Institute of Mathematics and Image Computing
Jan Modersitzki, Caterina Rust

MA1500: Lineare Algebra und Diskrete Strukturen 2

Übungsblatt 2 Abgabe: Donnerstag, 18.04.2019, 16:00 Uhr

Bitte beachten Sie, dass aufgrund des Feiertags am Freitag die Abgabe dieses Übungsblattes auf **Donnerstag, den 18.04.2019, um 16 Uhr** vorverlegt ist.

Aufgabe 1 (9 Punkte)
Beweisen Sie die folgenden, aus der Vorlesung bekannten Aussagen:
Es sei $A \in \mathbb{K}^{m,n}, B \in \mathbb{K}^{m,n}, C \in \mathbb{K}^{n,p}$ sowie $\lambda \in \mathbb{K}$.

a) Die Multiplikation EA mit einer Elementarmatrix $E \in \mathbb{K}^{m\times m}$ liefert folgendes Ergebnis: $E := E_{m,[z_r \to \lambda z_r]}$: Multiplikation von Zeile r mit $\lambda \in \mathbb{K}$.

b) Die Multiplikation EA mit einer Elementarmatrix $E \in \mathbb{K}^{m\times m}$ liefert folgendes Ergebnis: $E := E_{m,[z_r \leftrightarrow z_q]}$: Tausch der Zeilen r und q.

c) $(A+B)C = AC + BC$

d) $(\lambda A)^H = \overline{\lambda} A^H$

e) Seien nun $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & i \\ i & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,3}$ und $\lambda = 4 + 3i \in \mathbb{C}$.

Berechnen Sie $A^\top A$, $A^H A$, AA^H, λA und $\overline{\lambda} A^H$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Eine Gruppe von fünf Studierenden sitzt um ein Lagerfeuer. Da es einen Platz gibt, der besonders heiß wird, rücken alle Studierenden regelmäßig einen Platz nach rechts.

a) Geben Sie eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ an, die einen dieser Rückvorgänge formalisiert.

b) Bestimmen Sie die Potenzen C^2, C^3, C^4 sowie C^5.

c) Geben Sie eine Matrix $D \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ an, für die gilt $D = C^{-1}$.

d) Es sei nun $p\colon \mathrm{GL}_5(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{5\times 5},\ p(A) = \sum\limits_{k=-2}^{2} kA^k$. Berechnen Sie $p(C)$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Der sogenannte *Spuroperator* ist für $n \times n$-Matrizen wie folgt definiert:

$$\mathrm{spur}\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R},$$
$$\mathrm{spur}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$$

a) Beweisen Sie, dass für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt: $\mathrm{spur}(A + \lambda B) = \mathrm{spur}(A) + \lambda \mathrm{spur}(B)$, d.h. die spur ist linear.

b) Beweisen Sie für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, dass $\mathrm{spur}(AB) = \mathrm{spur}(BA)$.