EXERCICE NUMÉRIQUE 2 - MAP 433

Octobre 2022

Artur César Araújo Alves
João Pedro Tanaka Montalvão
Rafael Ryoma Nagai Matsutane

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
IP PARIS

SOMMAIRE

1
EXERCICES THÉORIQUES

1.1 Exercice 1

D'après l'enoncé on sait que le couple (X_1, Y_1) suit une loi gaussienne centrée de matrice de covariance Σ. Or, on retrouve ses composantes en le multipliant par $[1\ 0]$ et par $[1\ 0]$. On en déduit alors la loi de X_1 et Y_1 :

$$X_1 \sim N(0, [1\ 0]\,\Sigma\,[1\ 0]^T) \sim N(0,1)$$
$$Y_1 \sim N(0, [0\ 1]\,\Sigma\,[0\ 1]^T \sim N(0,1)$$

Calculons maintenant $E[Z^4]$ et $Var[Z^2]$ pour une variable $Z \sim N(0,\sigma)$. En utilisant la fonction generatrice des moments $M(t)$, donnée par :

$$M(t) = e^{\mu t} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

Comme on veut calculer $E[X]$ et $E[Y]$, on fait $\mu = 0$, $\sigma = 1$ et on calcule la dérivée quatrième au point $t = 0$:

$$M(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \Rightarrow \frac{dM(t)}{dt} = te^{\frac{t^2}{2}} \Rightarrow \frac{d^2M(t)}{dt^2} = e^{\frac{t^2}{2}} + t^2 e^{\frac{t^2}{2}}$$
$$\frac{d^3M(t)}{dt^3} = 3te^{\frac{t^2}{2}} + t^3 e^{\frac{t^2}{2}} \Rightarrow M^{(4)}(t) = \frac{d^4M(t)}{dt^4} = 3e^{\frac{t^2}{2}} + 7t^2 e^{\frac{t^2}{2}} + t^4 e^{\frac{t^2}{2}}$$

D'où vient que $E[X^4] = E[Y^4] = M^{(4)}(0) = 3$. De plus,

$$Var[Z^2] = E[Z^4] - (E[Z^2])^2$$
$$Var[Z] = E[Z^2] - (E[Z])^2$$

.

Or,

$$Var[Z] = \sigma^2$$
$$E[Z] = 0$$

D'où,

$$Var[Z^2] = E[Z^4] - (Var[Z])^2 = 3\sigma^4 - (\sigma^2)^2 = 2\sigma^4$$

En particulier, $Var_\rho[X_1^2] = Var_\rho[Y_1^2] = 2$

1.2 Exercice 2

A partir de la rélation donnée, construisons un vecteur gaussien qui ait Z et X comme composantes,

$$\begin{pmatrix} Z \\ X \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A_\rho} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N(0, A_\rho \Sigma A_\rho^T)$$

Or,

$$A_\rho \Sigma A_\rho^T = \begin{pmatrix} \frac{-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} & 0 \end{pmatrix} = I_2$$

Alors, le couple construit suit la loi $N(0, I_2)$ et donc la covariance de Z et X est nulle ce qui implique que les deux composantes sont indépendantes.

Calculons maintenant l'expression demandée en utilisant le fait que $E[AB] = E[A]E[B]$ si A et B sont iid,

$$E_\rho[X^2Y^2] = E_\rho[X^2(\rho^2X^2 + 2\rho\sqrt{1-\rho}XZ + (1-\rho^2)Z^2)]$$

$$= \rho^2E_\rho[X^4] + 2\rho\sqrt{1-p}\overbrace{E_\rho[X^3]}^{0}E_p[Z] + (1-\rho^2)E_\rho[X^2]E_\rho[Z^2]$$

$$= 3\rho^2 + (1-\rho^2) = 1 + 2\rho^2$$

1.3 Exercice 3

Comme X et Y suivent la même loi, il suffit de montrer que $Cov_\rho(X^2, XY) = 2\rho$.

Or,

$$E[XY] = E[X(\rho X + \sqrt{1-\rho^2}Z)] = \rho E_\rho[X^2] + \sqrt{1-\rho^2}E_\rho[X]E_\rho[Z] = \rho$$

Puis, par définition,

$$Cov_\rho(X^2, XY) = E_\rho[(X^2 - \overbrace{E[X^2]}^{1})(XY - \overbrace{E[XY]}^{\rho})] = E_\rho[X^3(\rho X + \sqrt{1-\rho^2}Z) - X^2\rho - XY + \rho]$$

$$= \rho\,\overbrace{E_\rho[X^4]}^{3} + \sqrt{1-\rho^2}\,\overbrace{E_\rho[X^3]}^{0}\,E_\rho[Z] - \rho E_\rho[X^2] - E_\rho[XY] + \rho$$

$$= 3\rho - \rho = 2\rho$$

1.4 Exercice 4

Remarquons d'abord que $E_\rho[U_1] = [E_\rho[X^2],\, E_\rho[Y^2],\, E_\rho[XY]]^2 = \mu(p)$, ce qui nous permet d'apliquer directement le T.C.L multidimensionnel,

$$\sqrt{n}(\bar{U_n} - \mu) \xrightarrow{\mathbb{P}_{n,\rho}} \mathcal{N}(0, V_\rho(U_1))$$

$$V_\rho(U_1) = \begin{pmatrix} Cov(X_1^2, X_1^2) & Cov(X_1^2, Y_1^2) & Cov(X_1^2, X_1Y_1) \\ Cov(X_1^2, Y_1^2) & Cov(Y_1^2, Y_1^2) & Cov(Y_1^2, X_1Y_1) \\ Cov(X_1^2, X_1Y_1) & Cov(Y_1^2, X_1Y_1) & Cov(X_1Y_1, X_1Y_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2\rho^2 & 2\rho \\ 2\rho^2 & 2 & 2\rho \\ 2\rho & 2\rho & 1+\rho^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} Cov(X_1^2, X_1^2) = Var(X_1^2) = Cov(Y_1^2, Y_1^2) = Var(Y_1^2) = 2 \\ Cov(X_1^2, Y_1^2) = E_\rho[(X_1^2 - E_\rho[X_1^2])(Y_1^2 - E_\rho[Y_1^2]) = E_\rho[X_1^2Y_1^2] - E_\rho[X_1^2] - E_\rho[Y_1^2] + 1 = 2\rho^2 \\ Cov(X_1^2, X_1Y_1) = 2\rho \\ Cov(X_1Y_1, X_1Y_1) = E[X_1^2Y_1^2] - (E[X_1Y_1])^2 = (1+2\rho^2) - \rho^2 = 1+\rho^2 \end{cases}$$

1.5 Exercice 5

Or,

$$\begin{cases} S_{n,x}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i\bar{X_n} - \bar{X_n}^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X_n}^2 \\ S_{n,y}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (Y_i^2 - 2Y_i\bar{Y_n} + \bar{Y_n}^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i^2 - \bar{Y_n}^2 \\ S_{n,xy}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_iY_i - X_i\bar{Y_n} + \bar{X_n}\bar{Y_n}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_iY_i - \bar{X_n}\bar{Y_n} \end{cases}$$

Alors,

$$[S_{n,x}^2, S_{n,y}^2, S_{n,xy}^2]^T = \bar{U_n} - \overbrace{[\bar{X_n}^2, \bar{Y_n}^2, \bar{X_n}\bar{Y_n}]^T}^{\epsilon_n}$$

Par la T.C.L, on a que :

$$\bar{X}_n \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \sqrt{n}\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(0, 1) \Rightarrow (\sqrt{n}\bar{X}_n)^2 \sim \chi^2(1)$$

Alors :

$$\sqrt{n}\bar{X}_n^2 = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot (\sqrt{n}\bar{X}_n)^2$$

Comme $\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathbb{P}_{n,\rho}} 0$ et $(\sqrt{n}\bar{X}_n)^2 \xrightarrow{\mathbb{P}_{n,\rho}} \chi^2(1)$, par le théorème de Slutsky :

$$\sqrt{n}\bar{X}_n^2 \xrightarrow{\mathbb{P}_{n,\rho}} 0$$

On a aussi par l'inegalité des moyennes :

$$\bar{X}_n\bar{Y}_n \leq |\bar{X}_n\bar{Y}_n| \leq \frac{\bar{X}_n^2 + \bar{Y}_n^2}{2}$$

Comme $\sqrt{n}\bar{X}_n^2 \xrightarrow{\mathbb{P}_{n,\rho}} 0$ et $\sqrt{n}\bar{Y}_n^2 \xrightarrow{\mathbb{P}_{n,\rho}} 0$, par le théorème de Slutsky :

$$\sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}_n^2 + \bar{Y}_n^2}{2}\right) \xrightarrow{\mathbb{P}_{n,\rho}} 0$$

Et par la dernière inegalité, on peut conclure que :

$$\sqrt{n}\bar{X}_n\bar{Y}_n \xrightarrow{\mathbb{P}_{n,\rho}} 0$$

De façon que :

$$\sqrt{n}\epsilon_n = \sqrt{n}\begin{bmatrix}\bar{X}_n^2 \\ \bar{Y}_n^2 \\ \bar{X}_n\bar{Y}_n\end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbb{P}_{n,\rho}} \begin{bmatrix}0 \\ 0 \\ 0\end{bmatrix}$$

En plus, on a montré que $\sqrt{n}(\bar{U}_n - \mu) \xrightarrow{\mathbb{P}_{n,\rho}} \mathcal{N}(0, V_\rho(U_1))$. Finalement, en utilisant les deux convergences qu'on a trouvé et le théorème de Slutsky :

$$\sqrt{n}(\bar{S}_n - \mu) = \sqrt{n}(\bar{U}_n - \mu - \epsilon_n) = \sqrt{n}(\bar{U}_n - \mu) - \sqrt{n}\epsilon_n \xrightarrow{\mathbb{P}_{n,\rho}} \mathcal{N}(0, V(\rho))$$

1.6 Exercice 6

Soit g la fonction de définie comme,

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R}_+ \\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{x_3}{\sqrt{x_1 x_2}} \end{cases}$$

Observons maintenant que,

$$g(\bar{U_n}) = R_n$$
$$g(\mu) = \rho$$

On remarque alors qu'elle a été bien choisie pour applique la Delta-méthode a partir de l'exercice 4,

$$\sqrt{n}(R_n - \rho) = \sqrt{n}(g(\bar{U_n} - g(\mu)) \xrightarrow{\mathbb{P}_{n,\rho}} \mathcal{N}(0, J_g(\mu)V_p J_g(\mu)^T)$$

Où J_g est le Jacobien de la fonction g,

$$J_g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{-x_3}{2\sqrt{x_1^3 x_2}} & \frac{-x_3}{2\sqrt{x_1 x_2^3}} & \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}} \end{pmatrix}$$

Alors,

$$J_g(\mu)V_p J_g(\mu)^T = \begin{pmatrix} \frac{-\rho}{2} & \frac{-\rho}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2\rho^2 & 2\rho \\ 2\rho^2 & 2 & 2\rho \\ 2\rho & 2\rho & 1+\rho^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-\rho}{2} \\ \frac{-\rho}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\rho}{2} & \frac{-\rho}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho - \rho^3 \\ \rho - \rho^3 \\ 1 - \rho^2 \end{pmatrix}$$

$$= -\rho^2 + \rho^4 + 1 - \rho^2 = (1 - \rho^2)^2$$

1.7 Exercice 7

Calculons directement,

$$g(\rho) = \int_0^\rho \frac{1}{1 - x^2} dx = \int_0^\rho \left[\frac{1/2}{1 - x} + \frac{1/2}{1 + x}\right] dx = \frac{1}{2} \log \frac{1 - \rho}{1 + \rho}$$

1.8 Exercice 8

Il s'agit d'utiliser la delta méthode avec la fonction g de la question précedante,

$$\sqrt{n}(g(R_n) - g(\rho)) \xrightarrow{\mathbb{P}_{n,\rho}} \mathcal{N}(0, (1-\rho^2)^2(g'(\rho))^2)$$

Or, le théorème fondamental du calcul nous donne la dérivée, $g'(\rho) = \frac{1}{1-\rho^2}$ et on a bien le résultat voulu par substitution.

1.9 Exercice 9

Si $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ alors $\mathbb{P}(Z \in [-z_{(1-\alpha/2)}, z_{(1-\alpha/2)}]) = 1-\alpha$, z_x étant la quantile x de la loi normale.

Alors, il suffit d'utiliser la question précedante avec $\sqrt{n}(g(R_n) - g(\rho))$ à la place de Z. Dcon, ssymptotiquement, avec proba $1-\alpha$ sous $\mathbb{P}_{n,\rho}$,

$$\sqrt{n}W_n - g(\rho) \in [-z_{(1-\alpha/2)}, z_{(1-\alpha/2)}]$$

$$\iff \quad g(\rho) \in \left[W_n - \frac{z_{(1-\alpha/2)}}{\sqrt{(n)}}, W_n + \frac{z_{(1-\alpha/2)}}{\sqrt{(n)}}\right]$$

$$\iff \quad \rho \in \left[\frac{\exp\{2(W_n - z_{(1-\alpha/2)}/\sqrt{n}\} - 1}{\exp\{2(W_n - z_{(1-\alpha/2)}/\sqrt{n}\} + 1}, \frac{\exp\{2(W_n + z_{(1-\alpha/2)}/\sqrt{n}\} - 1}{\exp\{2(W_n + z_{(1-\alpha/2)}/\sqrt{n}\} + 1}\right]$$

Ce qui est bien l'intervalle cherché.

1.10 Exercice 10

Observons d'abord que,

$$\rho \in \left[R_n - \frac{z_{(1-\alpha/2)}(1-R_n^2)}{\sqrt{(n)}}, R_n + \frac{z_{(1-\alpha/2)}(1-R_n^2)}{\sqrt{(n)}}\right] \iff \frac{\sqrt{n}(R_n - \rho)}{1-R_n^2} \in [-z_{(1-\alpha/2)}, z_{(1-\alpha/2)}]$$

Alors, il suffit de montrer que la variable à droite est une gaussienne centrée réduite,

$$\frac{\sqrt{n}(R_n - \rho)}{1 - R_n^2} = \underbrace{\frac{\sqrt{n}(R_n - \rho)}{(1-\rho^2)}}_{\xrightarrow[\text{T.C.L. + Slutsky}]{\mathbb{P}_{n,\rho}} \mathcal{N}(0,1)} \underbrace{\frac{(1-\rho^2)}{(1-R_n^2)}}_{\xrightarrow[\text{L.F.G.N.}]{p.s.} 1} \xrightarrow[\text{Slutsky}]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Où on a multiplié la variable cible par $(1-\rho^2)$ en haut et en bas pour conclure à l'aide du T.C.L, théorème de Slutsky et L.F.G.N..