作者: 张陈成
学号: 023071910029

K-理论笔记

外微分拾遗

目录

1 模的外积 **1**

2 插曲: PID 上有限生成模的结构 **3**

1 模的外积

定义 1 (对称 (反对称) 函数)**.** 给定 R-模 M 与 N. 今取定 $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ 以及态射 $M^m \xrightarrow{f} N$.

1. 称 f 是对称的, 若 $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(m)})$ 对一切置换 $\sigma \in S_m$ 成立;
2. 称 f 是反对称的, 若 $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (-1)^{\sigma} f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(m)})$ 对一切置换 $\sigma \in S_m$ 成立;
3. 称 f 是交错的, 若 f 满足以下论断: 若存在 $i \neq j$ 使得 $x_i = x_j$, 则 $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$.

显然, 反对称等价于 "对换改变符号", 亦等价于交错.

定义 2 (模的外积)**.** 给定反对称态射 $M^m \xrightarrow{f} N$, 则有如下交换图

$$
\begin{tikzcd}
 & \ker(\tilde{f}) \arrow[d] & \\
M^m \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & \bigotimes^m M \arrow[r, two heads, "j"] \arrow[d, dashed, "\tilde{f}"'] & \bigwedge^m(M) \arrow[dl, dashed, "\bar{f}"] \\
 & N &
\end{tikzcd}
.
$$

1. $\pi : M^m \to \bigotimes^m M$ 由张量积之范性质保证.
2. 对任意反对称态射 $f \in \mathrm{Hom}_R(M^m, N)$, 总有 $\ker(\tilde{f}) \subseteq \langle x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \mid 存在i \neq j\ 使得x_i = x_j \rangle =: J$.

从而定义外积 $\bigwedge^m(M) := \dfrac{\bigotimes^m M}{J}$. 用泛性质语言描述之, 任意 M^m 出发的反对称态射通过 $\bigwedge^m(M)$ 分解.

例 1. $\bigwedge^0(M) \simeq \bigotimes^0(M) \simeq R$, $\bigwedge^1(M) \simeq \bigotimes^1(M) \simeq M$. 记 $I := (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ 为 R 的理想, 则 $\bigwedge^n(I)$ 为主理想.

命题 1. 若 M 有限生成, 记其极小生成集大小为 n. 则 $\bigwedge^m(M) = 0$ 对一切 $m > n$ 成立.

命题 2. 若 $\bigwedge^n(M) = 0$, 则对任意 $N \geq n$, 总有 $\bigwedge^N(M) = 0$.

命题 3 (自由模的秩)**.** 对自由模 R^n, 有 $\bigwedge^m(R^n) \simeq R^{\binom{n}{m}}$.

定义 3 ($\bigwedge^n$ 函子)**.** 定义 $\bigwedge^n(-): R\text{−Mod} \to R\text{−Mod}$, 其中

$$\bigwedge^n(M \xrightarrow{\varphi} N) = \left[\bigwedge^n(\varphi): \bigwedge^n(M) \to \bigwedge^n(M), \quad \sum x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \mapsto \sum \varphi(x_1) \wedge \cdots \wedge \varphi(x_n)\right].$$

显然 $\bigwedge^n(-)$ 保持结合律以及单位元, 从而是函子.

命题 4 ($\bigwedge^n(-)$ 的右正合性)**.** $\bigwedge^n(-)$ 保持同构以及满射, 但不保持单射.

证明. 根据 $\bigwedge^n(-)$ 的函子性, 其保持同构. 考虑模的基底, $\bigwedge^n(-)$ 显然保持满射. 下给出 $\bigwedge^n(-)$ 不保持单射的例子. 记 I 是环 R 中的非主理想, 则 $I \hookrightarrow R$ 是单射, 但诱导的 $0 \neq \bigwedge^2(I) \to \bigwedge^2(R) = 0$ 显然不是单射. □

命题 5. 对自由模范畴, 观察秩知 $\bigwedge^k(-)$ 保持单射与满射, 从而正合.

定义 4 (行列式)**.** 对自由模 R^n, 记行列式为同构 $\det: \mathrm{End}_R(\bigwedge^n(R^n)) \simeq \mathbb{R}$, 满足

$$\varphi(x) = \det(\varphi) \cdot x.$$

依照 $\bigwedge^n(R^n) = \langle x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \rangle$, 从而 $\mathrm{End}_R(\bigwedge^n(R^n)) \simeq R$ 是自然的. 注意到 det 与通常意义的行列式运算相容, 因此 det 是良定义的.

命题 6 (直和结构)**.** $\bigwedge^k(M)$ 与 $\bigwedge^k(N)$ 是 $\bigwedge^k(M \oplus N)$ 的直和项.

证明. 考虑复合的恒等映射 $M \xrightarrow{e} M \oplus N \xrightarrow{\pi} M$, 由 $\bigwedge^k(-)$ 的函子性知 $\bigwedge^k(\pi) \circ \bigwedge^k(e) = \mathrm{id}_{\bigwedge^k(M)}$. 此时

$$\ker\left(\bigwedge^k(e)\right) \subseteq \ker\left(\bigwedge^k(\pi e)\right) = \ker\left(\mathrm{id}_{\bigwedge^k(M)}\right) = 0.$$

因此 $\bigwedge^k(e)$ 可裂单, 从而 $\bigwedge^k(M)$ 是 $\bigwedge^k(M \oplus N)$ 的直和项. □

定理 1 (Künneth 公式)**.** 对 R-模 M 与 N 以及 $n \in \mathbb{N}$, 有如下恒等式

$$\bigwedge^n(M \oplus N) \simeq \bigoplus_{0 \le k \le n} \left(\bigwedge^k(M) \otimes \bigwedge^{n-k}(N)\right).$$

证明. 先定义 $g_i: \bigwedge^k(M) \otimes \bigwedge^{n-k}(N) \to \bigwedge^n(M \oplus N)$ 为如下映射之合成

$$\begin{array}{ccc}
\bigwedge^k(M) \otimes \bigwedge^{n-k}(N) & & (m_1 \wedge \cdots \wedge m_k) \otimes (n_1 \wedge \cdots \wedge n_{n-k}) \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
\bigwedge^k(M \oplus N) \otimes \bigwedge^{n-k}(M \oplus N) & & ((m_1, 0) \wedge \cdots \wedge (m_k, 0)) \otimes ((0, n_1) \wedge \cdots \wedge (0, n_{n-k})) \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
\bigwedge^n(M \oplus N) & & (m_1, 0) \wedge \cdots \wedge (m_k, 0) \wedge (0, n_1) \wedge \cdots \wedge (0, n_{n-k})
\end{array}.$$

上述态射自然是良定义的. 反之, 将 $\bigwedge^n(M \oplus N)$ 拆散作 2^n 项求和, 得

$$(m_1, n_1) \wedge \cdots \wedge (m_n, n_n) = \sum_{0 \le k \le n} (-1)^* (m_{i_1}, 0) \wedge \cdots \wedge (m_{i_k}, 0) \wedge (0, n_{j_1}) \wedge \cdots \wedge (0, n_{j_{n-k}}).$$

由此定义 $f_k: \bigwedge^n(M \oplus N) \to \bigwedge^k(M) \otimes \bigwedge^{n-k}(N)$. 往后仅需检验

$$f_i g_j = \delta_{i,j} \cdot \mathrm{id}_{\bigwedge^i(M) \otimes \bigwedge^{n-i}(N)}, \qquad \sum_{0 \le k \le n} g_k f_k = \mathrm{id}_{\bigwedge^n(M \oplus N)}.$$

检验步骤略去. □

注 1. 类似地, 有多元情形

$$\bigwedge^{n}(M_1\oplus\cdots\oplus M_m)\simeq\bigoplus_{k_1+\cdots+k_m=n}\left(\bigwedge^{k_1}(M_1)\otimes\cdots\otimes\bigwedge^{k_m}(M_m)\right).$$

2 插曲: PID 上有限生成模的结构

命题 7. PID 上有限生成无扰模自由.

证明. 主理想整环系 Dedekind 整环, 从而无扰模平坦. 依照 Noether 性, 有限生成模有限展示, 从而是有限生成投射模. 显然 PID 上投射模自由. □

注 2. 记 $\mathrm{Tor}(X)$ 为 X 的挠子模, 则对 PID 上有限生成模 X 总有正合列

$$0\to\mathrm{Tor}(X)\to X\to\frac{X}{\mathrm{Tor}(X)}\to 0.$$

由于 $\dfrac{X}{\mathrm{Tor}(X)}$ 无扰动, 故自由, 遂正合列可裂. 因此 $X\simeq\mathrm{Tor}(X)\oplus\dfrac{X}{\mathrm{Tor}(X)}$.

命题 8 (初等因子组)**.** 取 PID R 上有限生成模 X. 若生成 $M=\mathrm{Tor}(X)$ 至少需要 n 个元素, 则存在有限序列构成的数组 $(e_1,\ldots,e_n)$, 使得

$$M\simeq\frac{R}{(p^{e_1})}\times\cdots\times\frac{R}{(p^{e_n})},\quad e_k=(e_k^1,\ldots,e_k^m,0,\ldots),\quad p^{e_k}:=\prod p_k^{e_k^i},\quad e_1\le e_2\le\cdots\le e_n.$$

定义 $e_k\le e_{k+1}$ 当且仅当 $e_k^i\le e_{k+1}^i$ 对任意 i 成立.

证明. 取 M 的生成元 $\{m_1,\ldots,m_n\}$, 则存在极小的 $e=e_0$ 使得 $p^e m_i=0$ 对任意 i 成立. 换言之, $p^e\cdot M=0$. 此时不妨设零化 y_n 所需的极小的 e 同为 e_0. 此时 $\dfrac{M}{\langle y_n\rangle}\simeq\dfrac{R}{(p^{e_0})}$ 为循环模. 遂有

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \langle y_n\rangle \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & \frac{M}{\langle y_n\rangle} \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & M \arrow[r] & \frac{R}{(p^{e_0})} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}.$$

逐次归纳即可. □

命题 9. 如上选取的 $(e_1,\ldots,e_n)$ 是唯一的. 实际上, $\mathrm{ann}_R(\bigwedge^k(M))=(p^{e_k})$.

证明. 依照 Künneth 公式, 有

$$\bigwedge^{k}(M)\simeq\bigoplus_{i_1+\cdots i_n=k}\left(\bigwedge^{i_1}\left(\frac{R}{(p^{e_1})}\right)\otimes\cdots\otimes\bigwedge^{i_n}\left(\frac{R}{(p^{e_n})}\right)\right)\simeq\bigoplus\left(\frac{R}{(p^{e_{j_1}})}\otimes\cdots\otimes\frac{R}{(p^{e_{i_k}})}\right).$$

最后一处等式是因为对主生成 R-模 N, 总有 $\bigwedge^2(N)=0$. 再依照 $\dfrac{R}{I}\otimes\dfrac{R}{J}\simeq\dfrac{R}{I+J}$, 遂有

$$\bigwedge^{k}(M)\simeq\bigoplus\frac{R}{(p^{e_{j_1}},\ldots,p^{e_{i_k}})}\simeq\bigoplus\frac{R}{(\mathrm{lcm}(p^{e_{j_1}},\ldots,p^{e_{i_k}}))}.$$

从而 $\mathrm{ann}_R\left(\bigwedge^k(M)\right)=\mathrm{ann}_R(R/(p^{e_k}))=(p^{e_k})$. □

注 3 (PID 上有限生成模的结构). 对 PID R 上有限生成模 M, 有同构

$$M \simeq R^{\mathrm{rank}(M/\mathrm{Tor}(M))} \ \oplus \bigoplus_{k\geq 1} \frac{R}{\mathrm{ann}_R\left(\bigwedge^k(M)\right)}.$$