MA1500: Lineare Algebra und Diskrete Strukturen 2

Übungsblatt 3 Abgabe: Freitag, 26.04.2019, 8:30 Uhr

Aufgabe 1 (8 Punkte)
Zeigen Sie: Sind $(V, +, \cdot)$ und $(W, \oplus, \odot)$ zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume mit den neutralen Elementen e_V sowie e_W. Sei weiterhin $f : V \to W$ eine lineare Abbildung, d.h.

$$\forall x, y \in V \ \forall \alpha \in \mathbb{K} : \ f(\alpha \cdot x + y) = \alpha \odot f(x) \oplus f(y),$$

dann gilt:

a) $\text{Kern}(f)$ ist ein Untervektorraum von V,

b) $\text{Bild}(f)$ ist ein Untervektorraum von W.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass unter den oberen Voraussetzungen $f(e_V) = e_W$ gilt. Wozu können Sie diesen Zusammenhang benutzen?

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Sei $x \in \mathbb{R}^2$. Für welche Zahlen $c \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - cx_2 &= 1 \\ (c-1)x_1 - 2x_2 &= 1 \end{aligned}$$

a) eindeutig lösbar?

b) lösbar, aber nicht eindeutig lösbar?

c) nicht lösbar?

Aufgabe 3 (7 Punkte)
Für $n \in \mathbb{R}^{1,3}$ mit $n \neq 0$ und $c \in \mathbb{R}$ sei

$$H := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \ nx = c \right\}.$$

a) Bestimmen Sie $\text{Lös}(n, c)$, $\text{Kern}(n)$ sowie $\dim(\text{Kern}(n))$.

b) Geben Sie eine kurze, geometrische Beschreibung von $H = \text{Lös}(n, c)$ an.

c) Wie verändern sich diese Mengen, wenn die Bedingung $n \neq 0$ aufgegeben wird?