1　ノイズシェイピングの量子化雑音のF特

1.1　1次のノイズシェイピングの量子化雑音のF特

出力量子化雑音の伝達関数 $H_1(z)$ は

$$H_1(z) = 1 - z^{-1} \tag{1}$$

出力量子化雑音のF特 $|H_1(\mathrm{e}^{j\omega})|$ は

$$|H_1(\mathrm{e}^{j\omega})| = \sqrt{\mathfrak{Re}\left(1-\mathrm{e}^{-j\omega}\right)^2 + \mathfrak{Im}\left(1-\mathrm{e}^{-j\omega}\right)^2}$$

角周波数 ω は, サンプリング周波数 f_c, 信号周波数 f とすると $\omega = \frac{2\pi f}{f_c}$ で表される周波数.
$\mathrm{e}^{j\omega} = \cos(\omega) + j\sin(\omega)$, $\mathfrak{Re}\left(\mathrm{e}^{-j\omega}\right) = \cos(-\omega) = \cos(\omega)$, $\mathfrak{Im}\left(\mathrm{e}^{-j\omega}\right) = \sin(-\omega) = -\sin(\omega)$ より

$$\begin{aligned} |H_1(\mathrm{e}^{j\omega})| &= \sqrt{(1-\cos(\omega))^2 + \sin^2(\omega)} \\ &= \sqrt{1 - 2\cos(\omega) + \cos^2(\omega) + \sin^2(\omega)} \end{aligned}$$

$\cos^2(\omega) + \sin^2(\omega) = 1$, $1 - \cos(\omega) = \sin^2(\frac{\omega}{2})$ より

$$|H_1(\mathrm{e}^{j\omega})| = \sqrt{2 - 2\cos(\omega)} = \sqrt{2(1-\cos(\omega))} = \sqrt{4\sin^2(\frac{\omega}{2}))} = 2|\sin(\frac{\omega}{2})|$$

$$\therefore |H_1(\mathrm{e}^{j\omega})| = 2|\sin(\frac{\omega}{2})| \tag{2}$$

1.2　2次のノイズシェイピングの量子化雑音のF特

出力量子化雑音の伝達関数 $H_2(z)$ は

$$H_2(z) = 1 - 2z^{-1} + z^{-2} \tag{3}$$

出力量子化雑音のF特 $|H_2(\mathrm{e}^{j\omega})|$ は

$$\begin{aligned} |H_2(\mathrm{e}^{j\omega})| &= \sqrt{\mathfrak{Re}\left(1 - 2\mathrm{e}^{-j\omega} + \mathrm{e}^{-2j\omega}\right)^2 + \mathfrak{Im}\left(1 - 2\mathrm{e}^{-j\omega} + \mathrm{e}^{-2j\omega}\right)^2} \\ &= \sqrt{\{1 - 2\cos(\omega) + \cos(2\omega)\}^2 + \{2\sin(\omega) - \sin(2\omega)\}^2} \end{aligned}$$

$\cos(2\omega) = 2\cos^2(\omega) - 1$, $\sin(2\omega) = 2\sin(\omega)\cos(\omega)$, $\cos^2(\omega) + \sin^2(\omega) = 1$ より

$$\begin{aligned} |H_2(\mathrm{e}^{j\omega})| &= \sqrt{\{1 - 2\cos(\omega) + 2\cos^2(\omega) - 1\}^2 + \{2\sin(\omega) - 2\sin(\omega)\cos(\omega)\}^2} \\ &= \sqrt{\{2\cos(\omega)(1-\cos(\omega))\}^2 + \{2\sin(\omega)(1-\cos(\omega))\}^2} \\ &= \sqrt{(1-\cos(\omega))^2(4\cos^2(\omega) + 4\sin^2(\omega))} = \sqrt{4(1-\cos(\omega))^2} = 2|1-\cos(\omega)| \end{aligned}$$

$$\therefore |H_2(\mathrm{e}^{j\omega})| = 2 - 2\cos(\omega) \tag{4}$$