



K-理论笔记

Noether 环上的投射模与平坦模

1 有限展示与有限生成模

定义 1 (有限生成, 有限展示). 对环 R -模 X , 有以下定义.

1. 称 X 是有限生成的, 若存在有限集 S 使得 $S \cdot R \simeq X$. 换言之, 存在正合列

$$R^n \longrightarrow X \longrightarrow 0.$$

2. 称 X 是有限展示的, 若存在正合列

$$R^m \longrightarrow R^n \longrightarrow X \longrightarrow 0.$$

注 1. 对任意模, 有限长度 \implies 有限生成.

注 2. 有限展示模是生成元间关系有限的有限生成模.

命题 1. Noether 环上的有限生成模等价于有限展示模.

证明. 考虑如下有限生成模的投射分解, 其中 κ 是某一基数

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & X & & \\ & & & \nearrow & \searrow & & \\ R^\kappa & \xrightarrow{\quad} & R^n & \xrightarrow{f} & X & \longrightarrow & 0 \\ & \searrow & \nwarrow & & & & \\ & \text{ker}(f) & & & & & \end{array}$$

由于 $\ker(f)$ 作为 Noether 环上的模是有限生成的, 从而可取 $\kappa < \omega$. 反之显然. □

命题 2. 给定有限生成 R -模 X 与态射 $X \xrightarrow{f} f(X)$, 则 $f(X)$ 有限生成而 $\ker(f)$ 未必. 若 $f(X)$ 有限展示, 则 $\ker(f)$ 有限生成.

证明. X 的有限生成集在 f 下的像仍有限生成; 对 $\ker(f)$, 考虑商环诱导的 $\mathbb{R}[X_1, \dots]$ -模同态

$$\mathbb{R}[X_1, \dots] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(0, \dots),$$

其核显然不是有限生成的.

注 3. 该反例进而说明有限长度与有限展示互不包含.

若 $f(X)$ 是有限展示的, 则有正合列间同态

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & R^m & & & & \\
 & & \downarrow & \nearrow & & & \\
 0 & \longrightarrow & \ker(fg) & \longrightarrow & R^n & \xrightarrow{fg} & f(X) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow g & \searrow & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & \ker(f) & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & f(X) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

以上长虚线 $\ker(fg) \twoheadrightarrow \ker(f)$ 有核的泛性质给出, 满射性由五引理给出. 依照 $f(X)$ 的有限展示性给出 $R^m \rightarrow R^n$ 及其满-单分解, 即得 $\ker(f)$ 是 R^m 的商, 从而有限生成. \square

命题 3. 仿照命题 2, 给定模正合列 $0 \rightarrow K \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow 0$, 则有如下结论.

1. 若 K 有限生成, Y 有限生成, 则 X 有限生成.
2. 若 X 有限生成, 则 Y 有限生成, 但 K 未必.
3. 若 X 有限生成, Y 有限展示, 则 K 有限生成. 即, 命题 2.
4. 若 K 有限生成, X 有限展示, 则 Y 有限展示.
5. 若 K 有限展示, Y 有限展示, 则 X 有限展示.

证明. 证明如下.

1. 取 $S_K \subseteq K$ 为 K 的有限生成集, $S_Y \subseteq X$ 使得像 $\overline{S_Y}$ 是 Y 的有限生成集, 且 $|S_Y| = |\overline{S_Y}|$. 命题由以下交换图给出:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & n & & n+m & & m \\
 & & \uparrow \text{ } |\cdot| & & \uparrow \text{ } |\cdot| & & \uparrow \text{ } |\cdot| \\
 \text{Set} & 0 & \longrightarrow & S_K & \longrightarrow & S_K \dot{\cup} S_Y & \longrightarrow \overline{S_Y} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow R \cdot & & \downarrow R \cdot & & \downarrow R \cdot \\
 R\text{-FreeMod} & 0 & \longrightarrow & R^n & \longrightarrow & R^{m+n} & \longrightarrow R^m \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 R\text{-Mod} & 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & X & \longrightarrow Y \longrightarrow 0
 \end{array}$$

2. 有限生成模的像显然是有限生成模, 核未必, 见命题 2.
3. 即命题 2.
4. 考虑满射 $R^m \twoheadrightarrow X$ 与 $R^n \twoheadrightarrow K$ 诱导的正合列间同态, 则 g 为满射. 根据蛇引理, 核 $\ker(f) \twoheadrightarrow \ker(g)$ 是满同态.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & R^l & \dashrightarrow & \ker(f) & \dashrightarrow & \ker(g) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & R^n & \longrightarrow & R^{m+n} & \longrightarrow & R^m \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow f & \nearrow & \downarrow g \\
 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y \longrightarrow 0
 \end{array}$$

由 X 的有限展示性与命题 2 知 $\ker(f)$ 有限生成, 故存在某一 R^l 到 $\ker(g)$ 的满射. 从而存在正合列 $R^l \rightarrow R^m \rightarrow Y \rightarrow 0$, 即, Y 有限展示.

5. 以上交换图给出自由模链复形到题设中短正合列的满态射. 根据蛇引理有

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \ker_1 & \longrightarrow & \ker_2 & \longrightarrow & \ker_3 \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & R^n & \xrightarrow{\quad \delta \quad} & R^{m+n} & \longrightarrow & R^m \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y \longrightarrow 0
\end{array}$$

根据命题 2, \ker_3 与 \ker_1 有限生成, 因此 \ker_2 有限生成. 根据上一条, X 有限展示.

9

命题 4. 对有限展示 R 模 X 与局部化函子 $S^{-1}(-)$, 有自然同构

$$S^{-1}\mathrm{Hom}_R(X, -) \simeq \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}X, S^{-1}(-)).$$

证明. 对任意 $f \in \text{Hom}_R(X, Y)$, 定义 $S^{-1}R$ -模同态 $S^{-1}(f): \frac{x}{s} \mapsto \frac{f(x)}{s}$. 遂有正合列的交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & & & & 0 & \xrightarrow{\quad \cong \quad} & 0 \\
\uparrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
X & & & & 0 & \xrightarrow{\quad \cong \quad} & 0 \\
\uparrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
R^m & \xrightarrow{\quad \text{Hom}_R(-, Y) \quad} & \text{Hom}_R(X, Y) & \xrightarrow{\quad S^{-1}(-) \quad} & S^{-1}\text{Hom}_R(X, Y) & \longrightarrow & \text{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}X, S^{-1}Y) \\
\uparrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
R^n & & \text{Hom}_R(R^m, Y) & \xrightarrow{\quad S^{-1}(-) \quad} & S^{-1}\text{Hom}_R(R^m, Y) & \xrightarrow{\quad \cong \quad} & \text{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}R^m, S^{-1}Y) \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & \text{Hom}_R(R^n, Y) & & S^{-1}\text{Hom}_R(R^n, Y) & \xrightarrow{\quad \cong \quad} & \text{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}R^n, S^{-1}Y)
\end{array}$$

由五引理知中间处为同构.

注 4. 对有限生成模, 上述同态为单而未必满. 考虑交换环 $R = \mathbb{R}[X_0, X_1, \dots]$ 以及商环给出模 $X = \mathbb{R}[X_0]$, 则 X 有限生成单非有限展示. 考虑

$$Y = R/(X_0X_1, X_0^2X_2, \dots, X_0^nX_n, \dots),$$

则 R -模同态 $f: X \rightarrow Y$ 形如 $1 \mapsto F$. 存在足够大的 m 使得 $f(X_0^m) = F \cdot X_0^m = g(X_0)$. 此时对任意 k 均有

$$0 = f(0) = f(X_0^m \cdot X_k) = X_k \cdot g(X_0)/(X_0^k).$$

因此 $g(X_0)/(X_0^k)$ 恒为 0, 从而 $g(X_0) = 0$. 取 $S = \{1, X_0, X_0^2, \dots\}$, 则 $S^{-1}\text{Hom}_R(X, Y) = S^{-1}0 = 0$. 但另一方面,

$$S^{-1}X \simeq S^{-1}Y \simeq \mathbb{R}[X_0^\pm].$$

显然 $\text{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}X, S^{-1}Y) = \text{End}_{S^{-1}R}(\mathbb{R}[X_0^\pm]) \neq 0$, 遂矛盾.

命题 5. 投射模与平坦模的关系如下

有限展示投射模 \iff 有限生成投射模 \iff 有限展示平坦模 \implies 有限生成平坦模 .
 当且仅当是 (右) 完美环上的左模

证明. 一般地, 有限展示推出有限生成, 投射模推出平坦模, 且投射模有限生成当且记当有限展示. 下证明有限展示平坦模 X 投射. 定义特征模函子为正合函子 $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, 具体如下

$$(-)^* : R\text{-Mod} \rightarrow R^{\text{op}}\text{-Mod}, \quad M \mapsto \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \quad \left([m \mapsto rm] \mapsto [f(x) \mapsto f(x)r = f(rx)]\right).$$

取 X 的展示 $R^m \rightarrow R^n \rightarrow X \rightarrow 0$ 以及任意 R - S -双模 Y , 有同构

$$Y^* \otimes R^m = (Y^*)^m \simeq (\text{Hom}_R(R, Y)^*)^m \simeq (\text{Hom}_R(R, Y)^m)^* \simeq \text{Hom}_R(R^m, Y)^*.$$

从而有正合列间的同态

$$\begin{array}{ccccccccc} Y^* \otimes R^m & \longrightarrow & Y^* \otimes R^n & \longrightarrow & Y^* \otimes X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \varphi & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \text{Hom}_R(R^m, Y)^* & \longrightarrow & \text{Hom}_R(R^n, Y)^* & \longrightarrow & \text{Hom}_R(X, Y)^* & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其中 φ 为态射范畴之余核. 依照五引理, φ 为同构. 由于 $- \otimes X$ 正合, 故 $(-)^* \otimes X \simeq \text{Hom}_R(X, -)^*$ 正合, 从而 X 投射. \square

2 投射模的秩 (纤维)

定义 2 (秩, 纤维). 对 R -模 X 给出的秩函数

$$\text{rank}_X : \text{Spec}(R) \rightarrow \mathbb{N}, \quad \mathfrak{p} \mapsto \dim_{R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}} \left(\frac{X}{\mathfrak{p}X} \right)_{\mathfrak{p}}.$$

此处局部化与商模交换, 局部环 $A_{\mathfrak{p}}$ 具有唯一的极大理想 \mathfrak{p} , 故

$$\left(\frac{X}{\mathfrak{p}X} \right)_{\mathfrak{p}} \simeq (R/\mathfrak{p} \otimes_{\mathfrak{p}} X)_{\mathfrak{p}} \simeq \frac{R_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}} \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} X_{\mathfrak{p}},$$

称作 X 在 \mathfrak{p} 处的纤维.

命题 6 (Noether 环上投射模的等价定义). 对 Noether 环 R 上有限生成模 X , X 投射当且仅当对任意 $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$, $X_{\mathfrak{p}}$ 是自由 $R_{\mathfrak{p}}$ -模.

证明. 注意到 P 有限表示, 故局部化保持 $\text{Hom}(P, -)$ 的正合性, 从而保持投射模. 记局部环 $A := R_{\mathfrak{p}}$, 极大理想 $\mathfrak{m} := \mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$. 取 $M := X_{\mathfrak{p}}$ 的极小有限生成集 $S = \{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$, 其在 $A \rightarrow A/\mathfrak{m}$ 中的项为 $\bar{S} = \{\bar{x}_i\}_{1 \leq i \leq n}$. 记投射模的直和关系 $M \oplus N \simeq A^n \simeq \bigoplus_{1 \leq i \leq n} Ax_i$. 从而

$$M/\mathfrak{m}M \simeq A^n/\mathfrak{m} \simeq M/\mathfrak{m}M \oplus N/\mathfrak{m}N$$

考虑线性空间维度以及中山引理, 得 $N = 0$. 故 $X_{\mathfrak{p}}$ 是自由 $R_{\mathfrak{p}}$ -模.

相反地, 若 $\text{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(P_{\mathfrak{p}}, (-)_{\mathfrak{p}}) \simeq \text{Hom}_R(P, -)_{\mathfrak{p}}$ 对任意 \mathfrak{p} 均正合, 则只需证明正合列间关系

$$L_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{f_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{g_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}} \quad (\forall \mathfrak{p}) \implies L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N.$$

由于局部化保持零态射, 从而保持链复形. 记 $T := \frac{\ker(f)}{\text{im}(g)}$, 则 $T_{\mathfrak{p}} = 0$ 对一切素理想成立, 因此 $T = 0$. \square

注 5. Kaplansky 定理表明非交换局部环上的非有限生成投射模 (即可数生成投射模之直和) 仍自由.

命题 7. 有限展示 R -模 X 投射, 当且仅当 $R_{\mathfrak{p}}$ 对一切 $\mathfrak{p} \in \text{spec}(R)$ 投射 (等价地, 自由).

命题 8. 依照命题 5 与命题 6, (左) Noether 环 (右) 完美.