INSTITUTO FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO - IFES
ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

ARTHUR FABRIS
CAROLINA DA SILVA
KETHOLLY KELLY
MATEUS HENRIQUE
KAILANE EUZEBIO DA SILVA

RELATÓRIO CALCULO NUMERICO: RESOLUÇÃO DO EXEMPLO 5.14 DA PÁGINA 149

Linhares, 2023

Sumario:

0 PROPOSTA:

A proposta do trabalho foi selecionar uma exercicio e resolver ele usando o método gráfico e os diferentes métodos intervalares, que são:

- Busca incremental
- Bissecção
- Falsa posição

Selecionamos o exercício 5.14 do capítulo 5, pág. 149:

5.14 Você comprou um veículo de R$ 35.000,00 sem entrada e pagando R$ 8.500,00 por ano por 7 anos. Use a função `bissec` da Figura 5.7 para determinar a taxa de juros que você está pagando. Empregue aproximações iniciais para a taxa de juros de 0,01 e 0,3 e um critério de parada de 0,00005. A fórmula que relaciona o valor atual P, os pagamentos anuais A, o número de anos n e a taxa de juros i é

$$A = P\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Obtemos os seguintes dados:

- Equação do exercício:

$$A = P\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

- Valor Atual(P) = 35.000,00
- Pagamentos anuais(A) = 8,500
- Taxa de juros (i) = No intervalo [0.01,0.3]
- Número de anos(n) = 7

1 METODOLOGIA

Usando o livro como base, temos que:

Para resolver este problema utilizando os métodos intervalares, é necessário transformar a equação fornecida em um problema de 'raiz', onde o objetivo é encontrar o valor de 'i' que torna a função igual a zero. Como mencionado no livro, no capítulo 5, página.126:

$$v(t) = \sqrt{\frac{gm}{c_d}}\tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}}t\right) \tag{5.1}$$

Repare, porém, que você não pode manipular essa equação para resolvê-la explicitamente para m (tente o quanto puder!) – ou seja, você não pode isolar a massa no lado esquerdo da equação.

Uma maneira alternativa de olhar para o problema envolve a subtração de $v(t)$ de ambos os lados para fornecer uma nova função:

$$f(m) = \sqrt{\frac{gm}{c_d}}\tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}}t\right) - v(t) \tag{5.2}$$

Agora, podemos ver que a resposta para o problema é o valor de m que torna a função igual a zero, portanto, chamamos isso de um problema de "raízes". Esse capítulo explicará como o computador é usado para obter tais soluções.

(foto do livro)

Compreendendo o método necessário para transformar a equação, procedemos à sua aplicação:

- Valor Presente (P);
- Pagamentos anuais (A);
- Número de anos (n);
- Taxa de juros (i)

$$A = P\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \rightarrow \frac{A}{P} = \frac{i \cdot (1+i)^n}{((1+i)^n - 1)}$$

1°

$$0 = \frac{i \cdot (1+i)^n}{((1+i)^n - 1)} - \frac{A}{P} \rightarrow f(i) = \frac{i \cdot (1+i)^n}{((1+i)^n - 1)} - \frac{A}{P}$$

2°

Temos a função final a ser utilizada nos algoritmos:

$$f(i) = \frac{i \cdot (1+i)^n}{((1+i)^n - 1)} - \frac{A}{P}$$

3°

1° = Dividir ambos os lados da equação por “P”
2° = Subtrair ambos os lados por “(A/P)”
3° = f(i) = 0

2 METODO GRAFICO

O método gráfico consiste em usar um software para plotar o gráfico de uma função e manualmente verificar o valor de X onde f(x) = 0.

Usando o Octave-8.3.0 no Windows 10 22H2, se concluiu que a fidelidade dos gráficos não era satisfatória, com isso em mente, a implementação do método gráfico é feita em python visando o fácil entendimento.

Codigo em Python 3.11.4 (tags/v3.11.4:d2340ef, Jun 7 2023, 05:45:37) [MSC v.1934 64 bit (AMD64)] on win32

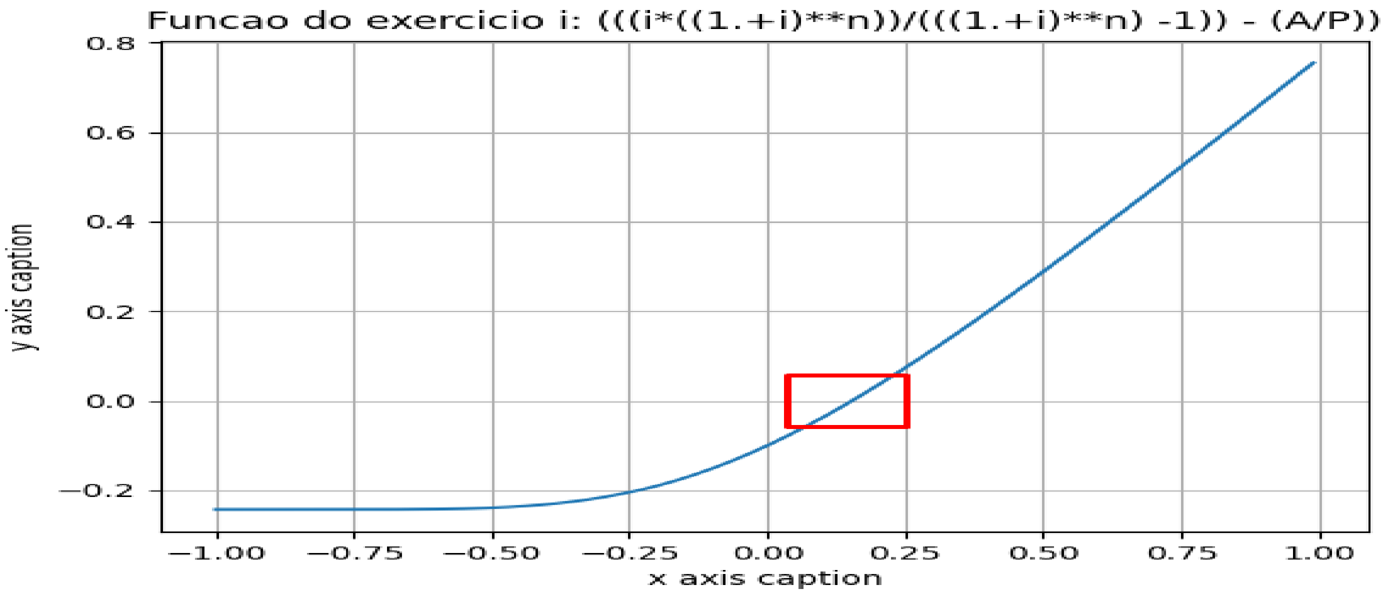
Instalando as bibliotecas:

```
pip install -m numpy
pip install -m matplotlib
```

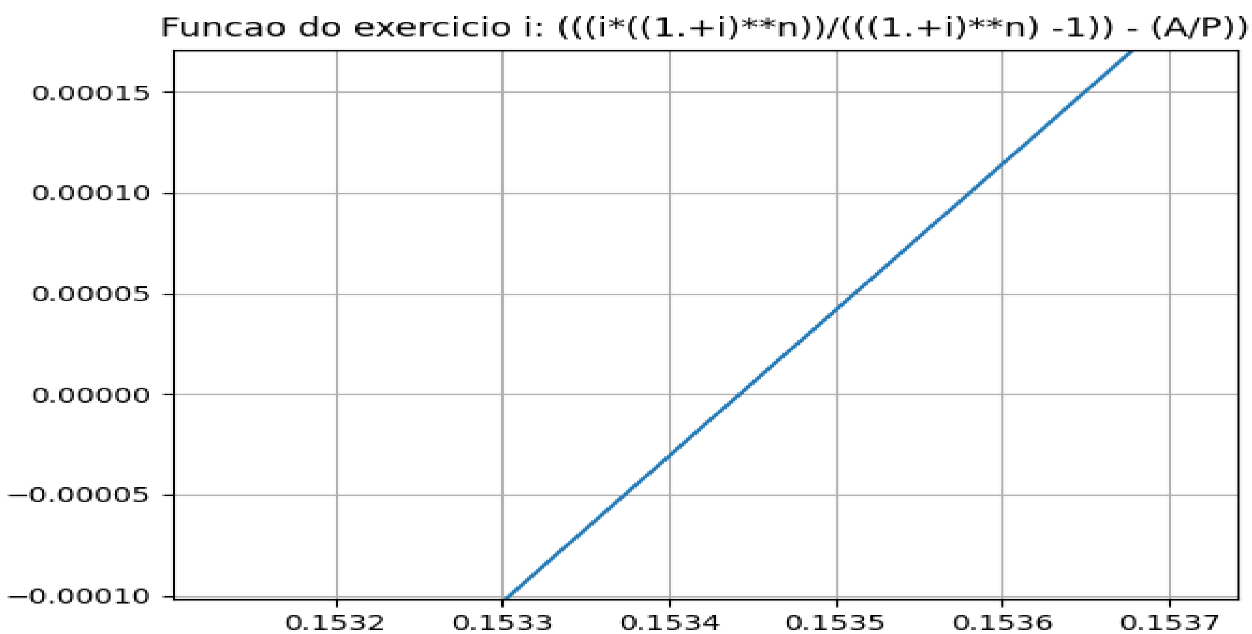
Codigo:

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt

def desenhar_grafico(funcao_nome: str,xmin: float,xmax: float,step: float, func):

        x = np.arange(xmin,xmax,step)
        y = func(x)
        plt.title(f"{funcao_nome}")
        plt.xlabel("x axis caption")
        plt.ylabel("y axis caption")
        plt.plot(x,y)
        plt.grid(axis='y')
        plt.grid(axis='x')
        plt.show()

n = 7;      # numero de anos
A = 8500;  # pagamentos anuais
P = 35000; # valor atual

desenhar_grafico("Funcao do exercicio i: (((i*((1.+i)**n))/(((1.+i)**n) -1)) - (A/P))",-1,1,0.01,lambda i:
(((i*((1.+i)**n))/(((1.+i)**n) -1)) - (A/P)))
#desenhar_grafico("Exemplo x: (x**2 -13)",0,10,0.01,lambda x: (x**2 -13))
```

Rodando o programa obtemos o seguinte gráfico:



Dentro da caixa vermelha podemos observar que a linha da função atravessa a linha 0 do eixo Y, dando zoom obtemos o seguinte resultado:



Concluímos que a aproximação de i está entre 0.1534 e 0.1535.

3 BUSCA INCREMENTAL

O algoritmo de busca incremental é fornecido pelo livro na figura 5.4; cap. 5;pág 132, algumas modificações foram feitas para facilitar o entendimento; aplicado em forma de uma função.

Código em Octave-8.3.0 win10 22h2

```
function busca_incremental(func,xmin,xmax,ns)

      printf("===============METODO_DA_BUSCA_INCREMENTAL===============\n")

      % Se nenhum subintervalo foi encontrado, xb = [].
      % Busca incremental

      x = linspace(xmin,xmax,ns);
      nb = 0; xb = []; %xb é nulo a menos que seja detectada mudança de sinal
      f = func(x);
      iter = 0; %variavel usada para contar as iteracoes

      for k = 1:length(x)-1
            if [sign(f(k)) ~= sign(f(k+1))] %verifica se há mudança de sinal
                  nb = nb + 1;
                  xb(nb,1) = x(k);
                  xb(nb,2) = x(k+1);
                  printf("Subintervalo %d: %.7f | %.7f\n", nb, x(k), x(k+1));
            endif;
            iter = iter + 1;
      end;
      if isempty(xb) %exibe que nenhum subintervalo foi encontrado
            printf("Nenhum intervalo encontrado!");
      else
            printf("Numero de subintervalos: %d\nNumero de iteracoes:
%d\n",nb,iter+1);
      endif;
endfunction;
```

Rodando a função com os valores fornecidos pela questão:
Código em Octave-8.3.0 win10 22h2

```
%==============================VARIAVEIS_DO_EXERCICIO==============================
% consultar exercicio 5.14 cap5 pag.149
% função a ser utilizada pelos diferentes métodos
% conforme descreve o exercício

es = 0.00005;                    % criterio de parada
n = 7;                            % numero de anos
A = 8500;                                 % pagamentos anuais
P = 35000;                                % valor atual

funcao_exemplo = @(i) (((i.*((1.+i).^n))./(((1.+i).^n) -1)) - (A./P));
%==================================================================================

busca_incremental(funcao_exemplo,0.01,0.3,1000);
```

Obtemos os seguintes resultados:

```
===============METODO_DA_BUSCA_INCREMENTAL===============
Subintervalo 1: 0.1520408 | 0.1579592
Numero de subintervalos: 1
Numero de iteracoes: 1000
```

Que nos dá o resultado de que a taxa de juros está entre 0.1520 e 0.1579.Menos preciso que o método gráfico, porém, infinitamente mais rápido.

4 BISSECÇÃO

O algoritmo do método de bissecção também é fornecido pelo livro cap. 5;pág. 140, algumas modificações foram feitas para facilitar o entendimento; aplicado em forma de uma função.

Código em Octave-8.3.0 win10 22h2

```
function bisseccao(func,xl,xu,es)

       printf("===============METODO_DA_BISSECCAO===============\n")

       iter = 0; xr =  xl; ea = 100;

       while [ea >= es] % roda enquanto o erro aproximado eh menor q o criterio de
parada

              printf("Aproximação:%.10f | xl:%0.5f|xr=%0.5f|xu=%0.5f |Iteração:%d |
ea:%.5f(0,00005)\n",xr,xl,xr,xu,iter,ea)

              xr_velho = xr; % usado para calcular o erro aproximado

              xr = (xl + xu)/2; % equação para achar a aproximaçao

              iter = iter + 1;

              ea = abs((xr - xr_velho)/xr) * 100; % calcula o erro aproximado

              if func(xl)*func(xr) < 0 % se o produto de xr e xl
                     xu = xr;
              else
                     xl = xr;
              end;
        endwhile;

endfunction;
```

Rodando a função com os valores fornecidos pela questão:

Código em Octave-8.3.0 win10 22h2

```
%==============================VARIAVEIS_DO_EXERCICIO==============================
% consultar exercicio 5.14 cap5 pag.149
% função a ser utilizada pelos diferentes métodos
% conforme descreve o exercício

es = 0.00005;           % criterio de parada
n = 7;                  % numero de anos
A = 8500;               % pagamentos anuais
P = 35000;              % valor atual

funcao_exemplo = @(i) (((i.*((1.+i).^n))./(((1.+i).^n) -1)) - (A./P));
%===================================================================================

bisseccao(funcao_exemplo,0.01,0.3,es);
```

Obtemos os seguintes resultados:

```
===============METODO_DA_BISSECCAO===============
Aproximação:0.0100000000 | xl:0.01000|xr=0.01000|xu=0.30000 |Iteração:0 | ea:100.00000(0,00005)
Aproximação:0.1550000000 | xl:0.01000|xr=0.15500|xu=0.15500 |Iteração:1 | ea:93.54839(0,00005)
Aproximação:0.0825000000 | xl:0.08250|xr=0.08250|xu=0.15500 |Iteração:2 | ea:87.87879(0,00005)
Aproximação:0.1187500000 | xl:0.11875|xr=0.11875|xu=0.15500 |Iteração:3 | ea:30.52632(0,00005)
Aproximação:0.1368750000 | xl:0.13687|xr=0.13687|xu=0.15500 |Iteração:4 | ea:13.24201(0,00005)
Aproximação:0.1459375000 | xl:0.14594|xr=0.14594|xu=0.15500 |Iteração:5 | ea:6.20985(0,00005)
Aproximação:0.1504687500 | xl:0.15047|xr=0.15047|xu=0.15500 |Iteração:6 | ea:3.01142(0,00005)
Aproximação:0.1527343750 | xl:0.15273|xr=0.15273|xu=0.15500 |Iteração:7 | ea:1.48338(0,00005)
Aproximação:0.1538671875 | xl:0.15273|xr=0.15387|xu=0.15387 |Iteração:8 | ea:0.73623(0,00005)
Aproximação:0.1533007812 | xl:0.15330|xr=0.15330|xu=0.15387 |Iteração:9 | ea:0.36947(0,00005)
Aproximação:0.1535839844 | xl:0.15330|xr=0.15358|xu=0.15358 |Iteração:10 | ea:0.18440(0,00005)
Aproximação:0.1534423828 | xl:0.15344|xr=0.15344|xu=0.15358 |Iteração:11 | ea:0.09228(0,00005)
Aproximação:0.1535131836 | xl:0.15344|xr=0.15351|xu=0.15351 |Iteração:12 | ea:0.04612(0,00005)
Aproximação:0.1534777832 | xl:0.15344|xr=0.15348|xu=0.15348 |Iteração:13 | ea:0.02307(0,00005)
Aproximação:0.1534600830 | xl:0.15344|xr=0.15346|xu=0.15346 |Iteração:14 | ea:0.01153(0,00005)
Aproximação:0.1534512329 | xl:0.15345|xr=0.15345|xu=0.15346 |Iteração:15 | ea:0.00577(0,00005)
Aproximação:0.1534556580 | xl:0.15346|xr=0.15346|xu=0.15346 |Iteração:16 | ea:0.00288(0,00005)
Aproximação:0.1534578705 | xl:0.15346|xr=0.15346|xu=0.15346 |Iteração:17 | ea:0.00144(0,00005)
Aproximação:0.1534567642 | xl:0.15346|xr=0.15346|xu=0.15346 |Iteração:18 | ea:0.00072(0,00005)
Aproximação:0.1534562111 | xl:0.15346|xr=0.15346|xu=0.15346 |Iteração:19 | ea:0.00036(0,00005)
Aproximação:0.1534559345 | xl:0.15346|xr=0.15346|xu=0.15346 |Iteração:20 | ea:0.00018(0,00005)
Aproximação:0.1534557962 | xl:0.15346|xr=0.15346|xu=0.15346 |Iteração:21 | ea:0.00009(0,00005)
```

Concluímos que o valor de i é aproximadamente 0.1534557962 com uma taxa de erro aproximada de 0.00009% com 21 iterações do algoritmo, até agora o valor mais preciso que obtemos, observe que os resultados se corroboram e convergem para um valor de 0.1534.

5 FALSA POSIÇÃO

O algoritmo do método da falsa posição é bem parecido com o da bissecção, o que muda é a equação usada para calcular o valor da aproximação atual, no método da falsa posição usamos:

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

Onde na bissecção a equação é xr = (xl + xu)/2.

Código em Octave-8.3.0 win10 22h2

```
function falsa_posicao(func,xl,xu,es)

        printf("===============METODO_DA_FALSA_POSICAO===============\n")

        iter = 0; xr = xl; ea = 100;

        while [ea >= es]

                printf("Aproximação:%.10f | xl:%0.5f|xr=%0.5f|xu=%0.5f |Iteração:%d | ea:%.5f(0,00005)\n",xr,xl,xr,xu,iter,ea)

                xr_velho = xr;

                xr = (xu - (func(xu)*(xl-xu))/(func(xl)-func(xu)));  % equação para achar a aproximaçao

                % mesmo algoritimo da bisseccao, só muda a equação para achar a aproximacao

                iter = iter + 1;

                ea = abs((xr - xr_velho)/xr) * 100;

                if func(xl)*func(xr) < 0
                        xu = xr;
                else
                        xl = xr;
                end;
        endwhile;

endfunction;
```

Rodando a função com os valores fornecidos pela questão:

Código em Octave-8.3.0 win10 22h2

```
%===============================VARIAVEIS_DO_EXERCICIO===============================
% consultar exercicio 5.14 cap5 pag.149
% função a ser utilizada pelos diferentes métodos
% conforme descreve o exercício

es = 0.00005;            % criterio de parada
n = 7;                   % numero de anos
A = 8500;                % pagamentos anuais
P = 35000;               % valor atual

funcao_exemplo = @(i) (((i.*((1.+i).^n))./(((1.+i).^n) -1)) - (A./P));
%==============================================================================

falsa_posicao(funcao_exemplo,0.01,0.3,es);
```

Obtemos os seguintes resultados:

```
===============METODO_DA_FALSA_POSICAO===============
Aproximação:0.0100000000 | xl:0.01000|xr=0.01000|xu=0.30000 |Iteração:0 | ea:100.00000(0,00005)
Aproximação:0.1412219882 | xl:0.14122|xr=0.14122|xu=0.30000 |Iteração:1 | ea:92.91895(0,00005)
Aproximação:0.1525908139 | xl:0.15259|xr=0.15259|xu=0.30000 |Iteração:2 | ea:7.45053(0,00005)
Aproximação:0.1533955426 | xl:0.15340|xr=0.15340|xu=0.30000 |Iteração:3 | ea:0.52461(0,00005)
Aproximação:0.1534515528 | xl:0.15345|xr=0.15345|xu=0.30000 |Iteração:4 | ea:0.03650(0,00005)
Aproximação:0.1534554466 | xl:0.15346|xr=0.15346|xu=0.30000 |Iteração:5 | ea:0.00254(0,00005)
Aproximação:0.1534557172 | xl:0.15346|xr=0.15346|xu=0.30000 |Iteração:6 | ea:0.00018(0,00005)
```

O resultado obtido é que o valor de i é aproximadamente 0.1534557172 com uma taxa de erro de 0.00018% com 6 iterações.

6 VERIFICAÇÕES

A fim de sanar as dúvidas, podemos usar os 4 métodos com uma equação à qual o resultado é conhecido e comparar o resultado real e o resultado obtido pelos diferentes métodos. Se os valores aproximados forem iguais ou bem próximos do valor real da solução, podemos afirmar que os algoritmos estão funcionando plenamente e os resultados são aproximações fiéis.

A equação com resultado conhecido à ser utilizada é a seguinte:

$$f(x) = x^2 - 13$$

Queremos achar o valor de x para que ***f (x) = 0.***

Resolvendo a equação obtida para x obtemos:

$$0 = \mathrm{x}^2 - 13$$

$$\mathrm{x}^2 = 13$$

$$\mathrm{x} = \sqrt{13}$$

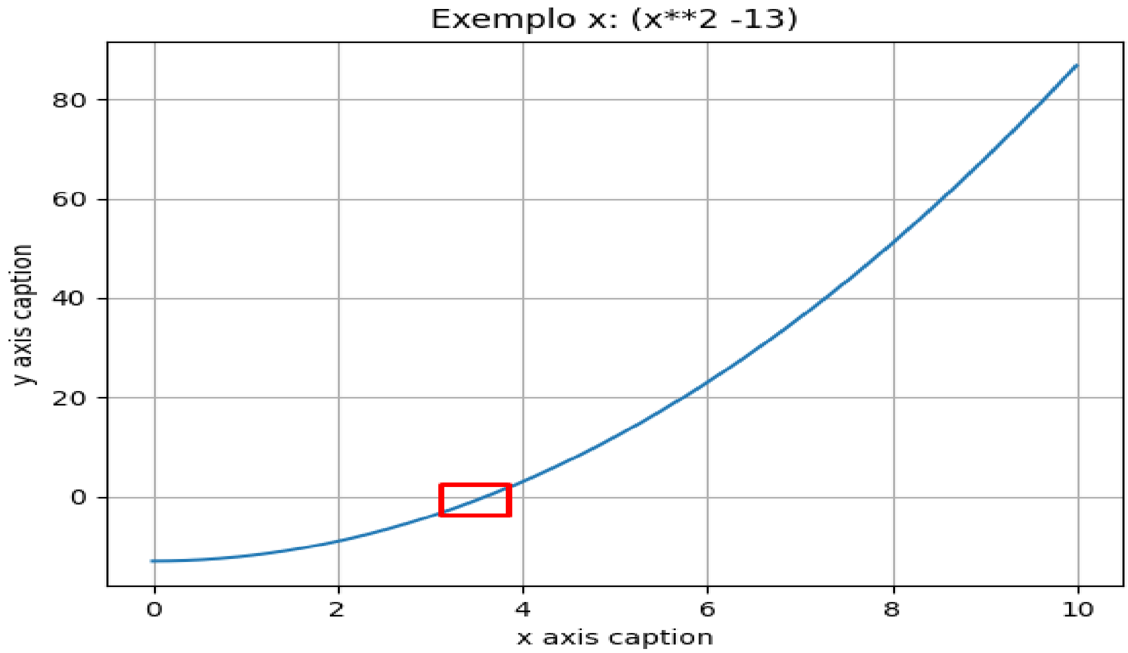
Sabemos então, que o valor de x para que f(x) = 0 é $\sqrt{13}$ ou aproximadamente 3,60555 segundo o site Conversor-de-medidas.
https://conversor-de-medidas.com/matematica/raiz-quadrada/Raiz-quadrada-de_13_

Usando o octave para calcular o valor de $\sqrt{13}$ obtemos:

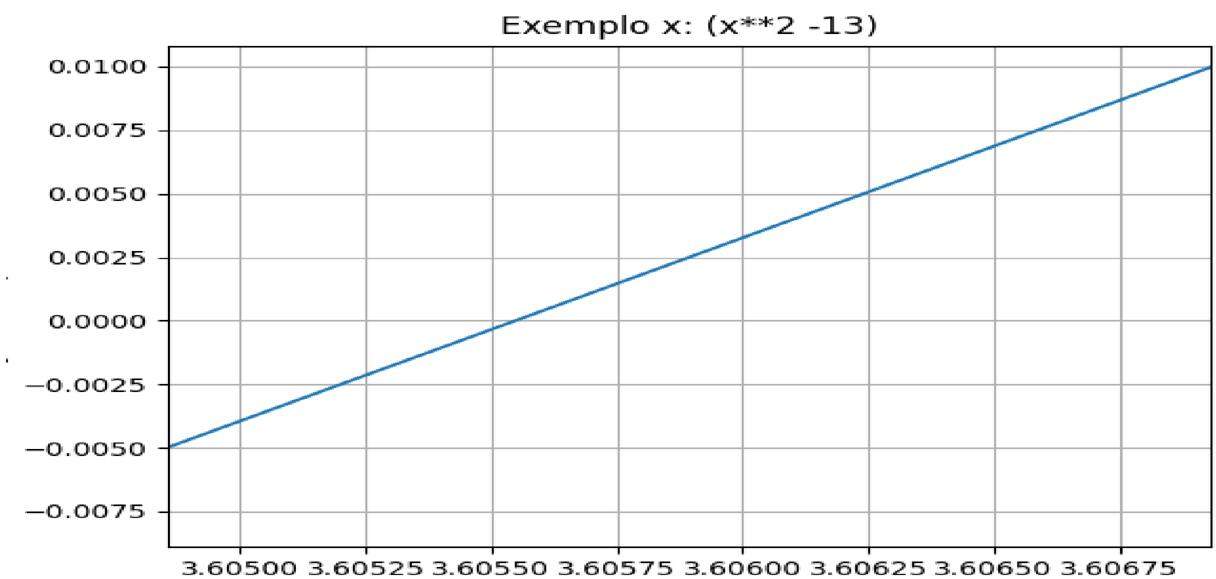
```
octave:1> sqrt(13)
ans = 3.6056
```

Logo, podemos concluir que o valor que queremos obter usando os algoritmos é 3,605.

Usando o método gráfico obtemos a seguinte imagem:



Observamos que a linha atravessa o eixo Y entre 2 e 4, que está de acordo com os valores obtidos anteriormente, dando zoom obtemos o seguinte resultado:



Concluímos que a aproximação de x está entre 3.60550 e 3.60575

Utilizando os 3 algoritmos de métodos intervalos, obtemos os seguintes resultados:

===============METODO_DA_BUSCA_INCREMENTAL===============
Subintervalo 1: 3.6000000 | 3.7000000
Numero de subintervalos: 1
Numero de iteracoes: 100

===============METODO_DA_BISSECCAO===============
Aproximação:0.1000000000 | xl:0.10000|xr=0.10000|xu=10.00000 |Iteração:0 | ea:100.00000(0,00005)
Aproximação:5.0500000000 | xl:0.10000|xr=5.05000|xu=5.05000 |Iteração:1 | ea:98.01980(0,00005)
Aproximação:2.5750000000 | xl:2.57500|xr=2.57500|xu=5.05000 |Iteração:2 | ea:96.11650(0,00005)
(...)
Aproximação:3.6055544853 | xl:3.60555|xr=3.60555|xu=3.60555 |Iteração:20 | ea:0.00026(0,00005)
Aproximação:3.6055497646 | xl:3.60555|xr=3.60555|xu=3.60555 |Iteração:21 | ea:0.00013(0,00005)
Aproximação:3.6055521250 | xl:3.60555|xr=3.60555|xu=3.60555 |Iteração:22 | ea:0.00007(0,00005)

===============METODO_DA_FALSA_POSICAO===============
Aproximação:0.1000000000 | xl:0.10000|xr=0.10000|xu=10.00000 |Iteração:0 | ea:100.00000(0,00005)
Aproximação:1.3861386139 | xl:1.38614|xr=1.38614|xu=10.00000 |Iteração:1 | ea:92.78571(0,00005)
Aproximação:2.3591304348 | xl:2.35913|xr=2.35913|xu=10.00000 |Iteração:2 | ea:41.24366(0,00005)
Aproximação:2.9606698093 | xl:2.96067|xr=2.96067|xu=10.00000 |Iteração:3 | ea:20.31768(0,00005)
Aproximação:3.2873839640 | xl:3.28738|xr=3.28738|xu=10.00000 |Iteração:4 | ea:9.93842(0,00005)
Aproximação:3.4524357664 | xl:3.45244|xr=3.45244|xu=10.00000 |Iteração:5 | ea:4.78073(0,00005)
(...)
Aproximação:3.6055427352 | xl:3.60554|xr=3.60554|xu=10.00000 |Iteração:18 | ea:0.00027(0,00005)
Aproximação:3.6055472616 | xl:3.60555|xr=3.60555|xu=10.00000 |Iteração:19 | ea:0.00013(0,00005)
Aproximação:3.6055493890 | xl:3.60555|xr=3.60555|xu=10.00000 |Iteração:20 | ea:0.00006(0,00005)

Busca incremental: Subintervalo 1: 3.6000000 | 3.7000000
Bissecção: Aproximação:3.6055521250
Falsa posição: Aproximação:3.6055493890

Os valores obtidos são valores próximos de 3,605 que é o valor real a ser encontrado, logo, podemos afirmar que os algoritmos estão funcionando plenamente e os valores obtidos são aproximações fiéis ao valor real do problema.

7 CONCLUSÃO

Após verificar a fidelidade de resultados dos 4 métodos aplicados neste relatório podemos afirmar que os valores obtidos têm aproximações corretas.

Resultados:

Método Gráfico: “i” está entre 15.34% e 15.35%.

Busca incremental: “i” está entre 15.20% e 15.79%.

Bissecção: “i” é aproximadamente 15.34% com uma taxa de erro aproximada de 0.00009%.

Falsa posição: “i” é aproximadamente 15.34% com uma taxa de erro de 0.00018%.

Tabela de resultados:

Metodo	Resultado	Erro Aproximado (%)	Runtime(segundos)
Grafico	[15.34% , 15.35%]	Não calculado(N/A)	Uso manual
Busca incremental	[15.20% , 15.79%]	Não calculado(N/A)	0.0092697144
Bissecção	15.345579%	0.00009	0.0092773438
Falsa posição	15.345571%	0.00018	0.0056838989

8 Fontes e Arquivos:

CHAPRA STEVEN C. MÉTODOS NUMÉRICOS APLICADOS COM MATLAB ® PARA ENGENHEIROS E CIENTISTAS 3 EDIÇÃO.

https://conversor-de-medidas.com/matematica/raiz-quadrada/Raiz-quadrada-de_13_

Arquivos:

(Livro do exercício, arquivos da implementação dos 3 algoritmos em Octave-8.3.0 e da implementação do método gráfico em python)

https://github.com/cz-8/Metodos_Intervalares