

Opis programu obliczającego wartość dystrybuanty rozkładu *t-Studenta*

Cezary Miłek | 339746

Metoda Romberga - `romberg_method(f, a, b, n)`

Opis

Metoda Romberga jest rozszerzeniem metody trapezów i daje lepsze przybliżenie całki poprzez zasadniczą redukcję błędu. Używa interpolacji wielomianowej, aby poprawić dokładność przybliżenia.

Idea metody Romberga polega na iteracyjnym ulepszaniu wyniku całki poprzez wykorzystanie coraz lepszych przybliżeń. Proces polega na budowaniu tabeli, w której kolejne wiersze zawierają coraz dokładniejsze przybliżenia. W pierwszym wierszu znajdują się wartości obliczone za pomocą metody trapezów, a następnie interpolacja wielomianowa jest używana do wyznaczenia lepszych przybliżeń całki.

W miarę dodawania kolejnych wierszy do tabeli Romberga, przybliżenie całki staje się coraz dokładniejsze, aż do osiągnięcia zadowalającej precyzji.

Implementacja

Algorytm dzieli przedział całkowania na coraz mniejsze podprzedziały i wykorzystuje metodę trapezów do początkowej aproksymacji całki. Następnie iteracyjnie poprawia tę wartość, używając funkcji `romberg_update`, aż do uzyskania pożądanej dokładności.

Krótki opis działania, krok po kroku, przedstawia się następująco:

1. Pierwszym krokiem metody Romberga jest obliczenie przybliżonej wartości całki za pomocą **metody trapezów**.
2. Następnie, korzystając z tej wartości, obliczane są kolejne przybliżenia poprzez **zmniejszanie rozmiaru kroku i interpolację** pomiędzy kolejnymi wartościami całek.
3. Iteracyjne poprawianie przybliżeń prowadzi do uzyskania coraz dokładniejszych wyników całkowania.

Implementacja tej metody składać się będzie z dwóch głównych funkcji: `trapezoidal_rule` i `romberg_update`.

Metoda trapezów - `trapezoidal_rule(f, a, b, h)`

Metoda trapezów polega na obliczeniu całki za pomocą sumy obszarów trapezów pod wykresem funkcji. Reguła ta opiera się na przybliżeniu całki jako sumy pól trapezów, gdzie wysokość trapezów odpowiada wartości funkcji na odpowiednich punktach przedziału.

- **Podział przedziału:** Pierwszym krokiem metody trapezów jest podzielenie przedziału całkowania na mniejsze podprzedziały. Im większa liczba podprzedziałów, tym dokładniejsze przybliżenie całki.
- **Aproksymacja obszarów:** W każdym podprzedziale, obszar pod wykresem funkcji jest przybliżany obszarem trapezu. Obszar ten jest równy sumie pola trapezów między dwoma kolejnymi punktami na wykresie funkcji.
- **Obliczenie sumy:** Następnie, sumowane są obszary wszystkich trapezów, aby uzyskać przybliżoną wartość całki.

Wartość przybliżonej całki wyraża się za pomocą wzoru trapezów:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right)$$

gdzie x_i są punktami podziału przedziału, a n to liczba podprzedziałów.

Funkcja wewnętrzna metody Romberga - `romberg_update(prev, h, k)`

Ta funkcja służy do aktualizacji wartości przybliżonej całki w każdej iteracji metody Romberga. Wykorzystuje ona wcześniejsze przybliżenia, aby poprawić dokładność obliczeń.

Algorytm bazuje na wykorzystaniu dwóch poprzednich przybliżeń w celu uzyskania bardziej dokładnej wartości.

Funkcja oblicza więc kolejną aproksymację całki, zgodnie ze wzorem:

$$R_k = \frac{4^{k-1} R_{k-1} - R_{k-2}}{4^{k-1} - 1}$$

gdzie

- R_k to kolejna aproksymacja całki
- R_{k-1} to poprzednia wartość aproksymacji
- R_{k-2} to "przedpoprzednia" wartość aproksymacji

Dzięki temu możemy uzyskać coraz dokładniejsze przybliżenia całki w kolejnych iteracjach metody Romberga.

Obliczanie Gammy - `gamma_romberg(x)`

Funkcja Gamma jest definiowana jako:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Jej wartość obliczamy używając opisanej powyżej metody Romberga.

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa - `tpdf_manual(x, k)`

Funkcja oblicza gęstość prawdopodobieństwa rozkładu *t-Studenta* dla danej wartości x i liczby stopni swobody k .

Obliczenia bazują na wzorze:

$$f(x; k) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi k} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$$

gdzie:

- $\Gamma(x)$ oznacza funkcję Gamma,
- k to liczba stopni swobody rozkładu t ,
- x to wartość, dla której obliczane jest prawdopodobieństwo.

Finalna funkcja - `tcdf_romberg(x, k)`

Funkcja oblicza wartość dystrybuanty w punkcie x , dla rozkładu *t-Studenta*, przy liczbie stopni swobody k . Całkowanie na podstawie zdefiniowanej już wcześniej metody Romberga.