvorefter det sammenlignes med den opstillede model.

Formålet med rapporten er, at få kendskab til konkrete dynamiske systemer og begreber indenfor analyse og lineær algebra, som er relevante for at analysere disse systemer. Derudover skal der udføres konkrete analyser af lineære og ikke-lineære dynamiske systemer. Dette skal også gøres under forudsætningen af den tekniske videnskab. Der skal anvendes værktøjer til simulering af de dynamiske systemer.

# 1 | Differentialligninger

Dette kapitel er en gennemgang af den nødvendige teori for differentialligninger til projektet. I kapitlet udledes løsninger på lukket form, i de tilfælde hvor det er muligt. I de tilfælde, hvor dette ikke er muligt, kan der udføres en matematisk analyse. Kapitlet omhandler både første- og andenordens differentialligninger, samt omskrivning af andenordens differentialligninger til systemer af førsteordens differentialligninger. I kapitlet beskrives anvendelsen af egenverdier og egenvektorer, samt Jacobimatricer til analyse af systemer af lineære førsteordens differentialligninger. Derudover gennemgås linearisering af ikke-lineære differentialligningssystemer og brugen af faseplan og faseportrætter til grafisk afbildning af løsninger til differentialligninger. Kapitlet afsluttes med beviset for eksistens og entydighed af løsninger til autonome differentialligningssystemer.

I rapporten noteres den afledede med hensyn til tiden,  $t$ , som:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \dot{y}$$

## 1.1 Løsninger på lukket form

I dette afsnit beskrives løsninger på lukket form til lineære førsteordens differentialligninger og lineære homogene andenordens differentialligninger.

### 1.1.1 Lineære førsteordens differentialligninger

Afsnittet er baseret på [R. Kent Nagle and Snider, afsnit 2.3]. En lineær førsteordens differentialligning, der kan skrives på formen:

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x) \quad (1.1)$$

Dette har en løsning, der kan findes ved at beregne  $\mu(x)$  med formlen:

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} \quad (1.2)$$

$\mu(x)$  ganges ind i (1.1):

$$\mu(x)y'(x) + P(x)\mu(x)y(x) = Q(x)\mu(x) \quad (1.3)$$

Da  $P(x)\mu(x) = \mu'(x)$ , hvilket ses af (1.2), kan (1.3) reduceres til:

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)y(x)) = Q(x)\mu(x)$$

Ligningen integreres og isoleres i forhold til  $y(x)$ :

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left( \int_0^x Q(t)\mu(t)dt + C \right)$$

Hvilket er løsningen til (1.1).

### 1.1.2 Lineære homogene andenordens differentiaalligninger

Afsnittet er baseret på [R. Kent Nagle and Snider, afsnit 4.2 og 4.3]. En lineær homogen andenordens differentiaalligning med reelle, konstante koefficienter på formen

$$y'' + a_1y' + a_0y = 0 \tag{1.4}$$

har en løsning. Det antages, at løsningen er på formen  $e^{rx}$ ,  $r \in \mathbb{C}$ ,  $x \in \mathbb{R}$

$$y = e^{rx}, \quad y' = re^{rx}, \quad y'' = r^2e^{rx}$$

ved indsættelse fås:

$$\begin{aligned} r^2e^{rx} + a_1re^{rx} + a_0e^{rx} &= 0 \\ r^2 + a_1r + a_0 &= 0 \end{aligned}$$

Denne ligning kaldes den karakteristiske ligning. Afhængigt af rødderne er løsningen på lukket form:

- To reelle rødder i den karakteristiske ligning  $r_1, r_2$ ,  $r_1 \neq r_2$   
Løsning:  $y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
- To komplekse rødder i den karakteristiske ligning  $\alpha \pm i\beta$ ,  $\beta \neq 0$   
Løsning:  $y = c_1e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2e^{\alpha x} \sin \beta x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
- Dobbeltrod i den karakteristiske ligning  $r_0$   
Løsning:  $y = c_1e^{r_0x} + c_2xe^{r_0x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

## 1.2 Systemer af differentialligninger

Dette afsnit omhandler omskrivning af en andenordens differentialligning til et system af førsteordens differentialligninger. Dette er anvendeligt, da førsteordens ligninger er simple at løse end andenordens. En andenordens differentialligning på formen:

$$x'' + bx' + kx = 0$$

kan omskrives til et system af førsteordens differentialligninger ved at sætte  $y = x'$ . Det giver to førsteordens differentialligninger, som er:

$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= -kx - by\end{aligned}$$

## 1.3 Faseplan

Afsnittet er baseret på [Dawkins, 2003-2014]. Faseplan bruges til at visualisere den generelle opførsel af løsningerne til et differentialligningssystem.

For at tegne et faseplan, ses der på differentialligningssystemet  $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ . Der vælges nogle punkter,  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$ , i faseplanet. De indsættes på højresiden af systemet, hvilket giver vektorer,  $\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dots$ . I punkterne,  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$ , vil der være vektorer, der peger i retningen af vektoren,  $\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dots$ .

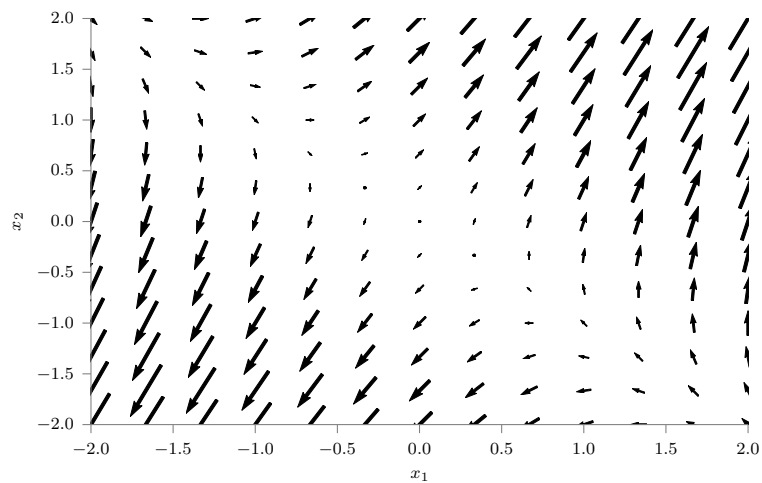
**Eksempel** Der ses på systemet

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Der ses på punkterne  $(-1, 1)$  og  $(2, 0)$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}' &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}' &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

I punktet  $[-1, 1]$  vil der være en vektor, der har retningen  $[1, -1]$ . I punktet  $[2, 0]$  vil der være en vektor, der har retningen  $[2, 6]$ . Dette gøres for mange punkter, hvilket resulterer i et faseplan af systemet, der vil se ud som figur 1.1.



Figur 1.1: Faseplan

## 1.4 Faseportrætter

Afsnittet er baseret på [Morris W. Hirsch, kapitel 3]. Faseportrætter er en geometrisk repræsentation af løsninger til differentiaalligninger.

### 1.4.1 Reelle forskellige egenverdier

Der ses på differentiaalligningen  $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ , hvor  $\mathbf{A}$  har to reelle egenverdier,  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$ . Antag  $\lambda_i \neq 0$ , da er der tre tilfælde:

1.  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$
2.  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$
3.  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

Ved første tilfælde kaldes faseportrættet en saddle. Andet tilfælde kaldes en sink og det tredje kaldes en source.

#### Saddle

Differentiaalligningssystemet  $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$  hvor:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

og  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ . Faseportrættet for dette kaldes en saddle.

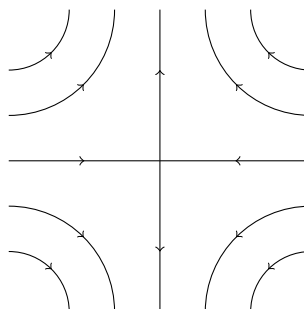
En egenvektor, der svarer til  $\lambda_1$ , er  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  og  $\lambda_2$  er  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Dette giver den generelle løsning:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

For  $\lambda_1 < 0$  vil  $c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow 0$ , når  $t \rightarrow \infty$ . Dette kaldes en stabil linje. Løsningen går gennem  $(1, 0)$ , så linjen ligger på x-aksen, som det ses på figur 1.2.

For  $\lambda_2 > 0$  og  $c_2 > 0$  vil  $c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \infty$ , når  $t \rightarrow \infty$ . Denne linje kaldes en ustabil linje. Da løsningen går gennem  $(0, 1)$ , ligger linjen på y-aksen, som det ses på figur 1.2.

Alle andre løsninger (for  $c_1, c_2 \neq 0$ ) går mod  $\infty$  i retningen af den ustabile linje, når  $t \rightarrow \infty$ . Når  $t \rightarrow -\infty$  vil løsningerne gå i modsat retning.



Figur 1.2: Faseportræt af saddle

### Sink og Source

Der ses igen på differentialligningssystemet, hvor  $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$ .  $\mathbf{A}$  er som (1.5) og  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ . Faseportrættet kaldes en sink.

En egenvektor, der svarer til  $\lambda_1$  kan igen være  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  og til  $\lambda_2$   $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Den generelle løsning ser da ud som (1.6). Alle løsninger går mod 0, når  $t \rightarrow \infty$ .

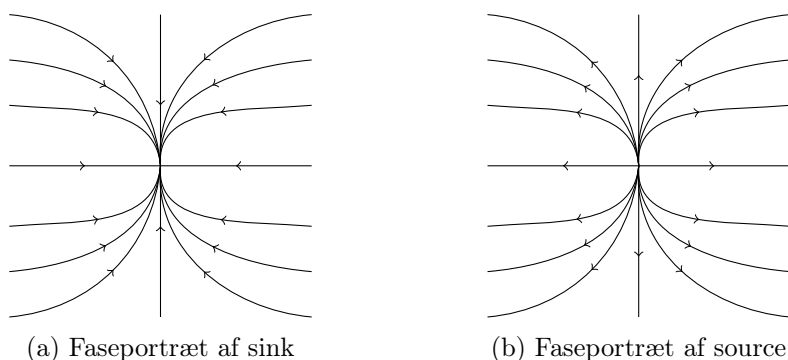
For at se hvordan løsningen går mod  $(0, 0)$ , ses der på egenværdierne i (1.6).  $\lambda_1$  er den dominerende egenværdi, når  $t \rightarrow -\infty$ , da  $e^{\lambda_1 t} > e^{\lambda_2 t}$ .  $\lambda_2$  er den dominerende egenværdi når  $t \rightarrow \infty$  da  $e^{\lambda_2 t} > e^{\lambda_1 t}$ . Løsningerne følger den dominerende egenværdi.

Løsningerne vil derfor, langt fra origo, følge  $\lambda_1$ 's egenvektor og nær origo gå imod  $\lambda_2$ 's egenvektor, som det ses af figur 1.3a.

Faseportrættet for den generelle løsning af  $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$  kaldes en source, hvis  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ . Løsningerne vil gå mod  $\infty$ , når  $t \rightarrow \infty$ .

Et faseportræt for en source vil opføre sig modsat en sink.  $\lambda_2$  er den dominerende egenværdi, når  $t \rightarrow \infty$ , da  $e^{\lambda_2 t} > e^{\lambda_1 t}$ .  $\lambda_1$  er den dominerende egenværdi, når  $t \rightarrow -\infty$ , da  $e^{\lambda_1 t} > e^{\lambda_2 t}$ .

En source ser altså ud som en sink, men med pilene modsat rettet, da løsningerne går mod  $\infty$ . Det kan ses på figur 1.3b.



Figur 1.3: Faseportræt for sink og source

### 1.4.2 Komplekse egenverdier

Ved differentialligningen  $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ , hvor løsningerne til det karakteristiske polynomium har komplekse egenverdier,  $\alpha \pm i\beta$ , hvor  $\beta \neq 0$ , ses tre tilfælde:

1.  $\alpha < 0$
2.  $\alpha > 0$
3.  $\alpha = 0$

Ved første tilfælde kaldes faseportrættet en spiral sink, det andet kaldes en spiral source og det tredje kaldes et center. Ved komplekse egenverdier bestemmer  $\mathbf{A}_{12}$  hvilken retning faseportrættet roterer. Ved  $\mathbf{A}_{12} > 0$  roterer løsningen med uret, og når  $\mathbf{A}_{12} < 0$ , roterer løsningen mod uret.

#### Spiral sink og -source

Der ses igen på differentialligningssystemet  $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ , hvor  $\alpha, \beta \neq 0$ , og hvor:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

$\alpha \pm i\beta$  er egenverdierne for systemet. Hvis  $\alpha < 0$  går løsningen mod origo og faseportrættet kaldes en spiral sink. Hvis  $\alpha > 0$  går løsningen væk fra origo og faseportrættet kaldes en spiral source.

En kompleks egenvektor, der svarer til egenværdien  $\alpha + i\beta$  er  $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ , hvilket giver den generelle løsning:

$$\mathbf{x}(t) = e^{(\alpha+i\beta)t} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad (1.8)$$



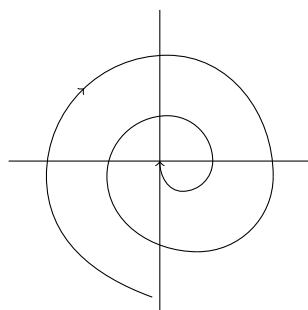
Da  $\alpha \neq 0$  er løsningen spiralformet, hvilket kan ses hvis (1.8) omskrives med Eulers formel til en reel løsning på formen:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{x}_{Re}(t) + c_2 \mathbf{x}_{Im}(t) \quad (1.9)$$

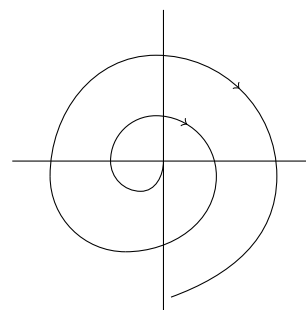
hvor

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{Re}(t) &= \begin{bmatrix} \cos \beta t \\ -\sin \beta t \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}_{Im}(t) &= \begin{bmatrix} \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.10)$$

For  $\alpha > 0$  vil faseportrættet se ud som figur 1.4a, og retningen er med uret, da  $\beta > 0$ . For  $\alpha < 0$  vil faseportrættet se ud som figur 1.4b, og retningen er også her med uret.



(a) Faseportræt af spiral sink



(b) Faseportræt af spiral source

Figur 1.4: Spiral sink og -source

### Center

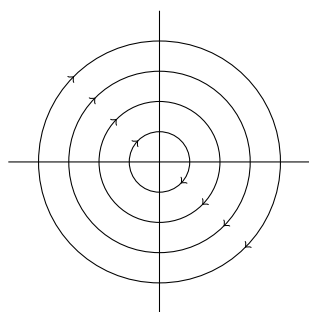
Der ses på differentiaalligningssystemet  $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ , hvor  $\alpha = 0, \beta \neq 0$  og:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

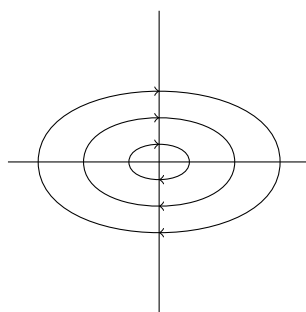
Faseportrættet kaldes et center.  $\pm i\beta$  er egenverdierne for systemet. En kompleks egenvektor, der svarer til egenværdien  $i\beta$  er  $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ . Hvilket giver den generelle løsning:

$$\mathbf{x}(t) = e^{i\beta t} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

Da  $\alpha = 0$  er løsningen cirkelformet, hvilket kan ses hvis (1.12) omskrives med Eulers formel til en reel løsning, som i 1.10. Egenvektoren bestemmer, hvilken cirkelform løsningen har. Her er det en perfekt cirkel, der går med uret da  $\beta > 0$ , som det ses på figur 1.5a. Et center kan også se ud som figur 1.5b, hvor egenvektoren er  $\begin{bmatrix} 2 \\ i \end{bmatrix}$ .



(a) Faseportræt af center, cirkel



(b) Faseportræt af center, oval

Figur 1.5: Faseportræt af center

### 1.4.3 Gentagne egenverdier

I dette afsnit beskrives tilfælde af gentagne reelle egenverdier. Et simpelt eksempel er diagonalmatricen:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

$\lambda$  er egenverdien, med multiplicitet 2, for  $\mathbf{A}$  og alle vektorer forskellige fra nulvektoren er egenvektorer, da  $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$  for alle  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ . Løsningerne er på formen:

$$\mathbf{x}(t) = \alpha e^{\lambda t} \mathbf{v} \quad (1.14)$$

Løsningen er en ret linje mod eller fra  $(0, 0)$ , hvor den går mod  $(0, 0)$ , hvis  $\lambda < 0$  eller væk fra  $(0, 0)$ , hvis  $\lambda > 0$ . I et andet eksempel er:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

Igen er egenverdien  $\lambda$ . Der er kun en lineært uafhængig egenvektor:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

Hvilket giver en løsning:

$$\mathbf{x}_1(t) = \alpha e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

For at finde andre løsninger kan systemet omskrives til:

$$\begin{aligned} x' &= \lambda x + y \\ y' &= \lambda y \end{aligned}$$

Hvis  $y \neq 0$  har vi:

$$y(t) = \beta e^{\lambda t}$$

Differentialligningen for  $x(t)$  bliver så:

$$x' = \lambda x + \beta e^{\lambda t}$$

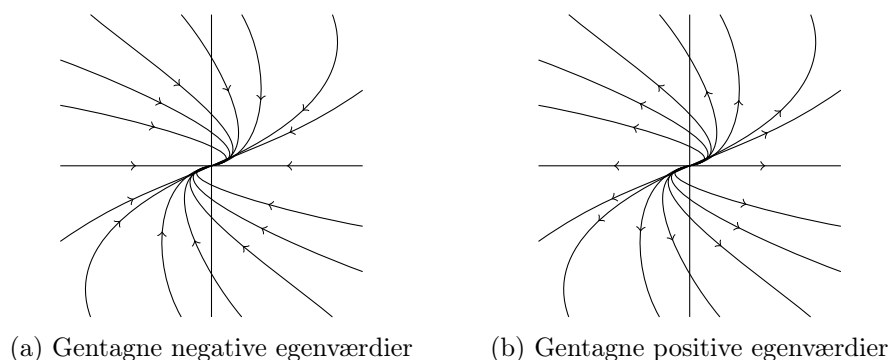
Der gættes på en løsning på formen:

$$x(t) = \alpha e^{\lambda t} + \mu t e^{\lambda t}$$

hvor  $\alpha$  og  $\mu$  er konstanter. Denne teknik kaldes ukendte koefficienters metode. Når dette gæt sættes ind i differentialligningen, ses det, at  $\mu = \beta$  og  $\alpha$  er arbitrær. Løsningen kan nu omskrives til:

$$x(t) = \alpha e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta e^{\lambda t} \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

Hvilket er den generelle løsning. Hvis  $\lambda < 0$  går løsningen mod  $(0, 0)$ , når  $t \rightarrow \infty$ , se figur 1.6a. Hvis  $\lambda > 0$  går løsningen væk fra  $(0, 0)$ , når  $t \rightarrow \infty$ , se figur 1.6b. Løsningerne går mod eller væk fra origo i en retning, som tangerer egenvektoren  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ .



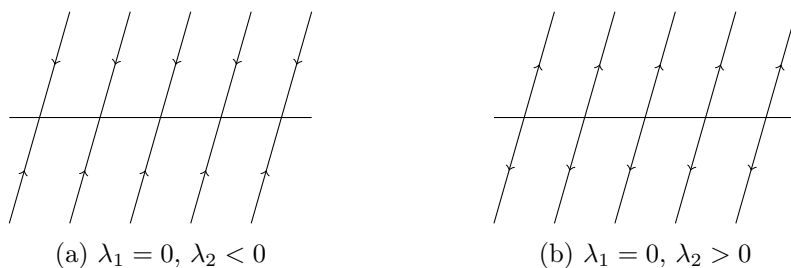
Figur 1.6: Gentagne egenverdier

#### 1.4.4 Nulegenværdien

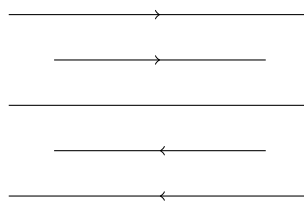
Ved differentialligningen  $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ , hvor løsningerne til det karakteristiske polynomium mindst har en nulegenverdi, er der tre tilfælde:

1.  $\lambda_1 = 0$  og  $\lambda_2 > 0$
2.  $\lambda_1 = 0$  og  $\lambda_2 < 0$
3.  $\lambda_1 = 0$  og  $\lambda_2 = 0$

Faseportrættet kaldes et degenerat tilfælde, fordi  $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$  forsvinder på en hvis linje, som bliver et ligevægtspunkt. Et faseportræt for en nulegenverdi kan se ud som figur 1.7b eller 1.7a, hvor den anden egenverdi henholdsvis er større og mindre end nul. Et faseportræt, hvor begge egenverdier er nul, kan se ud som figur 1.8. [Hubbard and West, side 97-98]



Figur 1.7: Nulegenverdier

Figur 1.8:  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 0$ 

## 1.5 Nulkliner

Nulkliner er nul-isokliner. De er nyttige til at analysere ikke lineære differentiaalligninger, på formen

$$\begin{aligned}x'_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x'_n &= f_n(x_1, \dots, x_n)\end{aligned}$$

For at bestemme  $x'_j$ -nulklinen, som er det sæt af punkter hvor  $x'_j$  forsvinder, sættes  $f_j(x_1, \dots, x_n) = 0$ .

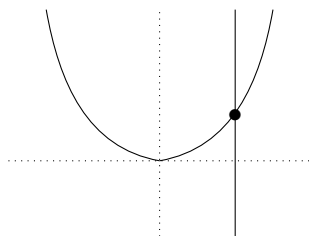
$x_j$ -nulkliner deler  $\mathbb{R}^n$  ind i felter, hvor alle vektorer peger i samme generelle retning. Hvis alle nulkliner bestemmes, bliver  $\mathbb{R}^n$  delt ind i vektorfelter, kaldt basisfelter, der kun peger i en bestemt retning. Retningen kan være nordvest, nordøst, sydvest og sydøst. Disse felter Ved at skitsere basisfelterne kan det give kvalitativ forståelse af hvordan faseportrættet ser ud, som beskrevet i afsnit 1.4.

Skæring mellem nulklinerne kaldes ligevægtspunkter. Det kan også beskrives som at ligevægtspunkterne er hvor  $f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, f_n(x_1, \dots, x_n) = 0$ .

**Eksempel** For systemet

$$\begin{aligned}x' &= y - x^2 \\ y' &= x - 2\end{aligned}$$

er  $x'$ -nulklinen parablen  $y = x^2$  og  $y'$ -nulklinen er den vertikale linje  $x = 2$ . Disse mødes i punktet  $(2, 4)$ , som er det eneste ligevægtspunkt. Der er fire basisfelter, som det ses af figur 1.9. Retningerne i basisfelterne kan bestemmes, ved at tage et punkt i hver af felterne, på samme måde som retningen af vektorene blev bestemt i afsnit 1.3. Dog betyder det ikke, at alle vektorer i



Figur 1.9: Basisfelter

felterne bevæger sig i præcis den retning, men at vektorene bevæger sig eks. mellem 0 og  $\pi/2$  grader, altså mellem øst og nord.

Ved at se på det lineariserede system i ligevægtpunktet, kan faseportrættet udfyldes [Morris W. Hirsch, afsnit 9.1].

## 1.6 Putzers Algoritme

Dette afsnit er baseret på [Møller, Afsnit 6.3]. For at løse et vilkårligt differentialligningssystem, der kan opstilles på formen

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (1.19)$$

hvor  $\mathbf{A}$  er en  $n \times n$  matrix,  $\mathbf{x}$  og  $\dot{\mathbf{x}}$  er  $1 \times n$  vektorer og  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{x}$ ,  $\dot{\mathbf{x}} \in \mathbb{F}^n$ , kan der ved at anvende almene løsningsmodeller findes løsningen

$$\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{x}_0 \quad (1.20)$$

hvor  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  er begyndelsesbetingelserne.  $e^{t\mathbf{A}}$  er defineret som:

$$e^{t\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \mathbf{A}^k \quad (1.21)$$

Derudover skal der gælde at:

$$\begin{aligned} e^{0\mathbf{A}} &= 1 \\ e^{(t+s)\mathbf{A}} &= e^{t\mathbf{A}}e^{s\mathbf{A}} \\ \frac{d}{dt}e^{t\mathbf{A}} &= \mathbf{A}e^{t\mathbf{A}} = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{A} \\ (e^{t\mathbf{A}})^{-1} &= e^{-t\mathbf{A}} \end{aligned}$$

Der opstår dog problemer ved 1.20 for det konkrete tilfælde, hvor  $\mathbf{A}$  ikke kan diagonaliseres. Putzers algoritme kan anvendes til at omskrive  $e^{t\mathbf{A}}$  til

en summation af produkter mellem matricer og funktioner ved hjælp af  $\mathbf{A}$ s egenverdier,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , regnet med multiplicitet. Putzers algoritme er som følger:

$$e^{t\mathbf{A}} = \sum_{m=0}^{n-1} r_{m+1}(t) \mathbf{P}_m \quad (1.22)$$

Algoritmen består af to komponenter,  $r(t)$  og  $\mathbf{P}$ .  $r(t)$  er en række af funktioner,

$$r_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad r_m(t) = e^{\lambda_m t} \int_0^t e^{-\lambda_m s} r_{m-1}(s) ds \quad (1.23)$$

og  $\mathbf{P}$  er en række af matricer:

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{I}, \quad \mathbf{P}_m = \prod_{j=1}^m (\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I}) \quad (1.24)$$

Både  $r(t)$  og  $\mathbf{P}$  dannes med egenverdierne for  $\mathbf{A}$ .

**Eksempel**  $e^{t\mathbf{A}}$  omskrives ved hjælp af Putzers algoritme, hvor:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Da dette er en øvretrekantsmatrix er egenverdierne  $\lambda_1 = -1$  og  $\lambda_2 = -1$ . Udfra disse egenverdier kan komponenterne af Putzers algoritme beregnes:

$$r_1(t) = e^{-t}, \quad r_2(t) = e^{-t} \int_0^t e^s r_1(s) ds = t \cdot e^{-t}$$

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{I}, \quad \mathbf{P}_1 = \prod_{j=1}^1 (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Derved giver summationen i algoritmen:

$$e^{t\mathbf{A}} = r_1(t) \cdot \mathbf{P}_0 + r_2(t) \cdot \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & te^{-t} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$e^{t\mathbf{A}}$  kan også omskrives uden brug af Putzers algoritme. Dette gøres ved at opdele  $\mathbf{A}$  i to matricer  $\mathbf{D}$  og  $\mathbf{N}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{N} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dette medfører at  $e^{t\mathbf{A}}$  kan omskrives til:

$$e^{t\mathbf{A}} = e^{t\mathbf{D}} \cdot e^{t\mathbf{N}} \quad (1.25)$$

Hvis  $e^{t\mathbf{D}}$  og  $e^{t\mathbf{N}}$  betragtes ved hjælp af (1.21), kan disse skrives som

$$e^{t\mathbf{N}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \mathbf{N}^k = \mathbf{I} + t\mathbf{N}$$

da  $\mathbf{N}^k = 0$ , når  $k > 1$ .

$$e^{t\mathbf{D}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \mathbf{D}^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \begin{bmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{(-t)} & 0 \\ 0 & e^{(-t)} \end{bmatrix}$$

Ved at indsætte disse to omskrivninger i (1.25), fås

$$e^{t\mathbf{A}} = e^{t\mathbf{D}} \cdot (\mathbf{I} + t\mathbf{N}) = e^{t\mathbf{D}} + t\mathbf{N}e^{t\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} e^{(-t)} & 0 \\ 0 & e^{(-t)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{(-t)} & 0 \\ 0 & e^{(-t)} \end{bmatrix} = e^{(-t)} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

hvilket er det samme som resultatet fra Putzers algoritme.

## 1.7 Jacobimatricen

Afsnittet er baseret på [Adams and Essex, side 707].

En vektor  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$  af  $m$  funktioner, der hver er afhængige af  $n$  variable  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , definerer en transformation fra  $\mathbb{R}^n$  til  $\mathbb{R}^m$ , hvor  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  er et punkt i  $\mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Så er  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$  punktet i  $\mathbb{R}^m$ , som korresponderer med  $\mathbf{x}$  ved transformationen  $\mathbf{f}$ . Dette kan skrives som  $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Hvorledes  $\mathbf{y}$  ændres med hensyn til  $\mathbf{x}$  er beskrevet ved de partielt afledede funktioner  $\partial y_i / \partial x_j$ , ( $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ ), som organiseres i en  $m \times n$  matrix, der kaldes en Jacobimatrix og betegnes  $\mathbf{Df}$ .

$$\mathbf{Df} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (1.26)$$



**Anvendelse** I afsnit 1.4 findes faseportrætter for differentialligninger på formen  $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$  ud fra egenverdierne for  $\mathbf{A}$ . Ses der på ikke-lineære differentialligninger, der ikke kan skrives på denne form, kan Jacobimatricen anvendes. Der ses på ligevægtpunktet hvor  $\mathbf{x}' = 0$ . Jacobimatricen evalueres i disse punkter og der findes egenverdier og egenvektorer. Herefter fortsættes med at tegne faseportrættet, som i afsnit 1.4.

## 1.8 Linearisering

Når dynamiske systemer studeres, sker det, at systemer ikke kan løses på lukket form. Disse systemer er ikke-lineære. Lineære systemer er lettere at studere. Der ønskes derfor en måde at linearisere ikke-lineære systemer. Til dette formål kan Hartman-Grobman's sætning være behjælpelig, se [Teschl]. Sætningen tillader, at systemer af differentialligninger, i specifikke tilfælde, lokalt kan reduceres til dets lineære del tæt på ligevægtpunkter. Systemet kan da løses på lukket form, og det kan vises at der er sammenhæng mellem den lineære løsning og det oprindelige problem.

**Eksempel** Betragt det ikke-lineære differentialligningssystem  $F$ :

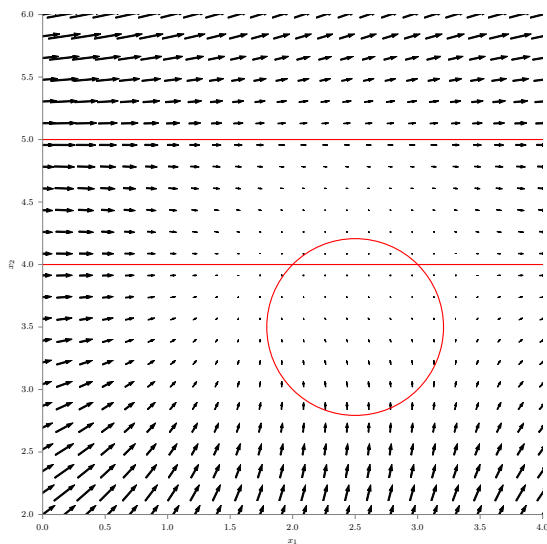
$$\begin{aligned}x' &= x^2 - 5x + y^2 - 7y + 18 \\y' &= y^2 - 9y + 20\end{aligned}$$

Først beregnes de enkelte nulkliner. Nulklinerne for  $y'$  beregnes til  $y = 4$  og  $y = 5$ , da dette er et andengradspolynomie. Nulklinen for  $x'$  er en cirkel med centrum i  $(2.5, 3.5)$  og radius  $\sqrt{0.5}$ . Nulklinerne kan nu tegnes, se figur 1.10.

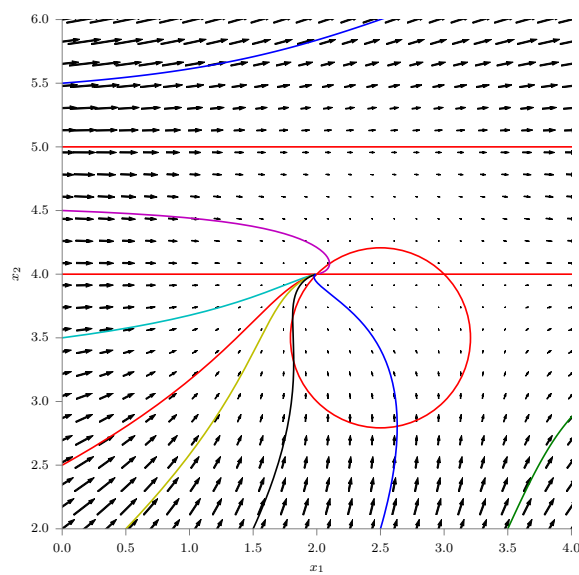
Ud fra nulklinerne beregnes der to ligevægtpunkter  $\mathbf{x}_0 = (2, 4)$  og  $\mathbf{x}_1 = (3, 4)$ . Nu beregnes Jacobimatricen,  $\mathbf{DF}$ , til både  $\mathbf{x}_0$  og  $\mathbf{x}_1$ .

$$\begin{aligned}\mathbf{DF}_{\mathbf{x}_0} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \\ \mathbf{DF}_{\mathbf{x}_1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{B}\end{aligned}$$

Ud fra Jacobimatricernes egenverdier bestemmes det, om ligevægtpunkterne er en sink, source, saddle eller center.  $\mathbf{x}_0$  er en sink, da Jacobimatricen har gentagne negative egenverdier, se afsnit 1.4.3.  $\mathbf{x}_1$  er en saddle, da egenverdierne for Jacobimatricen ligger på hver side af nul, se afsnit 1.4.1. Der tegnes et faseportræt af systemet, se figur 1.11. Ud fra Jacobimatricerne kan det



Figur 1.10: Nulkliner



Figur 1.11: Faseportræt med nulkliner.

lineariserede system opstilles omkring  $\mathbf{x}_0$  og  $\mathbf{x}_1$ . De lineariserede systemer er  $\mathbf{V}' = \mathbf{A}\mathbf{V}$  og  $\mathbf{W}' = \mathbf{B}\mathbf{W}$ . Da disse er systemer af lineære differentialligninger, kan de generelle løsninger skrives ved  $\mathbf{V}(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{V}_0$  og  $\mathbf{W}(t) = e^{t\mathbf{B}}\mathbf{W}_0$  med tilhørende begyndelsesbetingelser  $\mathbf{V}_0$  og  $\mathbf{W}_0$ .

Eksponenterne  $e^{t\mathbf{A}}$  og  $e^{t\mathbf{B}}$  kan omskrives ved hjælp af Putzers algoritme. Den første eksponent blev beregnet i afsnit 1.6. Løsningen på lukket form til det lineariserede system omkring  $\mathbf{x}_0$  bliver derfor:

$$\mathbf{V}(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{V}_0$$

Ved at anvende Putzers algoritme på den anden eksponent  $e^{t\mathbf{B}}$ , kan denne omskrives ved at bruge egenverdierne for  $\mathbf{B}$ , nemlig  $\lambda_1 = 1$  og  $\lambda_2 = -1$ :

$$e^{t\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} e^t & \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Løsningen på lukket form til det lineariserede system omkring  $\mathbf{x}_1$  bliver derfor:

$$\mathbf{W}(t) = \begin{bmatrix} e^t & \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \mathbf{W}_0$$

## 1.9 Eksistens og Entydighed

Dette afsnit omhandler eksistens og entydighed for løsninger til autonome differentialligningssystemer og er baseret på [Morris W. Hirsch, afsnit 17.2].

Funktionen  $F$  siges at være  $C^1$ , hvis alle de partielle afledede eksisterer og er kontinuerte. Det antages for resten af afsnittet, at  $F$  er  $C^1$ .

**Hovedsætning 1.** *Antag at der er givet et begyndelsesværdiproblem:*

$$\mathbf{x}' = F(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

*hvor  $\mathbf{x}$  er en ukendt vektorfunktion. Antag derudover, at  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Så eksisterer der et  $a$  og en funktion  $\mathbf{x} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , som er differentiabel på intervallet  $[-a, a]$ , så  $\mathbf{x}$  opfylder både differentialligningen og begyndelsesværdiproblemet.*

For at kunne bevise eksistens og entydighed, er det nødvendigt at opstille følgende hjælpesætninger:

**Integral- og differentiationsform** Hvis  $J$  er et åbent interval indeholdende nul,  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$  er en åben mængde og  $\mathbf{x} : J \rightarrow \mathcal{O}$ , hvor  $\mathbf{x}$  er differentiabel på  $J$ , og opfylder

$$\mathbf{x}'(t) = F(\mathbf{x}(t)) \quad (1.27)$$

med begyndelsesbetingelsen  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , så er integralet af (1.27):

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t F(\mathbf{x}(s))ds \quad (1.28)$$

Modsat ses det ved differentiation, at hvis  $\mathbf{x} : J \rightarrow \mathcal{O}$  og opfylder (1.28), så er  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{x}$  er differentiabel og  $\mathbf{x}$  opfylder (1.27).

Derfor er integral- og differentiationsformen af differentialligningen ækvivalente for  $\mathbf{x} : J \rightarrow \mathcal{O}$ . Integralformen vil blive brugt til at bevise eksistensen af løsninger.

**Definition 1.** Lad  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$  være en åben mængde. Funktionen  $F : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$  er Lipschitz på  $\mathcal{O}$ , hvis der eksisterer en konstant  $K$  så:

$$|F(\mathbf{y}) - F(\mathbf{x})| \leq K|\mathbf{y} - \mathbf{x}|, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{O} \quad (1.29)$$

$K$  kaldes en Lipschitz konstant for  $F$ .  $F$  er lokalt Lipschitz, hvis hvert punkt i  $\mathcal{O}$  har et område i  $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ , sådan at restriktionen  $F : \mathcal{O}' \rightarrow \mathbb{R}^n$  er Lipschitz.

**Funktioner på kompakte mængder** Mængden  $C \subset \mathbb{R}^n$  er kompakt, hvis  $C$  er lukket og begrænset. Hvis  $H : C \rightarrow \mathbb{R}$  er kontinuert og  $C$  er kompakt, så er  $H$  begrænset på  $C$  og derudover antager  $H$  sit maksimum i  $C$ .

**Lemma 1.** Hvis funktionen  $F : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$  er kontinuert differentiabel, så er  $F$  lokalt Lipschitz.

**Bevis** Antag at  $F : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$  er  $C^1$  og lad  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{O}$ . Lad  $\epsilon > 0$  være så lille, at den lukkede kugle,  $B_\epsilon(\mathbf{x}_0)$ , med radius  $\epsilon$  og centrum i  $\mathbf{x}_0$  er indeholdt i  $\mathcal{O}$  og  $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in B_\epsilon(\mathbf{x}_0)$ .

Lad  $K$  være en øvre grænse for  $\|\mathbf{D}\mathbf{F}_{\mathbf{x}}\|$  på  $B_\epsilon(\mathbf{x}_0)$ ; denne grænse eksisterer fordi  $\mathbf{D}\mathbf{F}_{\mathbf{x}}$  er kontinuert og  $B_\epsilon(\mathbf{x}_0)$  er kompakt.

Mængden  $B_\epsilon(\mathbf{x}_0)$  er konveks, så er den rette linje givet ved  $\mathbf{y} + s\mathbf{u} \in B_\epsilon(\mathbf{x}_0)$ ,

hvor  $\mathbf{u} = \mathbf{z} - \mathbf{y}$  og  $0 \leq s \leq 1$ . Lad  $\psi(s) = F(\mathbf{y} + s\mathbf{u})$ , ved brug af kædereglen fås:

$$\psi'(s) = \mathbf{D}F_{\mathbf{y}+s\mathbf{u}}(\mathbf{u})$$

Deraf fås:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{z}) - F(\mathbf{y}) &= \psi(1) - \psi(0) \\ &= \int_0^1 \psi'(s) \, ds \\ &= \int_0^1 \mathbf{D}F_{\mathbf{y}+s\mathbf{u}}(\mathbf{u}) \, ds \end{aligned}$$

Derfor fås:

$$|F(\mathbf{z}) - F(\mathbf{y})| \leq \int_0^1 K|\mathbf{u}| \, ds = K|\mathbf{z} - \mathbf{y}|$$

□

Det ovenstående bevis kan udvides til globelt Lipschitz under følgende antagelser: Hvis  $\mathcal{O}$  er konveks og  $\|\mathbf{D}F_{\mathbf{x}}\| \leq K, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}$ , så er  $K$  Lipschitzkonstant for  $F$  på hele  $\mathcal{O}$ .

**Picarditeration** Picarditerationer bruges til at konstruere en følge af funktioner, der konvergerer mod løsningen af differentiaalligningen. Følgen af funktioner,  $q_p(t)$ , defineres induktivt ved  $q_0(t) = \mathbf{x}_0$  hvor  $\mathbf{x}_0$  er begyndelsesbetingelsen, og fortsætter:

$$q_{p+1}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t F(q_p(s))ds \quad (1.30)$$

**Lemma 2.** Antag  $G_k: I \rightarrow \mathbb{R}^n, k = 0, 1, 2, \dots$  er en følge af kontinuerte funktioner defineret på det lukkede interval  $I$ . Givet et  $\epsilon > 0$ , eksisterer et  $N > 0$ , således at for alle  $p, q > N$ , så opfylder  $G_k$ :

$$\max_{t \in I} |G_p(t) - G_q(t)| < \epsilon$$

Der eksisterer så en kontinuert funktion  $G: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , således at:

$$\max_{t \in I} |G_k(t) - G(t)| \rightarrow 0 \text{ når } k \rightarrow \infty$$

Derudover, for ethvert  $t$  med  $|t| \leq a$ , gælder det at:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t G_k(s) ds = \int_0^t G(s) ds$$

Denne type af konvergens kaldes *uniform konvergens* for funktionerne  $G_k$ .

**Bevis for hovedsætning 1** For at bevise eksistens, defineres en følge af funktioner. Det bevises derefter, ved induktion, at disse funktioner konvergerer uniformt til en funktion, som opfylder differentialligningen. Efterfølgende bevises det, at løsningen er entydig.

Det antages at:

1.  $B_\rho(\mathbf{x}_0)$  er den lukkede kugle med radius  $\rho > 0$  og centrum i  $\mathbf{x}_0$
2. Der findes en Lipschitzkonstant  $K$  for  $F$  på  $B_\rho(\mathbf{x}_0)$
3. Der eksisterer et  $M$ , så  $|F(\mathbf{x})| \leq M$  på  $B_\rho(\mathbf{x}_0)$

Vælg et  $a < \min\{\frac{\rho}{M}, \frac{1}{K}\}$  og lad  $J = [-a, a]$ . Der defineres en følge af funktioner  $U_0, U_1, \dots$  fra  $J \rightarrow B_\rho(\mathbf{x}_0)$ . For at bevise konvergens for  $U_k$  anvendes lemma 2. Følgen af  $U_k$  er defineret rekursivt ved at bruge Picarditerationer:

$$U_0(t) \equiv \mathbf{x}_0$$

For  $t \in J$  defineres:

$$U_1(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t F(U_0(s)) ds = \mathbf{x}_0 + tF(\mathbf{x}_0)$$

Da  $|t| \leq a$  og  $|F(\mathbf{x}_0)| \leq M$ , følger det at

$$|U_1(t) - \mathbf{x}_0| = |t||F(\mathbf{x}_0)| \leq aM < \rho \quad (1.31)$$

således at  $U_1(t) \in B_\rho(\mathbf{x}_0)$  for alle  $t \in J$ . Antag at  $U_k(t)$  er blevet defineret ved induktion og at  $|U_k(t) - \mathbf{x}_0| \leq \rho$  for alle  $t \in J$ . Dette giver:

$$U_{k+1}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t F(U_k(s)) ds$$

Dette giver mening, da  $U_k(s) \in B_\rho(\mathbf{x}_0)$ , så integralet er defineret. Det skal vises, at  $|U_{k+1}(t) - \mathbf{x}_0| \leq \rho$ , således at  $U_{k+1}(t) \in B_\rho(\mathbf{x}_0)$  for  $t \in J$ ; dette

medfører, at følgen kan fortsættes til  $U_{k+2}, U_{k+3}, \dots$ . Dette kan skrives mere generelt:

$$\begin{aligned} |U_{k+1}(t) - \mathbf{x}_0| &\leq \int_0^t |F(U_k(s))| \, ds \\ &\leq \int_0^t M \, ds \\ &\leq Ma < \rho \end{aligned}$$

Nu skal der bevises, at der findes en konstant  $L \geq 0$ , således at, der for alle  $k \geq 0$ , gælder:

$$|U_{k+1}(t) - U_k(t)| \leq (aK)^k L$$

Lad  $L$  være maksimum af  $|U_1(t) - U_0(t)|$  for  $t \in [-a, a]$ . Fra (1.31) haves  $L \leq aM$ , hvilket giver:

$$\begin{aligned} |U_2(t) - U_1(t)| &= \left| \int_0^t F(U_1(s)) - F(U_0(s)) \, ds \right| \\ &\leq \int_0^t K |U_1(s) - U_0(s)| \, ds \\ &\leq aKL \end{aligned}$$

Antag ved induktion, at for et vilkårligt  $k \geq 2$ , at det er bevist:

$$|U_k(t) - U_{k-1}(t)| \leq (aK)^{k-1} L$$

for  $|t| \leq a$ , hvilket giver det næste induktionsskridt

$$\begin{aligned} |U_{k+1}(t) - U_k(t)| &\leq \int_0^t |F(U_k(s)) - F(U_{k-1}(s))| \, ds \\ &\leq K \int_0^t |U_k(s) - U_{k-1}(s)| \, ds \\ &\leq (aK)(aK)^{k-1} L = (aK)^k L \end{aligned}$$

Lad  $\alpha = aK$ , som medfører at  $\alpha < 1$ . Givet et vilkårligt  $\epsilon > 0$ , vælges et  $N$  tilstrækkeligt stort, således at der for to vilkårlige  $r > s > N$ , kan skrives

$$\begin{aligned} |U_r(t) - U_s(t)| &\leq \sum_{k=N}^{\infty} |U_{k+1}(t) - U_k(t)| \\ &\leq \sum_{k=N}^{\infty} \alpha^k L \\ &\leq \epsilon \end{aligned} \tag{1.32}$$

Højresiden af (1.32) er en uendelig teleskopsum, der ved trekantsuligheden er større end eller lig forskellen mellem værdien af det største og mindste index af  $U$ . Da  $r > s > N$ , er  $|U_r(t) - U_s(t)|$  mindre end teleskopsummen, da slutningen af rækken kan gøres så lille som der ønskes.

Fra lemma 2 ses det, at følgen af funktioner  $U_0, U_1, \dots$  konvergerer uniformt til en kontinuert funktion  $X : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Fra identiteten

$$U_{k+1}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t F(U_k(s)) ds$$

kan grænseværdien findes for begge sider af ligheden, således at:

$$\begin{aligned} X(t) &= \mathbf{x}_0 + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t F(U_k(s)) ds \\ &= \mathbf{x}_0 + \int_0^t \lim_{k \rightarrow \infty} F(U_k(s)) ds \\ &= \mathbf{x}_0 + \int_0^t F(X(s)) ds \end{aligned}$$

Dette betyder, at  $X : J \rightarrow B_\rho(\mathbf{x}_0)$  opfylder integralet for differentialligningen og er derfor en løsning til ligningen. Særsomt følger det, at  $X : J \rightarrow B_\rho(\mathbf{x}_0)$  er  $C^1$ . Alt dette betyder, at der eksisterer en løsning til differentialligningen.

For at bevise entydighed antages det, at  $X : I_1 \rightarrow B_\rho(\mathbf{x}_0)$  og  $Y : I_2 \rightarrow B_\rho(\mathbf{x}_0)$  er to løsninger til differentialligningen, som opfylder at  $X(0) = Y(0) = \mathbf{x}_0$ , hvor  $J = I_1 \cap I_2$  er det lukkede interval  $[-a; a]$ . Det skal vises, at  $X(t) = Y(t)$  for alle  $t \in J$ . Lad

$$Q = \max_{t \in J} |X(t) - Y(t)|$$

Dette maksimum findes i et punkt  $t_1 \in J$ , hvilket giver

$$\begin{aligned} Q = |X(t_1) - Y(t_1)| &= \left| \int_0^{t_1} (X'(s) - Y'(s)) ds \right| \\ &\leq \left| \int_0^{t_1} |F(X(s)) - F(Y(s))| ds \right| \\ &\leq \left| \int_0^{t_1} K |X(s) - Y(s)| ds \right| \\ &\leq aKQ \end{aligned}$$

Eftersom  $aK < 1$ , er dette umuligt, medmindre  $Q = 0$ , hvilket betyder, at

$$X(t) \equiv Y(t)$$

□



## 2 | Mekanisk Modellering

I dette kapitel beskrives de metoder, der bruges til at modellere det mekaniske. Der beskrives variationsregning, hvor Euler-Lagrange ligningen defineres. Desuden beskrives Hamiltons princip, som beskriver bevægelsen i et mekanisk system med minimal samlet energi og Lagrange-d'Alembert princip, der er en udvidelse af Hamiltons princip med eksterne kræfter tilføjet. Kapitlet er baseret på [Wisniewski, a] og [Wisniewski, b].

### 2.1 Variationsregning

Det ønskes at finde kurven,  $\xi$ , som minimerer

$$I(\xi) = \int_a^b F(t, \xi, \dot{\xi}) dt \quad (2.1)$$

hvor  $a, b \in \mathbb{R}$  og  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Til dette formål skal der bruges et lemma.

**Lemma 3 (Fundamentallemmet for variationsregning).** *Antag  $f \in C^0$  på  $[a, b]$ . Dermed gælder at*

$$\int_a^b f(x)\eta(x) dx = 0 \quad (2.2)$$

*for enhver funktion  $\eta \in C^0$  på  $[a, b]$  med  $\eta(a) = \eta(b) = 0$  hvis og kun hvis  $f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$ .*

Da (2.1) er en funktional, som er en funktion af funktioner, benyttes variationsregning for at løse dette problem. Antag, at  $\xi$  er den minimale løsning, som ligger i intervallet  $[a, b]$ , så kan en arbitrer kurve,  $\tilde{\xi}$ , skrives som  $\tilde{\xi} = \xi + \epsilon\eta$ . Indsættes der i stedet  $\tilde{\xi}$  i (2.1), opnås en funktion  $I(\xi + \epsilon\eta)$  af  $\epsilon$ , og da det er antaget at  $\xi$  er den minimale, betragtes følgende optimeringsproblem:

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} I(\tilde{\xi}) \right|_{\epsilon=0} = 0 \quad (2.3)$$

Kædereglen anvendes:

$$\int_a^b \frac{d}{d\epsilon} \left( F(t, \tilde{\xi}, \dot{\tilde{\xi}}) \right) dt \Big|_{\epsilon=0} = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial \tilde{\xi}} \frac{d\tilde{\xi}}{d\epsilon} + \frac{\partial F}{\partial \dot{\tilde{\xi}}} \frac{d\dot{\tilde{\xi}}}{d\epsilon} \right) dt \Big|_{\epsilon=0} = 0 \quad (2.4)$$

Begrænsningen  $\epsilon = 0$  gør at  $\tilde{\xi} = \xi$  og det fås at  $\frac{d\tilde{\xi}}{d\epsilon} = \eta$  og  $\frac{d\dot{\tilde{\xi}}}{d\epsilon} = \dot{\eta}$ . Det sidste produkt fra (2.4) integreres, hvor begrænsningerne indsættes og  $\eta(a) = \eta(b) = 0$ .

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial \dot{\xi}} \dot{\eta} dt = \frac{\partial F}{\partial \dot{\xi}} \eta \Big|_a^b - \int_a^b \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{\xi}} \right) \eta dt = - \int_a^b \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{\xi}} \right) \eta dt \quad (2.5)$$

(2.5) indsættes i (2.4):

$$\int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial \xi} \eta - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{\xi}} \right) \eta \right) dt = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial \xi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{\xi}} \right) \eta dt = 0 \quad (2.6)$$

Lemma 3 giver dermed, at:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{\xi}} = 0 \quad (2.7)$$

Denne ligning kaldes Euler-Lagrange ligningen.

## 2.2 Hamiltons princip

Definition af bevægelse i et mekaniske system fra  $a$  til  $b$  er givet ved Hamiltons princip, hvor den samlede energi,  $L$ , er konstant. Her kaldes  $L$  for Lagrangian og er givet ved forskellen mellem den kinetiske energi,  $T$ , og den potentielle energi,  $U$ . Lagrangian er:

$$L = T - U \quad (2.8)$$

Hamiltons princip er givet ved:

$$I(t, q, \dot{q}) = \int_a^b L(t, q, \dot{q}) dt \quad (2.9)$$

For at  $I$  er minimal, skal den opfylde (2.7):

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (2.10)$$

Ved at bruge vektornotation, kan dette skrives som:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = 0 \quad (2.11)$$

hvor  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$  og  $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ , hvor  $n$  angiver dimensionen af rummet.

### 2.3 Lagrange-d'Alemberts princip

Hamiltons princip kan udvides til at være påvirket af et eksternt kraftfelt,  $Q$ .

$$\frac{d}{d\epsilon} \int_a^b L(t, q + \epsilon\eta, \dot{q} + \epsilon\dot{\eta}) dt \Big|_{\epsilon=0} + \int_a^b Q(t, q, \dot{q}) \eta dt = 0 \quad (2.12)$$

Ved at bruge variationsregning og vektornotation på dette, fås følgende udtryk:

$$\int_a^b \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \mathbf{Q} \right) \eta dt = 0. \quad (2.13)$$

Fra lemma 3 og (2.13) fås Lagrange-d'Alemberts princip

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q} \quad (2.14)$$

hvor vektoren  $\mathbf{Q}$  er de eksterne krafter.

## 3 | Pendul

I dette kapitel udledes differentialligninger for et pendul med Hamiltons princip. Der tegnes et faseportræt af differentialligningssystemet, og en løsning på lukket form til det lineariserede system beregnes. Den generelle strategi for at forstå ikke-linære autonome differentialligningssystemer i planet er [Hubbard and West]:

1. Skitser nulklernerne og retninger i basisfelterne.
2. Lokaliser ligevægtspunkter og analyser dem.
3. Tegn løsninger ved at starte omkring nulklerner og ligevægtspunkter.
4. Tegn separaticer ved at starte i sadlepunkterne og følg faseplanet.
5. Lokaliser stabile og ustabile limit cycles.
6. Find grænserne til basins og cobasins til sinks, sources og limit cycles ved brug af separaticer og limit cycles.
7. Forsøg at skrive løsningen på lukket form.

### 3.1 Pendulets differentialligning

Der ønskes en differentialligning, som beskriver et penduls bevægelser. Til dette anvendes Hamiltons princip. Den kinetiske energi,  $T$ , og potentielle energi,  $U$ , for et pendul opstilles.

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2, \text{ hvor } I = ml^2$$

$$U = mg\Delta s, \text{ hvor } \Delta s = l(1 - \cos \theta)$$

Der opstilles Lagrangian,  $L$ :

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta) \quad (3.1)$$

(3.1) indsættes i (2.11), hvorefter der reduceres:

$$\begin{aligned} -mgl \sin \theta - \frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta}) &= 0 \\ -mgl \sin \theta - ml^2\ddot{\theta} &= 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dette er differentialligningen for pendulet.

### 3.2 Analyse af pendulet

Differentialligningen for pendulet, (3.2), kan omskrives til et system af førsteordens differentialligninger:

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= y \\ \dot{y} &= -\frac{g}{l} \sin \theta\end{aligned}\tag{3.3}$$

Da dette er et ikke-lineært førsteordens differentialligningssystem kan den generelle strategi anvendes. Det antages, at  $\frac{g}{l} = 1$ .

Nulklinerne for systemet findes ved:

$$\begin{aligned}\dot{\theta} = y &= 0 \\ \dot{y} = -\sin \theta &= 0\end{aligned}$$

Det ses, at  $\dot{\theta}$  er nul, så længe  $y$  er 0 og at sinusfunktionen er nul, når  $\theta = k\pi$ , hvor  $k \in \mathbb{Z}$ . Nulklinerne deler faseplanet i basisfelter. Ved at betragte systemet i disse felter, kan en generel retning for løsninger findes i hvert felt. Dette ses på figur 3.1, hvor løsningerne i hvert felt har en retning mellem de afbildede pile.

Ligevægtspunkterne findes i punkterne  $(k\pi, 0)$ , da nulklinerne skærer hinanden i disse punkter. Faseportrættet kan tegnes, ved at evaluere Jacobimatricen i hvert af disse ligevægtspunkter.

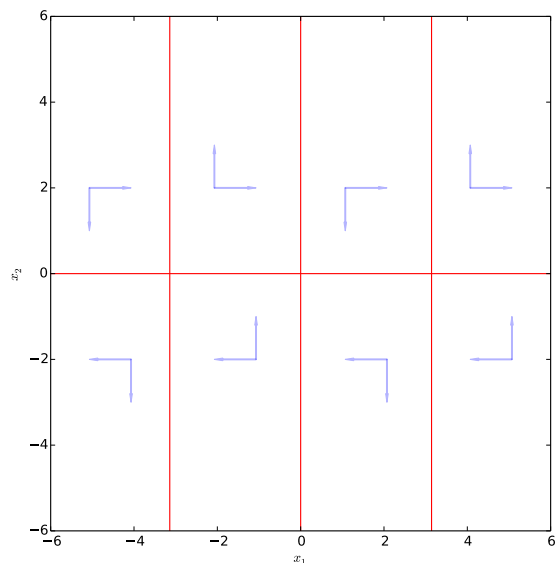
$$\mathbf{DA} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos \theta & 0 \end{bmatrix}$$

Et af ligevægtspunkterne er  $(0, 0)$ , hvor pendulet hænger lige ned og ikke har nogen hastighed. Punktet indsættes i Jacobimatricen.

$$\mathbf{DA}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Egenverdierne for matricen findes:

$$\begin{aligned}\lambda^2 + 1 &= 0 \\ \lambda &= \pm i\end{aligned}$$



Figur 3.1: Nulkliner for pendulet med basisfelternes retning.

Egenverdierne er komplekse. Typen af faseportræt bestemmes ud fra afsnit 1.4.2. Da  $\alpha = 0$  er faseportrættet i  $(0, 0)$  et stabilt center.

Et andet ligevægtspunkt,  $(\pi, 0)$ , indsættes i Jacobimatricen:

$$\mathbf{DA}_{(\pi,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

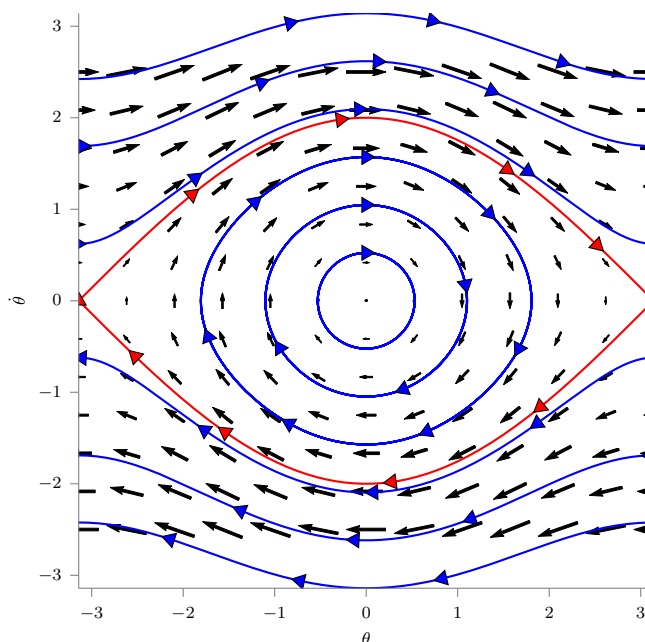
Igen findes egenverdierne:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 1 &= 0 \\ \lambda &= \pm 1 \end{aligned}$$

Denne gang er egenverdierne reelle. Fra afsnit 1.4.1 have det at faseportrættet er en saddle. Dernæst findes egenvektorerne til de fundne egenverdier.

$$\lambda = 1 : \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda = -1 : \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Vektorpilene bekræfter at punktet  $(\pi, 0)$  er en saddle. Der kan indtegnes løsninger af systemet, hvilket resulterer i faseportrættet. Det kan ses på figur 3.2.



Figur 3.2: Faseportræt af pendul.

Desuden ses separaticerne, tegnet med rødt, som dannes af to saddler. Separaticerne separerer løsninger, som har forskellige opførsler. Løsningerne indenfor separaticerne siges at ligge i et basin, mens løsningerne udenfor siges at ligge i cobasin. Generelt kan det siges, at løsningerne i basinet aldrig vil bevæge sig udenfor, derfor vil pendulet blive ved med at skifte mellem positiv og negativ vinkelhastighed, så længe pendulet starter i basinet. Ligger løsninger derimod i cobasinet, vil pendulet blive ved med at rotere i samme retning.

En limit cycle beskriver en lukket kurve, som har samme opførsel, som en sink eller source, men da dette system er relativt simpelt, findes ingen af disse.

Ved at anvende Jacobimatricen,  $\mathbf{DA}$ , evalueret i et ligevægtspunkt, kan en løsning på lukket form opstilles ved  $e^{\mathbf{DA}t}$ . Denne løsning kan omskrives ved

Putzers algoritme fra afsnit 1.6. For ligevægtspunktet  $(0, 0)$  bliver systemet

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ y \end{bmatrix}$$

med løsningen:

$$\begin{bmatrix} \theta \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Denne metode kan anvendes på alle andre ligevægtspunkter.



## 4 | Kranmotor

I dette kapitel modelleres en motor, som skal repræsentere en motor på kranen. Dette gøres ved, at opstille en elektrisk og en mekanisk model for motoren og sammensætte disse til en model, som derefter simuleres. Der er valgt at anvende parametre for laboratoriets portalkran til simuleringen.

### 4.1 Elektrisk model

En motor kan beskrives med et elektrisk kredsløb. Det ses på figur 4.1, hvor  $R_a$  [ $\Omega$ ] er motorens indre modstand, og  $L_a$  [H] er motorens indre induktans. En ligning for kredsløbet opstilles med Kirkhoffs spændingslov:

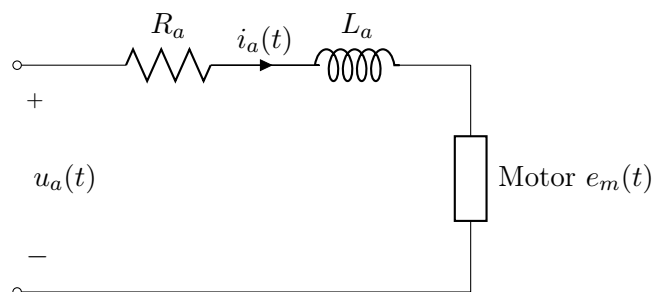
$$u_a(t) = i_a(t)R_a + L_a \dot{i}_a(t) + e_m(t) \text{ [V]} \quad (4.1)$$

$u_a(t)$  [V] er spændingen over motorens terminaler,  $i_a(t)$  [A] er strømmen gennem motoren og  $e_m(t)$  [V] er motorens inducerede spænding. For en motor med et konstant magnetfelt, kan den inducerede spænding beskrives med følgende udtryk

$$e_m(t) = k_e \omega_m(t) \text{ [V]} \quad (4.2)$$

hvor  $k_e$  [Vs] er den elektriske motorkonstant, og  $\omega_m(t)$  [ $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ] er motorens vinkelhastighed på et givet tidspunkt.

Ved hjælp af dette udtryk, kan (4.1) omskrives, så den afhænger af motorens vinkelhastighed. Der ses bort fra  $L_a$ , da denne ikke er relevant for systems



Figur 4.1: Kredsløb af DC motor

Steady State løsning. Det nye udtryk bliver:

$$u_a(t) = i_a(t)R_a + k_e\omega_m(t) \text{ [V]} \quad (4.3)$$

## 4.2 Mekanisk model

Den mekaniske del af en DC motor, med en permanent magnet, kan modelleres, som vist på figur 4.2. På figuren ses motorens rotation, friktionen og inertimomentet, som påvirker rotationen af motoren, hvilket giver nogle kraftmomenter. Kraftmoment er den kraft, der påvirker rotationen af et objekt. Motoren kan beskrives mekanisk som

$$\tau_e(t) = \tau_{\text{friktion}}(t) + \tau_{\text{inerti}}(t) + \tau_a(t) \text{ [Nm]} \quad (4.4)$$

hvor

- $\tau_a(t)$  [Nm] er kraftmomentet fra lasten.
- $\tau_e(t)$  [Nm] er det elektriske kraftmoment fra motoren.
- $\tau_{\text{friktion}}(t)$  [Nm] er kraftmomentet fra friktionen.
- $\tau_{\text{inerti}}(t)$  [Nm] er kraftmomentet med bidrag fra inertimomentet.

Da motoren har en permanent magnet, har den også et konstant magnetfelt. Det elektriske kraftmoment kan skrives som:

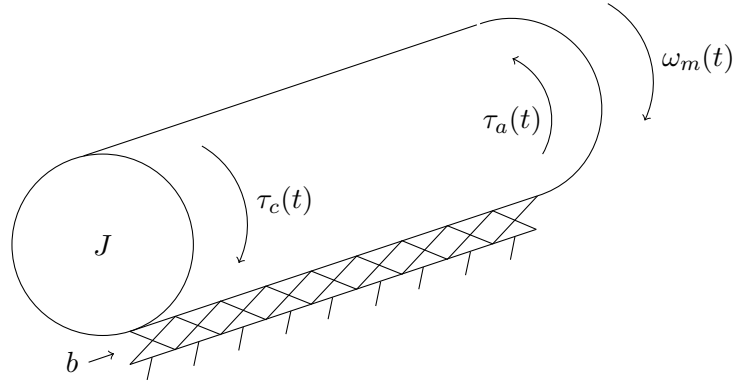
$$\tau_e(t) = k_e i_a(t) \text{ [Nm]} \quad (4.5)$$

Fra (4.4) og (4.5) kan en ny ligning opstilles der beskriver det mekaniske system

$$k_e i_a(t) = \underbrace{b\omega_m(t) + \tau_f}_{\tau_{\text{friktion}}(t)} + \underbrace{J\dot{\omega}_m(t)}_{\tau_{\text{inerti}}(t)} + \tau_a(t) \text{ [Nm]} \quad (4.6)$$

hvor

- $b$  [Nms] er viskositeten, som er friktionen af den hydrauliske væske omkring rotoren når den bevæges.
- $J$  [kgm<sup>2</sup>] er roterens inertimomentet, som er rotorens modstand mod at få ændret sin rotation.
- $\dot{\omega}_m(t)$  [ $\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$ ] er vinkelaccelerationen af rotoren.



Figur 4.2: Model af DC motor

- $\tau_f$  [Nm] repræsenterer kraftmomentet fra tørfriction og stiktion, altså friktionen mellem solide flader og den statiske friktion, der skal brydes for at sætte et objekt i bevægelse.

Ved at bruge funktionen, der beskriver den elektriske del (4.3), og funktionen, der beskriver den mekaniske del (4.6), opstilles en differentialligning for motoren:

$$\dot{\omega}_m(t) = - \left( \frac{k_e^2}{JR_a} + \frac{b}{J} \right) \omega_m(t) + \frac{k_e}{JR_a} u_a(t) - \frac{\tau_f}{J} - \frac{\tau_a(t)}{J} \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right] \quad (4.7)$$

### 4.3 Systemidentifikation

Det ønskes at opstille systemet på tilstandsform. Der kan ses på (4.7), som bestående af nogle konstanter, som ganges med tilstanden,  $\omega_m(t)$  og inputtet  $u_a(t)$ . De navngives  $A$ ,  $B$ . Der er desuden en funktion for udefrakommende kraftmomenter fra friktionen, samt lasten,  $\tau(t)$ .

$$\dot{\omega}_m(t) = - \underbrace{\left( \frac{k_e^2}{JR_a} + \frac{b}{J} \right)}_A \omega_m(t) + \underbrace{\frac{k_e}{JR_a}}_B u_a(t) - \underbrace{\frac{\tau_f}{J} - \frac{\tau_a(t)}{J}}_{\tau(t)} \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right] \quad (4.8)$$

Funktionen kan skrives som:

$$\dot{\omega}(t) = A\omega(t) + Bu(t) + \tau(t) \quad (4.9)$$

Standard tilstandsform for kontinuerte tidssystemer er:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

Systemet er først opstillet fra (4.9) hvor der ses bort fra  $\tau(t)$ , altså ingen friktion og intet påvirkende kraftmoment fra lasten.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\omega}(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Parametrene i tabel 4.1 kommer fra [Sloth et al., 2007], og er parametrene for motoren, der flytter kranen i  $x$ -retningen. Den kaldes  $x$ -motoren.

Motoren opererer med spændinger i intervallet  $\pm 13\text{V}$ .

Ra[Ω]	Ke[V/s]	J[kgm <sup>2</sup> ]	b[Nms]	$\tau_f$ [Nm]
1.22	0.032	$382 \cdot 10^{-6}$	$0.09 \cdot 10^{-3}$	0.06

Tabel 4.1: Parametre

(4.10) med parametrene fra tabel 4.1 simuleres i MATLAB, se *kranmotor.m* bilag B. Der gives et input,  $u(t)$ , og begyndelsesbetingelse,  $\omega(0)$ . På figur 4.3 ses en simulering med et konstant input  $u(t) = 5\text{V}$  og startbetingelse  $\omega(0) = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ . Det kan ses på figuren, at systemet stabiliseres omkring  $100 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .

Dernæst tilføjes friktion og kraftmoment fra lasten.

Der ses på  $x$ -motoren. Den påvirkes ikke af tyngdekraftens virkning på lasten.

Kraftmomentet  $\tau_a(t)$  sættes derfor til 0 for alle tidspunkter.

Da  $\tau_f$  ikke er lineær, er det nødvendigt at lave en approksimation. Den valgte løsning til dette er, at tilføje en kompensationspænding til inputtet. Det gøres ved at isolere  $u_a(t)$  fra (4.7):

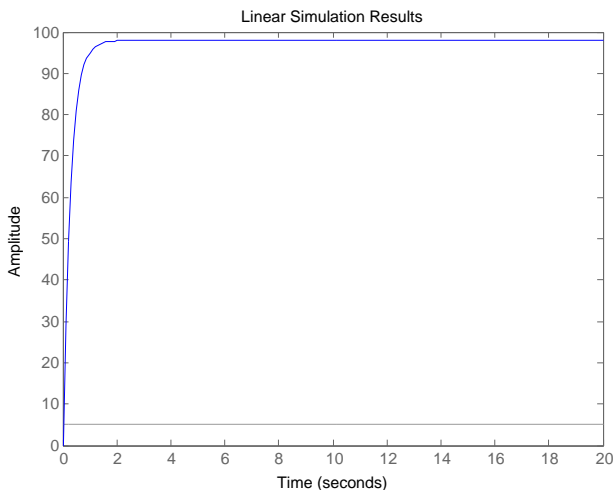
$$u_a(t) = \frac{JR_a}{k_e} \dot{\omega}_m(t) + \left( k_e + \frac{R_a b}{k_e} \right) \omega_m(t) + \frac{R_a}{k_e} \tau_f \text{ [V]} \quad (4.11)$$

Leddene, hvor  $\tau_f$  indgår, er konstant og består af kendte parametre.

$$u_k = \frac{R_a}{k_e} \tau_f \text{ [V]} \quad (4.12)$$

Ved at udregne en værdi for  $u_k$ , findes en spænding, som kan kompensere for tørfriktionen i motoren. Det er her nødvendigt, at antage  $\omega_m(t) > 0$ , da friktionen ellers ikke er lineær. Denne spænding bliver:

$$u_k = \frac{1.22\Omega}{0.032\text{Vs}} 0.06\text{Nm} = 2.3\text{V} \quad (4.13)$$

Figur 4.3: Input: 5V,  $\omega(0) = 0$ 

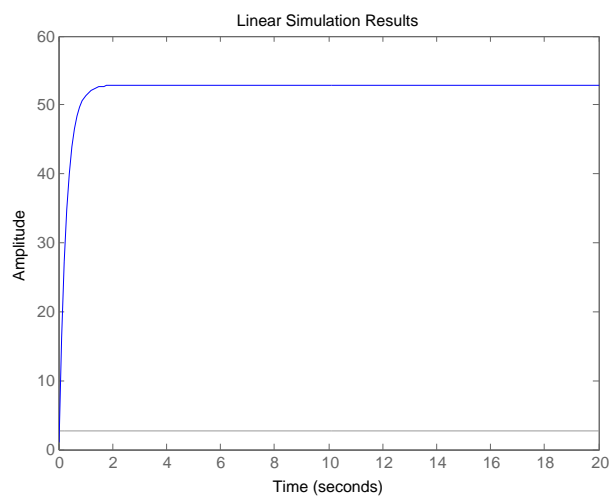
$u_k$  trækkes fra inputspændingen i simulationerne, for at kompensere for  $\tau_f$ . Systemet bliver da som følger:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ u(t) - u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\omega}(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Det er vigtigt at bemærke, at denne model kun er gældende for  $\omega_m(t) > 0$ . Figur 4.4 viser en simulering af motorens tilstand, hvor  $u_k$  er tilføjet, se *kran-motoroffset.m* bilag B. Denne model kan anvendes til at simulere  $x$ -motoren, således at bevægelse af kranen i  $x$ -retningen kan kontrolleres.

$y$ -motoren kan modelleres på lignende vis. Der kan dog ikke ses bort fra  $\tau_a$ , da tyngdekraftens virkning på loddet direkte påvirker motoren.

For at modellere et fuldstændigt kransystem, vil det være nødvendigt at se på gearing af motorerne. Gearingen giver en bedre kontrol over motorens vinkelhastighed. Det er dog undladt, da det ikke er en del af projektets rammer.



Figur 4.4: Input: 5V,  $\omega(0) = 1$ ,  $u_k = 2.3\text{V}$

## 5 | Modellering af kran

Formålet med dette kapitel er at modellere et kransystem, med henblik på prædiktions og analyse. Fremgangsmåden er:

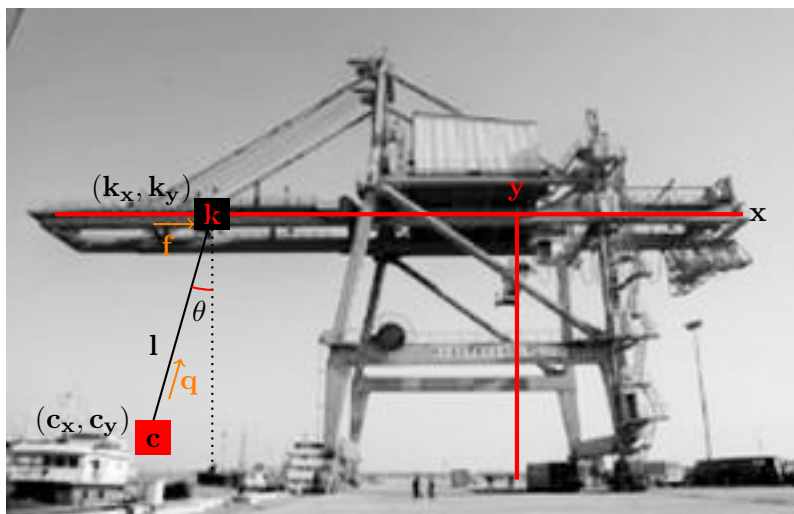
- Systemet skitseres og der opstilles forventninger til systemets opførsel.
- Lagrangemekanik bruges til at opstille bevægelsesligningerne i koordinaterne  $\theta, k_x, l$ .
- Bevægelsesligningerne omskrives til et system af førsteordens differentialligninger.
- Friktion tilføjes systemet.
- Modellen valideres med animationer af simuleringer.
- Systemet analyseres ved at finde ligevægtspunkter og opførsler.
- Domænerne til de forskellige løsninger findes.

Python pakken *SymPy* bruges til at undgå regnefejl. Desuden anvendes Livermore Solver for Ordinary Differential Equations [Radhakrishnan and Hindmarsh, 1993] til at løse differentialligninger numerisk. Det er en effektiv Fortran implementation af numeriske metoder, som her anvendes som et modul importeret i Python. LSODE implementationen kan både løse stive differentialligninger effektivt ved brug af baglæns differentiationsformler, samt anvende Adams-Moulton til at løse ikke-stive ligninger.

### 5.1 Modellering

Der ønskes at opstille et differentialligningssystem for en krans opførsel. Det gøres ved hjælp af Hamiltons princip og Euler-Lagrangeligninger, som beskrevet i kapitel 2.

Det kartesiske koordinatsystem er valgt, så kranen bevæger sig på  $x$ -aksen. Nulvinklen ligger parallel med den negative del af  $y$ -aksen, som også anses for at være nedad. Systemparametrene er defineret som følger:



Figur 5.1: Kran (designed by Nanjing Port Machinery Plant)

$c$  er positionsvektoren for containeren, som anses for at være en punktmasse.

$k$  er positionsvektoren for kranen, som anses for at være en punktmasse.

$l$  er afstanden mellem kranen og containeren. Antages et stift legeme.

$\theta$  er vinklen mellem  $l$  og den negative del af  $y$ -aksen.

$f$  er kraften der påvirker kranen horisontalt.

$q$  er kraften, der løfter containeren og der kan bruges til at kontrollere  $l$ .

Nogle af parametrene er vektorer i planen. Deres  $x$ - og  $y$ -koordinater angives med subscript.  $k_y$  er altid nul, da kranen bevæger sig horisontalt. Disse parametre er illustrerede på figur 5.1.

Forventninger til systemets opførsel:

1.  $q$  er normalkraften for containeren. Hvis  $q = 0$ , forventes det, at containeren falder med tyngdekraften og ikke påvirker kranen.
2. Hvis  $q$  modsvarer tyngdekraften, containerens hastighed og kranens hastighed, forventes det, at  $l$  holdes konstant.
3. Hvis containeren starter i stilstand og  $q$  holder  $l$  konstant, så vil containeren begynde at svinge, hvis kranen accelererer.
4. Hvis  $\theta \neq 0^\circ, 180^\circ$  og  $q$  holder  $l$  konstant, vil containeren påvirke kranens position og omvendt, alt efter masseforholdet.



5. Hvis friktion medtages i modellen, vil  $\dot{\theta}$  og  $\dot{k}$  gå mod 0.
6. Hvis kranen har en konstant hastighed, vil friktion få containeren til at hænge i en vinkel,  $\theta$ .

Først findes systemets kinetiske energi,  $T$ , og potentielle energi,  $U$ . Den totale kinetiske energi er givet ved summen af containerens kinetiske energi i henholdsvis  $x$ - og  $y$ -retningen og kranens kinetiske energi i  $x$ -retningen.

$$T = \frac{1}{2}m_c (\dot{c}_x^2 + \dot{c}_y^2) + \frac{1}{2}m_k \dot{k}_x^2 \quad (5.1)$$

hvor  $m_c$  er containerens masse og  $m_k$  er kranens masse. Containerens position i henholdsvis  $x$ - og  $y$ -retningen er givet ved

$$\begin{aligned} c_x &= k_x + l \sin \theta \\ c_y &= l \cos \theta \end{aligned}$$

$l$ ,  $\theta$  og  $k_x$  er alle tidsafhængige funktioner. Positionen differentieres for at opnå hastigheden:

$$\dot{c}_x = \dot{k}_x + \dot{l} \sin \theta + l \dot{\theta} \cos \theta \quad (5.2)$$

$$\dot{c}_y = \dot{l} \cos \theta - l \dot{\theta} \sin \theta \quad (5.3)$$

Den kinetiske energi opstilles:

$$T = \frac{m_c}{2} (l^2 \dot{\theta}^2 + 2 \dot{k}_x \dot{\theta} l \cos \theta + 2 \dot{k}_x \dot{l} \sin \theta + \dot{k}_x^2 + \dot{l}^2) + \frac{m_k}{2} \dot{k}_x^2 \quad (5.4)$$

Dernæst opstilles den potentielle energi i systemet. Nulpunktet defineres til være kranens position,  $k_x$ , og energien er negativ når containeren hænger nedad.

$$U = -m_c g l \cos \theta \quad (5.5)$$

Da den kinetiske og potentielle energi kendes, kan Lagrangian opstilles, som i (2.8).

$$\begin{aligned} L &= \frac{m_c}{2} (l^2 \dot{\theta}^2 + 2 \dot{k}_x \dot{\theta} l \cos \theta + 2 \dot{k}_x \dot{l} \sin \theta + \dot{k}_x^2 + \dot{l}^2) \\ &\quad + \frac{m_k}{2} \dot{k}_x^2 + m_c g l \cos \theta \end{aligned} \quad (5.6)$$

Lagrange-d'Alemberts princip, (2.14), anvendes hvor  $\mathbf{q} = (\theta, k_x, l)$ ,  $\dot{\mathbf{q}} =$

$(\dot{\theta}, \dot{k}_x, \dot{l})$ . Det resulterer i et system af tre andenordens differentialligninger, som er systemets bevægelsesligninger.

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{k}_x \\ \ddot{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_c l (g \sin \theta + l \ddot{\theta} + \ddot{k}_x \cos \theta + 2 \dot{l} \dot{\theta}) - Q_0 \\ m_c (-l \dot{\theta}^2 \sin \theta + l \ddot{\theta} \cos \theta + \ddot{l} \sin \theta + 2 \dot{l} \dot{\theta} \cos \theta + \ddot{k}_x) + m_k \ddot{k}_x - Q_1 \\ -m_c (g \cos \theta + l \dot{\theta}^2 - \ddot{k}_x \sin \theta - \ddot{l}) - Q_2 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Dette omskrives til et system af seks førsteordens differentialligninger, ved at isolere de andenaflædede, som beskrevet i afsnit 1.2:

$$y = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ k_x \\ \dot{k}_x \\ l \\ \dot{l} \end{bmatrix}, \quad \dot{y} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{k}_x \\ \ddot{k}_x \\ \dot{l} \\ \ddot{l} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Det generelle system bliver:

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \frac{1}{m_c m_k l^2} \left( \frac{Q_0 m_c}{2} \cos 2\theta + \frac{Q_0 m_c}{2} + Q_0 m_k - Q_1 m_c l \cos \theta \right) \\ + \frac{1}{m_c m_k l^2} \left( \frac{Q_2 m_c}{2} l \sin 2\theta - g m_c m_k l \sin \theta - 2 m_c m_k l \dot{\theta} \right) \\ \dot{k}_x \\ \frac{1}{m_k l} \left( -Q_0 \cos \theta + (Q_1 - Q_2 \sin \theta) l \right) \\ \dot{l} \\ \frac{Q_0 \sin 2\theta}{2 m_k l} - \frac{Q_1 \sin \theta}{m_k} + \frac{Q_2 \sin^2 \theta}{m_k} + \frac{Q_2}{m_c} + g \cos \theta + l \dot{\theta}^2 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

I 5.10 ses det færdige system uden friktion, hvor  $\mathbf{Q} = (0, f, -q)$  er indsat.  $f$  kan antages at være kraften kranføreren styrer, som bestemmer, hvordan

kranen bevæger sig.  $q$  er kraften i kablet, som holder containeren i luften.

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \frac{1}{m_k l} \left( -gm_k \sin \theta - 2m_k l \dot{\theta} + f \cos \theta - \frac{1}{2} q \sin 2\theta \right) \\ \dot{k}_x \\ \frac{1}{m_k} (-f + q \sin \theta) \\ \dot{l} \\ g \cos \theta + l \dot{\theta}^2 + \frac{1}{m_k} f \sin \theta - \frac{1}{m_k} q \sin^2 \theta - \frac{1}{m_c} q \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Da normalkraften ikke er med i modellen, beregnes hvad  $q$  skal være for at kabellængen holdes konstant.

$$q = \frac{m_c}{2(m_c \sin^2 \theta + m_k)l} (Q_0 \sin 2\theta - 2Q_1 l \sin \theta + 2gm_k l \cos \theta + 2m_k l^2 \dot{\theta}^2) \quad (5.11)$$

Det færdige system uden friktion er nu opstillet.

### 5.1.1 Friktion

Systemet udvides til at være påvirket af friktion.

Først findes friktionen for containeren. Der opstilles derfor en vektor,  $\dot{c}$ , for den samlede hastighed for containeren:

$$\dot{c} = \begin{bmatrix} l\dot{\theta} \cos \theta + \dot{l} \sin \theta + \dot{k}_x \\ l\dot{\theta} \sin \theta - \dot{l} \cos \theta \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Der ønskes en lineær, kontinuert model for den totale friktionskraft,  $F$ , der påvirker containeren, når der tilføjes en friktionskoefficient,  $z$ . Approksimationen  $F_{x,y}$  er modsatrettet hastigheden i det kartesiske koordinatsystem, og er givet ved:

$$F_{x,y} = -z ||\dot{c}|| \dot{c} \quad (5.13)$$

$F_{x,y}$  er:

$$F_{x,y} = \begin{bmatrix} -z \sqrt{|l\dot{\theta} \sin \theta - \dot{l} \cos \theta|^2 + |l\dot{\theta} \cos \theta + \dot{l} \sin \theta + \dot{k}_x|^2} (l\dot{\theta} \cos \theta + \dot{l} \sin \theta + \dot{k}_x) \\ -z \sqrt{|l\dot{\theta} \sin \theta - \dot{l} \cos \theta|^2 + |l\dot{\theta} \cos \theta + \dot{l} \sin \theta + \dot{k}_x|^2} (l\dot{\theta} \sin \theta - \dot{l} \cos \theta) \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Der foretages koordinattransformation [Goldstein] på denne vektor, for at få en repræsentation i det generaliserede koordinatsæt i henholdsvis  $\theta$ - og  $l$ -retningerne.

Der opstilles en Jacobimatrix ud fra vektoren med containerens nuværende hastighed, (5.12). Jacobimatricen bliver:

$$\mathbf{D}\dot{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} l \cos \theta & \sin \theta \\ l \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Denne matrix transponeres, og ganges på  $F_{x,y}$ , for at få friktionspåvirkningen i  $\theta$ - og  $l$ -retningerne.

$$F_{\theta,l} = \begin{bmatrix} -z(l\dot{\theta} + \cos \theta \dot{k}_x) \sqrt{|l\dot{\theta} \sin \theta - \dot{l} \cos \theta|^2 + |l\dot{\theta} \cos \theta + \dot{l} \sin \theta + \dot{k}_x|^2} l \\ -z(\dot{k}_x \sin \theta + \dot{l}) \sqrt{|l\dot{\theta} \sin \theta - \dot{l} \cos \theta|^2 + |l\dot{\theta} \cos \theta + \dot{l} \sin \theta + \dot{k}_x|^2} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Kranen er også udsat for en friktion:

$$F_k = -z_k ||\dot{k}_x|| \quad (5.17)$$

Da friktionens påvirkning er udregnet, tilføjes den til systemet. Den totale eksterne påvirkning,  $Q$ , af systemet er:

$$Q = \begin{bmatrix} F_\theta \\ f + F_k \\ -q + F_l \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Dette indsættes i (5.9), for at få det samlede system med friktion. Systemet vises ikke her, da det ikke kan være på siden, men der henvises til *kranmodellering.ipynb* bilag B. Der kan i bilaget også ses, hvad  $q$  skal være, for at holde kabellængden konstant i systemet med friktion.

## 5.2 Validering af model med simulering

Systemet simuleres, for at se om det opfører sig som forventningerne opstillet i starten af afsnit 5.1. Simuleringerne er animerede og kan ses på *animationer.ipynb* bilag B. Følgende observeres fra animationerne:

1. Containeren falder uden at påvirke kranen, hvis  $q = 0$ .
2.  $q$  kan konstrueres så  $l$  holdes konstant.

3. Containeren begynder kun at svinge hvis kranen accelererer.
4. Containerens og kranens position påvirker hinanden alt efter masseforholdet.
5. Vinkelhastigheden  $\dot{\theta}$  og  $\dot{k}$  går mod 0, når en friktion medtages i systemet, dog ved lave hastigheder er friktionen for lille.
6. Hvis kranen bevæger sig med en konstant hastighed, vil  $\dot{\theta}$  stadig gå mod 0, men containeren vil hænge en vinkel  $\theta$  efter kranen.

Resultat er, at systemet opfører sig som forventet, dog ikke ved lave hastigheder med friktion.

### 5.3 Analyse af systemet uden friktion

Det ønskes at analysere det dynamiske system mere generelt. Det gøres først for systemet uden friktion.

Til dette introduceres et princip fra [Hubbard and West, afsnit 8.1, princip 8.1.6]:

**Princip 1** *Generelt vil løsninger nær et ligevægtspunkt for et ikke-lineært differentiaalligningssystem se ud som det lineariserede system.*

*Princip 1 gælder ikke, når Jacobimatrizen har en ren imaginær egen værdi eller en egen værdi, der er 0.*

Det vil sige, at hvis et lineariseret system har en sink, en source eller en saddle, så vil det ikke-lineære system også have en lignende opførsel omkring samme ligevægtspunkt.

I tilfældet af en ren imaginær egen værdi eller en egen værdi, der er 0, kan egenskaber forsvinde ved lineariseringen.

Hvis en sink eller source forsvinder når systemet lineariseres, kaldes den svag. Dette kan være tilfældet, når egen værdierne for systemet er imaginære, hvilket svarer til et centerligevægtspunkt.

Når en lineariseret egen værdi er 0, kan lineære analyseværktøjer ikke anvendes. Nulegen værdien giver anledning til en degenerat, som med en lille forstyrrelse i form af linearisering kan forsvinde.

I disse tilfælde bruges numeriske analyse til at udelukke en sink-, source- eller centeropførsel. Bemærk, at opførelsen omkring et ligevægtspunkt ikke behøves at påvirke alle dimensionerne. Numeriske analyse af ligevægtspunkterne kan ses i bilag A.

Her analyseres systemet, hvor  $\dot{l} = 0$ , så  $l$  er konstant.  $\dot{y}$  er:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ -\frac{1}{(m_c \sin^2 \theta + m_k)l} \left( \frac{m_c}{2} (g \cos \theta + l\dot{\theta}^2) \sin 2\theta + (g \sin \theta + 2l\dot{\theta})(m_c \sin^2 \theta + m_k) \right) \\ \dot{k}_x \\ \frac{m_c (g \cos \theta + l\dot{\theta}^2) \sin \theta}{m_c \sin^2 \theta + m_k} \\ \dot{i} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Ved at undersøge systemet (5.19) ses det, at  $\dot{k}_x$  og  $k_x$  ikke indgår i  $\theta$  og  $\dot{\theta}$ , derfor kan systemet opdeles i to.

### 5.3.1 Systemet $(\theta, \dot{\theta})$

Der opstilles et system, som kun består af variablene  $\theta$  og  $\dot{\theta}$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ -\frac{1}{(m_c \sin^2 \theta + m_k)l} \left( \frac{m_c}{2} (g \cos \theta + l\dot{\theta}^2) \sin 2\theta + (g \sin \theta + 2l\dot{\theta})(m_c \sin^2 \theta + m_k) \right) \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

Systemet har to ligevægtspunkter:

$$\begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Jacobimatricen findes for systemet og udregnes i ligevægtspunkterne. Dertil beregnes egenverdierne med tilhørende egenvektorer. For punktet  $\theta = 0$  er egenverdierne  $\pm \frac{7i}{5}$ . Egenvektorer til egenverdierne er:

$$\lambda = \frac{7i}{5} : \begin{bmatrix} \frac{5}{7}i \\ 1.0 \end{bmatrix} \quad \lambda = -\frac{7i}{5} : \begin{bmatrix} -\frac{5}{7}i \\ 1.0 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

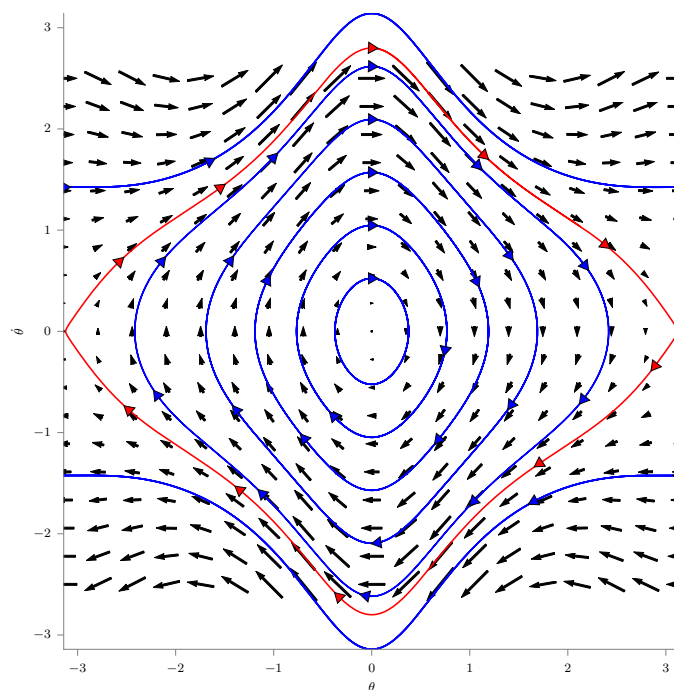
Da betingelserne for Princip 1 ikke er opfyldt, er det nødvendigt at analysere ligevægtspunkterne numerisk. De mulige opførsler er center, sink og source. Ved numerisk analyse udelukkes sink og source. Det ses i bilag A. Resultatet er, at ligevægtspunktet er et center.

For punktet  $\theta = \pi$  er egenverdierne  $\pm \frac{7}{5}$  og egenvektorer til egenverdierne er

$$\lambda = \frac{7}{5} : \begin{bmatrix} \frac{5}{7} \\ 1.0 \end{bmatrix} \quad \lambda = -\frac{7}{5} : \begin{bmatrix} \frac{-5}{7} \\ 1.0 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Da betingelserne for Princip 1 er opfyldt, er det ikke nødvendigt at analysere ligevægtpunkterne numerisk, og det vides, at det er en saddle.

Der ses på sadlepunkterne for systemet, for at se den globale opførsel for løsningerne. Løsningerne i disse punkter er separaticer, vist med rød, der opdeler faseportrættet i domæner, se figur 5.2. Domænet i midten tilhører de cykliske løsninger, hvor containeren svinger frem og tilbage. I domænerne over og under domænet i midten, svinger containeren kun i henholdsvis positiv og negativ omløbsretning.



Figur 5.2: Faseportræt af systemet (5.20)

### 5.3.2 Systemet $(\theta, \dot{\theta}, k_x, \dot{k}_x)$

Følgende system betragtes:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ -\frac{1}{(m_c \sin^2 \theta + m_k)l} \left( \frac{m_c}{2} (g \cos \theta + l\dot{\theta}^2) \sin 2\theta + (g \sin \theta + 2l\dot{\theta})(m_c \sin^2 \theta + m_k) \right) \\ \dot{k}_x \\ \frac{m_c (g \cos \theta + l\dot{\theta}^2) \sin \theta}{m_c \sin^2 \theta + m_k} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Det ses af (5.24), at  $\dot{k}_x$  bliver påvirket af systemet  $(\theta, \dot{\theta})$ , men ikke påvirker det. Det observeres at systemet er uafhængig af  $k_x$ .

Systemet har to ligevægtspunkter:

$$\begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ k_x \\ \dot{k}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \\ k_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R} \quad (5.25)$$

Jacobimatricen findes for systemet og udregnes i ligevægtspunkterne. Dertil beregnes egenværdierne med tilhørende egenvektorer. For punktet  $\theta = 0$ , er egenværdierne  $\pm \frac{7i}{5}$  og to gentagne egenværdier, der er 0. Egenvektorerne til egenværdierne er:

$$\lambda = 0 : \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \lambda = \pm \frac{7i}{5} : \begin{bmatrix} \frac{1}{7} \\ -0.2 \\ -10 \\ \frac{7}{7} \\ 1.0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{-1}{7} \\ -0.2 \\ 10 \\ \frac{7}{7} \\ 1.0 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Da betingelserne for Princip 1 ikke er opfyldt, er det nødvendigt at analysere ligevægtspunkterne numerisk. De mulige opførsler, for det imaginære par og nulegenværdierne, er center, sink og source. Ved numerisk analyse udelukkes sink og source. Resultatet er, at ligevægtspunktet er et center for  $\theta, \dot{\theta}, \dot{k}_x$ . Det ses i bilag A.

For punktet  $\theta = \pi$  er egenværdierne  $\pm \frac{7}{5}$  og to gentagne egenværdier der er



0. Egenvektorerne til egenværdierne:

$$\lambda = 0 : \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \lambda = \pm \frac{7}{5} : \begin{bmatrix} \frac{1}{7} \\ 0.2 \\ \frac{10}{7} \\ 1.0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{-1}{7} \\ 0.2 \\ \frac{-10}{7} \\ 1.0 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Betingelserne for princip 1 er ikke opfyldt, da der er to nulegenværdier. Det ses ud fra numerisk analyse af (5.24), at ligevægtspunktet er en saddle, og uafhængig af  $k_x$ . Det ses i bilag A.

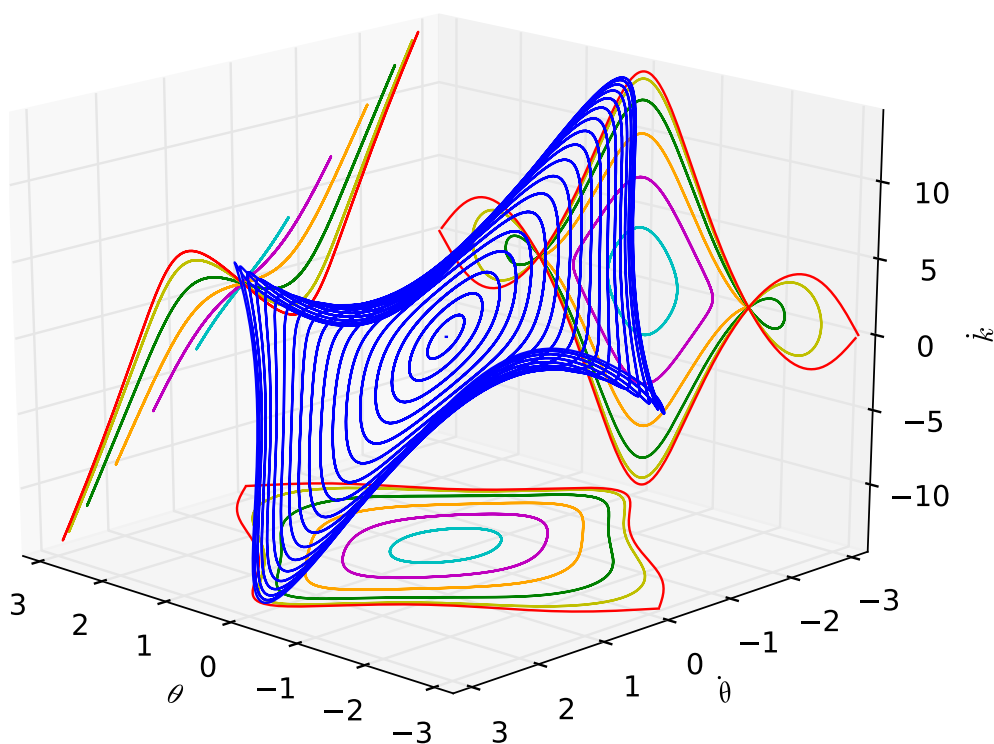
### 5.3.3 Faserum

For at kunne forstå samtlige opførsler i systemet, undersøges faserummet. Der er lavet et 3D plot over  $\theta, \dot{\theta}$  og  $\dot{k}_x$  for systemet uden friktion. Det ses på figur 5.3.  $k_x$  undlades, da den ikke påvirker andre dimensioner. Den blå overflade er de løsninger, der er cykliske for alle 4 dimensioner. Den opdeler faserummet i de forskellige domæner. Overfladen er defineret til at indeholde løsningerne, der har begyndelsesbetingelserne  $\theta : -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad \dot{\theta} = 0, \quad \dot{k}_x = 0$ . Fladen er dermed begrænset til basinet af systemet  $(\theta, \dot{\theta})$ . Kendes opførslen i de forskellige domæner, forstås systemet og dets stabilitet.

Når kurverne projekteres ned på  $(\theta, \dot{\theta})$ -planet ses den generelle opførsel som systemet fra afsnit 5.3.1. Dette skyldes at systemet  $(\theta, \dot{\theta})$  er uafhængig af de andre dimensioner, og dermed er projekteringen ens for alle  $\dot{k}_x$ .

Undersøges  $(\theta, \dot{k}_x)$ -planet, ses det, hvordan kranen bliver svunget rundt af containeren, hvis der startes i en given vinkel. Hvis der startes med en vinkel under  $90^\circ$ , fås en simpel cyklisk opførsel. Startes der derimod med en vinkel mellem  $90^\circ$  og  $180^\circ$ , vil kranen kort bevæge sig i den modsatte retning, når containeren kommer over de  $90^\circ$ . Startes i sadlepunktet  $(0, \pi)$ , vil der intet ske, da pendulet befinder sig i lodret position, og der ingen hastighed er på kranen.

Ved at undersøge  $(\dot{\theta}, \dot{k}_x)$ -planet, ses det, at hvis vinkelhastigheden er stor nok til at få containeren over  $90^\circ$ , uden at miste al hastighed, vil kranens hastighed gå i modsatte retning. Det betyder altså at kranen vil blive skubbet tilbage igen, da det antages, at  $l$  bliver holdt konstant.



Figur 5.3: 3D plot af kranen

Hvis begyndelsesværdierne ligger udenfor separaticen for  $(\theta, \dot{\theta})$ -systemet, er opførslen ikke længere cyklisk. Hvis  $\dot{\theta}$  er positiv, vil lasten blive ved med at svinge i positiv omløbsretning, og modsat ved negativ  $\dot{\theta}$ .

$(k_x, \dot{k}_x)$ -planet er en degenerate, hvor vektorfeltet i linjen  $\dot{k}_x = 0$  forsvinder. Det vil sige, at hvis der ingen hastighed er på kranen, ændres positionen ikke.

## 5.4 Analyse af systemet med friktion

Her analyseres systemet med friktion, hvor  $l$  er sat til at være konstant og  $\dot{l} = 0$ . Fremgangsmåden er den samme som i afsnit 5.3, men det er ikke muligt at opdele systemet. Dette system har de samme to ligevægtspunkter, som systemet uden friktion.

$$\begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ k_x \\ \dot{k}_x \\ l \\ \dot{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_1 \\ 0 \\ l_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \\ k_2 \\ 0 \\ l_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \quad l_1, l_2 \in \mathbb{R}_+$$

Jacobimatricen findes for systemet og udregnes i ligevægtspunkterne og egenverdierne med tilhørende egenvektorer beregnes. For punktet  $\theta = 0$  er egenverdierne  $\pm \frac{7i}{5}$  og fire gentagne egenverdier, der er 0. Egenvektorer til egenverdierne er:

$$\lambda = 0 : \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \lambda = \pm \frac{7i}{5} : \begin{bmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} \\ -0.2 \\ -\frac{5}{7} \\ 1.0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} \\ -0.2 \\ \frac{5}{7} \\ 1.0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da betingelserne for Princip 1 ikke er opfyldt, er det nødvendigt at analysere ligevægtspunkterne numerisk. De mulige opførsler er center, sink og source. Ved numerisk analyse udelukkes center og source, hvilket ses i bilag A. Den numeriske undersøgelse viser, at for punktet  $\theta = 0$  er ligevægtspunktet en svag sink, som er uafhængig af  $k_x$  og  $l$ . Bemærk, at  $\dot{l}$  også er uafhængig, da den er forsimplet til at være 0.

For punktet  $\theta = \pi$ , er egenverdierne  $\pm \frac{7i}{5}$  og fire gentagne egenverdier, der

er 0. Egenvektorer til egenværdierne er:

$$\lambda = 0 : \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \lambda = \pm \frac{7}{5} : \begin{bmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 0.2 \\ \frac{5}{7} \\ 1.0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 0.2 \\ -\frac{5}{7} \\ 1.0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da betingelserne for princip 1 ikke er opfyldt, er det nødvendigt at analysere ligevægtspunkterne numerisk, se bilag A. Resultatet er, at det er en saddle, som er uafhængig af  $k_x$  og  $l$ .

Dette system er noget mere kompliceret, men friktionen gør, at systemets energi vil gå mod 0, når tiden går mod uendelig. Det betyder, at  $\theta$  går mod en af værdierne  $\theta = n \cdot 2\pi$ , hvor  $n$  er et helt tal.  $\dot{\theta}, \dot{k}_x$  går mod 0.

## 6 | Eksperiment

Der ønskes at validere den opstillede model ud fra målinger foretaget på laboratoriets mini-portalkran. Det kræver, at følgende parametre bestemmes ud fra målinger foretaget i laboratoriet:

- Containerens masse,  $m_c$ .
- Kranens masse,  $m_k$ .
- Friktionskoefficient,  $z_k$ , for kranen.
- Friktionskoefficient,  $z$ , for containeren.

Containerens masse er i portalkranens tilfælde et lod på 5.5 kg. Det antages, at  $g = 9.82 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

### 6.1 Forsøgsopstilling

Portalkranen har flere sensorer. Den måler vinklen,  $\theta$ , kranens position,  $k_x$  samt wirelængden,  $l$ . Målingerne foretages af sensorer, som konverterer vinkel og positioner til spændinger. Disse spændinger vises på et oscilloskop, hvorfra datafiler kan genereres.

For at kunne konvertere spændingerne til henholdsvis meter og grader, måles spændingerne ved forskellige vinkler og positioner.  $l$  er målt som afstanden mellem kranen og loddet.  $k_x$  er afstanden mellem kranen og den venstre yderposition.  $\theta$  er vinklen mellem loddet og lodret nedad, i positiv omløbsretning.

Ud fra disse målinger er der foretaget lineær regression, se *regression.m* bilag B, således at der findes en konvertering fra spænding til henholdsvis længder og vinkel. Se tabel 6.1, 6.2 og 6.3. Forskrifterne for konvertering fra volt til de generaliserede koordinater ses her:

$$\begin{aligned}\theta &= 35.21v_\theta - 97.17 \text{ [}^\circ\text{]} \\ k_x &= 0.6224v_{k_x} - 0.3281 \text{ [m]} \\ l &= 22.11v_l + 3.312 \text{ [cm]}\end{aligned}$$

[cm]	[V]
39.5	1.48
51	2.13
70	2.95
80	3.40
100	4.24

Tabel 6.1: Længden  $l$ 

[m]	[V]
0	0.62
1.2	2.60
2.0	3.66
2.4	4.19
3.2	5.44
4.0	7.22

Tabel 6.2: Position  $k_x$ 

[°]	[V]
-30	1.89
-20	2.15
-10	2.51
0	2.80
10	3.09
20	3.34
30	3.54

Tabel 6.3: Vinklen  $\theta$ 

Kvantificeringsniveauet for det digitaliserede signal findes. Det ses på tabel 6.4. Disse kvantificeringsniveauer er lave nok til at få gode målinger til parameterbestemmelse og til validering af den opstillede model.

	Kvantificeringsniveau
$\theta$ [°]	0.55
$k_x$ [mm]	0.5
$l$ [mm]	0.1

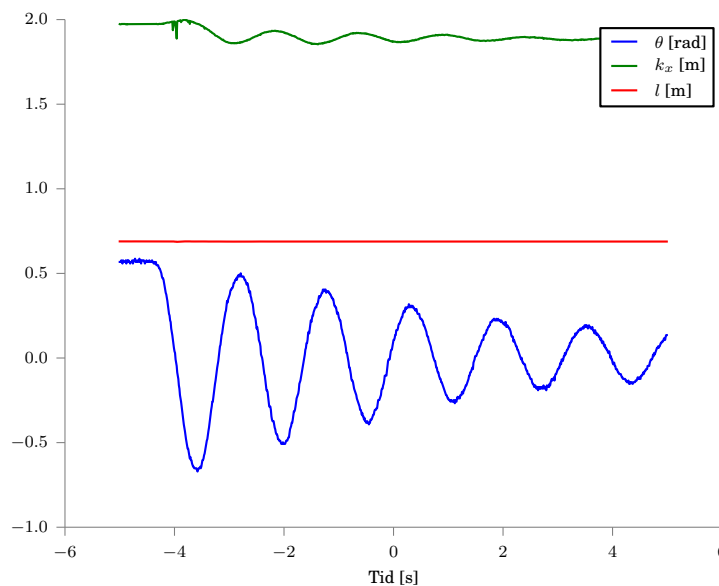
Tabel 6.4: Kvantificeringsniveauer for portalkranens målelige parametre.

## 6.2 Dataopsamling

Der er lavet følgende forsøg, hvor kranen er frakoblet motoren, for udelukkende at modellere kranens friktion. Der er foretaget målinger med følgende startbetingelser:

$$\begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ k_x \\ \dot{k}_x \\ l \\ \dot{l} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 30^\circ \\ 0 \\ 2.00 \text{ m} \\ 0 \\ 0.70 \text{ m} \\ 0 \end{bmatrix}$$

På figur 6.1 ses en måling, hvor spændingerne er konverteret til de passende enheder. Forsøget er gentaget tre gange, og disse målinger bruges til at lave



Figur 6.1: Målinger uden filter.

parameterbestemmelse.

### 6.3 Parameterbestemmelse

Afsnittet er baseret på [Sloth]. Modellen er afhængig af parametrene  $m_k$ ,  $m_c$ ,  $z_k$  og  $z$ . Massen  $m_c$  er kendt. Det ønskes derfor at estimere værdierne for de tre resterende parametre, så den opstillede model for kranen kan verificeres med målt data. Til parameterbestemmelse benyttes en prediction-error metode. Der vælges herunder en mindste kvadraters metode.

Mindste kvadraters metode estimerer fejlen mellem modellen med parametrene,  $\beta$  og den målte data. Der findes det bedste fit af modellen, i forhold til forsøgets målte input- og outputdata,  $(\mathbf{u}_i, \mathbf{y}_i)$  for  $i = 1, \dots, k$ , så fejlen

$$\mathbf{r} = \left( \mathbf{y} - f(\beta, \mathbf{u}) \right)^2$$

minimeres. Her er  $\mathbf{y}$  målt outputdata,  $f$  er modellen, der afhænger af parametrene  $\beta$  og input  $\mathbf{u}$ . Parametrene,  $\hat{\beta}$ , estimeres med følgende optimerings-

funktion:

$$\hat{\beta} = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^k \left( \mathbf{y}_i - f(\beta, \mathbf{u}_i) \right)^2 \quad (6.1)$$

Dette kan udvides til en vægtet mindste kvadraters metode, hvor  $\mathbf{w}_i$  en vægt af fejlen

$$\hat{\beta} = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^k \mathbf{w}_i \left( \mathbf{y}_i - f(\beta, \mathbf{u}_i) \right)^2 \quad (6.2)$$

Denne metode bruges, hvor  $f$  er den opstillede model for kranen.

Til simuleringen skal der bruges en begyndelsesbetingelse og parametre. Derfor er det vigtigt at undgå fejl i begyndelsesbetingelserne, så fejlen i parametrene kan minimeres.

Til parameterbestemmelse bruges data fra *scope\_6.csv*, bilag B. Det ses, at der er en del støj i målingerne fra dataopsamlingen. Derfor anvendes et Moving-Average filter for at fjerne støj i målingerne, så en god begyndelsesbetingelse kan bestemmes. Derudover er der i målingerne for kranens position fjernet tydelige fejlmålinger. Figur 6.2 viser den samme måling, som figur 6.1, hvor der er implementeret et filter.

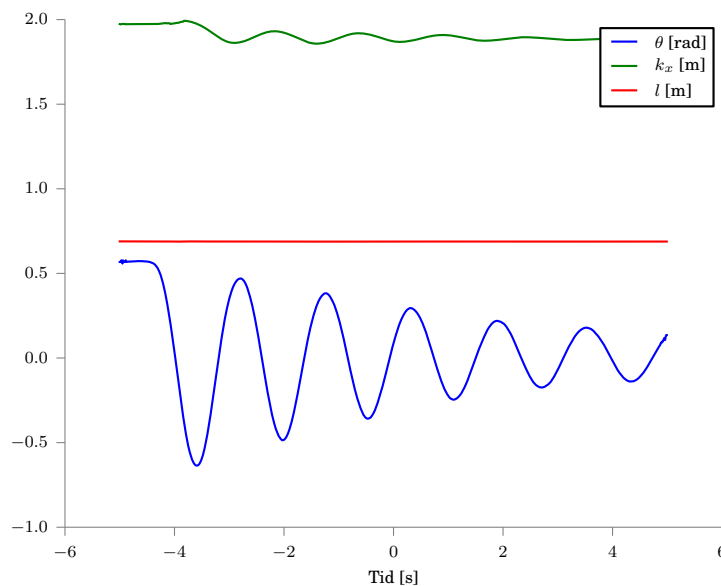
På de filtrede data bruges en numerisk andenordens central differentiationsmetode, for at finde hastighederne, så en god begyndelsesbetingelse kan bestemmes. Begyndelsesbetingelsen består af positionerne  $\theta$ ,  $k_x$  og  $l$ , samt hastighederne  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{k}_x$  og  $\dot{l}$ . Det giver den mindste fejl, at bestemme hastighederne, hvor vinkelhastigheden er størst. Dette er i området omkring  $\theta = 0$ , hvor tyngdeaccelerationen ikke påvirker vinkelaccelerationen.

For at mindske fejlen i begyndelsesbetingelsen, vælges fem punkter på hver side af tiden  $-3.25$ , som svarer til index 175. Der bruges en vægtet mindste kvadraters metode til at minimere forskellen mellem modellen, for  $\theta$  og  $k_x$  med disse begyndelsesbetingelser, simuleret i fire sekunder og målt data for  $\theta$  og  $k_x$ . Den vægtede metode gør, at fittet for  $\theta$  og  $k_x$  er lige vigtige. De estimerede parametre ses i tabel 6.5.

Parameter	Gæt	Estimat
$m_k$ [kg]	4.970	6.366
$z$	$1.829 \cdot 10^{-6}$	0.081
$z_k$	15.380	20.164

Tabel 6.5: Parameterestimation.





Figur 6.2: Målinger med 15-ordens filter.

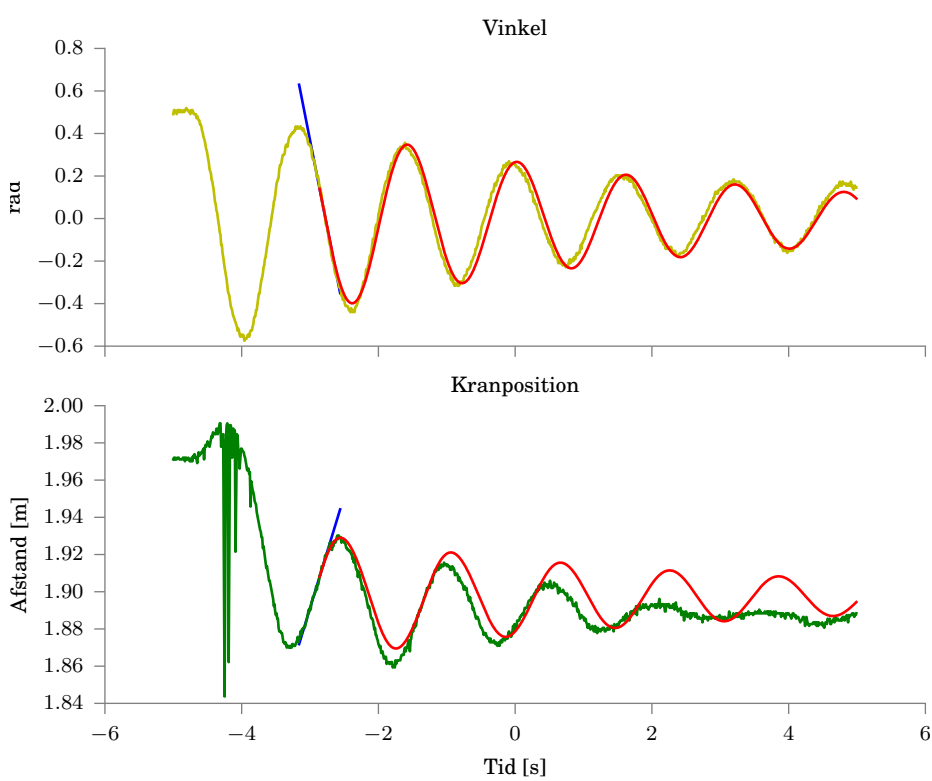
## 6.4 Verifikation

For at se, om opførslen af den opstillede model stemmer overens med virkeligheden, plottes modellen med de tre estimerede parametre.

Figur 6.3 viser modellen med parametrene fra tabel 6.5, plottet med data fra *scope\_5.csv*, se bilag B. Det ses, at fittet for vinklen følger målingerne i omkring tre sekunder og er lidt forskudt resten af tiden.

Modellen for kranens position mangler korrekt dæmpning, som påvirker både frekvens og amplitude, hvilket gør at modellen synligt afviger fra målingerne efter omkring et halvt sekund.

Alle simuleringer og parameterbestemmelsen i dette afsnit findes i *eksperiment.ipynb* bilag B.



Figur 6.3: Plot af målinger og model med de bestemte parametre.

## 7 | Konklusion

Formålet med dette projekt var at få kendskab til konkrete dynamiske systemer og metoder til at analysere disse. Forskellige værktøjer til modellering og analyse introduceres og anvendes på de konkrete eksempler, et pendul, en kranmotor og en portalkran. Desuden valideres kranmodellen ved hjælp af målinger foretaget på en mini-portalkran.

### Modellering

Lagrangemekanik er anvendt til modellering af de mekaniske systemer. Fordelen ved at anvende lagrangemekanik er, at det er en meget generel metode, som kan anvendes til at opstille differentialligningerne til dynamiske systemer, i generaliserede koordinater, ved at undersøge energien i systemet. En anden fordel er, at det ikke er nødvendigt at tage højde for normalkraften. Desuden er metoden god til at håndtere mangedimensionelle systemer. Dog mistes overblikket over fysikken.

Der opstilles modeller for et pendul og en portalkran med denne metode. Desuden anvendes en tilstandsmodel til at simulere et dynamisk system, her en kranmotor. Modellerne simuleres. For kranen ses det, at simulationen stemmer overens med de opstillede forventninger.

### Analyse

Pendul- og kransystemerne analyseres med en række analyseværktøjer, som giver en forståelse for systemernes opførsler i forskellige situationer. Pendulet analyseres uden friktion, som et teoribekræftende eksempel. Kranen, som er projektets hovedeksempel, analyseres både med og uden friktion. De anvendte lineære analysemetoder viste sig at være tilstrækkelige til analyse af systemerne uden friktion. I tilfældet med friktion, var numeriske analysemetoder nødvendige for at finde systemets opførsel. Det var muligt at finde samtlige domæner, og opførslen i disse, for pendulsystemet og kransystemerne.

## **Eksperiment**

Der er foretaget en række eksperimenter på laboratoriets mini-portalkran, således at den opstillede model for kransystemet kan tilpasses det pågældende fysiske system. Modellen kunne ikke tilpasses perfekt, hvilket var forventet. Det skyldes, at kransystemets samlede friktion er modelleret simpelt ud fra to friktionskoefficienter, hvor kranens friktion er modelleret lineært med hensyn til hastigheden og containerens friktion er modelleret som et kvadrat af hastigheden. Modellen passer alligevel, som set på figur 6.3, med virkeligheden i få sekunder, ud fra de estimerede parametre. Der findes mere avancerede metoder, som dog ligger udenfor dette projekts rammer, som kan bruges til at modellere stiktionen, da det formentlig er denne, der er årsag til den største fejlkilde.

# Litteratur

Robert A. Adams and Christopher Essex. *Calculus, A Complete Course*. Pearson, seventh edition.

Thomas Arildsen, Arne Jensen, and Rafael Wisniewski. Matematik-teknologi 3. semester Projekt introduktion, 2014.

Paul Dawkins. Paul's online math notes. <http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/DE/PhasePlane.aspx>, 2003-2014. [Online; accessed october-2014].

Glenn Elert. The physics hypertextbook, aerodynamic drag. <http://physics.info/drag/>, 1998-2014. [Online; accessed october-2014].

Herbert Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, third edition.

John H. Hubbard and Beverly H. West. *Differential Equations: Dynamical Systems Approach*. Springer.

Robert L. Devany Morris W. Hirsch, Stephen Smale. *Differential equations, dynamical systems and an introduction to chaos*. Elsevier, academic press, second edition.

Jacob Schach Møller. *Ordinary differential equations, an introduction for mathematicians*. Aarhus university, first edition.

Edward B. Saff R. Kent Nagle and Arthur David Snider. *Fundamentals of differential equations*. Pearson, seventh edition.

Krishnan Radhakrishnan and Alan C. Hindmarsh. Description and Use of LSODE, the Livermore Solver for Ordinary Differential Equations, 1993.

Christoffer Sloth. Introduction to System Identification. [Lecture Notes; accessed december-2014].

Christoffer Sloth, Thomas Esbensen, Brian T. Jensen, and Michael O. Niss. Velocity Control of Portal Crane, 2007.

Gerald Teschl. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. American Mathematical Society, authors preliminary version edition.

Rafael Wisniewski. Mechanical Systems I - Lagrange Mechanics, a. [Lecture Notes; accessed december-2014].

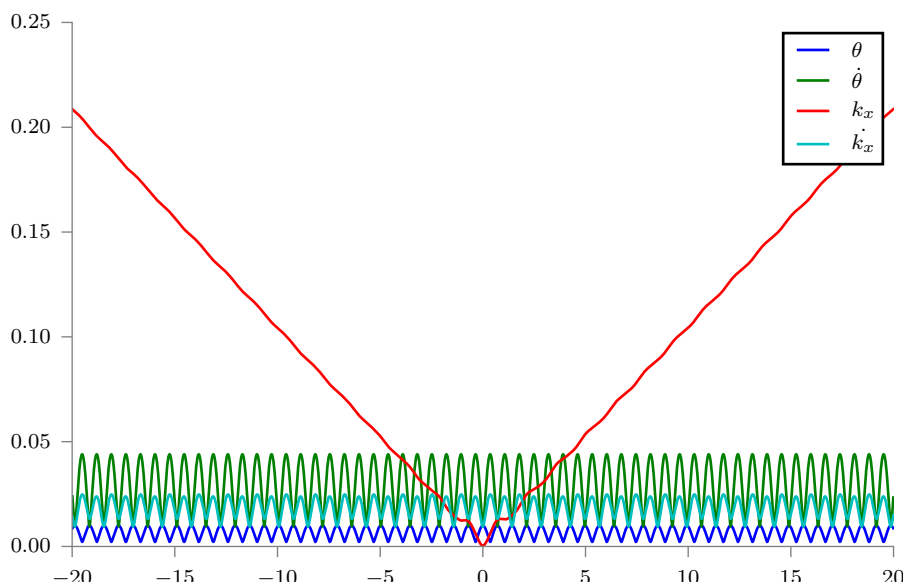
Rafael Wisniewski. Mechanical Systems II - Introduction to Calculus of Variations, b. [Lecture Notes; accessed december-2014].

Bilag

# A | Ligevægtspunktsanalyse

Her foretages den numeriske analyse af ligevægtspunkterne, hvor det er nødvendigt. Den numeriske undersøgelse af et ligevægtspunkt bliver udført, ved at lave en normalfordeling af begyndelsesbetingelser omkring ligevægtspunktet og undersøge, hvordan de ændres over tid. Normalfordelingen af begyndelsesbetingelserne kan simuleres frem eller tilbage i tiden. Normalfordelingen kan eventuelt kun laves i nogle bestemte dimensioner, for udelukkende at se på deres bidrag. Normalfordelingen er lavet med 500 punkter og en standardafvigelse på 0.01.

For at afgøre, om et ligevægtspunkt eksempelvis er en source, simuleres normalfordelingen tilbage i tiden. Givet uendelig tid, vil løsninger bevæge sig ind i centrum af ligevægtspunktet.



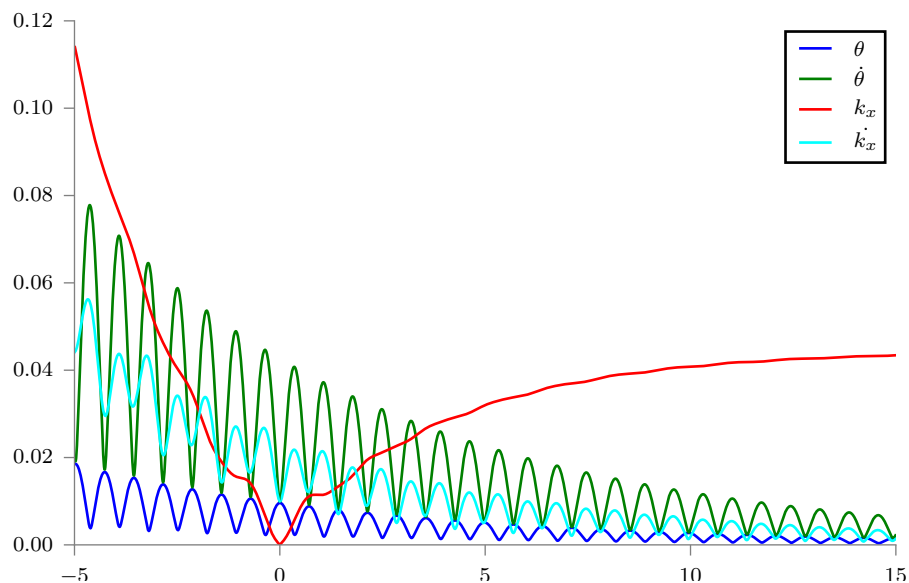
Figur A.1: Centerligevægtspunkt uden friktion



Først betragtes tilfældet uden friktion, og følgende ligevægtspunkt:

$$\begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ k_x \\ \dot{k}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k_1 \in \mathbb{R} \quad (\text{A.1})$$

Der varieres over begyndelsesværdierne på variablerne  $\theta, \dot{\theta}$  og  $\dot{k}_x$ . Resultatet ses på figur A.1. Det ses, at  $k_x$  er den eneste variabel uden en cyklisk opførsel, og det kan dermed konkluderes, at ligevægtspunktet er et center, der påvirker  $\theta, \dot{\theta}$  og  $\dot{k}_x$ .



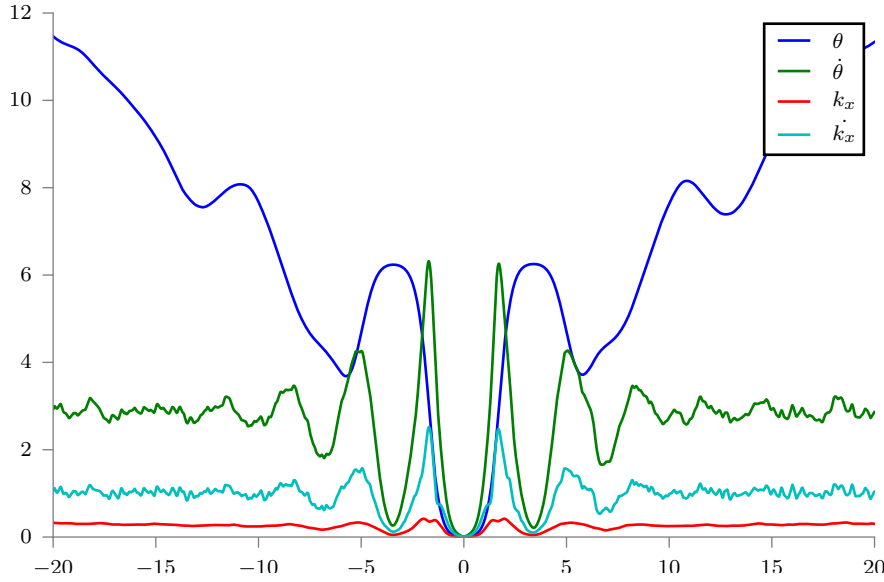
Figur A.2: Sinkligevægtspunkt med friktion

Samme ligevægtspunkt betragtes, i systemet med friktion:

$$\begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ k_x \\ \dot{k}_x \\ l \\ \dot{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_1 \\ 0 \\ l_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k_1 \in \mathbb{R}, \quad l_1 \in \mathbb{R}_+ \quad (\text{A.2})$$

Der varieres igen over begyndelsesværdierne på variablerne  $\theta, \dot{\theta}$  og  $\dot{k}_x$ . Der ses på figur A.2, at løsningerne går mod at blive konstante, når der simuleres

frem i tiden, og de afviger mere og mere, når der simuleres tilbage i tiden. Alle andre variable end  $k_x$  spiralerer ind i samme punkt. Ligevegtspunktet er altså en sink. Den påvirker ikke  $k_x$ .



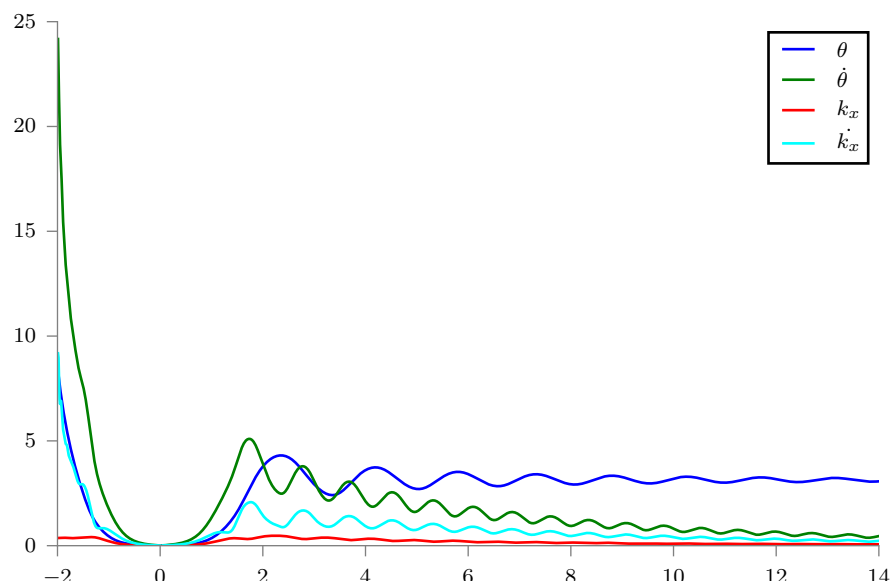
Figur A.3: Saddleligevegtspunkt uden friktion

Følgende ligevegtspunkt betragtes, først i tilfældet uden friktion:

$$\begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ k \\ \dot{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \\ k_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k_1 \in \mathbb{R} \quad (\text{A.3})$$

Der varieres over variablene  $\theta, \dot{\theta}$  og  $k_x, \dot{k}_x$ , som ses på figur A.3.

Det ses af plottet, at  $\theta$  har en opførsel, som hverken svarer til center, sink eller source. Dette er forventet ved en saddle, som kan skille domæner. Alle variable har en kraftig stigning i standardafvigelsen i de første sekunder når tiden simuleres frem eller tilbage. Varieres der kun på  $k_x$ , påvirkes saddlen på samme måde, som hvis den ikke blev varieret. Der ikke tegn på at nulegenværdierne giver anledning til en sink eller source.



Figur A.4: Saddleligevægtspunkt med friktion

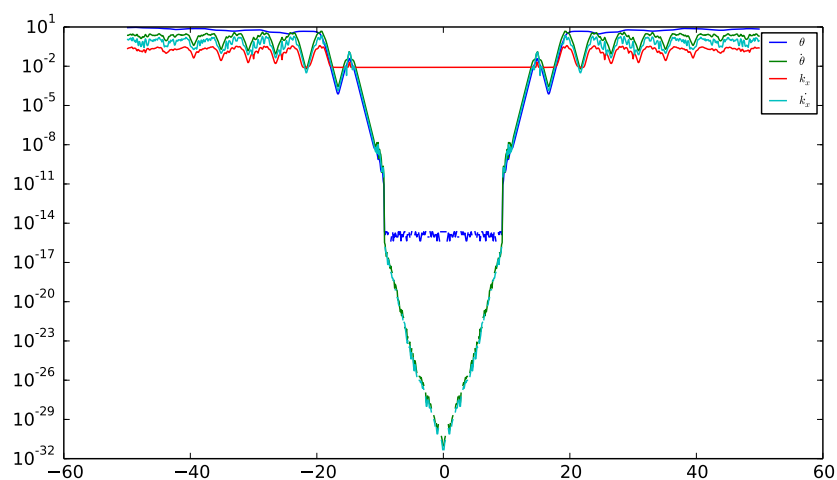
Det sidste ligevægtspunkt er fra systemet med friktion:

$$\begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ k_x \\ \dot{k}_x \\ l \\ \dot{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \\ k_1 \\ 0 \\ l_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k_1 \in \mathbb{R}, \quad l_1 \in \mathbb{R}_+ \quad (\text{A.4})$$

Der varieres over begyndelsesværdierne på variablene  $\theta, \dot{\theta}$  og  $\dot{k}_x$ . Resultatet ses på figur A.4. Det bliver det samme som tilfældet uden friktion, men løsningerne bevæger sig over i et af de to nærmeste sink ligevægtspunkter. I modsætning til uden friktion, bliver saddlen påvirket af  $\dot{k}_x$ . Det er ikke muligt at afgøre hvilken påvirkning nulegenværdierne har, hvis nogen.

### Numerisk Ustabilitet

Det ses ved simulationer i saddeleligevægtspunkterne, at der er numerisk ustabilitet. Efter 10 sekunder ses det tydeligt. Det gælder både for systemet med og uden friktion. Det ses på figur A.5.



Figur A.5: Numerisk ustabilitet af saddle

## B | Elektronisk

Elektroniske filer findes på AAU-projektbibliotek. De kan desuden ses på github:

<https://github.com/cywer/P3-Dynamical-Systems>

Datastrukturen er som følger:

```
Motor/kranmotor.m
Motor/kranmotoroffset.m
Kran/kranmodellering.ipynb
Kran/animationer.ipynb
Eksperiment/regression.m
Eksperiment/eksperiment.ipynb
Eksperiment/scope_5.csv
Eksperiment/scope_6.csv
Eksperiment/Data/**Yderlige måledata**
```

Rapport.pdf

LaTeXGrafik/\*\*Billeder fra rapport\*\*