Wstęp do sztucznej inteligencji

Lista 2

Aleksandra Czarniecka (272385)

kwiecień 2025

Wprowadzenie

Celem zadania było zaimplementowanie algorytmu A* rozwiązującego układankę logiczną Piętnastka (ang. *15 puzzle*) z wykorzystaniem dwóch różnych funkcji heurystycznych. Stan początkowy miał być losowo generowaną permutacją z pustym prawym dolnym rogiem. Zbadano również, które permutacje są rozwiązywalne i jak to w prosty sposób sprawdzić.

1 Algorytm A*

Algorytm A* jest algorytmem przeszukiwania grafu, który znajduje najkrótszą ścieżkę od stanu początkowego do stanu końcowego. Korzysta z funkcji oceny:

$$f(n) = g(n) + h(n)$$

gdzie:

- $g(n)$ – koszt dotarcia do węzła n,
- $h(n)$ – szacunkowy koszt dotarcia z n do celu (heurystyka).

2 Heurystyki

2.1 Liczba nie na miejscu (Misplaced Tiles)

Heurystyka ta polega na zliczeniu liczby płytek, które nie znajdują się na swoim miejscu w porównaniu do stanu docelowego. Jest prosta i szybka w obliczaniu, ale mniej dokładna niż Manhattan.

$$h(n) = \sum_{i=1}^{n} [\text{płytka}_i \neq \text{miejsce docelowe}_i]$$

2.2 Odległość Manhattan

Heurystyka ta sumuje odległości Manhattan (czyli sumę różnic współrzędnych) każdej płytki od jej pozycji docelowej:

$$h(n) = \sum_{i=1}^{n} (|x_i - x'_i| + |y_i - y'_i|),$$

gdzie (x_i, y_i) to bieżąca pozycja kafelka, a (x'_i, y'_i) to jego pozycja docelowa.

Heurystyka ta jest dopuszczalna (nigdy nie przecenia kosztu dojścia do celu) i monotoniczna, co czyni ją idealną dla algorytmu A*. Dzięki swojej dokładności prowadzi do znacznego ograniczenia przestrzeni przeszukiwań w porównaniu do heurystyki liczącej tylko liczbę błędnie ustawionych kafelków.

2.3 Manhattan Linear Conflict

Heurystyka Manhattan Linear Conflict to rozszerzenie klasycznej heurystyki Manhattan. Wykorzystuje ona nie tylko sumę odległości Manhattan dla każdego kafelka, ale również dodatkowe "kary"za tzw. konflikty liniowe.

Konflikt liniowy zachodzi wtedy, gdy dwa kafelki znajdują się w tej samej linii (rzędzie lub kolumnie), ich pozycja docelowa także znajduje się w tej samej linii, lecz są one ustawione w odwrotnej kolejności, co uniemożliwia bezpośrednie dotarcie każdego z nich na miejsce bez przesunięcia drugiego.

Heurystyka ta jest zdefiniowana jako:

$$h(n) = \text{Manhattan}(n) + 2 \times \text{Liczba konfliktów liniowych}(n)$$

Dzięki tej poprawce heurystyka staje się bardziej informacyjna, lepiej prowadząc algorytm A* w kierunku rozwiązania przy zachowaniu dopuszczalności i monotoniczności. Zwiększona dokładność prowadzi do znacznego zmniejszenia przestrzeni przeszukiwań w porównaniu z klasyczną heurystyką Manhattan.

3 Układanka logiczna Piętnastka

3.1 Sprawdzanie rozwiązywalności permutacji

Nie każda permutacja w układance Piętnastka ma rozwiązanie. Aby sprawdzić, czy dana konfiguracja jest rozwiązywalna, liczymy liczbę inwersji (sytuacji, gdy większa liczba poprzedza mniejszą) w permutacji.
Reguły:

- Dla planszy o nieparzystej szerokości (np. 3x3), układ jest rozwiązywalny, jeśli liczba inwersji jest parzysta.
- Dla planszy o parzystej szerokości (np. 4x4):
  - Jeśli pusty kafelek jest na parzystym wierszu od dołu i liczba inwersji jest nieparzysta – układ jest rozwiązywalny.
  - Jeśli pusty kafelek jest na nieparzystym wierszu od dołu i liczba inwersji jest parzysta – układ jest rozwiązywalny.

3.2 Eksperymenty

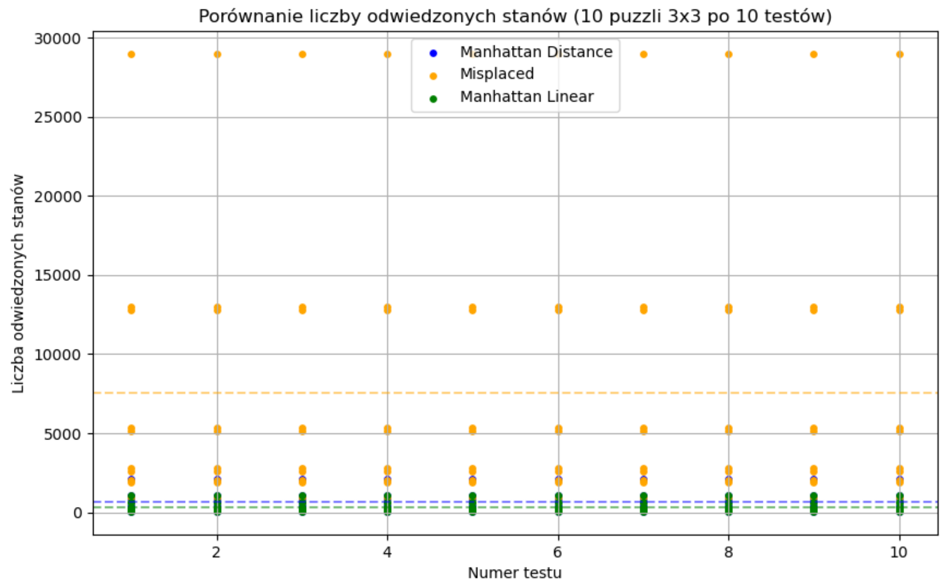
Dla każdego algorytmu wykonano serię testów na losowych, rozwiązywalnych permutacjach początkowych. Zebrano dane takie jak:

- Średnia liczba odwiedzonych stanów,
- Średnia długość ścieżki do rozwiązania,
- Czas wykonania.

3.2.1 Wyniki dla puzzli 3x3

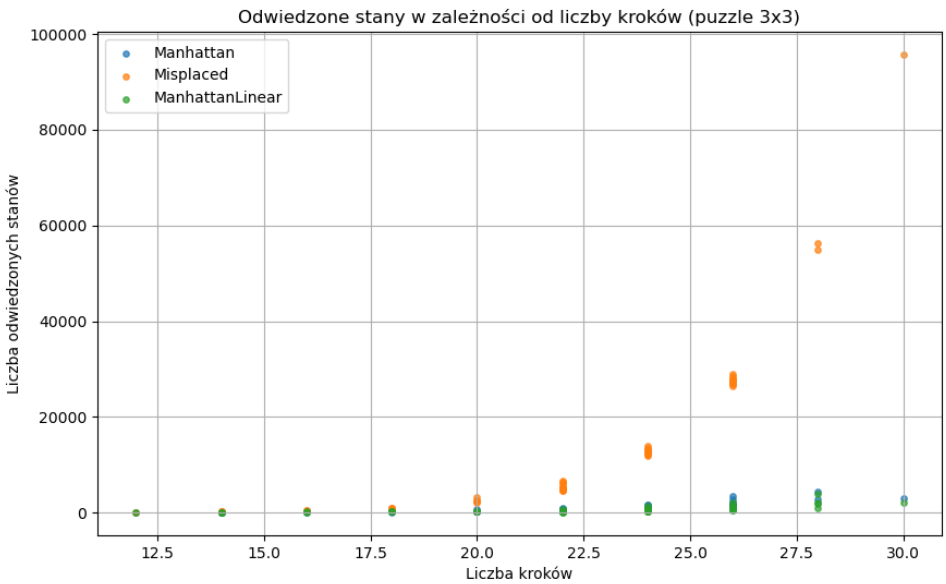
Heurystyka	**Średnia liczba kroków**	**Średnia liczba odwiedzonych stanów**
Manhattan	21.60	632.20
Manhattan Linear	21.60	336.90
Misplaced	21.60	7557.70

Tabela 1: Uśrednione wyniki dla różnych heurystyk w algorytmie A* dla puzzli 3x3.



Rysunek 1: Średnia liczba odwiedzonych stanów dla puzzli 3x3 przy użyciu różnych heurystyk

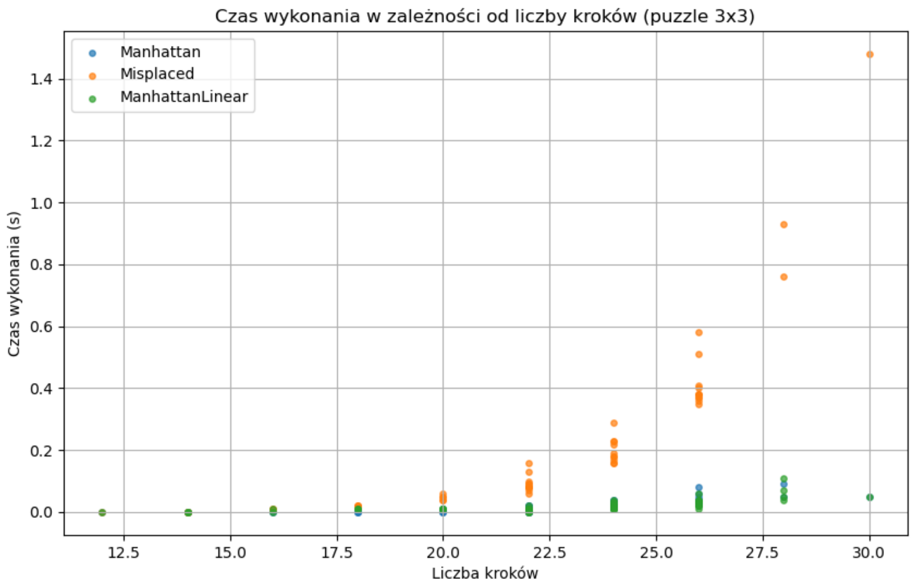
Heurystyki Manhattan Linear oraz Manhattan znacząco redukują liczbę odwiedzonych stanów, co wskazuje na ich większą efektywność. Misplaced Tiles wypada najgorzej — odwiedza bardzo dużo stanów, przez co jest mniej wydajna.



Rysunek 2: Średnia długość ścieżki rozwiązania dla puzzli 3x3 przy użyciu różnych heurystyk

Wszystkie heurystyki osiągają średnią długość ścieżki około 21.6 kroków.

Długość ścieżki do rozwiązania jest podobna niezależnie od heurystyki, co sugeruje, że główną różnicą jest liczba stanów przeszukiwanych, a nie jakość znalezionego rozwiązania.



Rysunek 3: Średni czas wykonania algorytmu A* dla puzzli 3x3

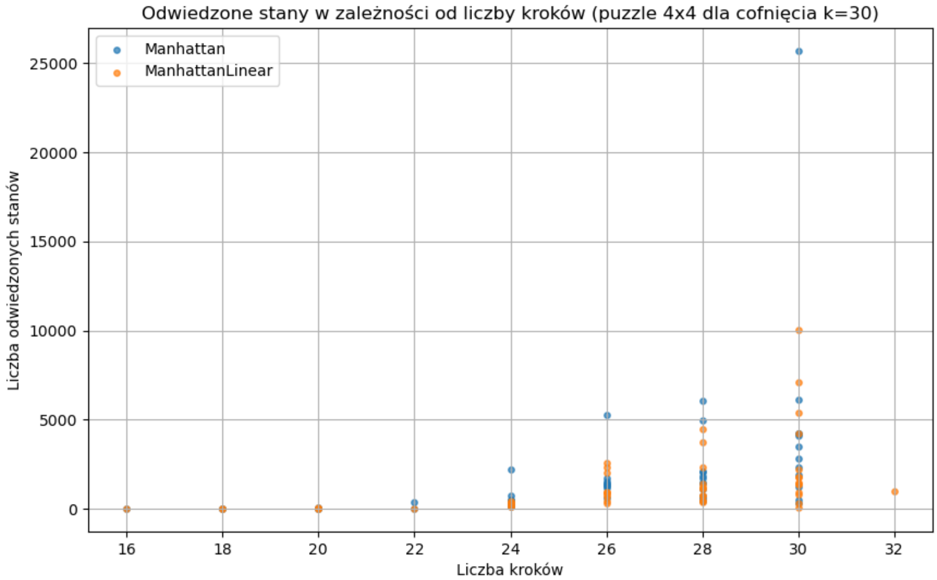
Czas wykonania koreluje z liczbą odwiedzonych stanów – mniej odwiedzonych stanów to krótszy czas. Heurystyka Misplaced, mimo prostoty, nie zapewnia optymalnej wydajności. Najkrótszy czas ma Manhattan Linear, najdłuższy Misplaced.

3.2.2 Wyniki dla puzzli 4x4 z cofnięciem o k $>$ 20

Heurystyka	**Średnia liczba kroków**	**Średnia liczba odwiedzonych stanów**
Manhattan	26.12	2075.58
Manhattan Linear	26.12	1446.50

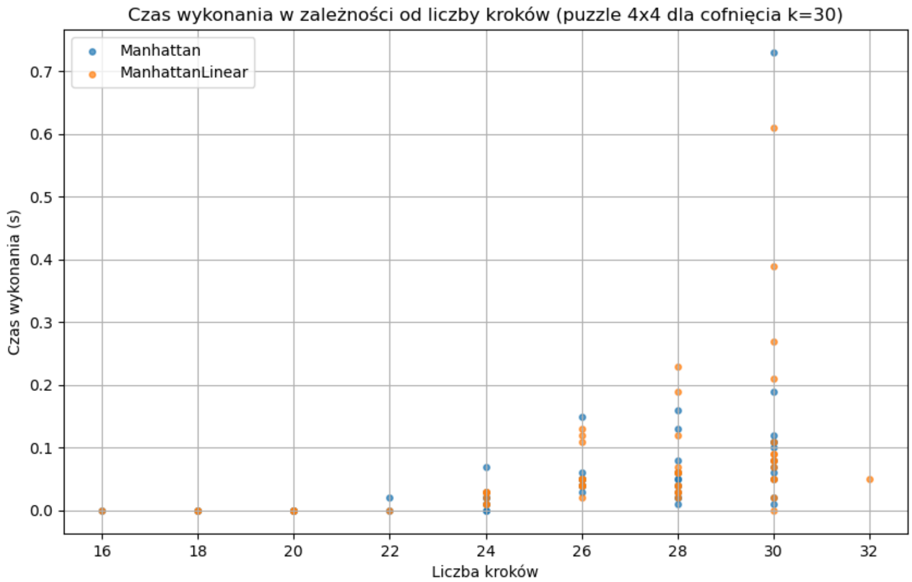
Tabela 2: Uśrednione wyniki dla różnych heurystyk w algorytmie A* dla puzzli 4x4 z cofnięciem k>20.

Analogicznie do układanki 3x3 czas wykonania koreluje z liczbą odwiedzonych stanów – mniej odwiedzonych stanów to krótszy czas.



Rysunek 4: Wyniki dla puzzli 4x4 z cofnięciem o więcej niż 20 ruchów

Złożoność problemu znacząco wpływa na wydajność – im dalej od rozwiązania, tym więcej stanów musi być odwiedzonych. Heurystyka Manhattan Linear radzi sobie odrobinę lepiej w takich przypadkach.



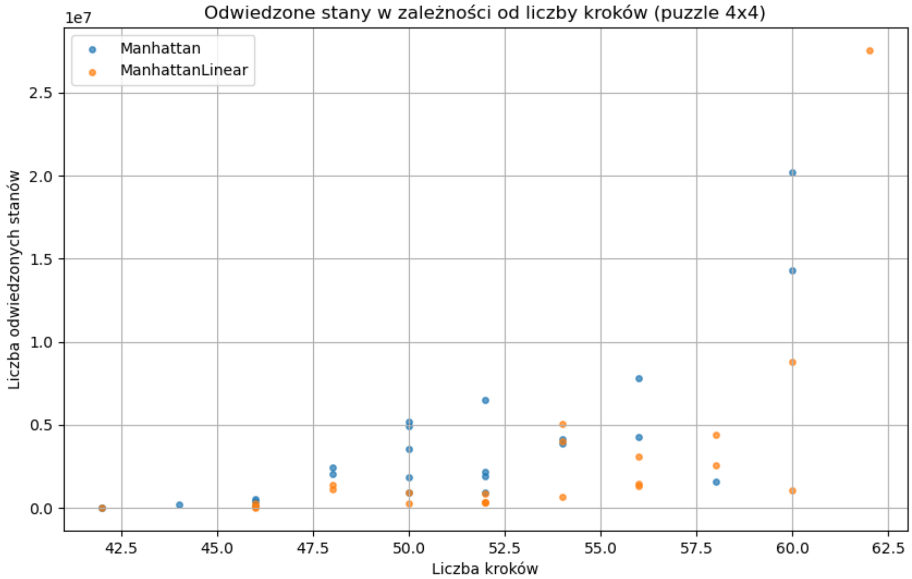
Rysunek 5: Średnia długość ścieżki rozwiązania dla puzzli 4x4 z cofnięciem o więcej niż 20 ruchów

Analogicznie do układanki 3x3 czas wykonania koreluje z liczbą odwiedzonych stanów – mniej odwiedzonych stanów to krótszy czas.

3.2.3 Wyniki dla puzzli 4x4

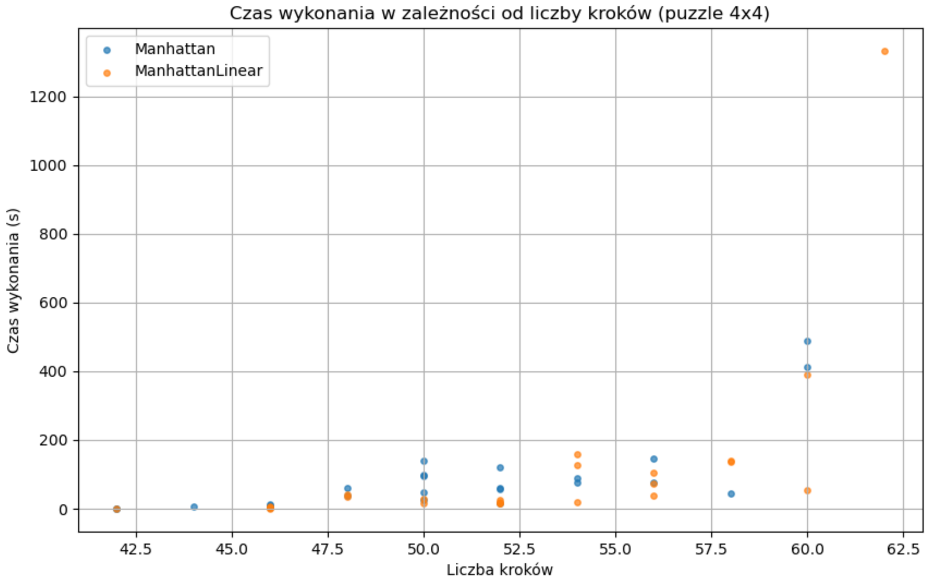
Heurystyka	Średnia liczba kroków	Średnia liczba odwiedzonych stanów
Manhattan	50.8	3 634 028.92
Manhattan Linear	50.8	2 675 332.24

Tabela 3: Uśrednione wyniki dla różnych heurystyk w algorytmie A* dla puzzli 4x4.



Rysunek 6: Wyniki dla losowych instancji puzzli 4x4

Heurystyki Manhattan i Manhattan Linear pozostają bardziej efektywne w większych przestrzeniach stanu. Gdy problem staje się trudniejszy (czyli przestrzeń stanów rośnie — więcej możliwych układów do sprawdzenia), heurystyki Manhattan i Manhattan Linear nadal działają dobrze.



Rysunek 7: Średni czas wykonania dla puzzli 4x4 przy różnych heurystykach

Analogicznie do poprzednich przykładów czas wykonania koreluje z liczbą odwiedzonych stanów – mniej odwiedzonych stanów to krótszy czas.

4 Wnioski ogólne

Na podstawie przeprowadzonych eksperymentów dotyczących algorytmu A* oraz zastosowanych heurystyk dla układanki Piętnastka, sformułowano następujące wnioski:

- **Heurystyka Manhattan z konfliktem liniowym (Manhattan Linear) okazała się najwydajniejsza** – znacząco redukowała liczbę odwiedzanych stanów i czas wykonania w porównaniu do pozostałych heurystyk, zarówno dla puzzli 3x3, jak i 4x4.
- **Heurystyka Misplaced Tiles była najmniej efektywna** – mimo niskiej złożoności obliczeniowej prowadziła do odwiedzenia bardzo dużej liczby stanów, co skutkowało wydłużonym czasem wykonania.
- **Długość ścieżki rozwiązania była zbliżona dla wszystkich heurystyk** – sugeruje to, że główną korzyścią z zastosowania bardziej zaawansowanych heurystyk jest skrócenie czasu przeszukiwania, a nie poprawa jakości samego rozwiązania.
- **Złożoność instancji znacząco wpływa na czas działania** – im bardziej oddalony od celu stan początkowy, tym większa liczba odwiedzanych stanów i dłuższy czas działania algorytmu, zwłaszcza przy zastosowaniu słabszych heurystyk.
- **Sprawdzanie rozwiązywalności permutacji jest istotnym krokiem wstępnym** – pozwala uniknąć niepotrzebnych obliczeń dla nierozwiązywalnych instancji i zwiększa ogólną efektywność rozwiązania.
- **Algorytm A* dobrze skaluje się przy użyciu odpowiednich heurystyk** – nawet dla trudniejszych instancji (np. 4x4), można uzyskać dobre wyniki czasowe przy wykorzystaniu silnych heurystyk.