作者: 张陈成
学号: 023071910029

K-理论笔记

泛函分析拾遗

目录

1 Banach 代数的极大理想

定义 1 (Banach 代数)**.** 称复 Banach 空间 $(X, \|\cdot\|)$ 为 Banach 代数, 若存在 X 上的乘法使得 $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

注 1. 不妨假定 Banach 代数有单位元. 实际上, 总可以对具有乘法结构加群添加单位元. 任给 Banach 代数 $(X, \|\cdot\|, \cdot)$, 定义含有单位元的 Banach 代数 $(X \oplus \mathbb{C}, \|\cdot\|', \odot)$ 如下.

- 范数 $\|(x, z)\|' := \|x\| + |z|$ 满足 $\mathbb{C}$-线性性与次可加性.
- 乘法 $(x, z) \odot (y, w) := (xy + zy + wx, zw)$ 与结合律, 分配律, 范数相容.
- 单位元 $(0, 1)$ 具有范数 1, 且与乘法相容.

上述单位化过程对交换 Banach 代数亦适用.

命题 1 (逆元子群)**.** Banach 代数的逆元全体 $X^\times$ 为开群, 且 $(-)^{-1}$ 为同胚.

证明. 任取 $x \in X^\times$, 以及 $t \in B(0, \|x^{-1}\|)$, 根据一致收敛性有

$$e = (x + t)(x^{-1} - x^{-1}tx^{-1} + x^{-1}tx^{-1}tx^{-1} - \cdots) = (x + t) \cdot x^{-1} \cdot \sum_{n \geq 1} (-tx^{-1})^n.$$

往证 $(-)^{-1}$ 的连续性. 注意到 $|(\|(x + s)^{-1}\| - \|x^{-1}\|)| \leq \|x^{-1}\| \cdot |1 - \|e + x^{-1}s\||$, 往后仅需验证单位元处逆映射连续. 对足够小的 s, 有

$$\|e - (e - s)^{-1}\| = \left\| \sum_{n \geq 1} s^n \right\| \leq \frac{|s|}{1 - \|s\|}.$$

从而 $(e - s)^{-1} \in B\left(e, \dfrac{|s|}{1 - |s|}\right)$. 证毕. $\square$

定义 2 ((双边) 理想)**.** Banach 代数 X 的理想为线性子空间 I, 满足 $IX + XI \subseteq I$.

命题 2. 真理想之闭包也是真理想. 特别地, 极大理想闭.

证明. 真理想 $I \subsetneq X$ 中元素不可逆, 从而对任意 $r \in I$ 总有 $\|e - r\| \geq 1$. 显然 $\overline{I} \subsetneq X$. 极大理想 $\mathfrak{m}$ 的存在性由选择公理保证, 再由 $\mathfrak{m} \subseteq \overline{\mathfrak{m}} \subsetneq X$ 知 $\mathfrak{m} = \overline{\mathfrak{m}}$. □

定义 3 (商代数)**.** 给定 Banach 代数 X 与理想 I, 商代数 X/I 的单位元为 $e + I$, 范数定义作

$$\|x + I\|_{X/I} := \inf_{r \in I} \|x + r\|_X.$$

注 2. 商算子 $X \xrightarrow{\pi} X/I$ 的范数为 1.

定义 4 (特征)**.** 称 $\mathbb{C}$-代数同态 (可乘线性泛函) $\varphi : X \to \mathbb{C}$ 为特征.

命题 3. 特征有如下特性.

1. 特征的范数为 1, 且在 X^* 中弱-$*$ 紧.
2. φ 是特征, 当且仅当 $\varphi(e) = 1$ 与 $\varphi(x^2) = \varphi(x)^2$ 成立.
3. 特征与极大理想对应.

证明. 以下依次证明之.

1. 仅需证明对任意 $x \in X$ 均有 $|\varphi(x)| \leq 1$. 若不然, 则存在 $x \in X$ 使得 $e - \dfrac{x}{\varphi(x)}$ 可逆, 但

   $$\varphi\left(e - \frac{x}{\varphi(x)}\right) = \varphi(e) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x)} = 0.$$

   这与 $\varphi : X^\times \to \mathbb{C}^\times$ 矛盾. 对弱-$*$ 紧性, Banach-Alaoglu 定理表明 1-范数的线性泛函全体弱-$*$ 紧, 因此证明全体特征弱-$*$ 闭即可. 直接验证之, 显然.

2. 注意到 $0 = \varphi(x+y)^2 - \varphi((x+y)^2) = \varphi(xy + yx) - 2\varphi(x)\varphi(y)$, 故 φ 与 $\ker(\varphi)$ 相容. 根据

   $$2x(yxy) + 2(yxy)x = (xy + yx)^2 + (xy - yx)^2,$$

   从而 $x \in \ker(\varphi)$ 当且仅当 $(xy \pm yx) \in \ker(\varphi)$, 即 $xy, yx \in \ker(\varphi)$. 遂有

   $$0 = \varphi((x - e\varphi(x))(y - e\varphi(y))) = \varphi(xy) - \varphi(x)\varphi(y), \quad \forall x, y \in X.$$

3. 先证明特征 $\varphi_1 = \varphi_2$ 当切仅当 $\ker(\varphi_1) = \ker(\varphi_2)$. 往证必要性. 若 $\varphi_1 \neq \varphi_2$, 则存在 x 使得 $\varphi_1(x) \neq \varphi_2(x)$. 此时 $x - e\varphi_1(x)$ 为 φ_1 的核, 但非 φ_2 的核. 遂得证.

   由于 $\dim_{\mathbb{C}}(X/\varphi_i) = 1$, 故 $\ker(\varphi_i)$ 为极大理想. 相反地, 给定任意极大理想 $\mathfrak{m} \subseteq X$, 则 $X/\mathfrak{m}$ 为复交换可除 Banach 代数, 因此只能是 $\mathbb{C}$. 商映射 $X/\mathfrak{m}$ 自然给出特征. 结合特征到极大理想的典范映射是单的, 因此是一一对应.

□

2 谱理论

定义 5 (全纯函数)**.** 对开区域 $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ 与 Banach 代数 X, 称 $f : \Omega \to X$ 是全纯的当且仅当极

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$$

对任意 $z_0 \in \Omega$ 存在.

注 3. 若 X 是复拓扑线性空间, 则称 $f : \Omega \to X$ 弱全纯, 当且仅当对任意对偶空间中的线性泛函 $l \in X^*$ 总有全纯函数

$$l(f) : \Omega \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto (l(f))(x) = l(f(x)).$$

若 X 为复 Banach 空间, 则弱全纯函数等价于全纯函数.

命题 4. 类比复分析中证明, 全纯函数 $f : \Omega \to X$ 满足以下性质.

1. f 光滑.
2. 定义参数化闭道路 $\gamma \subseteq \Omega$ 关于 $z_0 \in (\mathbb{C} \setminus \gamma)$ 的盈数为 $\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) := \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} \in \mathbb{Z}$.
3. (Cauchy 定理) 若 γ 在 Ω 上零伦, 即, 对任意 $z_0 \in (\mathbb{C} \setminus \Omega)$ 均有 $\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) = 0$, 则 $\displaystyle\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$.
4. (Cauchy 积分公式) 对任意参数化闭曲线 γ 与 $z_0 \in (\Omega \setminus \gamma)$, 总有
$$\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) \cdot f(z_0) = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z.$$
5. (Liouville 定理) 取 $Y \subseteq X^*$ 分离 X, 若对任意 $l \in Y$, $l(f) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 有界, 则 f 是常映射.

定义 6 (谱)**.** 给定 Banach 代数 X, 定义 $x \in X$ 的谱为

$$\sigma(x) := \{z \in \mathbb{C} \mid (ze - x) \notin X^\times\}.$$

定理 1. $\sigma(x) \in \overline{B(0, \|x\|)}$, 且 σ 为非空闭集.

证明. 对任意 $|z| > \|x\|$ 有 $ze - x = ze(1 - z^{-1}x)$. 注意到 $\|z^{-1}x\| < 1$, 故 x 可逆, 从而 $\sigma(x) \subseteq \overline{B(0, \|x\|)}$. 作连续函数 $T_x := (\cdot)e - x : \mathbb{C} \to X$, 从而闭集 $(X \setminus X^\times) \cap T_x(\mathbb{C})$ 的原像仍是闭集. 最后证明 $\sigma(x)$ 非空, 若不然, 则 $\|(ze - x)^{-1}\|$ 在 $\mathbb{C}$ 上定义. 注意到 $\lim_{z\to\infty} |z|^{-1}\|(e - z^{-1}x)^{-1}\| = 0$, 从而 $(ze - x)^{-1}$ 一致有界. 依照 Liouville 定理, $ze - x$ 为常数算子, 矛盾. □

定义 7 (广义幂零元)**.** 根据 Laurent 展开直接验证得幂零元的谱为 $\{0\}$; 相应地, 称谱为 $\{0\}$ 的元素为**广义幂零元**.

定义 8 (谱半径)**.** 定义 $x \in X$ 的**谱半径**为紧集 $\sigma(x)$ 中模长最大者, 记 $r(x)$.

命题 5. $r(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$.

证明. 一方面, $r(x) \le \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$ 是显然的. 另一方面, 有 Laurent 展开

$$(ez - x)^{-1} = \sum_{n\geq 0} z^{-n+1} x^n \quad (|z| > r(x)).$$

以上收敛半径为 $\limsup_{n\to\infty} \|z^{-1-n}x^n\| \le 1$, 从而 $r(x) \ge \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{\|x^n\|}$. 综上, 得证. □

注 4. $r : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 上半连续, 即, 对一切依范数收敛的序列 $x_n \to x$ 总有

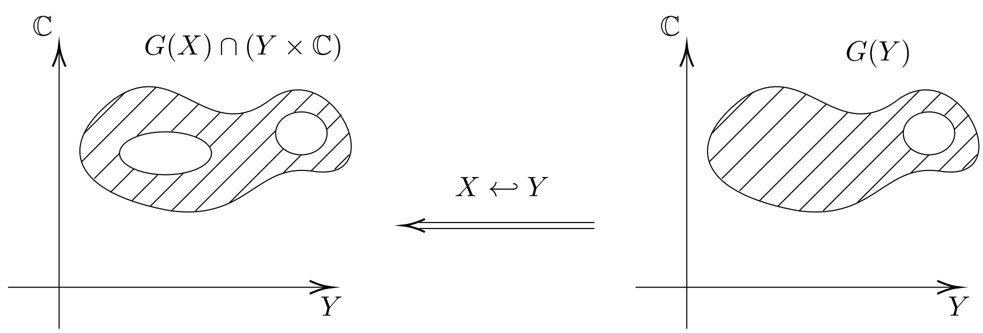
$$\limsup_{n\to\infty} r(x_n) \le r(x).$$

注 5. 谱可以定义在一般 X-算子上, 其中 $x : X \to X, y \mapsto xy$ 自然是 Banach 空间的算子. 归根结底, 算子代数也是 Banach 代数.

命题 6. 对 Banach 代数 X 与子代数 Y, 定义

$$G(X) := \{(x, z) \in X \times \mathbb{C} \mid z \notin \sigma_X(x)\}.$$

则 $G(Y)$ 无非 $G(X) \cap (\mathbb{C} \times Y)$ 去掉若干连通分支, 且数量不超过 $\omega \cdot \dim_{\mathbb{C}} Y$.



证明. 将证明拆解为如下步骤.

1. 对任意 $y \in Y$, 有 $\partial\sigma_Y(y) \subseteq \sigma_X(y) \subseteq \sigma_Y(y)$. 于是 $\sigma_Y(y)$ 无非 $\sigma_X(y)$ 填上若干开连通分支.

2. 任意给定 $\sigma_X(x)$, 则对任意小的 ε-网 $\bigcup_{t\in\sigma_X(x)} B(t, \varepsilon)$, 存在 δ 使得对任意 $\|y\| < 1$ 均有

$$\sigma_X(x + \delta y) \subseteq \bigcup_{t\in\sigma_X(x)} B(t, \varepsilon).$$

   换言之, $\sigma_X(-)$ 关于 ε-网诱导的度量连续. 记上述 ε-网作 N_ε.

对第一部分, $\sigma_X(y) \subseteq \sigma_Y(y)$ 是显然的, 因为 $Y^\times \subseteq X^\times$. 对任意 $z_0 \in \partial\sigma_Y(y)$, 存在道路

$$z : [0, 1] \to \mathbb{C}, \quad (0, 1] \to \mathbb{C} \setminus \sigma_Y(y), \quad 0 \mapsto z_0.$$

因此对 $t \in (0, 1]$, $(z(t)e - y)^{-1} \in Y^\times \subseteq X^\times$. 若 $z_0 \notin \sigma_X(y)$, 则根据 $(-)^{-1}$ 的连续性知 $(z_0 e - y)^{-1} \in X^\times$. 注意到 Y 是 X 的闭子空间, 故 $\{(z(t)e - y)^{-1} \mid t \in [0, 1]\}$ 的原像均在 Y 中. 显然 $(z_0 e - y)^{-1} \in Y$ 有逆元 $(z_0 r - y) \in Y$.

对第二部分, 考虑连续映射 $N : \mathbb{C} \setminus \sigma_X(x) \to \mathbb{R}, \quad z \mapsto \|(ze - x)^{-1}\|$. 显然 $N(\infty) = 0$, 故 N 在 $\mathbb{C} \setminus N_\varepsilon$ 中有上界 M. 根据 $(-)^{-1}$ 与 $\|\cdot\|$ 之连续性, 存在 $\delta = M^{-1}$ 使得对任意 $\|x' - x\| < \delta$ 与 $z \in \mathbb{C} \setminus N_\varepsilon$, 总有

$$\|(ze - x) - (ze - x')\| < \delta \le \frac{1}{\|(ze - x)^{-1}\|}.$$

因此 $1 > \|e-(ze-x)^{-1}(ze-x')\|$. 这也说明

$$e-\Big(e-(ze-x)^{-1}(ze-x')\Big)=(ze-x)^{-1}(ze-x')\in X^{\times}.$$

对一切 $y\in Y$, 步骤一中填充的连通分支数量至多可数, 从而 $G(Y)$ 与 $G(X)\cap(\mathbb{C}\times Y)$ 相差的连通分支数不超过 $\omega\cdot\dim_{\mathbb{C}}Y$. □

3 C^* 代数一览

定义 9 (伴随, Banach* 代数)**.** Banach 代数 X 上的**伴随**为 $\mathbb{R}$-反自同构 $(-)^*:X\to X$, 满足

$$(z\cdot x)^*=\overline{z}x^*,\quad (x^*)^*=x.$$

称具有伴随的 Banach 代数为 **Banach* 代数**.

命题 7. 自伴元全体 $\{x=x^*\mid x\in X\}$ 为包含 e 的 X 的实子空间.

命题 8. x 可逆当且仅当 x^* 可逆, 且 $(x^{-1})^*=(x^*)^{-1}$, $\sigma_X(x)$ 与 $\sigma_X(x^*)$ 共轭.

证明. 注意到 $(ze-x)^*((ze-x)^{-1})^*=((ze-x)^{-1}(ze-x))^*=e^*=e$. 从而 $\sigma_X(x)$ 与 $\sigma_X(x^*)$ 共轭. 考虑 $z=0$, 则 $x\in X^{\times}$ 当且仅当 $x^*\in X^{\times}$. □

定义 10 (C^* 代数)**.** 称 Banach* 代数为 C^* 代数, 当且仅当 $(-)^*$ 等距.

注 6. 对一般交换 Banach 代数, $(-)^*$ 等距当且仅当 $\|xx^*\|=\|x^*x\|=\|x\|^2=\|x^2\|$.

命题 9 (C^* 代数的单位化)**.** 对非单位 C^* 代数 X 未完待续.

定义 11 (正规元, 酉元, 自伴元 (实元))**.** 称 $x\in X$ 正规, 若且仅若 $x^*x=xx^*$; 称 x 是酉的, 若且仅若 $x^*x=xx^*=e$; 称 x 是自伴的 (实的) 若且仅若 $x=x^*$.

命题 10 (C^* 代数中正规元, 酉元, 实元的谱)**.** 正规元满足 $r(x)=\|x\|$. 酉元的谱为 S^1 中的若干闭弧 (点), 实元的谱为 $\mathbb{R}$ 中的有限闭集之并.

证明. 显然 $r(x)\le\|x\|$. 注意到

$$\|x^{2^n}\|=\sqrt{\|(x^*)^{2^n}x^{2^n}\|}=\sqrt{\|(x^*x)^{2^n}\|}\le\sqrt{\|x^*x\|}^{2^n}=\|x\|^{2^n},$$

从而 $r(x)\ge\limsup_{n\to\infty}\|x^{2^n}\|^{2^{-n}}=\|x\|$. 因此 $r(x)=\|x\|$. 从而酉元的谱在单位闭圆盘内, 且关于共轭运算封闭, 因此在 S^1 上. 结合紧性知酉元的谱为 S^1 上有限闭圆弧 (点) 之并. 给定实元 x, 收敛幂级数定义的 $\exp(ix)$ 是酉元. 对任意 $z\in\sigma_X(x)$, 往证 $\exp(iz)$ 为 $\exp(ix)$ 的谱. 注意到

$$\exp(iz)-\exp(ix)=(ze-x)\left(\sum_{n\ge1}\frac{i^n}{n!}\sum_{0\le k\le n}z^kx^{n-k}\right)=:(ze-x)T.$$

显然 T 可逆, 从而 $\sigma_X(\exp(iz))=\exp(i\sigma_X(z))\in S^1$. 这表明实元的谱在 $\mathbb{R}$ 中, 结合紧性知谱为有限闭区间之并. □

注 7. 一般地, 全纯函数保持谱. 即, 对一切定义在 $\sigma_X(x)$ 的某个 ε 网上的全纯函数 f 总有 $f(\sigma_X(x))=\sigma_X(f(x))$.

命题 11. 取 Banach* 代数中任意元 x, 总有 $\ker(x) = \ker(x^*x)$.

证明. $xy = 0 \implies y^*x^*xy = 0 \implies (xy)^*(xy) = 0 \implies xy = 0$. □

命题 12. 在命题 6 中置 X 与 Y 为 C^* 代数, 则 $G(Y) = G(X) \cap (\mathbb{C} \times Y)$.

证明. 对任意 $x \in Y$, 往证 $x \in Y^\times$ 当且仅当 $x \in X^\times$. 对任意 $x \in Y$, 实元的谱 $\sigma_Y(x^*x)$ 内部为空, 根据命题 6 知 $\sigma_X(x^*x) = \sigma_Y(x^*x)$. 结合命题 11 知 $x^* \in X^\times$ 当且仅当 $x^* \in Y^\times$. 得证. □

注 8. C^* 代数扩张不改变谱.

4 Gel'fand 对偶

定义 12 (Gel'fand 变换)**.** 定义极大理想空间 $\mathfrak{M}$ 为赋予弱-$*$ 拓扑的特征全体, 则 $\mathfrak{M}$ 是紧的. 依照命题 3 等同极大理想与特征. 定义 Gel'fand 变换为如下线性映射

$$\widehat{(-)} : X \to C(\mathfrak{M}), \quad x \mapsto [\mathfrak{M} \to \mathbb{C}, \quad \varphi \mapsto \varphi(x)].$$

命题 13. 若 X 是交换 Banach 代数, 则有如下命题.

1. $\widehat{(-)}$ 是交换 Banach 代数的连续同态, 且范数为 1.
2. $\ker \widehat{(-)} = J(X) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}} \mathfrak{m}$ 为 Jacobson 根.
3. $\widehat{x} : \mathfrak{M} \to \sigma_X(x), \quad \varphi \to \varphi(x)$ 给出交换 Banach 代数与谱的对应.
4. $\|\widehat{x}\| := \sup_{\varphi \in \mathfrak{M}} |\varphi(x)| = r(x)$.
5. 以下关于复半单交换 Banach 代数 X 的论断等价.
   (a) $J(X) = 0$. 根据以上, $\widehat{(-)}$ 是交换 Banach 代数范畴的单态射.
   (b) $\mathfrak{M}$ 分离 X. 即, 对任意不相等的 $x, y \in X$, 总存在 $\varphi \in \mathfrak{M}$ 使得 $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.
   (c) 谱半径 $r(-)$ 为范数. 换言之, X 中不存在非零的广义幂零元.
6. $\widehat{(-)} : X \to C(\mathfrak{M})$ 等距当且仅当 $\|x^2\| = \|x\|^2$.

证明. 下依次证明之.

1. 注意到 $\widehat{xy}(\varphi) = \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \widehat{x}(\varphi)\widehat{y}(\varphi)$, $\widehat{e} = 1$, 故 $\widehat{(-)}$ 为同态. 由于特征范数为 1, 故 $\widehat{X}$ 的范数满足

   $$\|\widehat{x}\| := \sup_{\varphi \in \mathfrak{M}} |\varphi(x)| \leq \|x\|.$$

   从而 $\|\widehat{(-)}\| \leq 1$. 考虑单位元知 $\|\widehat{(-)}\| = 1$.

2. 注意到 $\widehat{r} = 0$ 当且仅当 $\varphi(r) = 0$ 对任意 $\varphi \in \mathfrak{M}$ 成立, 故当且仅当 $r \in J(X)$.

3. 一方面, 对任意 $\varphi \in \mathfrak{M}$, 总有 $\varphi : (\varphi(x)e - x) \mapsto 0$, 从而 $\varphi(x) \in \sigma_X(x)$. 另一方面, 对任意 $z \in \sigma(x)$, 考虑包含不可逆元 $ze - x$ 的极大理想即可.

4. 根据上一条, $\|\hat{x}\| = \sup_{\varphi\in\mathfrak{M}} |\varphi(x)| = \sup_{z\in\sigma(x)} = |z| = r(x)$.

5. 对任意 $(x-y) \in J(X)$, 总有 $\varphi(x) = \varphi(y)$ 对一切 $\varphi \in \mathfrak{M}$ 成立, 因此 (a) 与 (b) 等价. 若非 (b), 则存在非零的 x 使得 $\|\widehat{x}\| = r(x) = 0$, 遂得非 (c). 既证 $\|\hat{x}\| = r(x)$ 是良定义的范数, 从而 (b) 蕴含 (c).

6. 一方面, 若 $\|\widehat{x}\| = \|x\|$ 恒成立, 则依照 $\widehat{x\cdot x}(\varphi) = (\widehat{x}(\varphi))^2$ 可知 $\|x^2\| = \|\widehat{x}^2\| = \|\widehat{x}\|^2 = \|x\|^2$. 另一方面, 若 $\|x^2\| = \|x\|^2$, 则有

$$\|\widehat{x}\| = r(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{\|x^{2^n}\|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{\|x\|^{2^n}} = \|x\|.$$

□

注 9. 上述第 5 条 (b) 表明全体特征 (极大理想) 有自然的紧 Hausdorff 拓扑.

命题 14. 记 $C(K)$ 为紧 Hausdorff 空间上的连续复函数全体, 则 $\|\cdot\| := \|\cdot\|_\infty$ 给出复 Banach 代数结构. 则极大理想空间 $\mathfrak{M}$ 与 K 无异. 实际上, $C(X)$ 中极大理想形如 $\ker(g \mapsto g(x_0))$. 遂有同构

$$\widehat{(-)} : C(K) \xrightarrow{\sim} C(\mathfrak{M}), \quad f \mapsto [\ker(g \mapsto g(x_0)) \mapsto f(x_0)].$$

证明. 先证明 $C(X)$ 中的极大理想形如 $\ker(g \mapsto g(x_0))$. 记 $\mathfrak{m}_{x_0} = \ker(g \mapsto g(x_0))$, 则 $C(X)/\mathfrak{m}_{x_0} = \mathbb{C}$ 是域, 从而 $\mathfrak{m}_{x_0}$ 是极大理想. 若存在极大理想 $\mathfrak{m}$ 与形如 $\mathfrak{m}_{x_0}$ 的理想不同, 则对任意 $x \in X$, 总存在 $l_x \in \mathfrak{m}$ 使得 $l_x(x) = 1$. 遂得开覆盖 $\{\mathrm{supp}(l_x)\}_{x\in X}$, 记 $\{\mathrm{supp}(l_{x_k})\}_{1\le k\le n}$ 为有限子覆盖. 注意到

$$\left(\sum_{1\le k\le n} |f_{x_k}(x)|^2\right) \in (C(X))^\times \cap \mathfrak{m},$$

从而 $\mathfrak{m}$ 中理想包含可逆元, 与假定矛盾. □

定理 2 (Gel'fand 对偶)**.** 交换 C^* 代数范畴与紧 Hausdorff 空间范畴范畴等价.

证明. 先证明定义 12 给出交换 C^* 代数 X 到极大理想空间 $C(\mathfrak{M})$ 的等距同构, 且保持 $(-)^*$. 注意到

$$\widehat{x^*} : \varphi \mapsto \varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)}, \quad \overline{\widehat{x}} : [\varphi \mapsto \overline{\varphi(x)}].$$

从而 $\widehat{(-)}$ 为保持 $(-)^*$ 的同态. □

未完待续.

定理 3 (Riez 算法)**.** 未完待续.