DEVOIR MAISON 2 - MAP 433

Octobre 2022

Artur César Araújo Alves
João Pedro Tanaka Montalvão
Rafael Ryoma Nagai Matsutane

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

IP PARIS

SOMMAIRE

1
EXERCICE 1

Pour chaque observation Y_i, on a que $Y_i \sim Ber\left(\varphi(\theta^T x_i)\right)$. En définissant $f_{\theta,i}(y_i)$ par :

$$f_{\theta,i}(y_i) = \mathbb{P}_\theta(Y_i = y_i)$$

On a que :

$$f_{\theta,i}(y_i) = \left(\frac{e^{\theta^T x_i}}{e^{\theta^T x_i} + 1}\right)^{y_i} \left(\frac{1}{e^{\theta^T x_i} + 1}\right)^{1-y_i}$$

$$f_{\theta,i}(y_i) = \frac{\left(e^{\theta^T x_i}\right)^{y_i}}{e^{\theta^T x_i} + 1}$$

En considérant θ_1 et θ_2, on va étudier l'égalité :

$$f_{\theta_1,i} = f_{\theta_2,i}$$

On analise l'égalité pour les possibles valeurs de y_i.

Si $y_i = 0$:

$$f_{\theta_1,i} = f_{\theta_2,i} \Rightarrow \frac{1}{e^{\theta_1^T x_i} + 1} = \frac{1}{e^{\theta_2^T x_i} + 1}$$

Comme $g(x) = \frac{1}{e^x+1}$ est injective, si $y_i = 0$, on a que $\theta_1^T x_i = \theta_2^T x_i$.

Si $y_i = 1$:

$$f_{\theta_1,i} = f_{\theta_2,i} \Rightarrow \frac{e^{\theta_1^T x_i}}{e^{\theta_1^T x_i} + 1} = \frac{e^{\theta_2^T x_i}}{e^{\theta_2^T x_i} + 1}$$

Encore une fois, comme $h(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ est injective, si $y_i = 1$, on a que $\theta_1^T x_i = \theta_2^T x_i$.

On voit bien alors que $f_{\theta_1,i} = f_{\theta_2,i}$ implique $\theta_1^T x_i = \theta_2^T x_i$. Mais cette rélation est valide pour tout $i \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq i \leq n$. En écrivant cette rélation dans la forme matricielle, on obtient que :

$$X_n \theta_1 = X_n \theta_2$$

Mais $X_n \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ est de rang p, c'est à dire, X_n est injective et par conséquent :

$$\theta_1 = \theta_2$$

Comme la fonction $\theta \to \mathbb{P}_\theta$ est injective, on a que le modèle est identifiable.

2
EXERCICE 2

La fonction φ est à valeurs dans $(0,1)$ car elle est strictement croissante et on a $\forall t$:

$$0 = \lim_{t\to-\infty} \varphi(t) < \varphi(t) < \lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 1$$

D'où, $h(t) > 0$ pour tout t car $z \mapsto z(1-z)$ est strictement positive sur $(0,1)$.

Alors, $\forall v \in \mathbb{R}^p$,

$$v^T F_n(\theta) v = \sum_{i=1}^{n} h(\theta^T x_i) v^T x_i x_i^T v = \sum h(\theta^T x_i) ||v^T x_i||_2^2 \geq 0$$

De plus, par positivé de h,

$$v^T F_n(\theta) v = 0 \iff ||v^T x_i||_2^2 = 0,\ 1 \leq i \leq n \iff X_n v = 0 \iff v = 0$$

Ainsi, on a bien montré que $F_n(\theta)$ est définie positive.

3
EXERCICE 3

On a que :

$$h(x) = \varphi(x) \cdot (1 - \varphi(x)) = \left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)\left(\frac{1}{e^x+1}\right)$$
$$h(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

Si on prend la dérivée de h, on obtient que :

$$h'(x) = \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$$

On voit que l'unique valeur pour lequel $h'(x) = 0$ est $x = 0$, de façon que, si $x > 0$, $h'(x) < 0$ et, si $x < 0$, $h'(x) > 0$. On analise la valeur absolute de $h'(x)$ pour les deux cas :

— Si $x > 0$:

$$|h'(x)| = \frac{e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3} = \underbrace{\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)}_{\leq 1}\underbrace{\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)}_{\leq 1}\underbrace{\left(\frac{1}{e^x+1}\right)}_{\leq 1} \leq 1$$

— Si $x < 0$:

$$|h'(x)| = \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3} = \underbrace{\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)}_{\leq 1}\underbrace{\left(\frac{1-e^x}{e^x+1}\right)}_{\leq 1}\underbrace{\left(\frac{1}{e^x+1}\right)}_{\leq 1} \leq 1$$

Si $x = 0$, on a simplement que $|h'(x)| = 0$. Alors, si on prend $x,\, y \in \mathbb{R}$ tel que $x < y$, en appliquant le théorème des accroissements finis, il existe $z \in]x,\, y[$ tel que :

$$\frac{|h(x)-h(y)|}{|x-y|} = |h'(z)|$$

Mais on a montré que $h'(z) \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{R}$, alors :

$$\frac{|h(x)-h(y)|}{|x-y|} \leq 1 \Rightarrow |h(x)-h(y)| \leq |x-y|$$

Donc :

$$\forall x,\, y \in \mathbb{R},\ \ |h(x)-h(y)| \leq |x-y|$$

C'est à dire, h est 1-Lipscitzienne sur $\mathbb{R}$.

4 EXERCICE 4

La fonction de vraisemblance est donnée par :

$$L(\theta) = p_\theta(y_1,\, y_2,\, \cdots y_n) = \prod_{i=1}^{n} p_\theta(y_i)$$

Comme on a vu dans l'exercice 1, on a que :

$$p_\theta(y_i) = \frac{e^{y_i\theta^T \mathbf{x_i}}}{e^{\theta^T \mathbf{x_i}}+1}$$

Alors :

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p_\theta(y_i) = \left(\frac{e^{y_1\theta^T \mathbf{x_1}}}{e^{\theta^T \mathbf{x_1}}+1}\right)\left(\frac{e^{y_2\theta^T \mathbf{x_2}}}{e^{\theta^T \mathbf{x_2}}+1}\right)\cdots\left(\frac{e^{y_n\theta^T \mathbf{x_n}}}{e^{\theta^T \mathbf{x_n}}+1}\right)$$

En utilisant que $\sum_{i=1}^{n} \theta^T \mathbf{x_i} = \theta^T \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x_i}$:

$$L(\theta) = \frac{e^{\left(\theta^T \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{x_i}\right)}}{\prod_{i=1}^{n}\left(e^{\theta^T \mathbf{x_i}} + 1\right)}$$

En prennant le logarithme de $L(\theta)$:

$$l_n(\theta) = \log(L(\theta)) = \theta^T \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{x_i} - \sum_{i=1}^{n} \log\left(e^{\theta^T \mathbf{x_i}} + 1\right)$$

5

EXERCICE 5

5.1 ∇l_n

On utilise ici la notation :

$$\mathbf{x_i} = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{ip} \end{bmatrix}$$

Alors, l'expression $y_i \theta^T \mathbf{x_i}$ est donnée par :

$$y_i \theta^T \mathbf{x_i} = y_i \sum_{j=1}^{p} \theta_j x_{ij}$$

De tel façon que :

$$\theta^T \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{x_i} = \sum_{j=1}^{p} \theta_j \left(\sum_{i=1}^{n} y_i x_{ij}\right)$$

Alors, si on prend la dérivée partielle en relation à θ_j :

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j}\left(\theta^T \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} y_i x_{ij}$$

Maintenant, on considère l'expression $\log\left(e^{\theta^T\mathbf{x_i}}+1\right)$ pour um i fixé et on prend la dérivée partielle en relation à θ_j, de tel façon que :

$$\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\log\left(e^{\theta^T\mathbf{x_i}}\right)\right)=x_{ij}\left(\frac{e^{\theta^T\mathbf{x_i}}}{e^{\theta^T\mathbf{x_i}}+1}\right)=x_{ij}\varphi(\theta^T\mathbf{x_i})$$

De tel façon que :

$$\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sum_{i=1}^n\log\left(e^{\theta^T\mathbf{x_i}}+1\right)\right)=\sum_{i=1}^n x_{ij}\varphi(\theta^T\mathbf{x_i})$$

Finalement, on prend la dérivée partielle de $l_n(\theta)$ en relation à θ_j :

$$\frac{\partial}{\partial\theta_j}l_n(\theta)=\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\theta^T\sum_{i=1}^n y_i\mathbf{x_i}-\sum_{i=1}^n\log\left(e^{\theta^T\mathbf{x_i}}+1\right)\right)=\sum_{i=1}^n y_ix_{ij}-\sum_{i=1}^n x_{ij}\varphi(\theta^T\mathbf{x_i})$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta_j}l_n(\theta)=\sum_{i=1}^n\left(y_i-\varphi(\theta^T\mathbf{x_i})\right)x_{ij}$$

Mais cette relation est valide pour tout $j\in\mathbb{N}$ tel que $1\leq j\leq p$, alors :

$$\nabla l_n(\theta)=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial\theta_1}l_n(\theta)\\ \frac{\partial}{\partial\theta_2}l_n(\theta)\\ \vdots\\ \frac{\partial}{\partial\theta_p}l_n(\theta)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^n\left(y_i-\varphi(\theta^T\mathbf{x_i})\right)x_{i1}\\ \sum_{i=1}^n\left(y_i-\varphi(\theta^T\mathbf{x_i})\right)x_{i2}\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^n\left(y_i-\varphi(\theta^T\mathbf{x_i})\right)x_{ip}\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^n\{y_i-\varphi(\theta^T\mathbf{x_i})\}\mathbf{x_i}$$

Donc :

$$\nabla l_n(\theta)=\sum_{i=1}^n\{Y_i-\varphi(\theta^T\mathbf{x_i})\}\mathbf{x_i}=\mathbf{X}_n^T\{\mathbf{Y}_n-\Phi_n(\theta)\}$$

5.2 $\nabla^2 l_n$

On va calculer maintenant l'expression de $\nabla^2 l_n(\theta)$. Pour un $k\in\mathbb{N}$ tel que $1\leq k\leq p$, on a que :

$$\frac{\partial^2 l_n}{\partial\theta_k\,\partial\theta_j}=\frac{\partial}{\partial\theta_k}\sum_{i=1}^n\left(y_i-\varphi(\theta^T\mathbf{x_i})\right)x_{ij}=-\frac{\partial}{\partial\theta_k}\sum_{i=1}^n\varphi(\theta^T\mathbf{x_i})x_{ij}$$

$$-\frac{\partial}{\partial\theta_k}\sum_{i=1}^n x_{ij}\left(\frac{e^{\theta^T\mathbf{x_i}}}{e^{\theta^T\mathbf{x_i}}+1}\right)=-\sum_{i=1}^n x_{ij}x_{ik}\left(\frac{e^{\theta^T\mathbf{x_i}}}{e^{\theta^T\mathbf{x_i}}+1}\right)\left(\frac{1}{e^{\theta^T\mathbf{x_i}}+1}\right)=-\sum_{i=1}^n x_{ij}x_{ik}h(\theta^T\mathbf{x_i})$$

Alors, étant données $j,\, k$ tel que $1 \leq j,\, k \leq p$:

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta_j\,\partial\theta_k} l_n(\theta) = -\sum_{i=1}^{n} x_{ij}x_{ik}h(\theta^T\mathbf{x}_i)$$

De tel façon que :

$$\nabla^2 l_n(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2} l_n(\theta) & \frac{\partial^2}{\partial\theta_1\,\partial\theta_2} l_n(\theta) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial\theta_1\,\partial\theta_p} l_n(\theta) \\ \frac{\partial^2}{\partial\theta_2\,\partial\theta_1} l_n(\theta) & \frac{\partial^2}{\partial\theta_2^2} l_n(\theta) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial\theta_2\,\partial\theta_p} l_n(\theta) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial\theta_p\,\partial\theta_1} l_n(\theta) & \frac{\partial^2}{\partial\theta_p\,\partial\theta_2} l_n(\theta) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial\theta_p^2} l_n(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 l_n(\theta) = (-1)\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_{i1}x_{i1}h(\theta^T\mathbf{x}_i) & \sum_{i=1}^n x_{i1}x_{i2}h(\theta^T\mathbf{x}_i) & \cdots & \sum_{i=1}^n x_{i1}x_{ip}h(\theta^T\mathbf{x}_i) \\ \sum_{i=1}^n x_{i2}x_{i1}h(\theta^T\mathbf{x}_i) & \sum_{i=1}^n x_{i2}x_{i2}h(\theta^T\mathbf{x}_i) & \cdots & \sum_{i=1}^n x_{i2}x_{ip}h(\theta^T\mathbf{x}_i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_{ip}x_{i1}h(\theta^T\mathbf{x}_i) & \sum_{i=1}^n x_{ip}x_{i2}h(\theta^T\mathbf{x}_i) & \cdots & \sum_{i=1}^n x_{ip}x_{ip}h(\theta^T\mathbf{x}_i) \end{bmatrix}$$

Mais cette dernière matrice peut être réecrite comme une combinaison linéaire de $\mathbf{x_i}\mathbf{x_i}^T$, de tel façon que :

$$\nabla^2 l_n(\theta) = (-1)\sum_{i=1}^{n} h(\theta^T\mathbf{x_i})\mathbf{x_i}\mathbf{x_i}^T = -\mathbf{F}_n(\theta)$$

Ce qui montre le résultat désiré. On a aussi, par l'exercice 2, que $\nabla^2 l_n(\theta) = -\mathbf{F}_n(\theta)$ est définie-négative de tel façon que la fonction $\theta \to l_n(\theta)$ est (presque surement) strictement concave.

5.3 $\mathbb{E}_{n,\theta}[\nabla l_n(\theta)\nabla l_n(\theta)^T]$

En utilisant que $\nabla l_n(\theta) = \mathbf{X}_n^T\{\mathbf{Y}_n - \Phi_n(\theta)\}$:

$$\nabla l_n(\theta)\nabla l_n(\theta)^T = \mathbf{X}_n^T\{\mathbf{Y}_n - \Phi_n(\theta)\}\{\mathbf{Y}_n - \Phi(\theta)\}^T\mathbf{X}_n$$

Alors, en prennant l'espérance :

$$\mathbb{E}_{n,\theta}[\nabla l_n(\theta)\nabla l_n(\theta)^T] = \mathbf{X}_n^T\mathbb{E}_{n,\theta}[\{\mathbf{Y}_n - \Phi_n(\theta)\}\{\mathbf{Y}_n - \Phi(\theta)\}^T]\mathbf{X}_n$$

On note l'element de la matrice $\{\mathbf{Y}_n - \Phi_n(\theta)\}\{\mathbf{Y}_n - \Phi(\theta)\}^T$ dans la ligne i et colonne j comme $\beta_{i,j}(\theta)$, tel que :

$$\beta_{i,j,\theta}(y_i, y_j) = [\{\mathbf{Y}_n - \Phi_n(\theta)\}\{\mathbf{Y}_n - \Phi(\theta)\}^T]_{ij} = \left(y_i - \varphi(\theta^T x_i)\right)\left(y_j - \varphi(\theta^T x_j)\right)$$

On considère le cas $i \neq j$, de façon que :

$$\mathbb{E}_{n,\theta}[\beta_{i,j,\theta}] = \sum_{y_i, y_j \in \{0,1\}} \mathbb{P}_\theta(Y_i = y_i, Y_j = y_j)\beta_{i,j,\theta}(y_i, y_j)$$

On fait les calculs :

— $Y_i = 1$ et $Y_j = 1$:

$$\mathbb{P}_\theta(Y_i = 1, Y_j = 1)\beta_{i,j,\theta}(1,1) = \varphi(\theta^T \mathbf{x_i}) \left(y_i - \varphi(\theta^T \mathbf{x_i})\right) \varphi(\theta^T \mathbf{x_j}) \left(y_j - \varphi(\theta^T \mathbf{x_j})\right)$$

— $Y_i = 1$ et $Y_j = 0$:

$$\mathbb{P}_\theta(Y_i = 1, Y_j = 1)\beta_{i,j,\theta}(1,1) = -\varphi(\theta^T \mathbf{x_i}) \left(y_i - \varphi(\theta^T \mathbf{x_i})\right) \varphi(\theta^T \mathbf{x_j}) \left(y_j - \varphi(\theta^T \mathbf{x_j})\right)$$

— $Y_i = 0$ et $Y_j = 1$:

$$\mathbb{P}_\theta(Y_i = 1, Y_j = 1)\beta_{i,j,\theta}(1,1) = -\varphi(\theta^T \mathbf{x_i}) \left(y_i - \varphi(\theta^T \mathbf{x_i})\right) \varphi(\theta^T \mathbf{x_j}) \left(y_j - \varphi(\theta^T \mathbf{x_j})\right)$$

— $Y_i = 0$ et $Y_j = 0$:

$$\mathbb{P}_\theta(Y_i = 1, Y_j = 1)\beta_{i,j,\theta}(1,1) = -\varphi(\theta^T \mathbf{x_i}) \left(y_i - \varphi(\theta^T \mathbf{x_i})\right) \varphi(\theta^T \mathbf{x_j}) \left(y_j - \varphi(\theta^T \mathbf{x_j})\right)$$

On voit bien que la somme de tous les résultats au dessus donne zéro, donc :

$$i \neq j \Rightarrow \mathbb{E}_{n,\theta}[\beta_{i,j,\theta}] = 0$$

Il faut considerer maintenant le cas $i = j$. On a que :

$$\mathbb{E}_{n,\theta}[\beta_{i,i,\theta}] = \sum_{y_i \in \{0,1\}} \mathbb{P}_\theta(Y_i = y_i)\beta_{i,i,\theta}(y_i, y_i)$$

$$\mathbb{E}_{n,\theta}[\beta_{i,i,\theta}] = \varphi(\theta^T \mathbf{x_i}) \left(1 - \varphi(\theta^T \mathbf{x_i})\right)^2 + \left(1 - \varphi(\theta^T \mathbf{x_i})\right) [\varphi(\theta^T \mathbf{x_i})]^2$$

$$\mathbb{E}_{n,\theta}[\beta_{i,i,\theta}] = \varphi(\theta^T \mathbf{x_i}) \left(1 - \varphi(\theta^T \mathbf{x_i})\right) = h(\theta^T \mathbf{x_i})$$

Alors, $M = \mathbb{E}_{n,\theta}[\{\mathbf{Y}_n - \Phi_n(\theta)\}\{\mathbf{Y}_n - \Phi(\theta)\}^T]$ est une matrice diagonale tel que :

$$[M]_{ii} = h(\theta^T \mathbf{x_i})$$

On va calculer le produit $\mathbf{X}_n^T M \mathbf{X}_n$. En développant $M\mathbf{X}_n$:

$$M\mathbf{X}_n = \begin{bmatrix} h(\theta^T\mathbf{x_1})\mathbf{x_1} \\ h(\theta^T\mathbf{x_2})\mathbf{x_2} \\ \vdots \\ h(\theta^T\mathbf{x_p})\mathbf{x_p} \end{bmatrix}$$

Comme $\mathbf{X}_n^T = \begin{bmatrix} \mathbf{x_1} & \mathbf{x_2} & \cdots & \mathbf{x_p} \end{bmatrix}$, on obtien que :

$$\mathbf{X}_n^T M\mathbf{X}_n = \sum_{i=1}^{n} h(\theta^T\mathbf{x_i})\mathbf{x_i}\mathbf{x_i}^T$$

D'où vient finalement que :

$$\mathbf{X}_n^T M\mathbf{X}_n = \mathbf{F}_n(\theta)$$

6
EXERCICE 6

On va écrire la vraisemblance $L_n(\theta)$ en séparant les distributions entre les $Y_i = 0$ et $Y_j = 1$:

$$L_n(\theta) = \left(\prod_{1\leq i\leq n,\, Y_i=1} p_\theta(y_i)\right)\left(\prod_{1\leq j\leq n,\, Y_j=0} p_\theta(y_j)\right)$$

$$L_n(\theta) = \left(\prod_{1\leq i\leq n,\, Y_i=1} \frac{e^{\theta^T\mathbf{x_i}}}{e^{\theta^T\mathbf{x_i}}+1}\right)\left(\prod_{1\leq j\leq n,\, Y_j=0} \frac{1}{e^{\theta^T\mathbf{x_j}}+1}\right)$$

Si on prend le logarithme, on obtient que :

$$l_n(\theta) = \left(\sum_{1\leq i\leq n,\, Y_i=1} \log\left(\frac{e^{\theta^T\mathbf{x_i}}}{e^{\theta^T\mathbf{x_i}}+1}\right)\right) + \left(\sum_{1\leq j\leq n,\, Y_j=0} \log\left(\frac{1}{e^{\theta^T\mathbf{x_j}}+1}\right)\right)$$

Or, $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x+1} = 1$

Alors, en analisant la limite de $l_n(\lambda\theta_*)$ quand $\lambda \to \infty$, la continuité du logarithme et la condition sur θ_* nous donne que :

$$\lim_{\lambda\to\infty} l_n(\lambda\theta_*) = 0$$

Puisque $l_n(\theta) < 0$ pout tout $\theta \in \mathbb{R}^p$, l'exitence du e.m.v est impossible car on vient de montrer que $sup_{\theta\in\mathbb{R}^p} l_n(\theta) = 0$.

7
EXERCICE 7

On considère les ensembles ε_0 et ε_1 tels que :

$$\begin{cases} \varepsilon_0 \cup \varepsilon_1 = \{1,\, 2,\, \cdots,\, n\} \backslash \varepsilon \\ \varepsilon_0 \cap \varepsilon_1 = \emptyset \\ i \in \varepsilon_0 \Rightarrow Y_i = 0 \\ i \in \varepsilon_1 \Rightarrow Y_i = 1 \end{cases}$$

Alors, la fonction $L_n(\theta)$ peut être écrite comme :

$$L_n(\theta) = \left(\prod_{i \in \varepsilon_0} p_\theta(y_i) \right) \left(\prod_{i \in \varepsilon_1} p_\theta(y_i) \right) \left(\prod_{i \in \varepsilon} p_\theta(y_i) \right)$$

$$L_n(\theta) = \left(\prod_{i \in \varepsilon_0} \frac{1}{e^{\theta \mathbf{x_i}} + 1} \right) \left(\prod_{i \in \varepsilon_1} \frac{e^{\theta^T \mathbf{x_i}}}{e^{\theta \mathbf{x_i}} + 1} \right) \left(\prod_{i \in \varepsilon} \frac{e^{y_i \theta^T \mathbf{x_i}}}{e^{\theta^T \mathbf{x_i}} + 1} \right)$$

Si on évalue la fonction sur $\theta_\lambda = \lambda \theta_* + \bar{\theta}$, avec $\bar{\theta} \in \mathbb{R}^p$ fixé, et on utilise le fait que $\theta_*^T \mathbf{x_k} = 0$, on obtient que :

$$L_n(\theta_\lambda) = \left(\prod_{i \in \varepsilon_0} \frac{1}{e^{\lambda \theta_*^T \mathbf{x_i}} e^{\bar{\theta}^T \mathbf{x_i}} + 1} \right) \left(\prod_{i \in \varepsilon_1} \frac{e^{\lambda \theta_*^T \mathbf{x_i}} e^{\bar{\theta}^T \mathbf{x_i}}}{e^{\lambda \theta_*^T \mathbf{x_i}} e^{\bar{\theta}^T \mathbf{x_i}} + 1} \right) \left(\prod_{i \in \varepsilon} \frac{e^{y_i \bar{\theta}^T \mathbf{x_i}}}{e^{\bar{\theta}^T \mathbf{x_i}} + 1} \right)$$

Si on note le dernier terme de l'expression si dessus par $\alpha_{\bar{\theta}}$ (si $\varepsilon = \emptyset$, on pose $\alpha_{\bar{\theta}} = 1$), on a que :

$$\alpha_{\bar{\theta}} = \left(\prod_{i \in \varepsilon} \frac{e^{y_i \bar{\theta}^T \mathbf{x_i}}}{e^{\bar{\theta}^T \mathbf{x_i}} + 1} \right) \Rightarrow 0 < \alpha_{\bar{\theta}} \leq 1$$

On a que :

$$L_n(\theta_\lambda) = \alpha_{\bar{\theta}} \left(\prod_{i \in \varepsilon_0} \frac{1}{e^{\lambda \theta_*^T \mathbf{x_i}} e^{\bar{\theta}^T \mathbf{x_i}} + 1} \right) \left(\prod_{i \in \varepsilon_1} \frac{e^{\lambda \theta_*^T \mathbf{x_i}} e^{\bar{\theta}^T \mathbf{x_i}}}{e^{\lambda \theta_*^T \mathbf{x_i}} e^{\bar{\theta}^T \mathbf{x_i}} + 1} \right)$$

De tel façon qu'on ait :

$$\lim_{\lambda \to \infty} L_n(\theta_\lambda) = \alpha_{\bar{\theta}} \Rightarrow \lim_{\lambda \to \infty} l_n(\theta_\lambda) = \log(\alpha_{\bar{\theta}})$$

On suppose qu'il existe un e.m.v et on pose $\bar{\theta} = \theta_n^{MV}$. Dans ce cas on se met dans une situation où le maximum global est atteint deux fois, soit en $\bar{\theta}$ et à l'infini, ce qui est impossible car la log-vraissemblance est strictement concave.

8
EXERCICE 8

1. On définit une fonction indice (ind) qui envoie chaque θ sur k_1 et k_2 de l'hypothèse de l'énoncé :

$$ind : \begin{cases} S(0,1) \to \{1,\dots,n\}^2 \\ \theta \mapsto (k_{1,\theta}, k_{2,\theta}) \end{cases}$$

Avec :

$$(*) \begin{cases} Y_{k1,\theta} = Y_{k2,\theta} \\ \theta^T \mathbf{X}_{k_{1,\theta}} > 0 \\ \theta^T \mathbf{X}_{k_{2,\theta}} < 0 \end{cases}$$

($k_{1,\theta}$,$k_{2,\theta}$) étant le max possible sur ces conditions en cas de plusieurs possibilités. Où,

$$(i_1, j_1) \leq (i_2, j_2) \iff (i_1 < i_2) \text{ ou } (i_1 = i_2 \text{ et } j_1 \leq j_2)$$

On peut montrer que cette fonction est continue, i.e, que pour a et b dans $\mathbb{R}^p$ assez proches, $(k_{1,a}, k_{2,a}) = (k_{1,b}, k_{2,b})$. Pour cela il suffit de remarquer que :

$$b^T \mathbf{X}_{k_{1,a}} > 0 \text{ et } a^T \mathbf{X}_{k_{1,b}} > 0$$
$$b^T \mathbf{X}_{k_{2,a}} < 0 \text{ et } a^T \mathbf{X}_{k_{2,b}} < 0$$

Alors, $ind(b)$ et $ind(a)$ suivent $(*)$ pour a et b respectivement. Donc, $ind(a) <= ind(b)$ et $ind(b) >= ind(a)$ et on le résultat.

Finalement, remarquons que la continuité de la fonction indice définie ci-dessus implique aussi la continuité de $\theta \mapsto \theta^T \mathbf{x}_{k_{1,\theta}}$.

2. Montrons maintenant que :

$$\inf_{\theta \in S(0,1)} \theta^T \mathbf{x}_{k_{1,\theta}} > 0$$
$$\sup_{\theta \in S(0,1)} \theta^T \mathbf{x}_{k_{2,\theta}} < 0$$

On montre le résultat seulement pour le inf car l'autre cas est analogue. De plus, remarquons aussi qu'il faut juste montrer que cet inf n'est pas nulle car on sait déjà que $\theta^T \mathbf{x}_{k_{1,\theta}} > 0$ pour tout $\theta \in S(0,1)$.

En raisonnant par l'absurde, on suppose que :

$$\inf_{\theta \in S(0,1)} \theta \in S(0,1) \theta^T \mathbf{x}_{k_{1,\theta}} = 0$$

Alors, il existe une suite $(\theta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans $S(0,1)$ tel que :

$$\theta_i^T \mathbf{x}_{k_{1,\theta_i}} \to 0$$

Comme la sphère est compacte, il existe une sous suite $(\theta_{\varphi(i)})_{i\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un point $\theta_* \in S(0,1)$.
Alors, par continuité on a que :

$$\theta_{\varphi(i)}^T \mathbf{x}_{k_{1,\theta_{\varphi(i)}}} \to \theta_*^T \mathbf{x}_{k_{1,\theta*}}$$

D'où,

$$\theta_*^T \mathbf{x}_{k_{1,\theta*}} = 0$$

Ce qui est impossible par définition.
Pour la suite on choisit maintenant ζ tel que :

$$\inf_{\theta\in S(0,1)} \theta^T \mathbf{x}_{k_{1,\theta}} > \zeta$$

$$\sup_{\theta\in S(0,1)} \theta^T \mathbf{x}_{k_{2,\theta}} < -\zeta$$

3. Montrons que :

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sup_{\theta\in S(0,1)} l_n(\lambda\theta) = -\infty$$

On fixe $\theta \in S(0,1)$. Puisque $l_n(\lambda\theta)$ est la somme du log de probabilités, qui sont tous des termes negatifs ou nulles, on remarque que, si on en enleve quelques uns :

$$l_n(\lambda\theta) \leq \log\left(\varphi(\lambda\theta^T \mathbf{x}_{\mathbf{k_{2,\theta}}})\right) Y_{k_{2,\theta}} + \log\left(\varphi(-\lambda\theta^T \mathbf{x}_{\mathbf{k_{1,\theta}}})\right)(1 - Y_{k_{1,\theta}})$$

L'item anterior nous donne :

$$l_n(\lambda\theta) \leq \log\left(\varphi(\lambda\zeta)\right) Y_{k_{2,\theta}} + \log\left(\varphi(-\lambda\zeta)\right)(1 - Y_{k_{1,\theta}})$$

Et le fait que $Y_{k_{1,\theta}} = Y_{k_{2,\theta}}$ nous donne :

$$l_n(\lambda\theta) \leq min(\log\left(\varphi(-\lambda\zeta)\right), \log\left(\varphi(-\lambda\zeta)\right)) \xrightarrow{\lambda\to\infty} -\infty$$

Étant donné que $l_n(\lambda\theta)$ est majoré par une expression que ne depend pas de θ et qui tend vers $-\infty$, on a le résultat.

4. Conclusion :

Puisqu'on sait que la log-vraissemblence est majoré par 0, on sait que le sup exist et donc :

$$\exists\, M \geq 0 \text{ avec } \sup_{\theta\in\mathbb{R}^p} l_n(\theta) = -M$$

La limite trouvée nous donne que $\exists\, \lambda_M$ tel que $\forall \lambda > \lambda_M$: $\sup_{||\theta||=1} l_n(\lambda\theta) \leq -M$. Alors,

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}^p} l_n(\theta) = \sup_{\theta \in \bar{\mathbb{B}}(0,\lambda_M)} l_n(\theta)$$

Par compacité de la boulle et continuité de l_n, le maximum est donc atteint et, par conséquent, il existe un maximun de vraisamblance. L'unicité de ce maximum de vraisamblance vient du fait que la fonction $\theta \to l_n(\theta)$ est strictement concave, donc le maximum est unique.

9
EXERCICE 9

En utilisant l'expression de $\mathbf{F}_n$ de l'énoncé et en appliquant l'inegalité triangulaire :

$$\|\mathbf{F}_n(\theta) - \mathbf{F}_n(v)\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} [h(\theta^T \mathbf{x}_i) - h(v^t \mathbf{x}_i)] \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^t \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \left\| [h(\theta^T \mathbf{x}_i) - h(v^t \mathbf{x}_i)] \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^t \right\|$$

Par l'homogénéité de la norme :

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| [h(\theta^T \mathbf{x}_k) - h(v^t \mathbf{x}_i)] \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^t \right\| = \sum_{i=1}^{n} |h(\theta^T \mathbf{x}_i) - h(v^t \mathbf{x}_i)| \left\| \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^t \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |h(\theta^T \mathbf{x}_i) - h(v^t \mathbf{x}_i)| \|x_i\|^2$$

En utilisant que h est 1-Lipschitz et le fait que, pour tout $v,\, w \in \mathbb{R}^p$ on a que $|v^T w| \leq \|v\| \|w\|$, on obtient :

$$|h(\theta^T \mathbf{x}_k) - h(v^t \mathbf{x}_k)| \leq |(\theta^T - v^T) \mathbf{x}_k| \leq \|\theta - v\| \|\mathbf{x}_k\|$$

En appliquant ce résultat, on a que :

$$\|\mathbf{F}_n(\theta) - \mathbf{F}_n(v)\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|\theta - v\| \|x_i\|^3 = n \|\theta - v\| \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^3 \right)$$

En utilisant l'hypothèse 2, on sait qu'il existe une constante $C > 0$ tel que :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^3 \leq C$$

Si on applique ça à l'expression ci-dessus, on obtient que :

$$\|\mathbf{F}_n(\theta) - \mathbf{F}_n(v)\| \leq C n \|\theta - v\|$$

10
EXERCICE 10

En analisant $\nabla l_n(\hat{\theta}^{MV}) - \nabla l_n(\theta)$:

$$\nabla l_n(\hat{\theta}_n^{MV}) - \nabla l_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} [\varphi(\theta^T \mathbf{x_i}) - \varphi((\hat{\theta}_n^{MV})^T \mathbf{x_i})]\mathbf{x_i}$$

On considère, sans perte de géneralité, que $\theta^T \mathbf{x_i} < (\hat{\theta}_n^{MV})^T \mathbf{x_i}$ et on applique le théorème des accroissements finis, de tel façon qu'il existe $c_i \in]\theta^T \mathbf{x_i}, (\hat{\theta}_n^{MV})^T \mathbf{x_i}[$ tel que :

$$\varphi(\theta^T \mathbf{x_i}) - \varphi((\hat{\theta}_n^{MV})^T \mathbf{x_i}) = [\theta^T \mathbf{x_i} - (\hat{\theta}_n^{MV})^T \mathbf{x_i}]\varphi'(c_i) = [\theta^T - (\hat{\theta}_n^{MV})^T]\mathbf{x_i}\varphi'(c_i)$$

Alors, on obtient que :

$$\nabla l_n(\hat{\theta}_n^{MV}) - \nabla l_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \varphi'(c_i)[\theta^T - (\hat{\theta}_n^{MV})^T]\mathbf{x_i}\mathbf{x_i}$$

Maintenant, on utilise quelques résultats pour simplifier l'expression :

- $[\theta^T - (\hat{\theta}_n^{MV})^T]\mathbf{x_i}\mathbf{x_i} = \mathbf{x_i}[\theta^T - (\hat{\theta}_n^{MV})^T]\mathbf{x_i}$
- $[\theta^T - (\hat{\theta}_n^{MV})^T]\mathbf{x_i} = \mathbf{x_i}^T(\theta - \hat{\theta}_n^{MV})$
- $\varphi'(x) = \varphi(x)\varphi(1-x) = h(x)$

D'où vient l'expression :

$$\nabla l_n(\hat{\theta}_n^{MV}) - \nabla l_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} h(c_i)\mathbf{x_i}\mathbf{x_i}^T(\theta - \hat{\theta}_n^{MV})$$

Comme $c_i \in]\theta^T \mathbf{x_i}, (\hat{\theta}_n^{MV})^T \mathbf{x_i}[$, on peut écrire que $c_i = \theta^T \mathbf{x_i} + r_i$ pour un certain $r_i > 0$ et, par l'injectivité de $\mathbf{X}_n$, on sait qu'il existe un $\delta \in \mathbb{R}^p$ tel que :

$$\delta^T \mathbf{x_i} = r_i$$

Et alors :

$$\nabla l_n(\hat{\theta}_n^{MV}) - \nabla l_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} h[(\theta + \delta)^T \mathbf{x_i}]\mathbf{x_i}\mathbf{x_i}^T(\theta - \hat{\theta}_n^{MV})$$

$$\nabla l_n(\hat{\theta}_n^{MV}) - \nabla l_n(\theta) = -\mathbf{F_n}(\theta + \delta)(\hat{\theta}_n^{MV} - \theta)$$

$$\nabla l_n(\hat{\theta}_n^{MV}) - \nabla l_n(\theta) = -\left(\mathbf{F_n}(\theta+\delta) + \mathbf{F_n}(\theta) - \mathbf{F_n}(\theta)\right)(\hat{\theta}_n^{MV} - \theta)$$

Si on divide par $\sqrt{n}$:

$$\frac{\nabla l_n(\hat{\theta}_n^{MV}) - \nabla l_n(\theta)}{\sqrt{n}} = \left(-\frac{\mathbf{F_n}(\theta)}{n} + \underbrace{\left(\frac{\mathbf{F_n}(\theta+\delta) - \mathbf{F_n}(\theta)}{n}\right)}_{R_n}\right)\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{MV} - \theta)$$

Maintenant, il faut montrer que $R_n \xrightarrow{\mathbb{P}_{n,\theta}-prob} 0$. Par l'exercice 9, on sait qu'il existe une constante $C > 0$ tel que :

$$\|\mathbf{F_n}(\theta+\delta) - \mathbf{F_n}(\theta)\| \leq Cn\|\delta\|$$

Alors :

$$\frac{\|\mathbf{F_n}(\theta+\delta) - \mathbf{F_n}(\theta)\|}{n} \leq C\|\delta\|$$

Mais on a que $\|\delta\| \leq \|\hat{\theta}_n^{MV} - \theta\|$ et comme la suite $\{\hat{\theta}_n^{MV}\}_{n=n_0}^{\infty}$ est consistante, on a que :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{n,\theta}\left(\|\hat{\theta}_n - \theta\| \geq \epsilon\right) = 0$$

De tel façon que :

$$\frac{\|\mathbf{F_n}(\theta+\delta) - \mathbf{F_n}(\theta)\|}{n} \leq C\|\hat{\theta}_n - \theta\| \Rightarrow \frac{\|\mathbf{F_n}(\theta+\delta) - \mathbf{F_n}(\theta)\|}{n} = R_n \xrightarrow{\mathbb{P}_{n,\theta}-prob} 0$$

Donc, on a finalement que :

$$\frac{\nabla l_n(\hat{\theta}_n^{MV}) - \nabla l_n(\theta)}{\sqrt{n}} = \left(-\frac{\mathbf{F_n}(\theta)}{n} + R_n\right)\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$$

11
EXERCICE 11

On définit une suite a_i :

$$a_i = n^{-1/2}\{Y_i - \varphi(\theta^T \mathbf{x_i})\}\mathbf{x_i}$$

On veut utiliser le théorème de Lindberg-Feller avec cette suite car l'on remarque :

$$n^{-1/2}\nabla l_n(\theta) = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Pour le faire, on montre les deux conditions nécessaires :

(i) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[\|a_i\|^2\mathbb{1}_{\|a_i\|>\varepsilon}] = 0$

Soit $\varepsilon > 0$,

On peut majorer la somme en sortant l'indicatrice,

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[\|a_i\|^2\mathbb{1}_{\|a_i\|>\varepsilon}] \leq \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[\|a_i\|^2\frac{\|a_i\|}{\varepsilon}] = \varepsilon^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[\|a_i\|^3]$$

On remarque aussi que $|Y_i - \varphi(\theta^T\mathbf{x_i})| \leq 1$, pour écrire :

$$\varepsilon^{-1}n^{-3/2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[\|\{Y_i - \varphi(\theta^T\mathbf{x_i})\}\mathbf{x_i}\|^3] \leq \varepsilon^{-1}n^{-3/2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[\|\mathbf{x_i}\|^3]$$

Finalement, on utilise l'hypothèse $H2$ de l'énonce pour conclure :

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon^{-1}n^{-1/2}\underbrace{n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[\|\mathbf{x_i}\|^3]}_{\to \text{cte}} = 0$$

(ii) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}Var(a_i) = \Sigma$

Or,

$$\begin{cases}\mathbb{E}[Y_i - \varphi(\theta^T\mathbf{x_i})] = \mathbb{E}[Y_i] - \varphi(\theta^T\mathbf{x_i}) = 0\\ \mathbb{E}[(Y_i - \varphi(\theta^T\mathbf{x_i}))^2] = \mathbb{E}[Y_i - 2Y_i\varphi(\theta^T\mathbf{x_i}) + \varphi(\theta^T\mathbf{x_i})^2] = \varphi(\theta^T\mathbf{x_i}) - \varphi(\theta^T\mathbf{x_i})^2 = h(\theta^T\mathbf{x_i})\end{cases}$$

Alors,

$$\sum_{i=1}^{n}Var(a_i) = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[a_i a_i^T] = \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[(n^{-1/2}\{Y_i - \varphi(\theta^T\mathbf{x_i})\})^2]\mathbf{x_i}\mathbf{xi}^T$$

$$= n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[(Y_i - \varphi(\theta^T\mathbf{x_i}))^2]\mathbf{x_i}\mathbf{xi}^T = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}h(\theta^T\mathbf{x_i})\mathbf{x_i}\mathbf{xi}^T = n^{-1}\mathbf{F}_n(\theta)$$

On utilise maintenant l'hypothèse $H1$ de l'énonce :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} Var(a_i) = \lim_{n\to\infty} n^{-1}\mathbf{F}_n(\theta) = Q(\theta)$$

Les conditions étant demontrés, on peut utiliser le théorème pour conclure que :

$$n^{-1/2}\nabla l_n(\theta) \xrightarrow{\mathbb{P}_{n,\theta}} \mathcal{N}(0, Q(\theta))$$

12
EXERCICE 12

Il s'agit d'utiliser l'équation de la Q.10 et le resultat qu'on vient de montrer ensemble avec le théorème de Slutsky. Ainsi,

$$\sqrt{n}(\theta_n^{MV} - \theta) = Q(\theta)^{-1}Q(\theta)\sqrt{n}(\theta_n^{MV} - \theta) =$$

$$= Q(\theta)^{-1}\left[\underbrace{(n^{-1}\mathbf{F}_n - R_n)\sqrt{n}(\theta_n^{MV} - \theta)}_{n^{-1/2}\nabla l_n(\theta)\to\mathcal{N}(0,Q(\theta))} + \underbrace{(Q(\theta) - n^{-1}\mathbf{F}_n}_{\to 0} + \underbrace{R_n}_{\to 0})\underbrace{\sqrt{n}(\theta_n^{MV} - \theta)}_{\text{(norme bornée) } \mathbb{P}_{n,\theta}-prob}\right]$$

D'où,

$$\sqrt{n}(\theta_n^{MV} - \theta) \xrightarrow{\mathbb{P}_{n,\theta}} Q(\theta)^{-1}\mathcal{N}(0, Q(\theta)) = \mathcal{N}(0, Q(\theta)^{-1})$$

Observation : $||\sqrt{n}(\theta_n^{MV} - \theta)||$ est borné en probabilité par la propre équation de la question 10, étant donnée qu'on sait aussi que $n^{-1/2}\nabla l_n(\theta)$ converge vers une variable bornée en loi et que $n^{-1}\mathbf{F}_n - R_n$ converge vers $Q(\theta)$ en probabilité.

13
EXERCICE 13

On sait que

$$\sqrt{n}(\theta_{n,k}^{MV} - \theta_k) = \overbrace{[0\ldots 1\ldots 0]}^{\mathbf{e}_k} \sqrt{n}(\theta_n^{MV} - \theta)$$

Alors,

$$\sqrt{n}(\theta_{n,k}^{MV} - \theta_k) \xrightarrow{\mathbb{P}_{n,\theta}} \mathcal{N}(0, \mathbf{e}_k Q(\theta)^{-1}\mathbf{e}_k^T) = \mathcal{N}(0, \beta_{n,k})$$

Finalement, par Slutsky,

$$\sqrt{\frac{n}{\beta_{n,k}}}(\theta_{n,k}^{MV} - \theta_k) \xrightarrow{\mathbb{P}_{n,\theta}} \mathcal{N}(0,1)$$

14
EXERCICE 14

On sait que :

$$\sqrt{\frac{n}{\beta_{n,k}}}(\hat{\theta}_{n,k}^{MV} - \theta_k) \xrightarrow{\mathbb{P}_{n,\theta}} N(0,1)$$

Donc, on aura :

$$\mathbb{P}\left(q_{\alpha/2} \leq \sqrt{\frac{n}{\beta_{n,k}}}(\hat{\theta}_{n,k}^{MV} - \theta_k) \leq q_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

Où q_α est le quantile d'ordre α de la loi $\mathcal{N}(0,1)$, et, alors :

$$\hat{\theta}_{n,k}^{MV} - \sqrt{\frac{n}{\beta_{n,k}}} q_{1-\alpha/2} \leq \theta_k \leq \hat{\theta}_{n,k}^{MV} + \sqrt{\frac{n}{\beta_{n,k}}} q_{1-\alpha/2}$$

15
EXERCICE 15

On va proproser un test de la forme :

$$\phi(Z) = \mathbb{1}\{|Z| > c_\alpha\}$$

On veut que :

$$\mathbb{P}_{\theta_k=0}(|Z| > c_\alpha) = 1-\alpha$$

$$\mathbb{P}_{\theta_k=0}(|\hat{\theta}_{1n,k}^{MV} - 0| > c_\alpha) = 1 - \alpha$$

$$\mathbb{P}_{\theta_k=0}\left(|\sqrt{\frac{n}{\beta_{n,k}}}\hat{\theta}_{1n,k}^{MV} - 0| > \sqrt{\frac{n}{\beta_{n,k}}}c_\alpha\right) = 1 - \alpha$$

D'aprés, la question précédente, $\sqrt{\frac{n}{\beta_{n,k}}}(\hat{\theta}_{n,k}^{MV} - \theta_k) \xrightarrow{\mathbb{P}_{n,\theta}} N(0,1)$, donc :

$$\sqrt{\frac{n}{\beta_{n,k}}}c_\alpha = q_{1-\alpha/2}$$

On obtient :

$$c_\alpha = q_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\beta_{n,k}}{n}}$$

$$\phi(Z) = \mathbb{1}_{\left\{|Z| > \frac{q_{1-\alpha/2}\sqrt{\beta_{n,k}}}{\sqrt{n}}\right\}}$$

16
EXERCICE 16

En utilisant le test de la question précédent, on veut le plus petit α tel que :

$$|\hat{\theta}_{n,k}^{MV}| < c_\alpha$$

Donc, on aura

$$F_X\left(\hat{\theta}_{n,k}^{MV}\sqrt{\frac{n}{\beta_{n,k}}}\right) = 1 - \alpha/2$$

Où F est la loi de repartition de X, qui suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$

$$p_\alpha = 2\left(1 - F_X\left(\sqrt{\frac{n}{\beta_{n,k}}}\theta_k^{MV}\right)\right)$$