Institute of Mathematics and Image Computing
Jan Modersitzki, Caterina Rust

MA1500: Lineare Algebra und Diskrete Strukturen 2

Übungsblatt 12 Abgabe: Freitag, 05.07.2019, 8:30 Uhr

Aufgabe 1 (unbepunktet)
Prüfen Sie, ob Sie zur Zeit die Klausurzulassung besitzen.
Hinweis: Auf `https://moodle.uni-luebeck.de` finden Sie die Zulassungskriterien. Sollten Sie nicht genügend Übungspunkte erreicht oder nicht vorgerechnet haben, wenden Sie sich bitte an Ihren Übungsgruppenleiter.
Bitte beachten Sie, dass es keine automatischen Nachforderungen für die E-Tests gibt. Sollten Sie nicht genügend Punkte in den E-Tests erreicht haben, wenden Sie sich bitte an elearning@mic.uni-luebeck.de.

Aufgabe 2 (8 Punkte)
Gegeben ist die Matrix $G \in \mathbb{R}^{3,3}$:

$$G \coloneqq \begin{pmatrix} 3 & 10 & 30 \\ 0 & -1 & -12 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von G sowie deren algebraischen und geometrischen Vielfachheiten.

b) Stellen Sie fest, ob G diagonalisierbar ist.

c) Bestimmen Sie die Eigenräume von G sowie eine Matrix $V \in GL_3(\mathbb{C})$, sodass $G = VDV^{-1}$ für eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{C}^{3,3}$.

Aufgabe 3 (7 Punkte)
Sei

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}.$$

a) Finden Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^3$ (bzgl. des Standardskalarprodukts), welche aus Eigenvektoren von A besteht.

b) Finden Sie $S \in \mathbb{C}^{3,3}$, sodass $S^H S = E_3$ und $S^H AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$ reeller Zahlen, und sei $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ die Abbildung, welche definiert ist durch

$$f((a_n)_{n\geq 1}) := (a_{n+1} - a_n)_{n\geq 1}.$$

Das heißt, eine Folge $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ wird von f abgebildet auf die Folge $(a_2-a_1, a_3-a_2, a_4-a_3, \dots)$.

a) Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist.

b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von f.

c) Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(f)$ und $\mathrm{Bild}(f)$.