

未来5周

12	5.7	电力系统简介，正弦量的相量表示 (L14)	H11, S3 布置
	5.9	阻抗和导纳，相量法 (L15)	
13	5.14	正弦稳态电路的功率 (L16)	H12
	5.16	习题课 (R6)	
14	5.21	频率特性，滤波器，谐振 (L17)	H13
	5.23	三相 (L18)	S3 交
15	5.28	习题课 (R7)	H14
	5.30	互感 (L19)	
16	6.4	变压器，周期非正弦，期末复习 (L20)	
	6.6	习题课 (R8)	

第14讲 正弦稳态分析导论

(正弦激励下动态电路的稳态分析)
Sinusoidal Steady State Analysis

1 电力系统简介

2 正弦量的基本概念 (已预习)

3 正弦稳态分析的关键 → 相量

重点

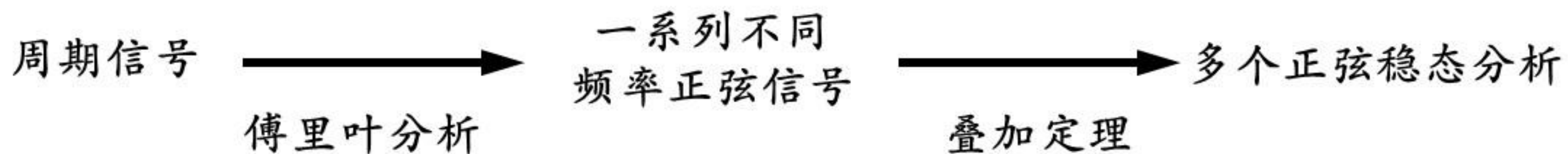
本讲重难点

- 方法论
 - 相量和正弦量的一一对应关系
- 世界观
 - 干活儿不要一根筋

Why 正弦激励下动态电路的稳态响应？ (正弦稳态分析)

自然界本身具有正弦性质：无/欠阻尼二阶系统

正弦信号的完备性：正弦量的线性运算 $+$ 、 $-$ 、微分、积分均为同频正弦量

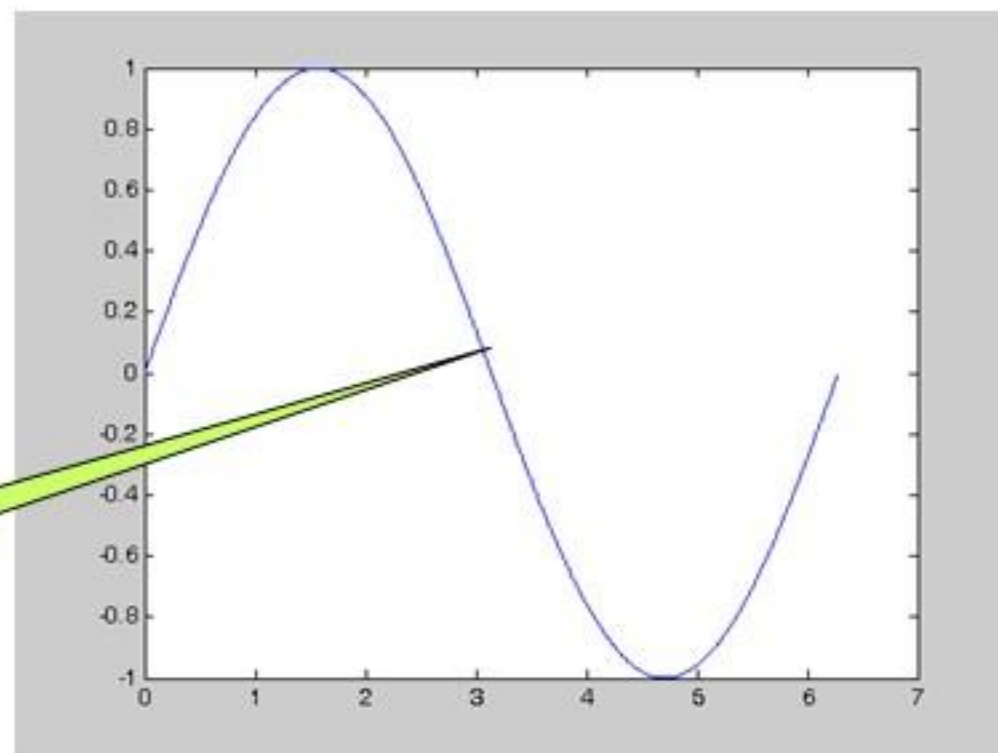


正弦电压容易通过机械旋转的方式来产生

电能远距离传输的需要（便于升压）

1 电力系统 (Power System) 简介

正弦交流



- AC系统和DC系统谁先诞生?
- 为什么用AC系统?
- 目前的AC系统是怎样的?

AC系统和DC系统谁先诞生(电流大战)?

- 爱迪生发明了白炽灯和直流发电机，该发明成为1881年巴黎电气博览会的奇迹之一。1882年爱迪生在欧洲和美国建设了若干直流中心发电站。
- 西屋于1885年获得了特斯拉多相交流系统专利的独家使用权，并且说服特斯拉加入了西屋电气公司。
- Steinmetz于1895年获得了专利“交流配电系统”，解决了交流系统的分析问题。
- 1895年西屋获得了在尼亚加拉瀑布安装交流发电机的合同，该项目于1896年向32公里外的布法罗市供电。



■ 为什么选择AC?

- 发电机
- 变压器

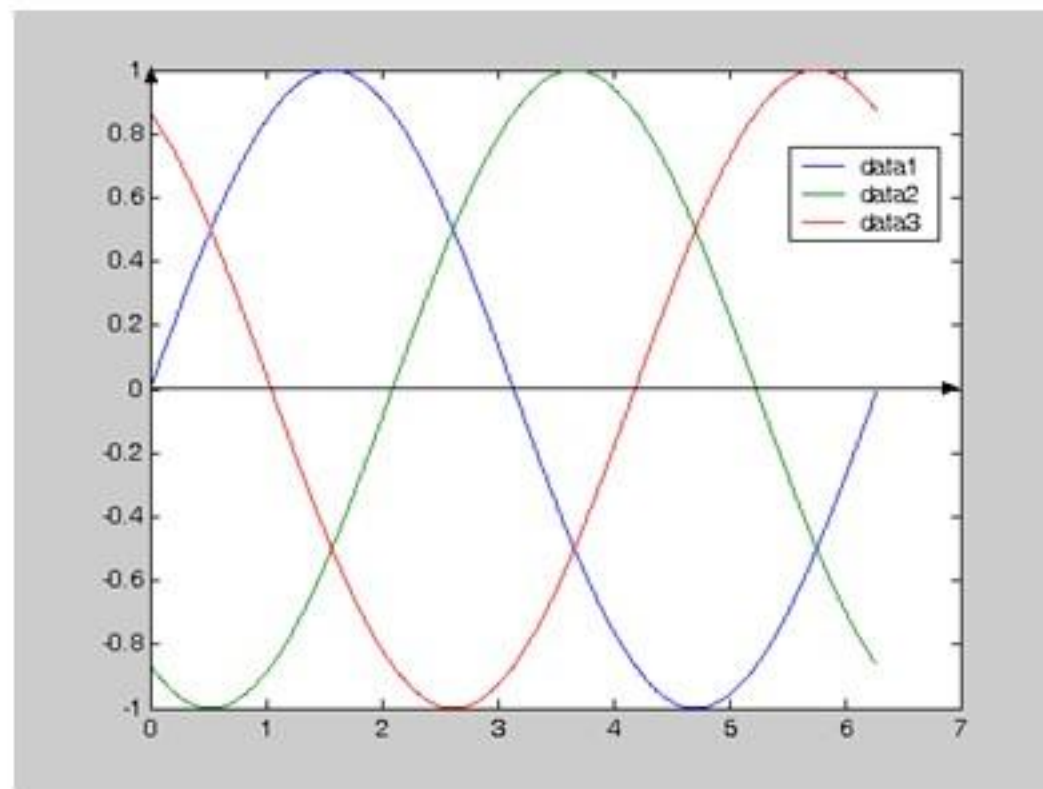
目前采用哪种类型的交流?

■ 电压

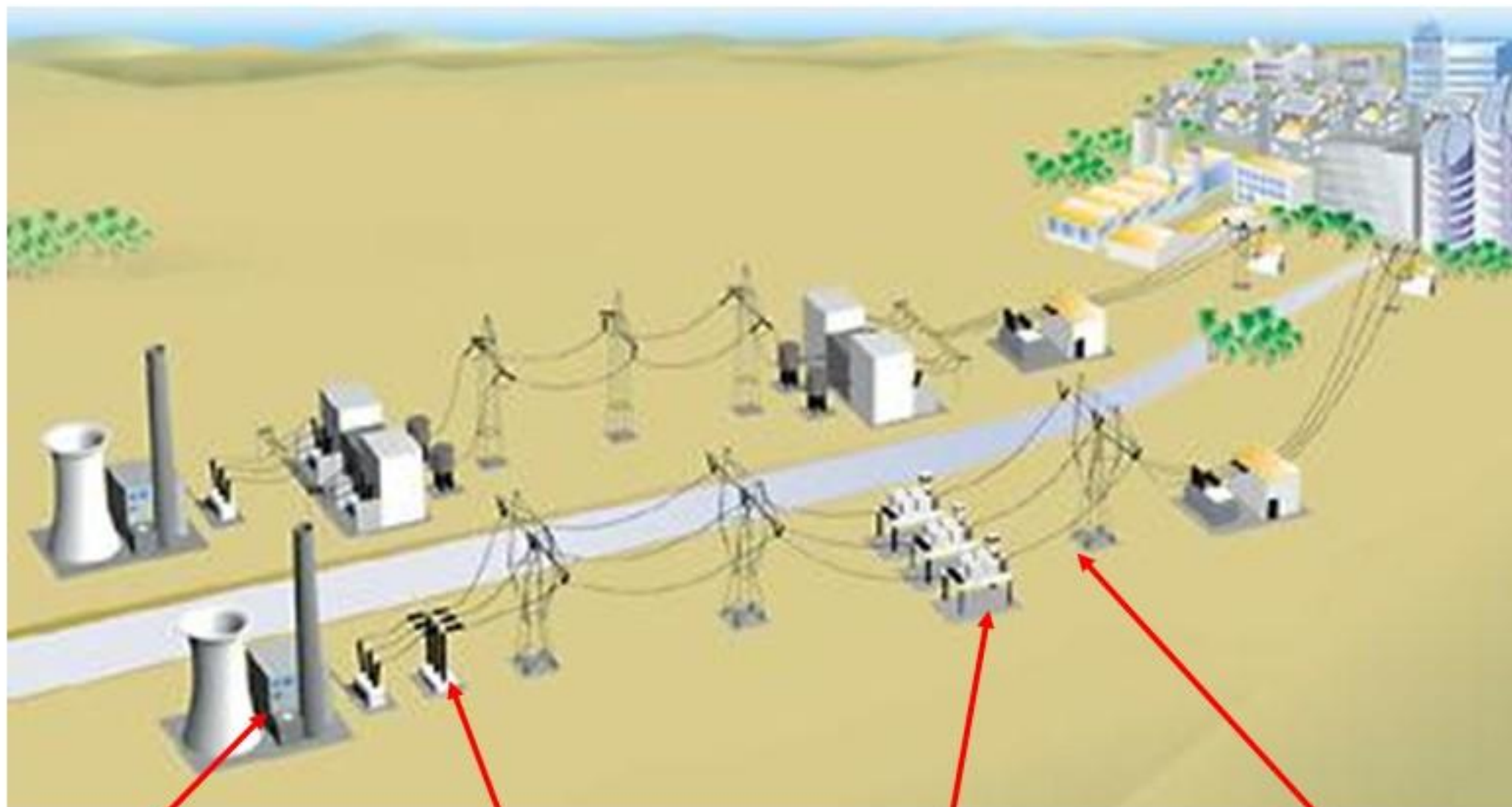
- 1000kV-500 kV-220 kV-110 kV
- 35 kV-10 kV-380 V-220 V

■ 三相正弦交流

- 效率
- 瞬时功率



电力系统



电厂(发电机)
Power Plant
Generator

变压器
Transformer

(输)电线
Power Line

发电厂实例



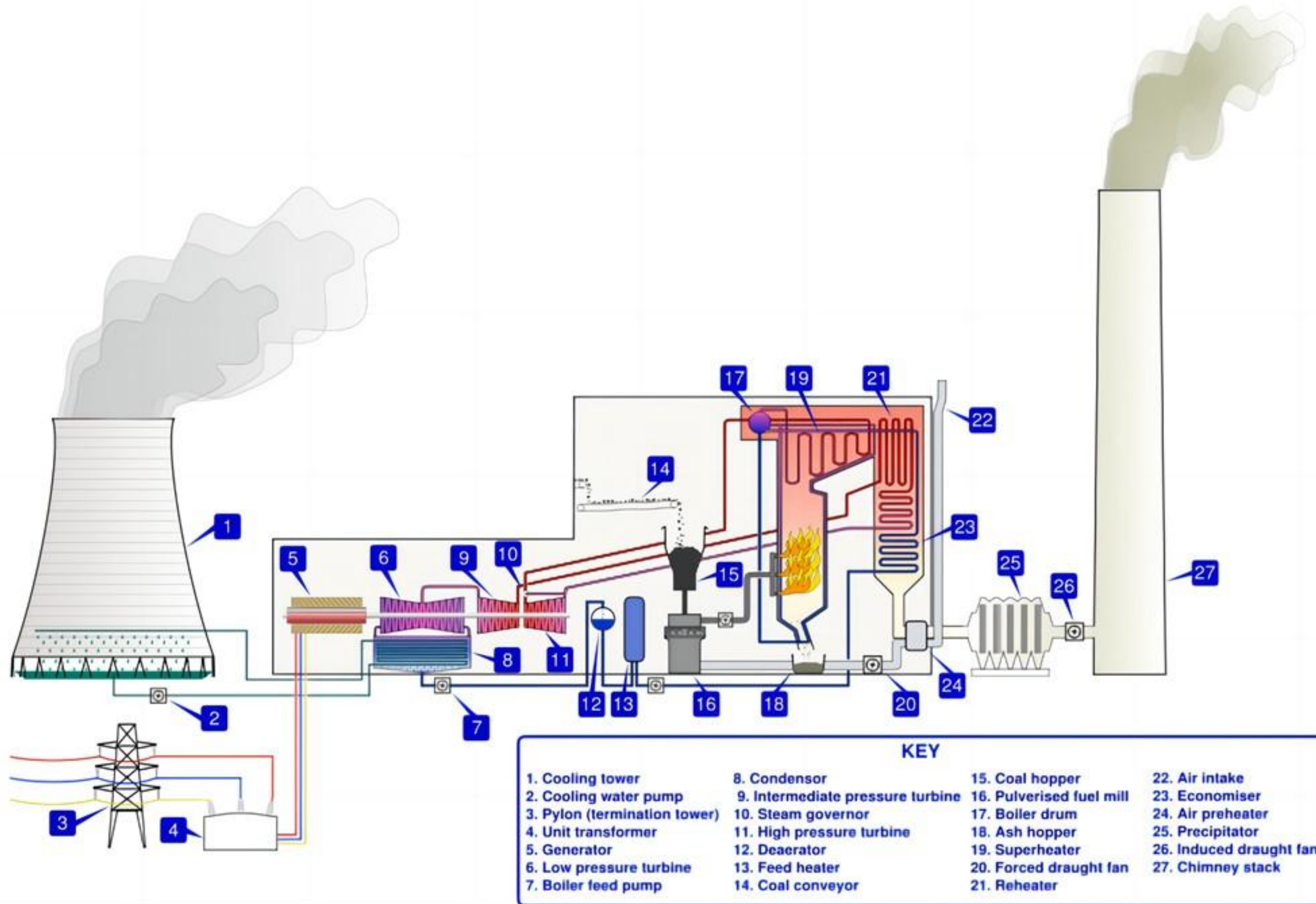
上海浦东外高桥发电厂是我国目前最大的现代化火力发电厂，总装机容量500万千瓦($2 \times 1000\text{MW}/900\text{MW}/600\text{MW}$)
单机最大：平山2期
1350MW



三峡水电站
装机容量22.5GW
($32 \times 700\text{MW} + 2 \times 50\text{MW}$)
单机最大：白鹤滩
1000MW

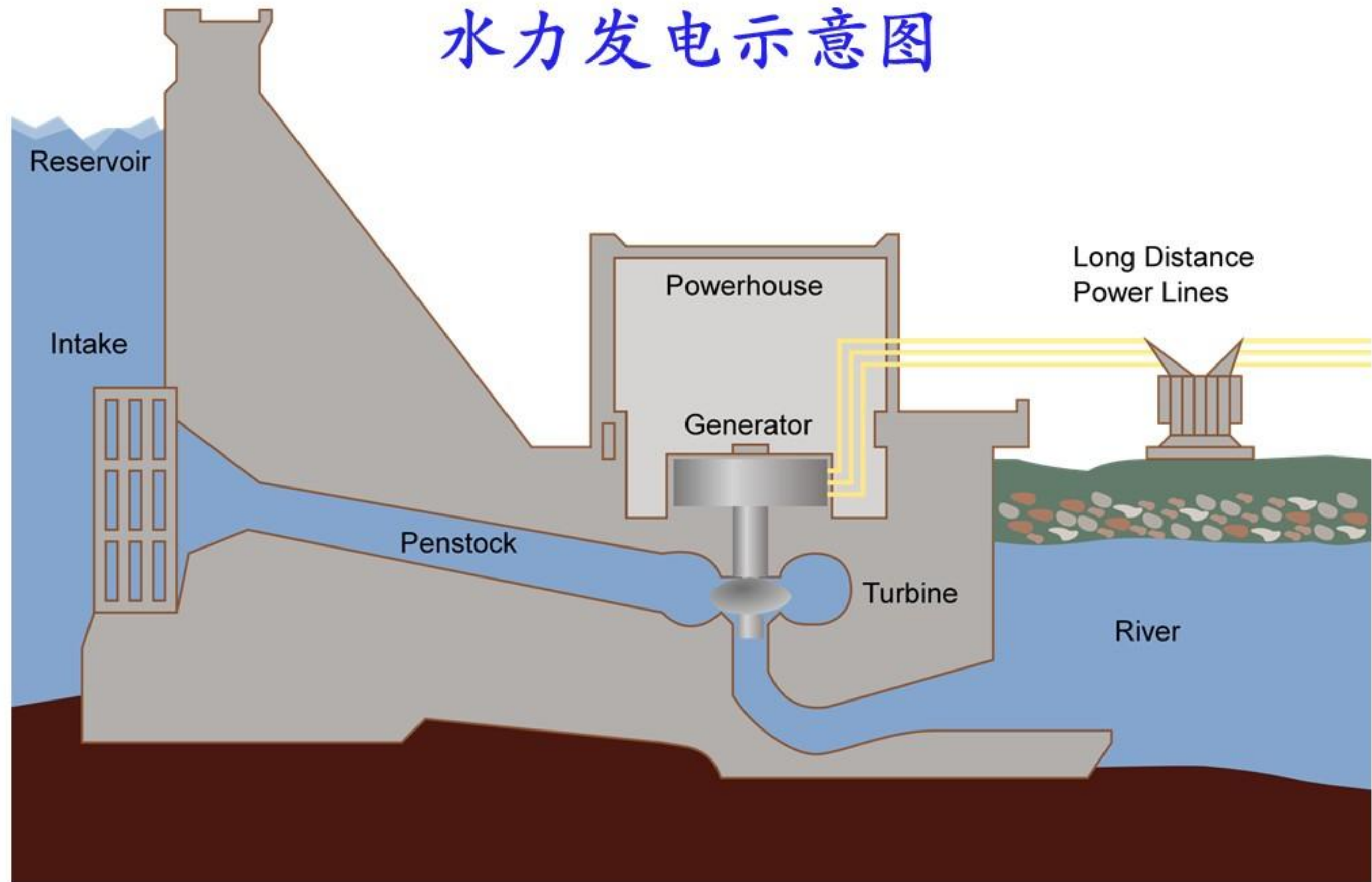
岭澳核电厂
装机 $2 \times 1000\text{MW}$
单机最大：台山
1750MW







水力发电示意图





三峡水轮发电机的转子和定子

500kV三相输变电变压器



220kV单相变压器



高压输电线



500kV 直流四分裂传输线

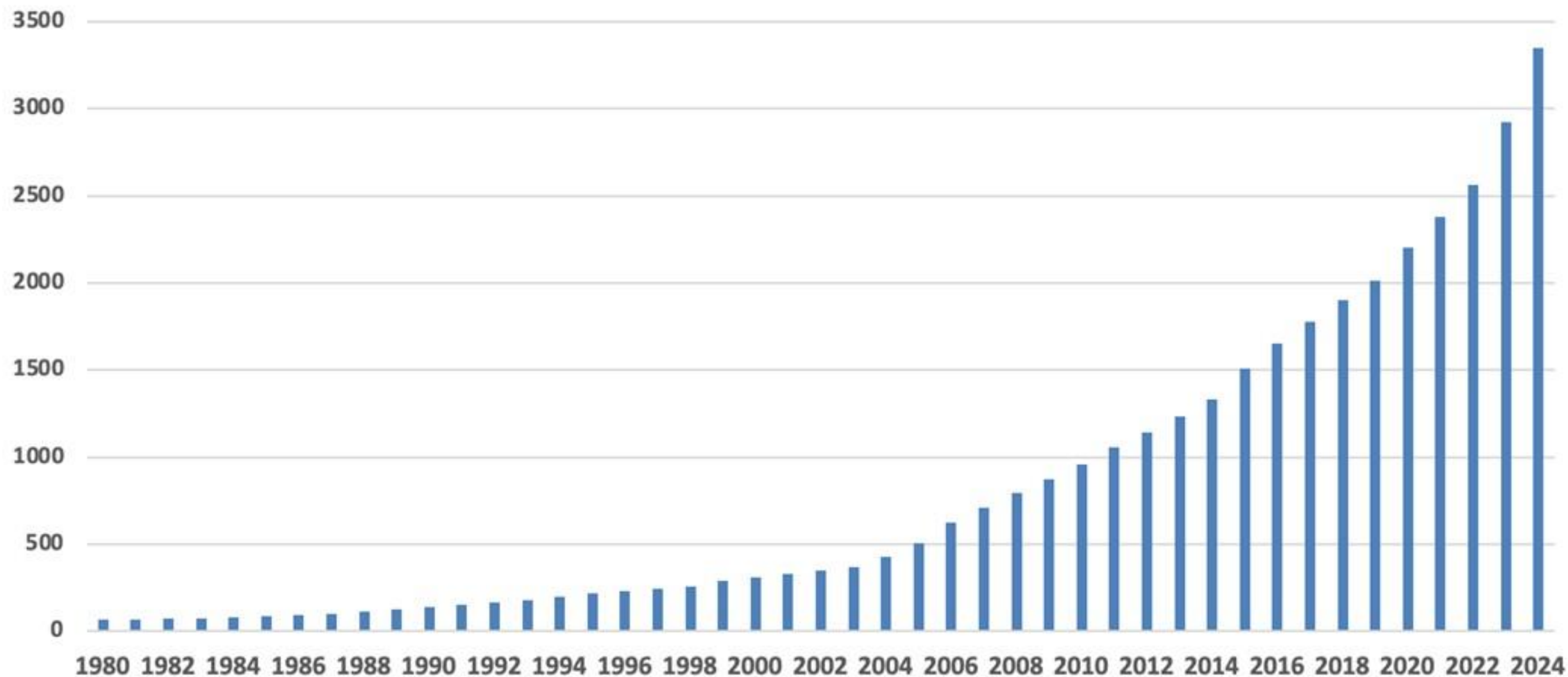


分裂导线:
减小趋肤效应
减小电晕



快速增长的中国电力工业

中国发电装机容量



世界发电量变化

最大发电国

联合王国

单位：亿千瓦时（亿度）

联合王国 1

1896

The State-of-the-art

- 至2024年底我国发电装机总容量达到3350GW（世界第一），非化石能源发电装机容量1950GW，占总发电装机容量的比重为58.2%（第2年超过50%）
- 2024年我国用电量9.42万亿kWh，居世界第一，非化石能源发电占比39.5%
 - 相当于我国14亿人平均每人每小时用电0.77度（kWh）
 - 2000年法国用电量5150亿kWh，相当于6000万人平均每人每小时用电0.98度（kWh）
- 世界最大的水电站：三峡，总装机22.5GW（前5中4在中国）
- 太阳能、风力、水利、核能发电装机均为世界第一
- 我国1000kV交流和1100kV直流特高压输电线已商业运行，电压等级均为世界第一

下列叙述**错误**的是

- ☐ A 我国发电装机容量世界第一
- ☐ B 我国年发电量世界第一
- ☐ C 我国人均用电量世界第一
- ☐ D 我国拥有世界最大装机容量的水电站

电力系统的特殊问题

- 绝缘问题
 - 开关带载动作的例子



电力系统的特殊问题

- 绝缘问题
 - 开关带载动作的例子
 - 高压开关合闸的例子



电力系统的特殊问题

- 绝缘问题
 - 开关带载动作的例子
- 稳定运行问题
 - 美国东北电网的大停电
 - 2003.8.14, 俄亥俄→密歇根→加拿大→纽约, 5千万人, 36小时, 300亿美元
 - 2025.4.28, 欧洲大规模停电

西班牙、葡萄牙及法国多地突发大规模停电

当地时间4月28日，**西班牙、葡萄牙及法国多地突发大规模停电**，导致数千万人陷入黑暗、交通系统瘫痪、通讯中断，欧洲多座主要城市陷入混乱。此次停电范围之广实属罕见，波及三国数十座城市，引发民众恐慌，多方正在就此事开展调查。从公开消息来看，28日上午，西班牙巴伦西亚、巴塞罗那及首都马德里率先出现电力中断，导致地铁系统停运、乘客被迫从隧道撤离。



电力系统的特殊问题

- 绝缘问题
 - 开关带载动作的例子
- 稳定运行问题
 - 美国东北电网的大停电
 - 2003.8.14, 俄亥俄→密歇根→加拿大→纽约, 5千万人, 36小时, 300亿美元
 - 2025.4.28, 欧洲大规模停电
- 经济运行问题
 - 电力市场

电力系统未来发展方向之一

新（可再生）能源发电



储能



往复运动发动机



光伏发电



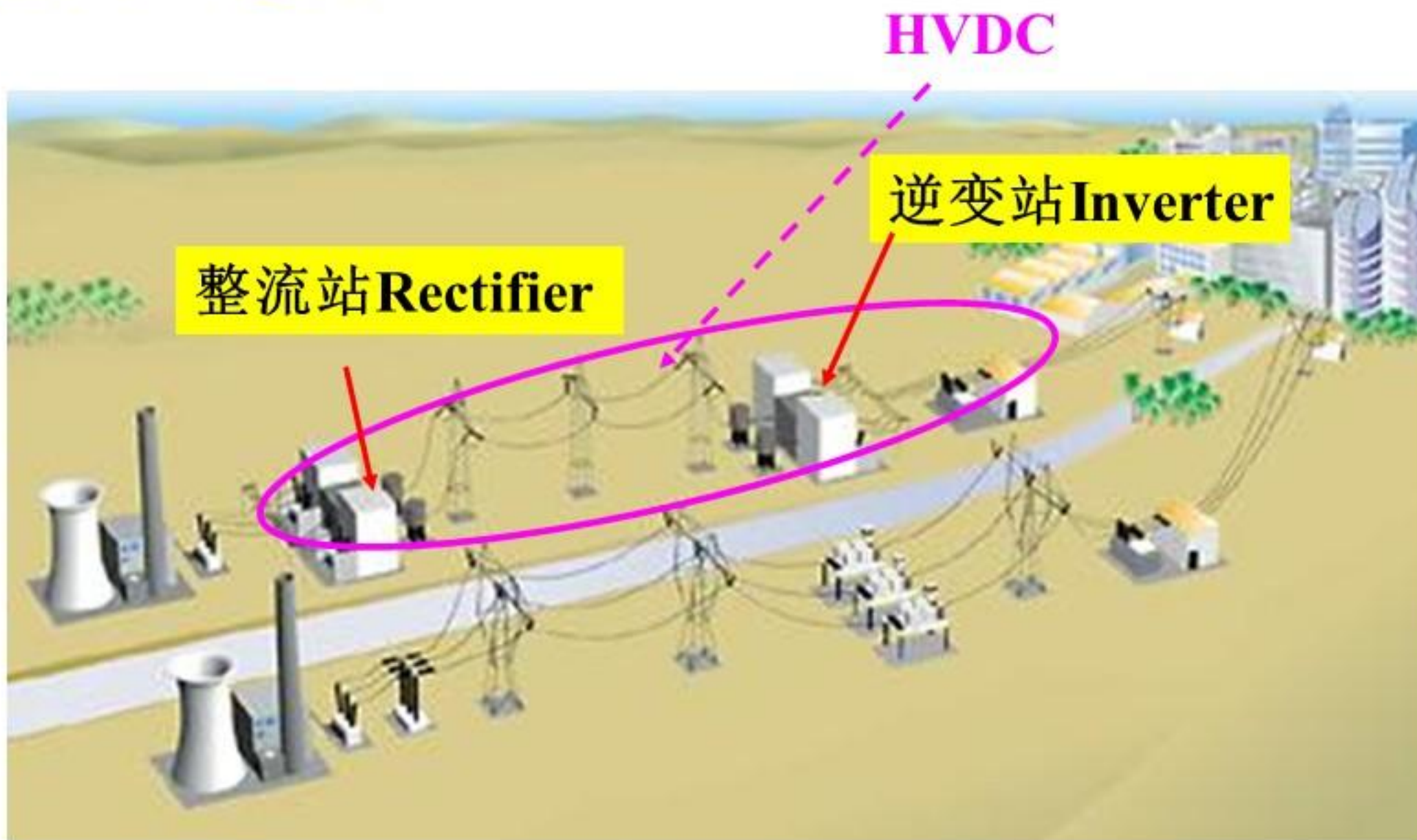
燃料电池



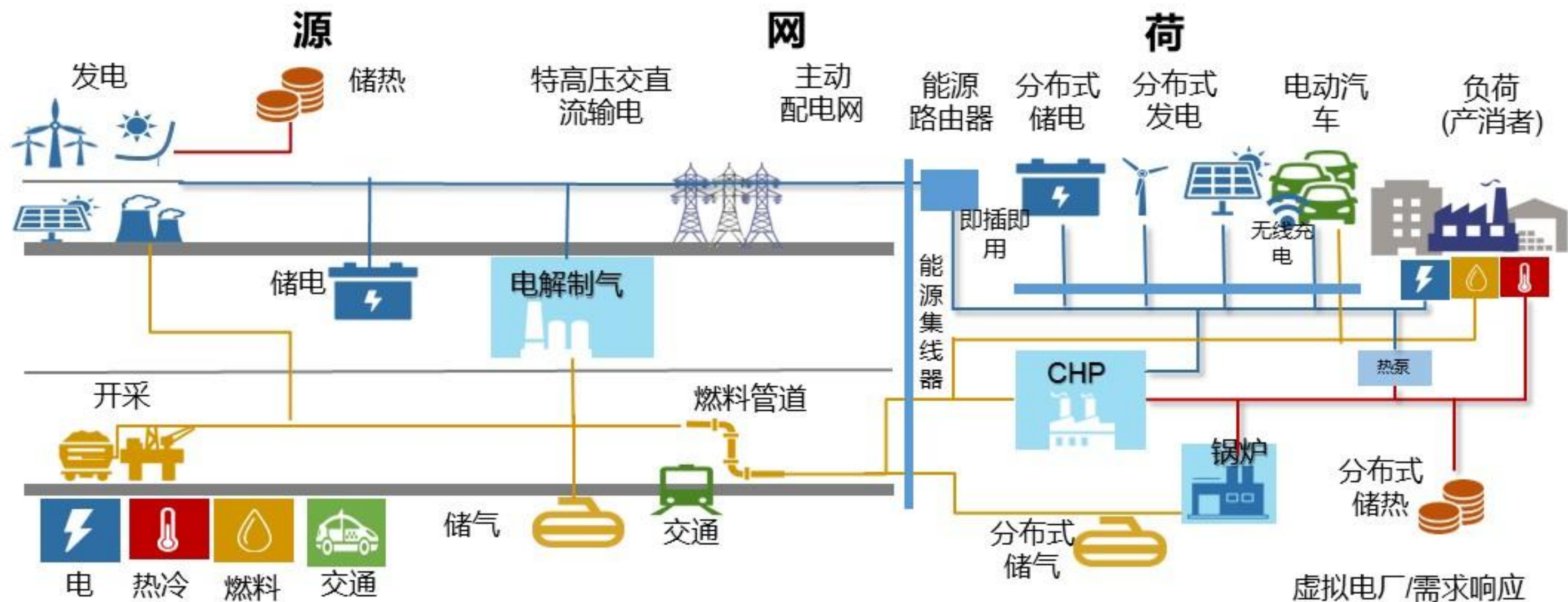
微透平

电力系统未来发展方向之二

直流+交流



电力系统未来发展方向之三

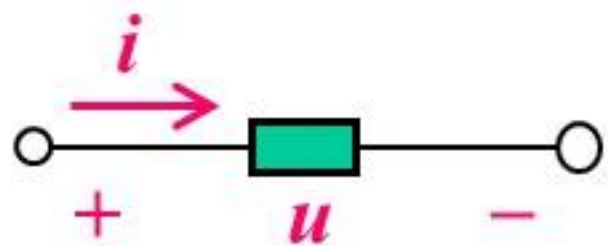


能源互联网

2 正弦量的基本概念

(1) 正弦量的三要素

课前预习



$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi)$$

相位

(a) 幅值 (amplitude) (振幅、最大值) I_m

(b) 角频率 (angular frequency) ω

$$\omega = \frac{d(\omega t + \psi)}{dt}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

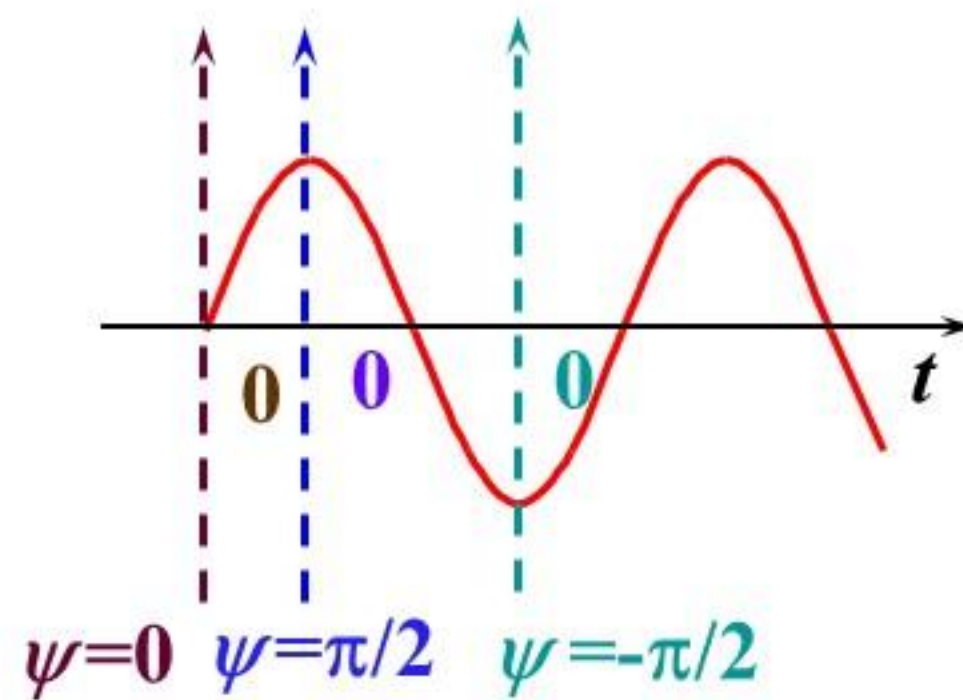
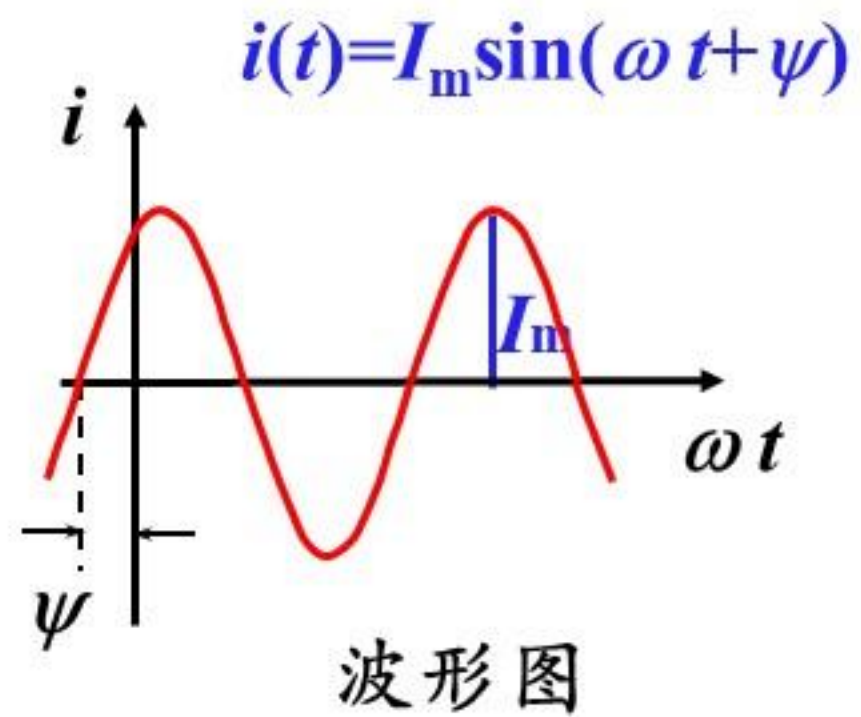
单位: rad/s

(c) 初相位/角 (initial phase angle) ψ

相位随时间的
变化率

$$i(t)|_{t=0} = I_m \sin \psi$$

$t=0$ 时的相位



一般 $|\psi| \leq \pi$

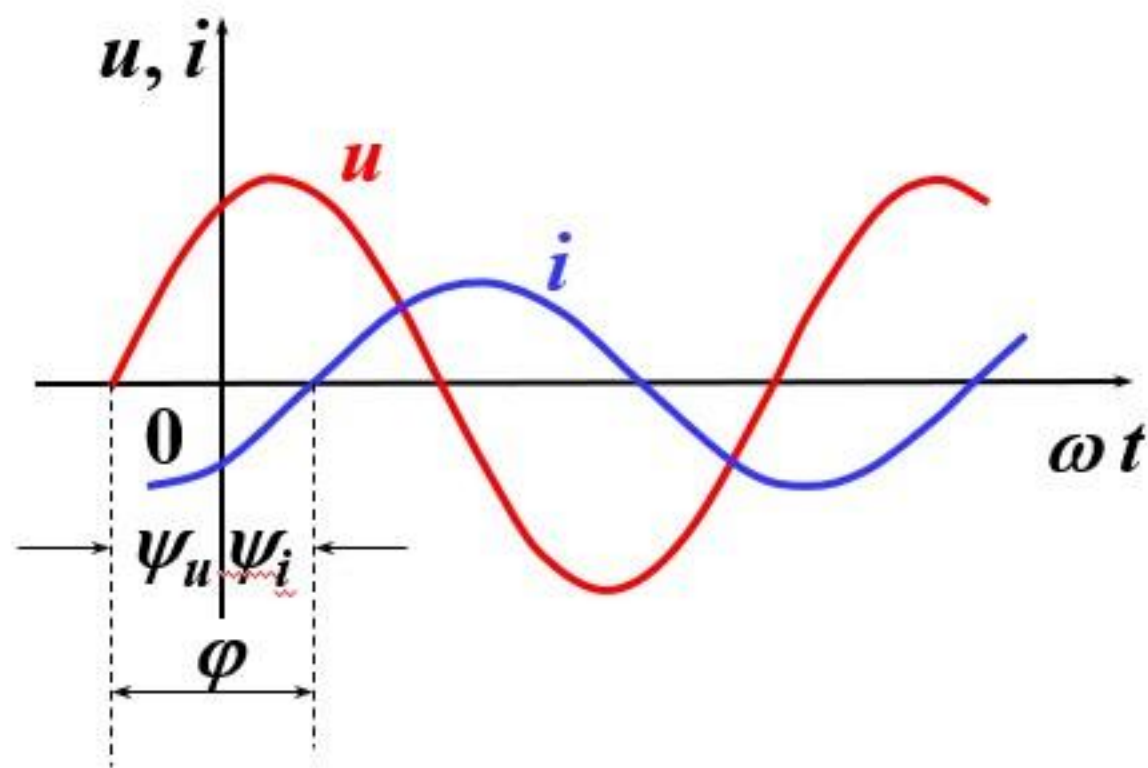
(2) 同频率正弦量的相位差 (phase difference)。

设 $u(t)=U_m\sin(\omega t+\psi_u)$, $i(t)=I_m\sin(\omega t+\psi_i)$

相位差 $\varphi = (\omega t+\psi_u) - (\omega t+\psi_i) = \psi_u - \psi_i$

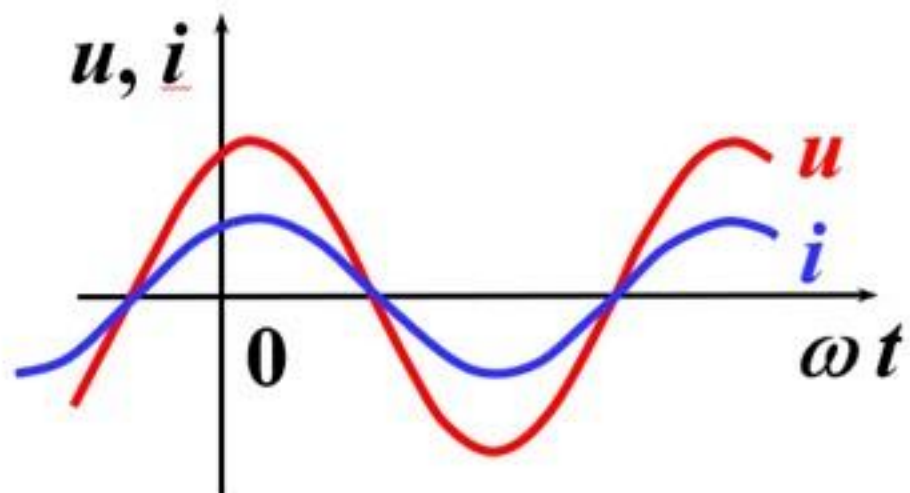
$\varphi > 0$, u 领先(lead)(超前) i , 或 i 落后(lag)(滞后) u

$\varphi < 0$, i 领先(超前) u , 或 u 落后(滞后) i

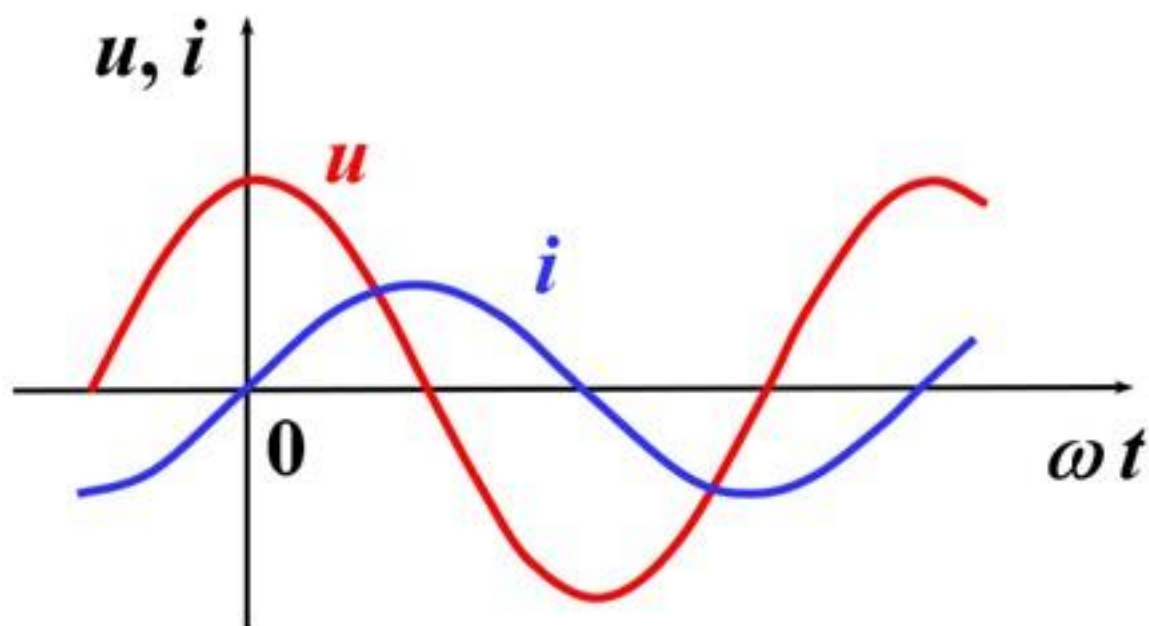
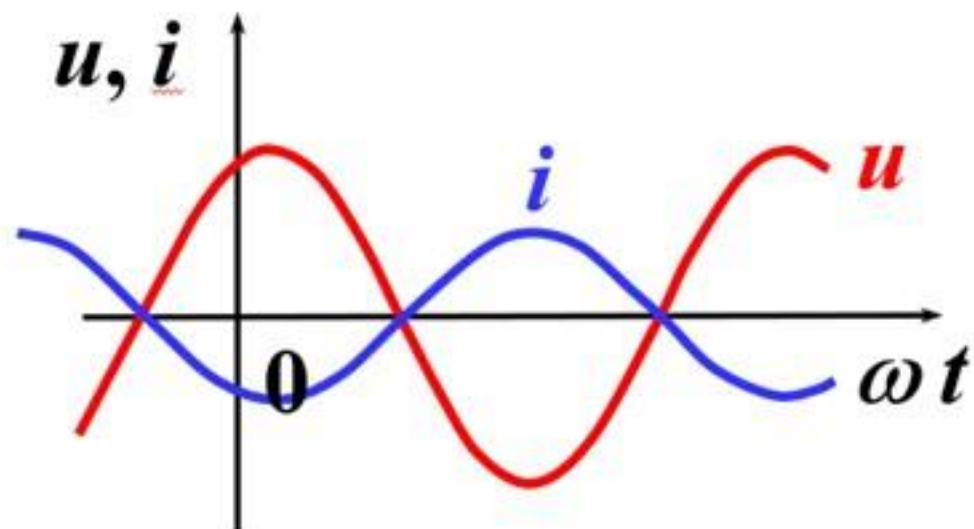


特殊相位关系

$\varphi = 0$, 同相



$\varphi = \pm \pi$ ($\pm 180^\circ$), 反相



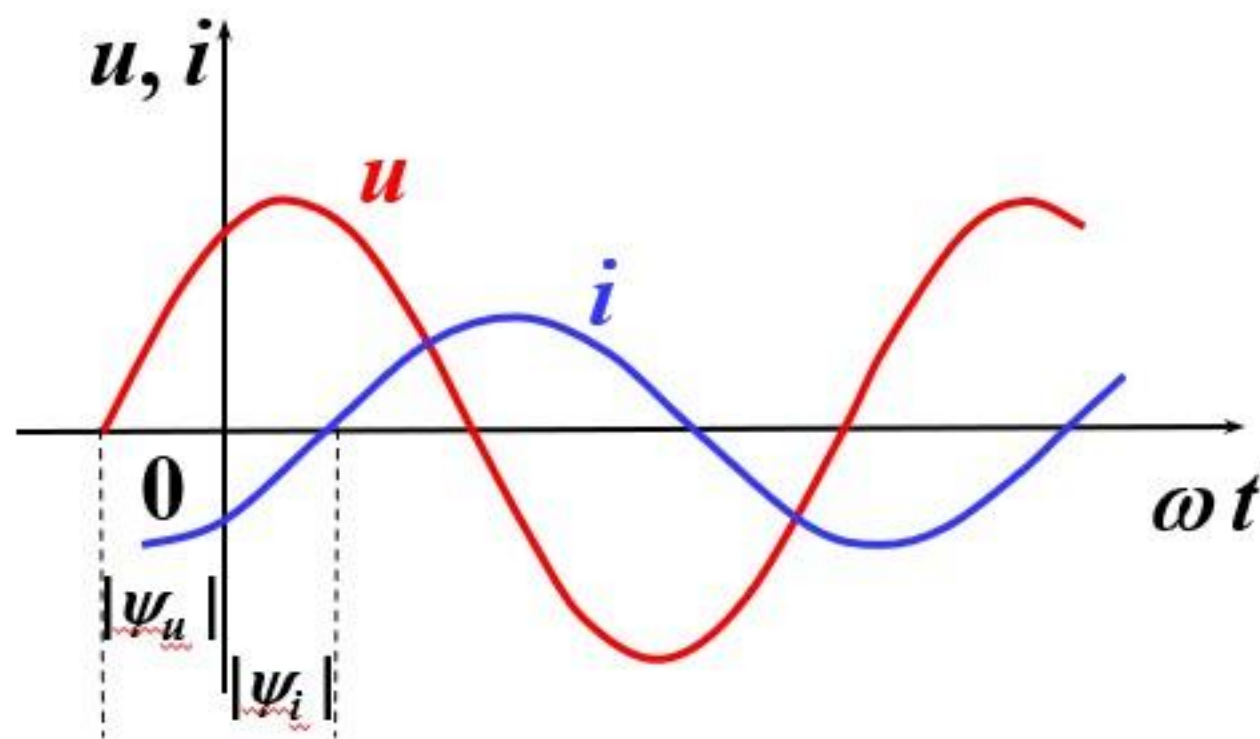
$\varphi = 90^\circ$

u 领先 i 90°
或 i 落后 u 90°
不说 u 落后 i 270°
或 i 领先 u 270°

规定: $|\varphi| \leq \pi$ (180°)

图中 u 和 i 之间的相位关系是

- A u 超前 i $|\psi_u| - |\psi_i|$
- B u 滞后 i $|\psi_u| - |\psi_i|$
- C u 超前 i $|\psi_u| + |\psi_i|$
- D u 滞后 i $|\psi_u| + |\psi_i|$



(3) 周期量的有效值(effective value)

课前预习

(a) 定义

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$

有效值也称**方均根值**

(root-mean-square, 简记为rms)

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$

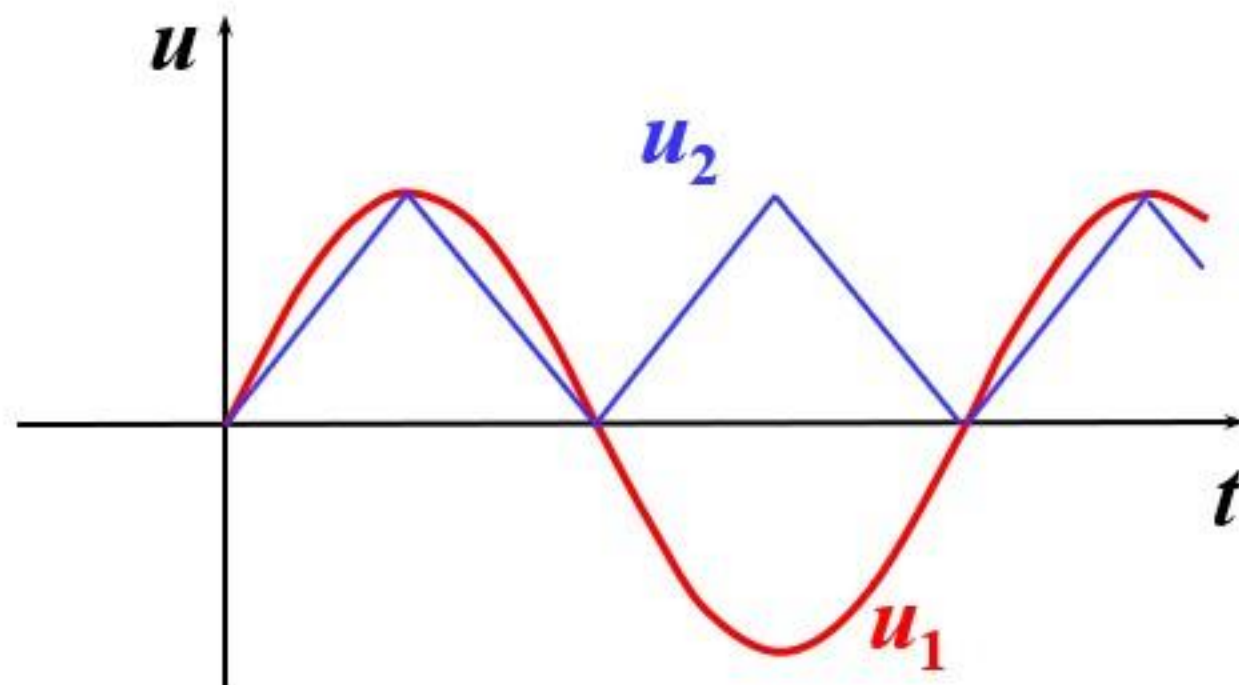
(b) 正弦电流、电压的有效值

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi) = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \psi)$$

$$I_m = \sqrt{2}I$$

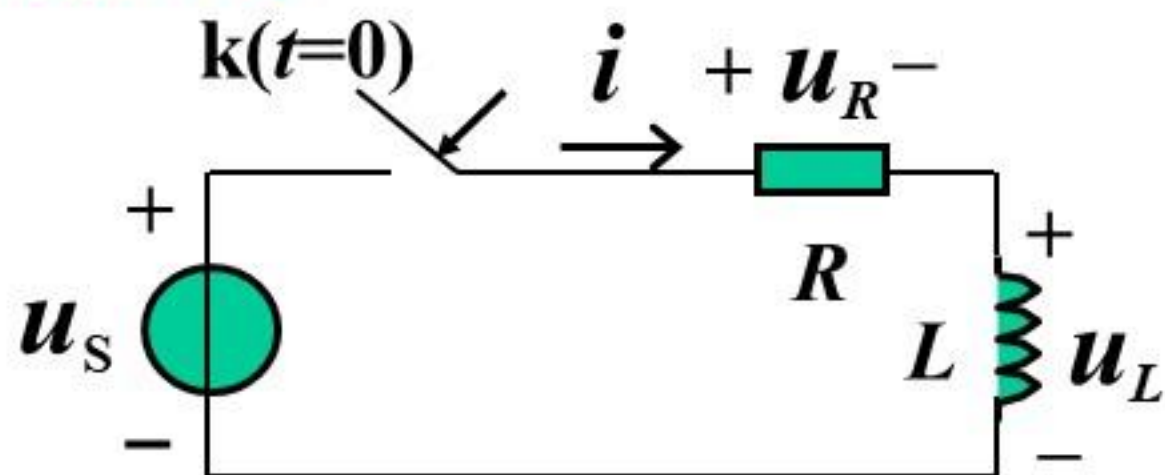
标准正弦波电压信号 u_1 和
整流三角波电压信号 u_2
之间的有效值大小关系是

- A $U_1 > U_2$
- B $U_1 = U_2$
- C $U_1 < U_2$



3 正弦稳态分析的关键 → 相量(phasor)

(1) 问题



$$u_s = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

求: $i(t)$, $u_L(t)$, $u_R(t)$ 的稳态解。

$$L \frac{di}{dt} + Ri = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

一阶常系数线性非齐次常微分方程

$i = i' + i''$

强制分量 (非齐次特解)

自由分量 (齐次通解)

$t \rightarrow \infty: 0$

$t \rightarrow \infty: \text{稳态}$

$i'' = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

i' 这个稳态解中可能的形式包括
(下式中 $A/B/C/D$ 为待定实数)

☐ $A \quad C \sin \omega t + D \cos \omega t$

☐ $B \quad A \sin(\omega t + B)$

☐ $C \quad At + B$

☐ $D \quad Ae^{Bt}$

$$L \frac{di}{dt} + Ri = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

强制分量 (非齐次特解)

自由分量 (齐次通解)

$$i = i' + i''$$

$t \rightarrow \infty$: 稳态

求特解/稳态解

查表寻找特解的函数类型

激励 $\sin \omega t$ $\xrightarrow{\text{查表}}$ 特解类型 $C \sin \omega t + D \cos \omega t$ 或 $A \sin(\omega t + B)$

$L \frac{di}{dt} + Ri = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ $\xrightarrow{\text{设特解为}}$ $i = A \sin(\omega t + B)$

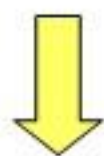
\downarrow 代入

求特解/稳态解

查表寻找特解的函数类型

激励 $\sin \omega t$ $\xrightarrow{\text{查表}}$ 特解类型 $C \sin \omega t + D \cos \omega t$ 或 $A \sin(\omega t + B)$

$L \frac{di}{dt} + Ri = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ $\xrightarrow{\text{设特解为}}$ $i = A \sin(\omega t + B)$



代入

$$LA\omega \cos(\omega t + B) + RA \sin(\omega t + B) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$



$$A\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + B) + \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos(\omega t + B) \right) \\ = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

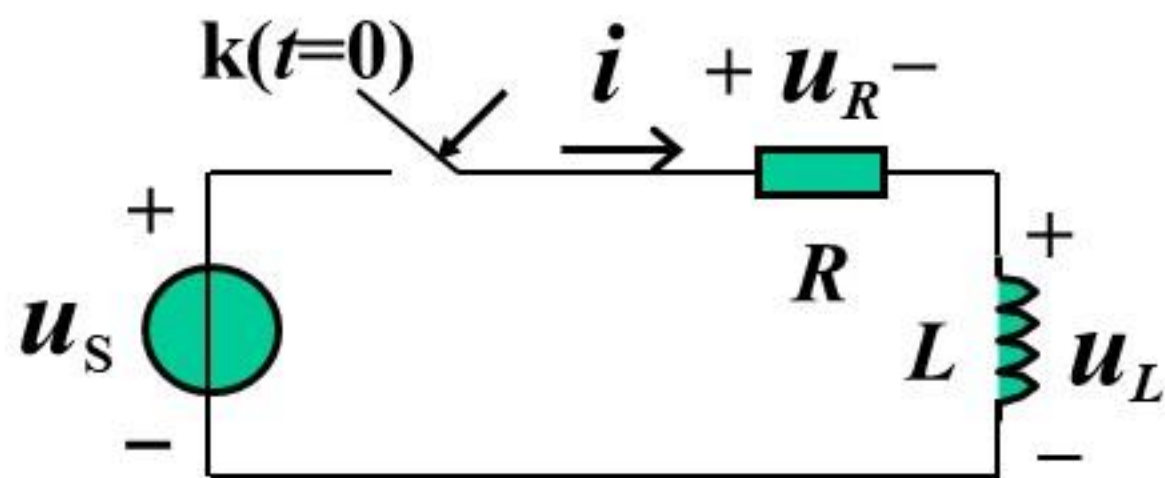
$$RA \sin(\omega t + B) + LA\omega \cos(\omega t + B) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

$$A\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + B) + \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos(\omega t + B) \right) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

$\cos(\arctan \frac{\omega L}{R})$ $\sin(\arctan \frac{\omega L}{R})$ $\sin(\omega t + B + \arctan \frac{\omega L}{R})$

$$\begin{cases} A\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = U_m \Rightarrow A = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = I_m \\ B + \arctan(\frac{\omega L}{R}) = \psi_u \Rightarrow B = \psi_u - \arctan \frac{\omega L}{R} = \psi_u - \varphi \end{cases}$$

$$i'(t) = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + \psi_u - \arctan \frac{\omega L}{R})$$



$$u_s = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

求: $i(t)$, $u_L(t)$, $u_R(t)$ 的稳态解。

求微分方程特解

$$i'(t) = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + \psi_u - \arctan \frac{\omega L}{R})$$

麻烦1: 求特解的待定系数

求导

$$u'_L(t) = L \frac{di'(t)}{dt} = \frac{L\omega U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + \psi_u - \arctan \frac{\omega L}{R} + 90^\circ)$$

KCL、KVL

元件约束

麻烦2: 正弦量的微分/积分计算



$$u'_R(t) = u_s - u'_L(t) = \frac{RU_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + \psi_u - \arctan \frac{\omega L}{R})$$

搞定!!!

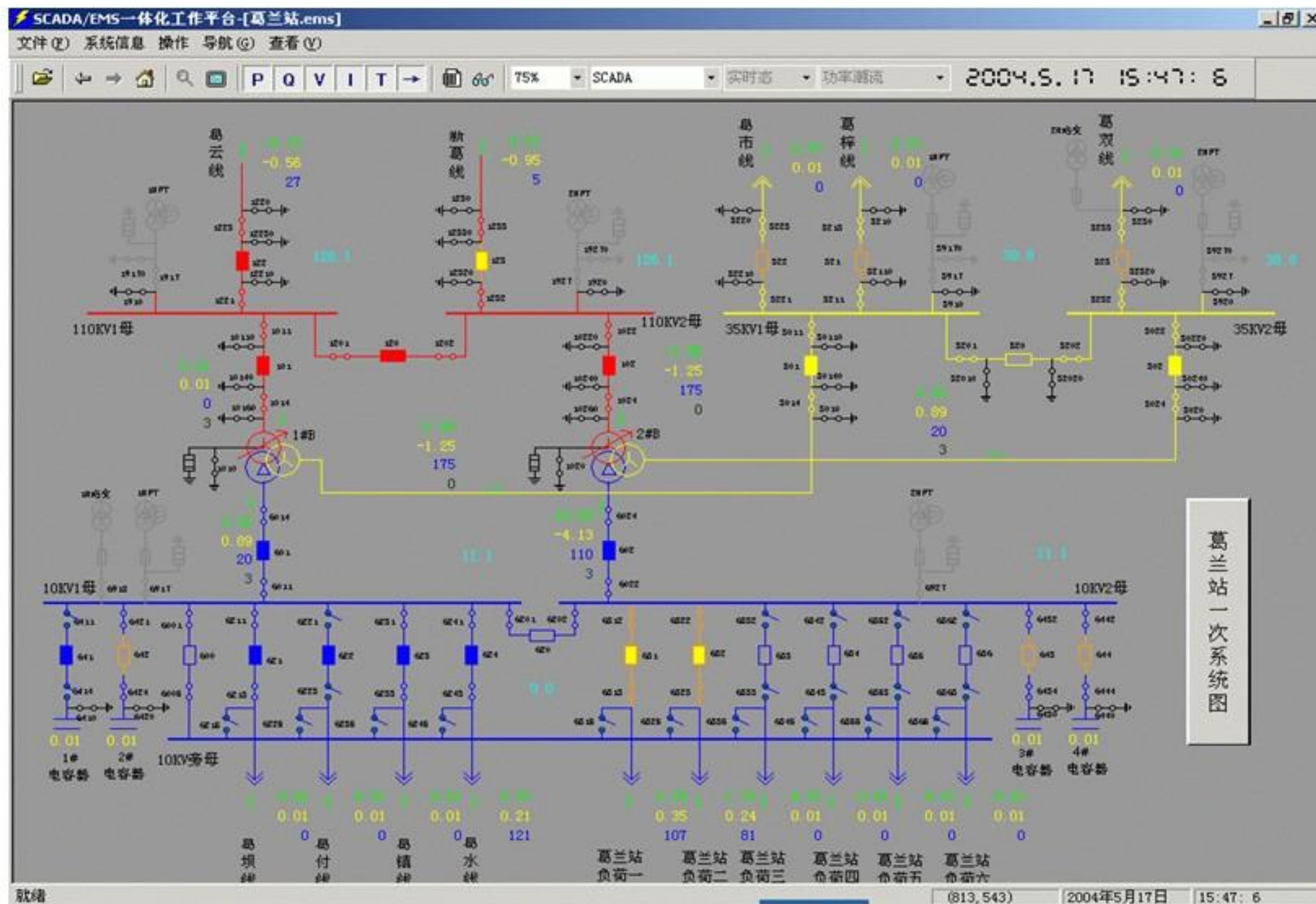
麻烦3: 正弦量的±计算

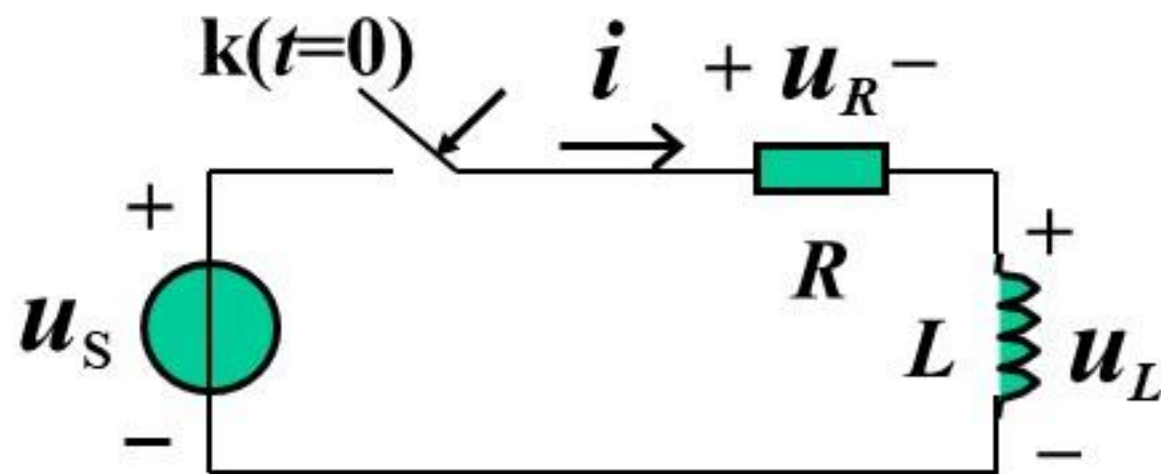
怎么求解该电路?

求特解待定系数

正弦量微分/积分

正弦量加减





$$i'(t) = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + \psi_u - \arctan \frac{\omega L}{R})$$

$$u'_L(t) = \frac{L\omega U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + \psi_u - \arctan \frac{\omega L}{R} + 90^\circ)$$

$$u'_R(t) = \frac{RU_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + \psi_u - \arctan \frac{\omega L}{R})$$



Charles Steinmetz
(1865-1923)

3个正弦支路量有何特点?

所有支路电压电流均以相同频率变化!!

接下来……

$$i(t)=I_m\sin(\omega t + \psi)$$

所有支路电压电流均以
相同频率变化!!

此处可以有弹幕

(b) 幅值 (I_m)

(c) 初相角 (ψ)

用什么数学量可以同时表示大小和角度?

问题1: 如何用它来表示正弦量?

问题2:

求微分方程特解

正弦量微分/积分

正弦量加减

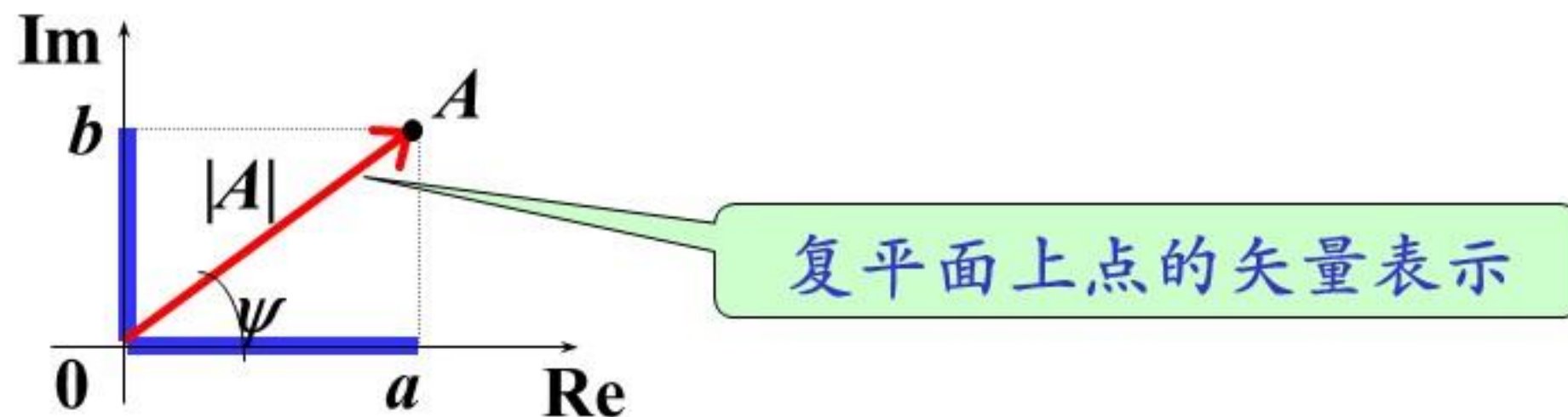


?

(2) 复数的复习

$$\text{欧拉公式 } e^{j\psi} = \cos \psi + j \sin \psi = 1 \angle \psi$$

(a) 复数的表示形式



直角坐标 $A = a + jb$

极坐标 $A = |A|e^{j\psi} = |A| \angle \psi$

转换关系

$$a = |A| \cos \psi$$

$$b = |A| \sin \psi$$

$$|A| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\psi = \arctan \frac{b}{a}$$

(b) 复数的运算

加减运算——直角坐标

$$A_1 \pm A_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$$

乘除运算——极坐标

$$A_1 \cdot A_2 = |A_1| |A_2| \angle (\psi_1 + \psi_2)$$

(c) 旋转因子

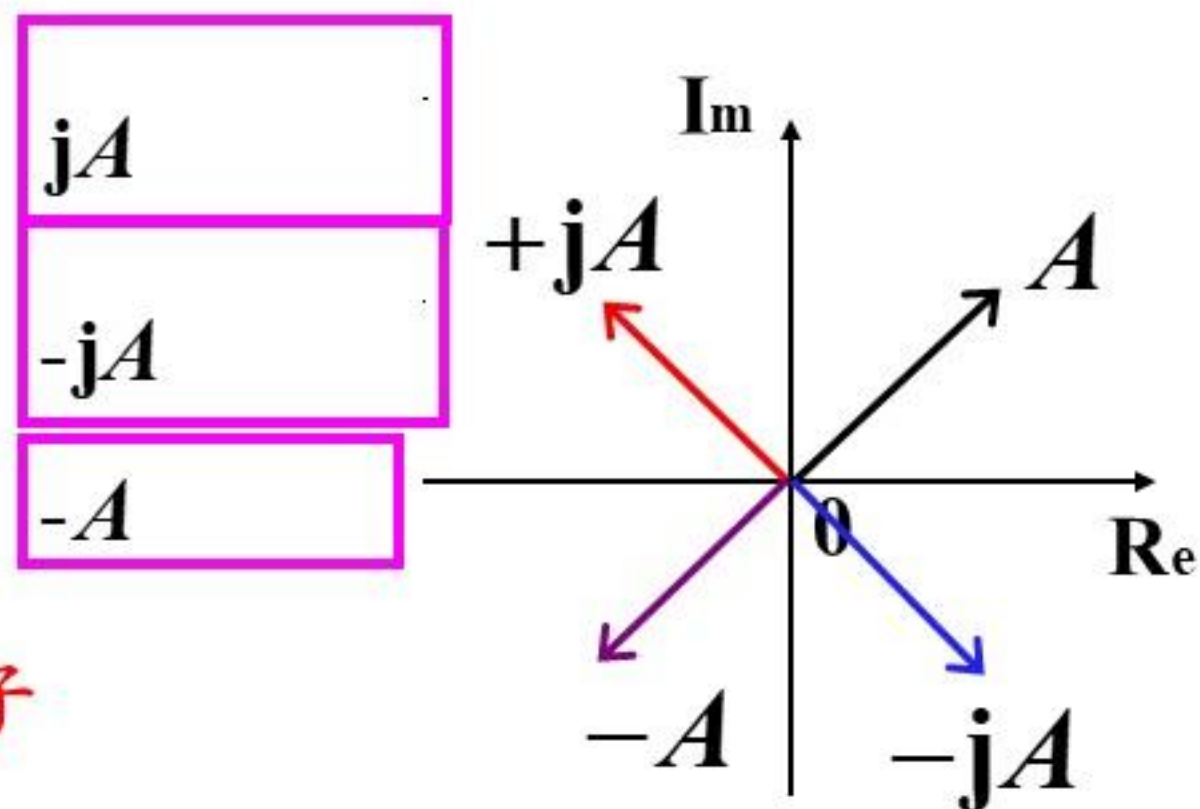
复数 $e^{j\psi} = \cos \psi + j \sin \psi = 1 \angle \psi$

$A e^{j\psi} = |A| e^{j\theta} e^{j\psi} = |A| e^{j(\theta+\psi)} \Rightarrow A$ 逆时针旋转一个角度 ψ , 模不变

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} = +j$$

$$e^{j(-\frac{\pi}{2})} = \cos(-\frac{\pi}{2}) + j \sin(-\frac{\pi}{2}) = -j$$

$$e^{j(\pm\pi)} = \cos(\pm\pi) + j \sin(\pm\pi) = -1$$



+j, -j, -1 都可以看成旋转因子

“一乘(j/-j/-1)就转”

(3) 用复数来表示正弦量

复函数

$$A(t) = \sqrt{2}Ie^{j(\omega t + \psi)}$$

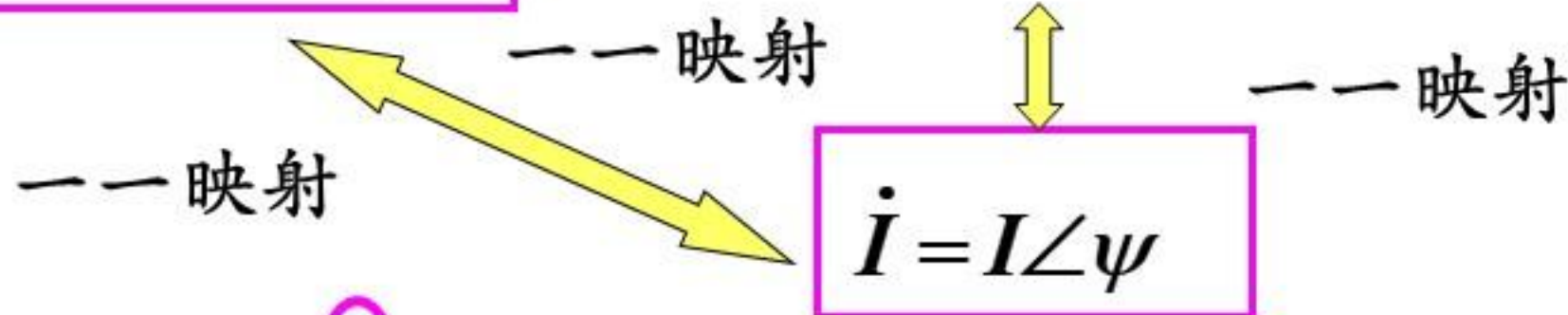
欧拉公式

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j\sin \theta$$

$$= \sqrt{2}I\cos(\omega t + \psi) + j\sqrt{2}I\sin(\omega t + \psi)$$

$$\text{Im}[A(t)] = \sqrt{2}I\sin(\omega t + \psi) = i(t)$$

$$i(t) = \sqrt{2}I\sin(\omega t + \psi) \iff A(t) = \sqrt{2}Ie^{j(\omega t + \psi)}$$



$$A(t) = \sqrt{2}Ie^{j\psi}e^{j\omega t} = \sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t}$$

相量 Phasor
(phase vector)

也可以 $\dot{I}_m = \sqrt{2}Ie^{j\psi}$

定义 $\dot{U}_m = \sqrt{2}Ue^{j\psi}$ $u(t) = \sqrt{2}U\sin(\omega t + \theta) \iff \dot{U} = U\angle\theta$

例1 $i(t) = 141.4 \sin(314t + 30^\circ) \text{ A}$ 用相量表示 $i(t)$, $u(t)$ 。
 $u(t) = 311.1 \sin(314t - 60^\circ) \text{ V}$

解 $\dot{I} = 100 \angle 30^\circ \text{ A}$, $\dot{U} = 220 \angle -60^\circ \text{ V}$

例2 $\dot{I} = 50 \angle 15^\circ \text{ A}$, $f = 50 \text{ Hz}$

写出该相量对应的时间表达式。

解 $i(t) = 50\sqrt{2} \sin(314t + 15^\circ) \text{ A}$

已知 $u(t) = 311\sin(314t - 60^\circ)\text{V}$

求电压相量 \dot{U}

- ☐ A $\dot{U} = 311\angle 60^\circ \text{ V}$
- ☐ B $\dot{U} = 311\angle -60^\circ \text{ V}$
- ☐ C $\dot{U} = 220\angle -60^\circ \text{ V}$
- ☐ D $\dot{U} = 220\angle 30^\circ \text{ V}$

(4) 相量的计算

正弦量+、-



复数+、-

(a) 同频正弦量的“+”和“-”

$$u_1(t) = \sqrt{2} U_1 \sin(\omega t + \psi_1) = \text{Im}(\sqrt{2} \dot{U}_1 e^{j\omega t})$$

$$u_2(t) = \sqrt{2} U_2 \sin(\omega t + \psi_2) = \text{Im}(\sqrt{2} \dot{U}_2 e^{j\omega t})$$

$$\begin{aligned} u(t) &= u_1(t) + u_2(t) = \text{Im}(\sqrt{2} \dot{U}_1 e^{j\omega t}) + \text{Im}(\sqrt{2} \dot{U}_2 e^{j\omega t}) \\ &= \text{Im}(\sqrt{2} \dot{U}_1 e^{j\omega t} + \sqrt{2} \dot{U}_2 e^{j\omega t}) = \text{Im}[\sqrt{2} (\dot{U}_1 + \dot{U}_2) e^{j\omega t}] \end{aligned}$$

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$$

\dot{U}



$$u_1(t) \pm u_2(t) = u_3(t)$$

$$\dot{U}_1 \pm \dot{U}_2 = \dot{U}_3$$

类比

$$x^{1.5} = 4$$



$$1.5 * \lg x = \lg 4$$

$$x = 2.52$$



$$\lg x = 0.40$$

(2) 正弦量的微分和积分

微分/积分关系



代数关系

$$i(t) = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \psi_i) = \text{Im}(\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t})$$

微分

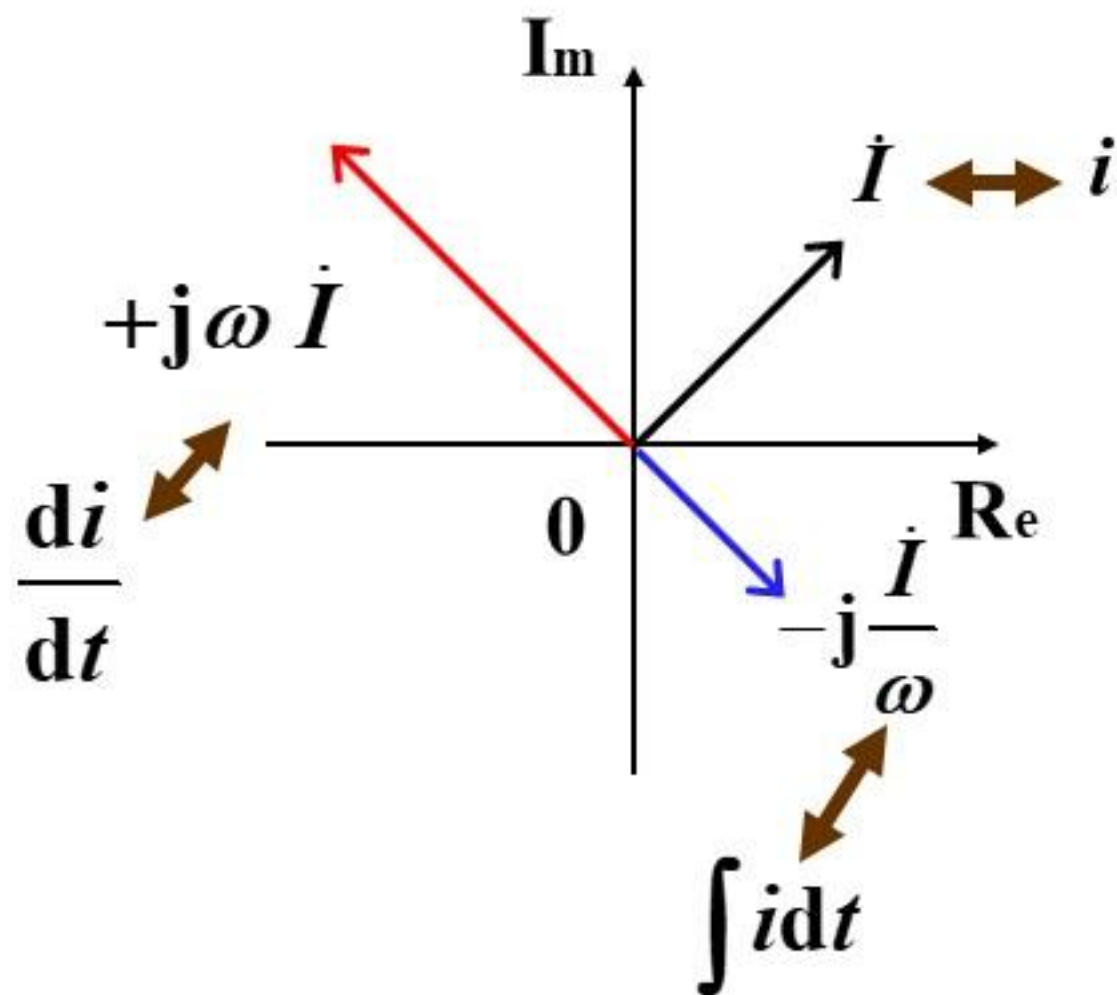
$$\begin{aligned}\frac{di}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\text{Im}(\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t}) \right) \\ &= \text{Im} \left(\frac{d}{dt} (\sqrt{2}\dot{I}e^{j\omega t}) \right) \\ &= \text{Im}(\sqrt{2}j\omega \dot{I}e^{j\omega t})\end{aligned}$$

$$\frac{di}{dt} \rightarrow j\omega \dot{I}$$

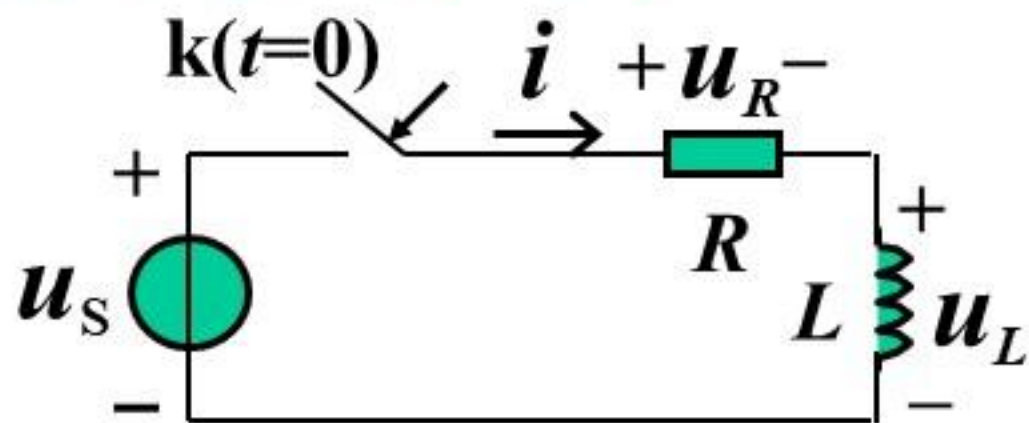
“一乘就转”

积分

$$\int i dt \rightarrow \frac{\dot{I}}{j\omega}$$



(5) 相量的应用

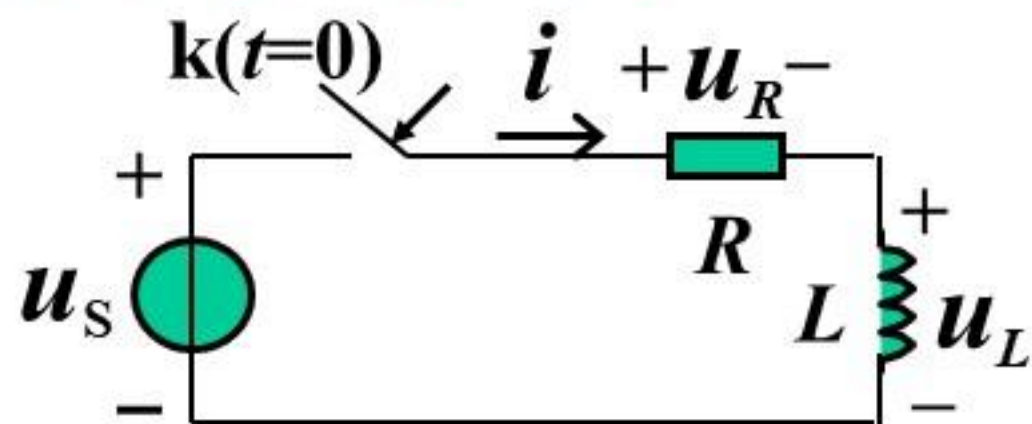


$$u_s = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \psi_u)$$

求: $i(t)$, $u_L(t)$, $u_R(t)$ 的稳态解。

$$u_s(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} \quad \Rightarrow$$

(5) 相量的应用



$$u_s = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \psi_u)$$

求: $i(t)$, $u_L(t)$, $u_R(t)$ 的稳态解。

$$u_s(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \dot{U}_s = R\dot{I} + j\omega L\dot{I}$$

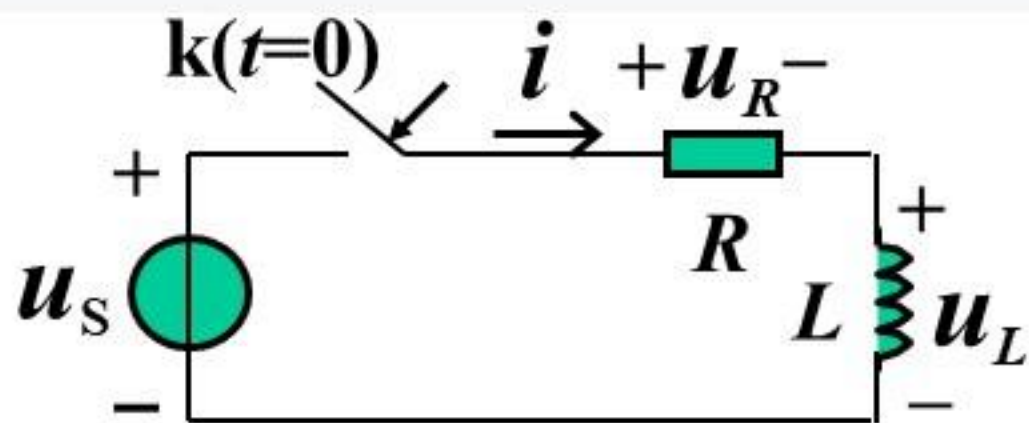
$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + j\omega L} = \frac{U \angle \psi_u}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \angle \arctan \frac{\omega L}{R}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle (\psi_u - \arctan \frac{\omega L}{R})$$

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} \quad \Rightarrow \quad \dot{U}_L = j\omega L \dot{I} = \frac{\omega LU}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle (\psi_u - \arctan \frac{\omega L}{R} + 90^\circ)$$

$$u'_R(t) = u_s - u'_L(t) = \frac{RU}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle (\psi_u - \arctan \frac{\omega L}{R} + 90^\circ)$$



搞定!!!



$$u_s = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \psi_u)$$

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle(\psi_u - \arctan \frac{\omega L}{R})$$

- A $i(t) = \frac{1}{2} \sin(2t - 45^\circ) \text{ A}$
- B $i(t) = \sin(2t - 45^\circ) \text{ A}$
- C $i(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(2t - 45^\circ) \text{ A}$
- D $i(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(2t + 45^\circ) \text{ A}$

已知 $u_s(t) = 1.414 * \sin 2t \text{ A}$,
 $L = 0.5 \text{ H}$, $R = 1 \Omega$

求 $i(t)$ 的稳态解。

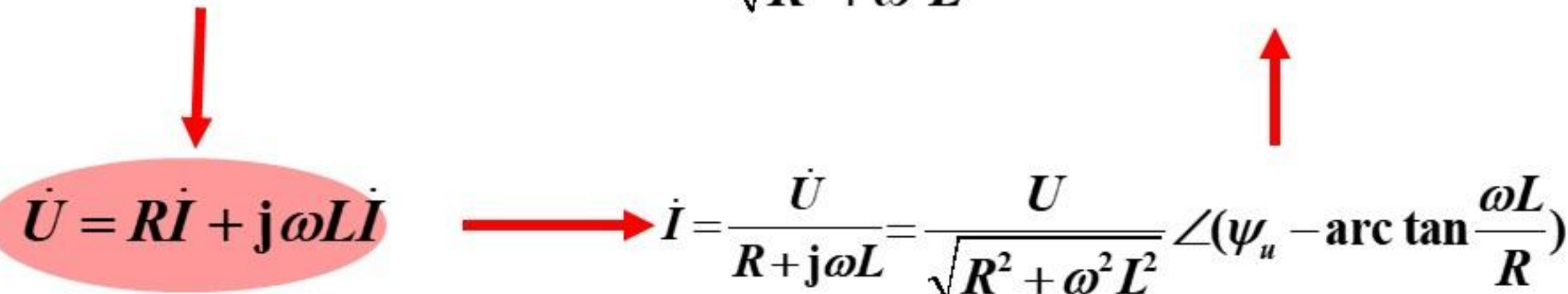
(注意有效值和最大值关系)

红包

求解顺序

- 列写 ODE
- 将 ODE 变换为复系数代数方程
- 求解复系数代数方程
- 反变换得到时间表达式

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} \quad i(t) = \frac{\sqrt{2}U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \psi_u - \arctan \frac{\omega L}{R})$$


A red arrow points from the ODE $u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$ down to the phasor equation $\dot{U} = R\dot{I} + j\omega L\dot{I}$, which is enclosed in a red oval. A red arrow points from the phasor equation to the right, leading to the phasor current $\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + j\omega L} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle(\psi_u - \arctan \frac{\omega L}{R})$. Another red arrow points from this phasor equation up to the time-domain current expression $i(t) = \frac{\sqrt{2}U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \psi_u - \arctan \frac{\omega L}{R})$.

• 下节课讨论如何直接列写复系数代数方程！！