作者: 张陈成
学号: 023071910029

K-理论笔记

有限展示与有限生成模

目录

1 有限展示与有限生成模

定义 1 (有限生成, 有限展示)**.** 对环 R-模 X, 有以下定义.

1. 称 X 是有限生成的, 若存在有限集 S 使得 $S \cdot R \simeq X$. 换言之, 存在正合列
$$R^n \longrightarrow X \longrightarrow 0.$$
2. 称 X 是有限展示的, 若存在正合列
$$R^m \longrightarrow R^n \longrightarrow X \longrightarrow 0.$$

注 1. 对任意模, 有限长度 $\implies$ 有限生成.

注 2. 有限展示模是生成元间关系有限的有限生成模.

命题 1. Noether 环上的有限生成模等价于有限展示模.

证明. 考虑如下有限生成模的投射分解, 其中 κ 是某一基数

$$\begin{tikzcd}
 & & & X \arrow[dr, hook] & & \\
R^{\kappa} \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & R^n \arrow[ur, two heads] \arrow[rr, "f"] & & X \arrow[r] & 0 \cdot \\
 & \ker(f) \arrow[ur, hook] & & & &
\end{tikzcd}$$

由于 $\ker(f)$ 作为 Noether 环上的模是有限生成的, 从而可取 $\kappa < \omega$. 反之显然. □

命题 2. 给定有限生成 R-模 X 与态射 $X \xrightarrow{f} f(X)$, 则 $f(X)$ 有限生成而 $\ker(f)$ 未必. 若 $f(X)$ 有限展示, 则 $\ker(f)$ 有限生成.

证明. X 的有限生成集在 f 下的像仍有限生成; 对 $\ker(f)$, 考虑商环诱导的 $\mathbb{R}[X_1,\ldots]$-模同态

$$\mathbb{R}[X_1,\ldots] \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(0,\ldots),$$

其核显然不是有限生成的.

注 3. 该反例进而说明有限长度与有限展示互不包含.

若 $f(X)$ 是有限展示的, 则有正合列间同态

$$\begin{tikzcd}
 & R^m \arrow[d, dotted, two heads] \arrow[dr, dotted] & & & \\
0 \arrow[r] & \ker(fg) \arrow[r] \arrow[d, dashed, two heads] & R^n \arrow[r, "fg"] \arrow[d, two heads, "g"'] \arrow[dr] & f(X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 . \\
0 \arrow[r] & \ker(f) \arrow[r] & X \arrow[r, "f"'] & f(X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

以上长虚线 $\ker(fg) \twoheadrightarrow \ker(f)$ 有核的泛性质给出, 满射性由五引理给出. 依照 $f(X)$ 的有限展示性给出 $R^m \to R^n$ 及其满-单分解, 即得 $\ker(f)$ 是 R^m 的商, 从而有限生成. $\square$

命题 3. 仿照命题 2, 给定模正合列 $0 \to K \to X \to Y \to 0$, 则有如下结论.

1. 若 K 有限生成, Y 有限生成, 则 X 有限生成.
2. 若 X 有限生成, 则 Y 有限生成, 但 K 未必.
3. 若 X 有限生成, Y 有限展示, 则 K 有限生成. 即, 命题 2.
4. 若 K 有限生成, X 有限展示, 则 Y 有限展示.
5. 若 K 有限展示, Y 有限展示, 则 X 有限展示.

证明. 证明如下.

1. 取 $S_K \subseteq K$ 为 K 的有限生成集, $S_Y \subseteq X$ 使得像 $\overline{S_Y}$ 是 Y 的有限生成集, 且 $|S_Y| = |\overline{S_Y}|$. 命题由以下交换图给出:

$$\begin{tikzcd}
 & & n & n+m & m & \\
\text{Set} & 0 \arrow[r] & S_K \arrow[r] \arrow[u, "|\cdot|"] \arrow[d, "R\cdot"'] & S_K \dot{\cup} S_Y \arrow[r] \arrow[u, "|\cdot|"] \arrow[d, "R\cdot"'] & \overline{S_Y} \arrow[r] \arrow[u, "|\cdot|"] \arrow[d, "R\cdot"'] & 0 \\
R\text{−FreeMod} & 0 \arrow[r] & R^n \arrow[r] \arrow[d, two heads] & R^{m+n} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & R^m \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\
R\text{−Mod} & 0 \arrow[r] & K \arrow[r] & X \arrow[r] & Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} .$$

2. 有限生成模的像显然是有限生成模, 核未必, 见命题 2.
3. 即命题 2.

4. 考虑满射 $R^m \twoheadrightarrow X$ 与 $R^n \twoheadrightarrow K$ 诱导的正合列间同态, 则 g 为满射. 根据蛇引理, 核 $\ker(f) \twoheadrightarrow \ker(g)$ 是满同态.

$$\begin{tikzcd}
 & R^l \arrow[r, dashed, two heads] & \ker(f) \arrow[r, dashed, two heads] \arrow[d] & \ker(g) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & R^n \arrow[r] \arrow[d, two heads] & R^{m+n} \arrow[r] \arrow[d, two heads, "f"] & R^m \arrow[r] \arrow[d, dashed, two heads, "g"] \arrow[dl, two heads] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & X \arrow[r] & Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}.$$

由 X 的有限展示性与命题 2 知 $\ker(f)$ 有限生成, 故存在某一 R^l 到 $\ker(g)$ 的满射. 从而存在正合列 $R^l \to R^m \to Y \to 0$, 即, Y 有限展示.

5. 以上交换图给出自由模链复形到题设中短正合列的满态射. 根据蛇引理有

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker_1 \arrow[r] \arrow[d] & \ker_2 \arrow[r] \arrow[d] & \ker_3 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ddll, dashed, bend right, "\delta"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & R^n \arrow[r] \arrow[d, two heads] & R^{m+n} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & R^m \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & X \arrow[r] & Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}.$$

根据命题 2, $\ker_3$ 与 $\ker_1$ 有限生成, 因此 $\ker_2$ 有限生成. 根据上一条, X 有限展示.

□

命题 4. 对有限展示 R 模 X 与局部化函子 $S^{-1}(-)$, 有自然同构

$$S^{-1}\mathrm{Hom}_R(X,-) \simeq \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}X, S^{-1}(-)).$$

证明. 对任意 $f \in \mathrm{Hom}_R(X,Y)$, 定义 $S^{-1}R$-模同态 $S^{-1}(f) : \dfrac{x}{s} \mapsto \dfrac{f(x)}{s}$. 遂有正合列的交换图

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
X \arrow[u] \arrow[r, phantom, "\xRightarrow{\mathrm{Hom}_R(-,Y)}"' near end] & \mathrm{Hom}_R(X,Y) \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\xRightarrow{S^{-1}(-)}"'] & S^{-1}\mathrm{Hom}_R(X,Y) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}X, S^{-1}Y) \arrow[d] \\
R^m \arrow[u] & \mathrm{Hom}_R(R^m,Y) \arrow[d] & S^{-1}\mathrm{Hom}_R(R^m,Y) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}R^m, S^{-1}Y) \arrow[d] \\
R^n \arrow[u] & \mathrm{Hom}_R(R^n,Y) & S^{-1}\mathrm{Hom}_R(R^n,Y) \arrow[r, "\simeq"] & \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}R^n, S^{-1}Y)
\end{tikzcd}.$$

由五引理知中间处为同构. □

注 4. 对有限生成模, 上述同态为单而未必满. 考虑交换环 $R = \mathbb{R}[X_0, X_1, \ldots]$ 以及商环给出模 $X = \mathbb{R}[X_0]$, 则 X 有限生成单非有限展示. 考虑

$$Y = R/(X_0X_1, X_0^2X_2, \ldots, X_0^nX_n, \ldots),$$

则 R-模同态 $f: X \to Y$ 形如 $1 \mapsto F$. 存在足够大的 m 使得 $f(X_0^m) = F \cdot X_0^m = g(X_0)$. 此时对任意 k 均有

$$0 = f(0) = f(X_0^m \cdot X_k) = X_k \cdot g(X_0)/(X_0^k).$$

因此 $g(X_0)/(X_0^k)$ 恒为 0, 从而 $g(X_0) = 0$. 取 $S = \{1, X_0, X_0^2, \ldots\}$, 则 $S^{-1}\mathrm{Hom}_R(X, Y) = S^{-1}0 = 0$. 但另一方面,

$$S^{-1}X \simeq S^{-1}Y \simeq \mathbb{R}[X_0^{\pm}].$$

显然 $\mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}X, S^{-1}Y) = \mathrm{End}_{S^{-1}R}(\mathbb{R}[X_0^{\pm}]) \neq 0$, 遂矛盾.

2 有限生成投射模的结构

命题 5. 投射模与平坦模的关系如下

$$\begin{tikzcd}
\text{有限展示投射模} \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{有限生成投射模} \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{有限展示平坦模} \arrow[r, Rightarrow] & \text{有限生成平坦模} \arrow[lll, Rightarrow, bend left=10, "\text{当且仅当是 (右) 完美环上的左模}"]
\end{tikzcd}.$$

证明. 一般地, 有限展示推出有限生成, 投射模推出平坦模, 且投射模有限生成当且记当有限展示. 下证明有限展示平坦模 X 投射. 定义特征模函子为正合函子 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, 具体如下

$$(-)^*: R\text{−Mod} \to R^{\mathrm{op}}\text{−Mod}, \quad M \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \quad \Big([m \mapsto rm] \mapsto [f(x) \mapsto f(x)r = f(rx)]\Big).$$

取 X 的展示 $R^m \to R^n \to X \to 0$ 以及任意 R-S-双模 Y, 有同构

$$Y^* \otimes R^m = (Y^*)^m \simeq (\mathrm{Hom}_R(R, Y)^*)^m \simeq (\mathrm{Hom}_R(R, Y)^m)^* \simeq \mathrm{Hom}_R(R^m, Y)^*.$$

从而有正合列间的同态

$$\begin{tikzcd}
Y^* \otimes R^m \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & Y^* \otimes R^n \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & Y^* \otimes X \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathrm{Hom}_R(R^m, Y)^* \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(R^n, Y)^* \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(X, Y)^* \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}.$$

其中 φ 为态射范畴之余核. 依照五引理, φ 为同构. 由于 $- \otimes X$ 正合, 故 $(-)^* \otimes X \simeq \mathrm{Hom}_R(X, -)^*$ 正合, 从而 X 投射. □

3 模范畴的部分典范态射

命题 6. 给定范畴 $\mathcal{C}$ 上的系统 $M_{()}: I \to \mathcal{C}$, 其中, $M_{()}: i \mapsto M_i$, $M_\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M_{s(\alpha)}, M_{t(\alpha)})$. 若相应的极限存在, 则有自然同构

- $\mathrm{Hom}_R(N, \varprojlim_{i \in I} M_i) \simeq \varprojlim_{i \in I} \mathrm{Hom}_R(N, M_i)$,
- $\mathrm{Hom}_R(\varinjlim_{i \in I} M_i, N) \simeq \varprojlim_{i \in I} \mathrm{Hom}_R(M_i, N)$.

证明. 下仅证明第一条, 往后证明步骤舍去 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$. □