作者: 张陈成
学号: 023071910029

K-理论笔记

K_0

---

1 环的 Grothendieck 群

定义 1 (K_0 群)**.** 记 R-fpMod 为有限生成 R-投射模全体, 即所有 $\{R^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 直和项之并. 记

- $\langle\cdot\rangle : \text{fpMod} \to \text{fpMod}/\sim$, 其中 $\langle P\rangle = \langle Q\rangle$ 当且仅当 $P \simeq Q$;
- $[\cdot] : \text{fpMod} \to \text{fpMod}/\sim$, 其中 $[P \oplus Q] = [P] + [Q]$.

称有限生成投射模在 $[\cdot]$-商关系下生成的交换群为 $K_0(R)$. 自然地, $\langle P\rangle \to [P]$ 为良定义的映射.

命题 1. 有限生成投射模 $[P] = [Q]$ 当且仅当存在 n, 使得 $P \oplus R^n \simeq Q \oplus R^n$.

证明. $[P] = [Q]$ 当且仅当 $\langle P\rangle$ 与 $\langle Q\rangle$ 相差若干形如 $\langle M\rangle + \langle M \oplus N\rangle - \langle N\rangle$ 的项. 不妨设

$$\langle P\rangle + \sum_{i\in I}(\langle M_i\rangle + \langle M_i \oplus N_i\rangle) + \sum_{j\in J}\langle N_j\rangle = \langle Q\rangle + \sum_{j\in J}(\langle M_j\rangle + \langle M_j \oplus N_j\rangle) + \sum_{i\in I}\langle N_i\rangle.$$

据定义, 以上等式两侧均为有限和, 其元素相差一个置换. 因此, 有同构

$$P \oplus \bigoplus_{i\in I}(M_i \oplus N_i) \oplus \bigoplus_{j\in J}(M_j \oplus N_j) \simeq Q \oplus \bigoplus_{i\in I}(M_i \oplus N_i) \oplus \bigoplus_{j\in J}(M_j \oplus N_j).$$

将两侧大直和处补全作自由模即可. □

例 1. 对一列模 $M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_n = 0$, 对任意 $1 \le k \le n$ 总有 $[M_{k-1}] = [M_k] + [M_{k-1}/M_k]$. 相加得

$$[M] = \sum_{1\le k\le n}[M_{k-1}/M_k].$$

例 2. 作长正合列 $0 \to M_1 \to M_2 \to \cdots \to M_n \to 0$ 的满-单分解如下

$$\begin{tikzcd}
 & & & & K_2 \arrow[dr, hook] & & & & K_{n-1} \arrow[dr, "\sim"] & & \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[rr] \arrow[dr, "\simeq"'] & & M_2 \arrow[rr] \arrow[ur] & & M_3 \arrow[r] \arrow[dr] & \cdots \arrow[r] & M_{n-1} \arrow[rr] \arrow[ur] & & M_n \arrow[r] & 0 \cdot \\
 & & K_1 \arrow[ur, hook] & & & & \cdots \arrow[ur, hook] & & & &
\end{tikzcd}$$

其中 $[K_i] + [K_{i-1}] = [M_i]$. 遂有 $\sum_i(-1)^i[M_i] = 0$.

命题 2. 环同态 $R \xrightarrow{f} S$ 诱导 K_0-群同态, 进而 $K_0 : \text{Ring} \to \text{Ab}$ 是 (协变) 函子.

证明. 首先, 环同态诱导函子 $S\otimes_R - : R\text{−Mod} \to S\text{−Mod}$, 且保持直和关系

$$R^n \simeq (P\oplus Q) \xrightarrow{S\otimes_R -} (S\otimes_R P)\oplus(S\otimes_R Q) \simeq S\otimes_R (P\oplus Q) \simeq S\otimes_R R^n \simeq \bigoplus_n (S\otimes_R R) \simeq S^n.$$

从而 $S\otimes_R - : R\text{−fpMod} \to S\text{−fpMod}$ 良定义. 再有 K_0 将模直和映作加法, 保持加法单位 0 与恒等映射 $R \xrightarrow{\mathrm{id}} R$. K_0 同样保持复合运算, 因为任意 $R \xrightarrow{f} S \xrightarrow{g} T$ 定义自然同构

$$T\otimes_S (S\otimes_R -) \simeq (T\times_S S)\otimes_R - \simeq T\otimes_S -.$$

$\square$

注 1. 特别地, $K_0(R\times S) \simeq K_0(R)\oplus K_0(S)$.

命题 3. 满态射 $R \overset{f}{\twoheadrightarrow} S$ 给出满同态 $\langle P\rangle \mapsto \left\langle \dfrac{P}{(\ker f)\cdot P} \right\rangle$, 且 S-模范畴是 R-模范畴的全子范畴.

证明. 后半句推出前半句. 记拉回 f^* 给出模范畴间的函子如下

$$\begin{tikzcd} R \arrow[d, twoheadrightarrow, "f"] \\ S \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R\text{−Mod} \\ S\text{−Mod} \arrow[u, "f^*"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f^*X \arrow[r, "f^*\varphi"] & f^*X \\ X \arrow[u] \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & Y \arrow[u] \end{tikzcd} .$$

若 f 满, 下仅需证明 $f^*\varphi$ 是 S-模同态的. 取任意 $x\in X$ 诱导的同态 φ_x 如下

$$X \ni x : \qquad (s_1, s_2) \longmapsto s_1(f^*\varphi)(s_2 x)$$

$$\begin{tikzcd} S\times S \arrow[r, "\Phi_x"] \arrow[d, "\iota"'] & Y \\ S\otimes_R S \arrow[ur, "\varphi_x"'] & \end{tikzcd}$$

而 $(s_1,s_2)\mapsto s_1s_2\otimes_R 1$ 与 $(s_1,s_2)\mapsto 1\otimes_R s_1s_2$ 诱导相同的 $S\to S\otimes_R S$ 同态. 因此

$$s(f^*\varphi)(1\cdot x) = 1\cdot(f^*\varphi)(s\cdot x).$$

$\square$

注 2. 以下两命题之应当并入正合范畴, 暂时舍去.

> 命题 4 (K_0 的 (准?) 正合性). K_0 保持短正合列.
>
> *证明.* 短正合列 $0\to L \xrightarrow{\varphi} R \xrightarrow{\psi} S \to 0$ 在 K_0 下为链复形. 下只需证明 $\operatorname{im}(K_0(\varphi)) \subseteq \ker(K_0(\psi))$. 任取 R-模 P 使得 $S\otimes_R P = 0$, 则有 R-模正合列
>
> $$0\to K\to R\to S\to C\to 0.$$
>
> 由于 $-\otimes_R P$ 正合, 从而 $K\otimes_R P \simeq R\otimes_R P \simeq P$, $C\otimes_R P = 0$. $\square$
>
> 命题 5. (复合的) 环恒等态射 $S \xrightarrow{g} R \xrightarrow{f} S$ 等价于 $R \xrightarrow{f} S$ 是收缩. 此时正合列
>
> $$0\to \ker K_0(f) \longrightarrow K_0(R) \xrightarrow{K_0(f)} K_0(S) \to 0$$
>
> 可裂.

证明. 能否直接构造 $S\times S'$, 其 K_0 群与 R 相同?. $\square$

例 3. 若满态射 $R\xrightarrow{f}S$ 之核在 R^*-1_R 中, 则 $K_0(f)$ 为同构.

例 4. 定理 **??** 表明主理想整环的有限生成投射模为有限秩的自由模, 故其 K_0 群同构于 $\mathbb{Z}$.

命题 6. 考虑环 R 与 n-阶矩阵环 $M_n(R)$. 则 $K_0(M_n(R))\simeq K_0(M_{n'}(R))$ 对一切 $n,n'\in\mathbb{N}_+$ 成立.

证明. 易验证 $M_n(R)$-模范畴与 R-模范畴等价 (Morita 等价). 具体而言, 函子

$$R^n\otimes_R - : R\text{−Mod}\to M_n(R)\text{−Mod},\qquad (R^n)^T\otimes_{M_n(R)} - : M_n(R)\text{−Mod}\to R\text{−Mod}$$

给出 $M_n(R)$-模范畴与 R-模范畴的伴随等价, 故 K_0 群同构. 进而 $K_0(M_n(R))\simeq K_0(M_{n'}(R))$. $\square$

例 5 (Grothendieck 群)**.** 对特殊的环, K_0 可赋予环结构, 例如以下例子.

1. 交换环 R 的模范畴允许 (有限) 张量积. 定义 $K_0(R)$ 上乘法 (可交换) 如下

$$[P\otimes_R Q]=[P]\cdot[Q].$$

2. 若交换环 k 上的代数 H 为双代数[1] 则 $H\otimes_k H$-模是 H-模. 换言之, H-模范畴允许 k-张量积.

3. 有限维复半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 之模范畴等价于其包络代数 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ 之模范畴. 可以采用特征标及 Hopf-对证明, 有限维 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-模范畴半单, 从而 $\langle P\rangle$ 足以给出 K_0-群. 量子化情形亦然. 相应的张量积分解由晶体基给出.

[1]存在特定的乘法同态 $H\xrightarrow{\Delta}H\otimes_k H$ 与 $H\xrightarrow{\varepsilon}k$. 如群代数 ($\Delta(g)=g\otimes g$, $\varepsilon(g)=1$), Lie 代数 ($\Delta(x)=1\otimes x+x\otimes 1$, $\varepsilon(x)=0$), 量子群等.