Institute of Mathematics and Image Computing
Jan Modersitzki, Caterina Rust

MA1500: Lineare Algebra und Diskrete Strukturen 2

Übungsblatt 5 Abgabe: Freitag, 10.05.2019, 8:30 Uhr

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ habe die Eigenschaft, dass sie unter Anwendung des Gaußschen Eliminationsverfahrens in Zeilenstufenform gebracht werden kann, ohne dass dabei Zeilen- oder Spaltenvertauschungen vorgenommen werden müssen.

a) Zeigen Sie, dass die hierbei benötigten Elementarmatrizen untere Dreiecksmatrizen sind.

b) Zeigen Sie, dass das Produkt der eingesetzten Elementarmatrizen eine untere Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{R}^{m,m}$ ist.

Aufgabe 2 (9 Punkte)

a) Auf einem Fest kauft Familie Piccoli drei Portionen Erbsensuppe und vier Crêpes. Dafür bezahlt sie $14,30$ Euro. Für $13,60$ Euro erwirbt Familie Rami eine Portion Erbsensuppe, drei Stücke Quiche und drei Crêpes. Familie Zhang kauft zwei Portionen Erbsensuppe, vier Stück Quiche und einen Crêpe für insgesamt $14,70$ Euro.

   Wie viel kosten jeweils eine Portion Erbsensuppe, ein Stück Quiche und ein Crêpe?

b) Durch einen Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ sowie das linear unabhängige Tupel (y, z) mit $y, z \in \mathbb{R}^3$ ist ein Dreieck $D \subset \mathbb{R}^3$ wie folgt definiert:

$$D := \{x + \lambda y + \mu z : \ \lambda + \mu \in [0, 1], \lambda, \mu \geq 0\}.$$

   Gegeben sind die zwei durch $x = (1/2, 1/4, -1/2)^\top$, $y = (2, -1, 1)^\top$, $z = (3, -1, 0)^\top$ sowie $u = (1, -2, -2)^\top$, $v = (4, 3, 3)^\top$, $w = (4, 2, 5)^\top$ gegebenen Dreiecke. Überprüfen Sie, ob diese einen nichtleeren Schnitt besitzen.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Gegeben ist die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \\ -1 & -5 & -6 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

a) Bestimmen Sie $\operatorname{Kern}(A)$ sowie $\dim(\operatorname{Kern}(A))$.

b) Geben Sie alle $b \in \mathbb{R}^4$ an, sodass $A^\top x = b$ keine Lösung besitzt.

c) Geben Sie alle $c \in \mathbb{R}^4$ an, sodass $A^\top x = c$ unendlich viele Lösungen besitzt.