Institute of Mathematics and Image Computing
Jan Modersitzki, Caterina Rust

MA1500: Lineare Algebra und Diskrete Strukturen 2

Übungsblatt 8 Abgabe: Freitag, 31.05.2019, 8:30 Uhr

Ab kommenden Montag, den 27.05.2019, 0:00 Uhr, ist der zweite E-Test freigeschaltet. Die Bearbeitungszeit beträgt acht Tage und endet am Montag, den 03.06.2019, um 23:59 Uhr.

Aufgabe 1 (8 Punkte)
Gegeben sind die Abbildungen

- $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto \varphi(x_1, x_2, x_3)^\top := (2x_1 + x_3,\ 2x_1 - x_2)^\top$,
- $D\colon \Pi_n(\mathbb{R}) \to \Pi_n(\mathbb{R})$, $p \mapsto D(p) := p''$,
- $\delta\colon V \to V$, $x \mapsto \delta(x) := x - 2\frac{\langle x,w\rangle}{\langle w,w\rangle} w$, V ein *unitärer* Vektorraum, $w \neq 0$.

a) Zeigen Sie: Die obigen Abbildungen sind linear und bestimmen Sie deren Kern.

b) Bestimmen Sie $\mathrm{Bild}(\varphi)$ und $\mathrm{Bild}(D)$.

c) Bestimmen Sie eine Matrix A, so dass $\varphi(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 2 (7 Punkte)
Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $M(\alpha) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ wie folgt definiert:

$$M(\alpha) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\alpha & 2+\alpha & -1 \\ -\alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Gegeben ist nun die wie lineare Abbildung $f_\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f_\alpha(x) := M(\alpha)x$.

a) Bestimmen Sie Basen des Kerns und des Bildes von f_α.

b) Prüfen Sie ebenfalls, für welche Werte $\alpha \in \mathbb{R}$ die Abbildung f_α ein Monomorphismus, Epimorphismus, Isomorphismus, Endomorphismus oder ein Automorphismus ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

a) Seien $v, w \in \mathbb{R}^2$ beliebige Punkte. Dann bezeichnet man die Menge

$$L(v, w) := \{(1-\alpha)\ v + \alpha\ w :\ \alpha \in [0,1]\}$$

auch als *Liniensegment*. Sei nun $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung. Beweisen Sie, dass auch $f(L(v,w))$ ein Liniensegment ist.

b) Seien V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume, $w \in W$ ein festes Element und $g\colon V \to W$ eine Abbildung, sodass $g(v) = w$ für alle $v \in V$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage:

$$g \text{ ist linear } \Leftrightarrow w = 0.$$