Institute of Mathematics and Image Computing
Jan Modersitzki, Caterina Rust

MA1500: Lineare Algebra und Diskrete Strukturen 2

Übungsblatt 1 — Abgabe: Freitag, 12.04.2019, 08:30 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Gegeben seien folgende Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Dimension von $\operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ in Abhängigkeit von α.

b) Stellen Sie für $\alpha = 0$ den Vektor $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von v_1, v_2, v_3 dar.

c) Bestimmen Sie für $\alpha = -4$ eine Basis von $\operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und $\|\cdot\|$ die induzierte Norm.

a) Seien $v, w \in V$ mit $\|v\| = 1$ und $\|w\| = 1$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$|\langle v, w\rangle| \neq 1 \Leftrightarrow (v, w) \text{ linear unabhängig.}$$

b) Sei $x \in V \setminus \{0\}$ beliebig. Zeigen Sie, dass es einen Vektor $z \in V$ mit den Eigenschaften $\|z\| = 1$ und

$$\forall y \in V : \frac{\langle y, x\rangle}{\langle x, x\rangle} x = \langle y, z\rangle z$$

gibt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) Gegeben sind die Matrizen $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C := \begin{pmatrix} 1+i & i \\ 1 & 2i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$. Berechnen Sie:

$$A \cdot B, \quad A \cdot B^{-1}, \quad \det(B), \quad \det(A \cdot C^H).$$

b) Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \langle\cdot,\cdot\rangle_A : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (v, w) \mapsto v^T A w.$$

Zeigen Sie: $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.