Institute of Mathematics and Image Computing
Jan Modersitzki, Caterina Rust

MA1500: Lineare Algebra und Diskrete Strukturen 2

Übungsblatt 10 Abgabe: Freitag, 21.06.2019, 8:30 Uhr

Aufgabe 1 (7 Punkte)
Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^4$ und die folgenden Vektoren $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Orthonormalisierungsverfahrens von Gram-Schmidt eine Orthonormalbasis für den von den Vektoren aufgespannten Vektorraum

$$V \coloneqq \operatorname{spann}(v_1, v_2, v_3, v_4) \subseteq \mathbb{R}^4.$$

b) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten von $x = (9, 0, 12, 5)^\top \in \mathbb{R}^4$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Diese Aufgabe beschäftigt sich mit optimalen Approximationen in Polynomräumen.

a) Es sei $V \coloneqq \Pi_2([-1, 1])$ mit dem Standard-Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle \coloneqq \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

Bestimmen Sie ausgehend von der Basis $M \coloneqq (1, t, t^2)$ eine Orthonormalbasis von V.

b) Es sei nun $V = \Pi_n([-1, 1]), n \geq 4$ mit obigem Skalarprodukt gegeben. Bestimmen Sie die beste Approximation von $u\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $u(t) \coloneqq t^4$ durch ein Polynom aus $\Pi_2([-1, 1])$ bezüglich der durch das Skalarprodukt induzierten Norm.

Aufgabe 3 (8 Punkte)
Sei $(V, \langle ., .\rangle)$ ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und $\mathcal{W}$ ein Orthonormalsystem von V. Beweisen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) $\mathcal{W}$ ist eine Orthonormalbasis von V.

(b) Ist $x \in V$ und $x \perp \mathcal{W}$, so ist $x = 0$.

(c) Für alle $x \in V$ gilt: $x = \sum_{w\in\mathcal{W}} \langle x, w\rangle w$.

(d) Für alle $x, y \in V$ gilt: $\langle x, y\rangle = \sum_{w\in\mathcal{W}} \langle x, w\rangle\langle y, w\rangle$.