作者: 张陈成
学号: 023071910029

K-理论笔记

K_1

目录

1 环的 Bass-Whitehead 群

定义 1. 仿照定义 **??**, 记有限生成 R-投射模的自同构为序对 $(P,f) := P \xrightarrow{f} P$. 记

1. 记商关系 $\langle P,f\rangle = \langle P',f'\rangle$ 当且仅当存在同构 φ 使得有交换图 $\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow[\sim]{\varphi} & P' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ P & \xrightarrow[\sim]{\varphi} & P' \end{array}$.

2.a. 记商关系 $[P,f] = [P',f'] + [P'',f'']$, 若有正合列的同构 $\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & P' & \xrightarrow{\iota} & P & \xrightarrow{\pi} & P'' & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle f'}\downarrow & & {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle f''}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & P' & \xrightarrow{\iota} & P & \xrightarrow{\pi} & P'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$.

2.b. 记商关系 $[P, f\circ g] = [P,f] + [P,g]$.

记有限生成 R-投射模的自同构为序对 (P,f) 在商关系 $[\cdot]$ 下生成的交换群为 $K_1(R)$

注 1. $\langle P,f\rangle \mapsto [P,f]$ 是良定义的商映射.

命题 1. 若存在 $f \in \mathrm{Aut}_R(P)$ 以及不相等的自然数 m 与 n, 使得 $f^m(P) \simeq f^n(P)$, 则 $[P,f]=0$.

命题 2. 任取 $[P,f] \in K_1(R)$, 则逆元为 $[P,f]+[P,f^{-1}] = [P,\mathrm{id}_P] = 0$.

定义 2 ($GL_n(-)$ 与 $E_n(-)$)**.** 记 R 为环, $M_n(R)$ 为 n-阶矩阵环. 记一般线性群 $GL_n(R) := M_n(R)^\times$, 初等因子群 $E_n(R)$ 由形如 $I + rE_{i,j} \in M_n(R)$ 的初等因子生成.

定义 3 (交换子)**.** 记群 G 中的交换子为映射 $[\cdot,\cdot] : G\times G \to G, \quad (a,b) \mapsto aba^{-1}b^{-1}$.

命题 3. 有以下论断.

1. 对 $n \geq 3$, 有 $[E_n(R), E_n(R)] = E_n(R)$. 一般地, 初等矩阵是交换子.
2. $GL_n(R)$ 中对角为 1 的上三角矩阵属于 $E_n(R)$.
3. 对任意 $X \in GL_n(R)$, 有 $\begin{pmatrix} X & \\ & X^{-1} \end{pmatrix} \in E_{2n}(R)$.
4. $\begin{pmatrix} [GL_n(R), GL_n(R)] & \\ & I \end{pmatrix} \subseteq E_{2n}(R)$.

证明. 依次证明如下.

1. 注意到 $1+xE_{i,j}=[1+xE_{i,k},1+E_{k,j}]$.
2. 依照 $\begin{pmatrix}1 & v^T\\ & U\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}^T\\ & U\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & v^T\\ & I\end{pmatrix}$ 归纳, 一切对角为 1 的上三角矩阵均在 E_n 中.
3. 对任意 $X\in GL_n(R)$, 有
$$\begin{pmatrix}X & \\ & X^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I & X-I\\ & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & \\ I & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & X^{-1}-I\\ & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & \\ -X & I\end{pmatrix}.$$
4. 对任意 $X,Y\in GL_n(R)$, 有等式
$$\begin{pmatrix}[X,Y] & \\ & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X & \\ & X^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Y & \\ & Y^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X^{-1}Y^{-1} & \\ & YX\end{pmatrix}.$$

□

定义 4 (稳定线性群)**.** 依照 $GL_n(R)\hookrightarrow GL_{n+1}(R),\quad X\mapsto\begin{pmatrix}X & \\ & 1\end{pmatrix}$ 给出极限

$$\begin{tikzcd}
 & & GL_n(R) \arrow[dll, bend right, hook', "\iota_n"'] \arrow[dd, hook] \\
GL(R) := \varinjlim GL_m(R) & & \\
 & & GL_{n+1}(R) \arrow[ull, bend left, hook, "\iota_{n+1}"]
\end{tikzcd}.$$

记稳定线性群与稳定初等因子群分别为

$$GL(R):=\bigcup_{n\in\mathbb{N}_+}\iota_n(GL_n(R)),\quad E_n(R):=\bigcup_{n\in\mathbb{N}_+}\iota_n(E_n(R)).$$

命题 4. 有群的短正合列 $1\to E(R)\to GL(R)\to K_1(R)\to 1$.

证明. $GL(R)$ 到 $K_1(R)$ 的典范态射由极限诱导如下

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[r, mapsto] & {[R^n,f]} \\
GL_n(R) \arrow[r, "{[R^n,-]}"] \arrow[d, "-\oplus\mathrm{id}_{R^m}"'] & K_1(R) \\
GL_{n+m}(R) \arrow[ur, "{[R^{n+m},-]}"'] &
\end{tikzcd}.$$

由于 $K_1(R)$ 交换, 从而可将 $GL(R)$ 到 $K_1(R)$ 的态射分解如下.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Grp} \arrow[d, bend right, "/{[\cdot,\cdot]}"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathrm{Ab} \arrow[u, bend right, "U"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
GL(R) \arrow[r] \arrow[d] & K_1(R) \arrow[d, equal] \\
\dfrac{GL(R)}{[GL(R),GL(R)]} \arrow[r] & K_1(R)
\end{tikzcd}.$$

此处 $[GL(R), GL(R)] = \bigcup [GL_n(R), GL_n(R)] = \bigcup E_n(R) = E(R)$. 往证 $\dfrac{GL(R)}{E(R)} \underset{\varphi}{\simeq} K_1(R)$. 换言之, 对任意有限生成投射模 P, $[\mathrm{Aut}(P)] \to \dfrac{GL(R)}{E(R)} \xrightarrow{\varphi} K_1(R), \quad f \mapsto [P, f]$ 是同构.

对任意有限生成投射模的自同构 (P, f), 取同构 $\sigma : P \oplus Q \simeq R^n$. 兹断言以下复合的恒等映射良定义, 即无关乎 Q, n 与 σ 之选取.

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"] & P \oplus Q \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "f \oplus g"] & R^n \arrow[d, "\sigma(f\oplus g)\sigma^{-1}"] & \\
{[P,f]} \arrow[r, dashed, Rightarrow] & P \arrow[r, hook] & P \oplus Q \arrow[r, "\sigma"] & R^n \arrow[r, Rightarrow] & {[P,f].}
\end{tikzcd}$$

以上交换图中, 直线单箭头均为同构.

- 由于 $K_1(R)$ 交换, 故 $\varphi\Big(\sigma(f \oplus g)\sigma^{-1}\Big) = \varphi(\sigma)\varphi(\sigma^{-1})\varphi(f \oplus g) = \varphi(f \oplus g)$.
- 若将 Q 替换作 $Q \oplus R^k$, 并考虑 $P \oplus Q \oplus R^k$ 的自同构 $f \oplus g \oplus \mathrm{id}_{R^k}$, 则像不变. 结合命题 **??** 知像与 Q, n 之选取无关.

$\square$

注 2. $K_1(R) = \dfrac{GL(R)}{[GL(R), GL(R)]} = H_1(GL(R), \mathbb{Z})$ 无非稳定线性群的交换化.

命题 5 ($K_1(-)$ 的函子性)**.** $K_1 : \mathrm{Ring} \to \mathrm{Ab}$ 为 (协变) 函子.

命题 6. 对环 R 与任意正整数 m, n, 有同构 $K_1(M_n(R)) \simeq K_1(M_m(R))$.

证明. Morita 等价给出相同的 K_1 群. 实际上, $GL(M_n(R)) = GL(GL_n(R)) = GL(R)$, 再对两端交换化即可. $\square$

命题 7. $K_1(R \times S) \simeq K_1(R) \oplus K_1(S)$. 证明同上.