Zadanie nr 3

Cezary Miłek | 339746

13 maja 2024

Musimy policzyć MGF, wyznaczyć oszacowania wynikające z nierówności Markowa, Czebyszewa i Chernoffa dla rozkładu wykładniczego oraz sporządzić tabelę z wartościami dokładnymi i oszacowaniami.

Rozkład wykładniczy $Exp(\lambda)$ ma gęstość określoną wzorem: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, gdzie $x > 0$.

Wyznaczanie MGF rozkładu wykładniczego

Obliczmy funkcję generującą dla rozkładu wykładniczego $Exp(\lambda)$. Zakładamy, że $x > 0$.

MGF definiujemy jako:

$$M_X(t) = E[e^{tX}]$$

Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie wykładniczym:

$$X \sim Exp(\lambda)$$

Wtedy gęstość jest określona wzorem:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

Aby obliczyć MGF, podstawiamy e^{tx} do gęstości prawdopodobieństwa i całkujemy:

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= E[e^{tX}] \\
&= \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{(t-\lambda)x} dx \\
&= \left[\frac{\lambda}{t-\lambda} e^{(t-\lambda)x} \right]_0^\infty \\
&= \lim_{x \to \infty} \left[\frac{\lambda}{t-\lambda} e^{(t-\lambda)x} - \frac{\lambda}{t-\lambda} \right] \\
&= \frac{\lambda}{t-\lambda} \left[\lim_{x \to \infty} e^{x(t-\lambda)} - 1 \right] \\
&= \frac{\lambda}{t-\lambda} [0 - 1] \\
&= \frac{\lambda}{\lambda - t}, \text{ dla } t < \lambda
\end{aligned}$$

Wyznaczanie oszacowań

Niech $X \sim Exp(\lambda)$. Wyznaczyć oszacowania dla $P(X \geq \lambda a)$ wynikające z nierówności Markova, Chebysheva i Chernoffa.

Nierówność Markova

Oszacowanie Markowa jest zdefiniowane jako:

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(x)}{a}$$

Policzmy najpierw $E(X)$:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx \text{ (podstawiając } y = \lambda x) \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty y e^{-y} dy \\
&= \frac{1}{\lambda} \Big[-e^{-y} - y e^{-y} \Big]_0^\infty \\
&= \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}$$

Wracamy do wzoru i podstawiamy nowo obliczoną wartość:

$$P(X \geq \lambda a) \leq \frac{E(x)}{\lambda a} = \frac{1}{\lambda^2 a}$$

Nierówność Chebysheva

Oszacowanie Czebyszewa jest zdefiniowane jako:

$$P(|X - E(X)| \geq k) \leq \frac{V(X)}{k^2}$$

Wyprowadzimy je z nierówności Markova. Musimy więc policzyć wariancję $V(X)$, aby ją dostać skorzystamy z zależności:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Mamy już $E(X)$, wystarczy, że teraz policzymy $E(X^2)$:

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x} dx \text{ (podstawiając } y = \lambda x) \\
&= \frac{1}{\lambda^2} \int_0^\infty y^2 e^{-y} dy \\
&= \frac{1}{\lambda^2} \Big[-2e^{-y} - 2y e^{-y} - y^2 e^{-y} \Big]_0^\infty \\
&= \frac{2}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

Zatem wariancja będzie wynosić:

$$V(X) = E(X)^2 - (E(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Teraz podstawiamy do wzoru:

$$P(X \geq \lambda a) = P(|X - E(X)| \geq \lambda a - \frac{1}{\lambda}) \leq \frac{V(X)}{(\lambda a - \frac{1}{\lambda})^2} = \frac{1}{\lambda^2(\lambda a - \frac{1}{\lambda})^2}$$

Nierówność Chernoffa

Oszacowanie Czernoffa jest zdefiniowane jako:

$$P(X \geq \lambda a) = P(e^{tX} \geq e^{t\lambda a}) \leq M_X(t) \cdot e^{-t\lambda a} = \frac{\lambda}{\lambda - t} \cdot e^{-t\lambda a}$$

gdzie $t > 0$.

Aby otrzymać najlepsze oszacowanie jakie możemy, policzymy i wykorzystamy minimum następującej funkcji:

$$f(x) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \cdot e^{-t\lambda a}$$

Dostaniemy je z pochodnej:

$$f'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \cdot e^{-t\lambda a}\right) = \frac{\lambda \cdot e^{-t\lambda a} \cdot (-\lambda^2 a + \lambda a t + 1)}{(\lambda - t)^2}$$

Przyrównując wynik do zera zauważmy, że pochodna da nam 0 tylko jeśli element w nawiasie w liczniku będzie równy 0 (ponieważ ani λ ani e^k nigdy nie będą równe 0).

Wynikowe miejsce zerowe to:

$$t = \lambda - \frac{1}{\lambda a}$$

Upewnijmy się jeszcze, że jest to minimum sprawdzając warunki:

$$f'\left(\lambda - \frac{1}{\lambda a} - 1\right) < 0$$

$$f'\left(\lambda - \frac{1}{\lambda a} + 1\right) > 0$$

Wynik jest więc minimum lokalnym funkcji. Warto też zauważyć, że skoro $\frac{1}{\lambda a} < \lambda$, to spełniony jest warunek, że $t > 0$.

Mając już wszystkie potrzebne informacje możemy obliczyć nasze oszacowanie:

$$P(X \geq \lambda a) \leq \lambda^2 a \cdot e^{-\lambda^2 a + 1}$$

Tabelka z wartościami

Niech n oznacza numer indeksu, $k = n$ mod 10, $m = \frac{n-k}{10}$ mod 10, $\lambda = k + m + 1$, $a \in \{3, 4, 6, 10\}$. Sporządzić tabelę z wartościami dokładnymi i oszacowaniami.

$$
\begin{aligned}
n &= 339746 \\
k &= 339746 \text{ mod } 10 = 6 \\
m &= \frac{339746 - 6}{10} \text{ mod } 10 = 4 \\
\lambda &= 6 + 4 + 1 = 11
\end{aligned}
$$

Wartość dokładną policzymy ze wzoru:

$$P(X \geq \lambda a) = 1 - P(X \leq \lambda a) + P(X = \lambda a) = e^{-\lambda^2 a}$$

Tabela 1: Tabela oszacowań i wartości dokładnych dla danych a

a	Markov	Chebyshev	Chernoff	Wartość dokładna
3	0.0027548	7.631e-06	2.2146e-155	2.2444e-158
4	0.0020661	4.2865e-06	8.3293e-208	6.331e-211
6	0.0013774	1.9025e-06	9.9412e-313	5.0374-316
10	0.00082645	6.8414e-07	0	0