

# Mayer-Vietoris 同调

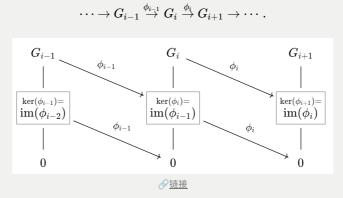
# Mayer-Vietoris 同调

# 同调代数拾遗

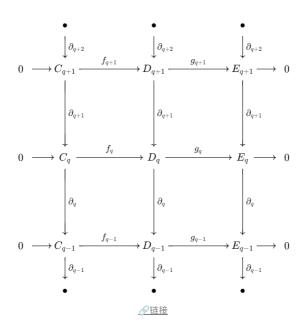
**Definition 2.1.1** 称 (Abel 群同态列)  $C \stackrel{f}{\to} D \stackrel{g}{\to} E$  在 D 处**正合**, 若且仅若  $\ker(g) = \operatorname{im}(f)$ .



Remark 通常称一列正合关系为正合列, i.e.,



Theorem 2.1.2 对链复形与短正合列  $0 \to C \stackrel{f}{\to} D \stackrel{g}{\to} E \to 0$ , 考察交换图表



上图表中横行均正合,对  $e_q \in Z_q(E)$  定义**边缘同态** 

$$\partial_*: H_q(E) o H_{q-1}(C), \quad [e_q] \mapsto [f_{q-1}^{-1} \partial_q g_q^{-1}(e_q)].$$

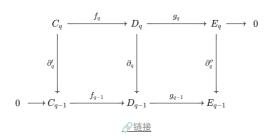
从而可良定义长正合列

$$\cdots \stackrel{\partial_*}{ o} H_{q+1}(C) \stackrel{f_*}{ o} H_{q+1}(D) \stackrel{g_*}{ o} \boxed{H_{q+1}(E) \stackrel{\partial_*}{ o} H_q(C)} \stackrel{f_*}{ o} H_q(D) \stackrel{g_*}{ o} H_q(E) \stackrel{\partial_*}{ o} \cdots.$$

Mayer-Vietoris 同调 1

#### **▼** Proof of the theorem

实际上, 只需证明以下正合横列给出同态  $\ker(\partial_a'')\stackrel{\delta}{\to} \operatorname{coker}(\partial_a')$ 



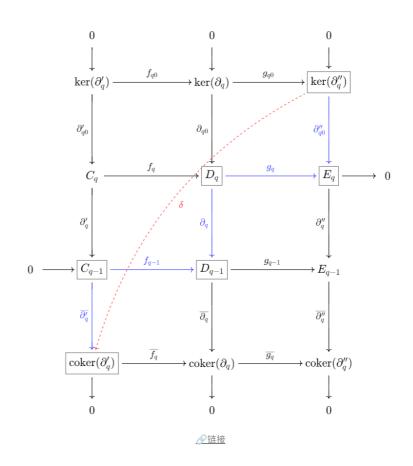
补全纵列作短正合列, 得右图.

## 下依次证明:

11 蓝线 (连接框的路径) 给出

$$egin{aligned} \delta := \overline{\partial_q'} \, f_{q-1}^{-1} \, \partial_q \, g_q^{-1} \, \partial_{q0}'' : \ \ker(\partial_q'') &
ightarrow \operatorname{coker}(\partial_1'). \end{aligned}$$

- $2 \delta$  为良定义的同态.
- $4 \ker(\overline{f_q}) = \operatorname{im}(\delta).$



# $oxed{1}$ 证明 $\delta$ 为映射 (即无法一对多):

- 1.  $\forall e \in \ker(\partial_q'')$ , 由于  $g_q$  为满射, 固存在  $d \in D_q$  使得  $g_q(d) = \partial_{q0}''(e)$ .
- 2. 注意到  $\partial_q''\circ\partial_{q0}''\equiv 0$ , 从而  $\partial_q''g_q(d)=g_{q-1}\partial_q(d)=0$ .
- 3. 根据短正合列,  $\partial_q(d) \in \ker(g_{q-1}) = \operatorname{im}(f_{q-1})$ , 因此存在  $c' \in C_{q-1}$  使得  $f_{q-1}(c') = \partial_q(d)$ . 此处  $f_{q-1}$  为单的, c' 的 选取仅取决于 d.
- 4. 对任意  $d_1$  与  $d_2$  使得  $g_q(d_1)=g_q(d_2)=\partial_{q0}^{\prime\prime}(e),$   $(d_1-d_2)\in\ker(g_q)=\operatorname{im}(f_q).$  取  $c\in C_q$  使得  $f_q(c)=d_1-d_2$
- 5. 当  $d_1$  变为  $d_2$  时,  $c_1'$  变为  $c_2'$ , 其间相差  $\partial_q'(c) \in \ker(\overline{\partial_q'})$ , 从而  $\overline{\partial_q'}(c_1') = \overline{\partial_q'}(c_2')$ . 可见  $\delta$  为良定义的映射.
- $oxed{2}\delta$  显然为良定义的同态, 就  $oxed{1}$  中各步骤逐一验证即可.
- $oxed{3}$  分两步证明  $\operatorname{im}(g_{q0}) = \ker(\delta)$ :
- 1. 任取  $d\in\ker(\partial_q)$ , 则  $g_{q0}(d)\in\ker(\partial_q'')$ , 从而依照交换图有 (六步变四步)

$$\delta(g_{q0}(d)) = \overline{\partial_q'} \, f_{q-1}^{-1} \, \partial_q \, g_q^{-1} \, \partial_{q0}'' \, g_{q0}(d) = \overline{\partial_q'} \, f_{q-1}^{-1} \, \partial_q \, \partial_{q0}(d) = 0.$$

因此得  $\operatorname{im}(g_{q0}) \subset \ker(\delta)$ .

2. 另一方面, 沿用  $\blacksquare$  中符号. 任取  $\forall e \in \ker(\delta)$ , 则  $c' \in \ker(\overline{\partial_q'}) = \operatorname{im}(\partial_q')$ . 取 c 使得  $\partial_q'(c) = c'$ , 从而  $f_{q-1}(c') = \partial_q f_q(c)$ , 即  $d - f_q(c) \in \ker(\partial_q) = \operatorname{im}(\partial_{q0})$ . 故存在  $d' \in \ker(\partial_q)$  使得  $\partial_{q0}(d') = d - f_q(c)$ . 因此

$$\partial_{a0}''g_{q0}(d') = g_q\partial_{q0}(d') = g_q(d) = \partial_{a0}''(e).$$

由于  $\partial_{q0}^{"}$  为单的, 故  $\operatorname{im}(g_{q0}) \supset \ker(\delta)$ .

得证.

#### 4 类比 3.

至此, 我们证明了 Theorem 2.1.2 (或称 & 引理).



Remark 短正合列  $0 \to C \overset{f}{\to} D \overset{g}{\to} E \to 0$  导出长正合同调列

$$\cdots \stackrel{\partial_*}{
ightarrow} H_{q+1}(C) \stackrel{f_*}{
ightarrow} H_{q+1}(D) \stackrel{g_*}{
ightarrow} \overline{H_{q+1}(E) \stackrel{\partial_*}{
ightarrow} H_q(C)} \stackrel{f_*}{
ightarrow} H_q(D) \stackrel{g_*}{
ightarrow} H_q(E) \stackrel{\partial_*}{
ightarrow} \cdots.$$

Theorem 2.1.3 同调序列具有自然性质表现如下. 若存在如下交换图

其中横行为短正合列,则存在长正合同调列间的交换图,如下图所示

$$\bullet \longrightarrow C_q \xrightarrow{f_*} D_q \xrightarrow{g_*} E_q \xrightarrow{\partial_*} C_{q-1} \longrightarrow \bullet$$

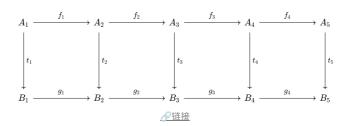
$$\alpha_* \downarrow \qquad \beta_* \downarrow \qquad \gamma_* \downarrow \qquad \alpha_* \downarrow$$

$$\bullet \longrightarrow C'_q \xrightarrow{f'_*} D'_q \xrightarrow{g'_*} E'_q \xrightarrow{\partial'_*} C_{q-1'} \longrightarrow \bullet$$

## **▼** Proof of the theorem

证明之主要矛盾系验证  $\alpha_*\partial_*=\partial_*'\gamma_*$ . 将边缘同态写作 Theorem 2.1.3 中形式即可.

Theorem 2.1.4 (五引理) 选取同调列间的的交换图局部如下



- 若 t<sub>4</sub> 与 t<sub>2</sub> 均为满射, t<sub>5</sub> 为单射, 则 t<sub>3</sub> 为满射.
- 若 t<sub>4</sub> 与 t<sub>2</sub> 均为单射, t<sub>1</sub> 为满射, 则 t<sub>3</sub> 为单射.
- 若  $t_2$ ,  $t_4$  均为同构,  $t_5$  为单射,  $t_1$  为满射, 则  $t_3$  为同构.

## **▼** Proof of the theorem

• 若  $t_4$  与  $t_2$  均为满射,  $t_5$  为单射. 任取  $b_3\in B_3$ , 则存在  $a_4\in A_4$  使得  $t_4(a_4)=g_3(b_3)$ . 由于

Mayer-Vietoris 同调

3

$$0 = g_4g_3(b_3) = g_4t_4(a_4) = t_5f_4(a_4),$$

加之  $t_5$  为单射,  $f_4(a_4)=0$ . 因此存在  $a_3\in A_3$  使得  $f_3(a_3)=a_4$ . 再注意到

$$g_3(t_3(a_3) - b_3) = g_3t_3(a_3) - g_3b_3$$
  
=  $t_4f_3(a_3) - t_4a_4$   
=  $t_4(a_4) - t_4(a_4)$   
= 0.

从而存在  $b_2\in B_2$  使得  $g_2(b_2)=t_3(a_3)-b_3$ . 由于  $f_2$  为满射, 故存在  $a_2$  使得  $t_2(a_2)=b_2$ . 可发现  $b_3$  的某一原像大致与  $f_2(a_2)$  以及  $a_3$  有关. 计算得

$$egin{aligned} t_3f_2(a_2) &= g_2t_2(a_2) \ &= g_2(b_2) \ &= t_3(a_3) - b_3. \end{aligned}$$

因此  $b_3$  的某一原像为  $a_3 - f_2(a_2)$ , 从而  $t_3$  为满射.

• 若  $t_4$  与  $t_2$  均为单射,  $t_1$  为满射. 任取  $a_3\in A_3$  使得  $t_3(a_3)=0$ , 下验证  $a_3$  只能为 0. 根据交换图以及  $t_4$  为单的,

$$0 = q_3 t_3(a_3) = t_4 f_3(a_3) = f_3(a_3).$$

从而存在  $a_2 \in A_2$  使得  $f_2(a_2) = a_3$ . 注意到

$$g_2t_2(a_2) = t_3f_2(a_2) = t_3(a_3) = 0,$$

则存在  $b_1 \in B_1$  使得  $g_1(b_1)=t_2(a_2)$ . 由于  $t_1$  为满射, 取  $a_1 \in A_1$  使得  $t_1(a_1)=b_1$ . 再注意到

$$t_2(a_2) = g_1(b_1) = g_1t_1(a_1) = t_2f_1(a_1).$$

从而  $f_1(a_1) = a_2$ . 故  $a_3 = f_2 f_1(a_1) = 0$ .

• 最后一则是显然的.

## Mayer-Vietoris 同调序列

Definition 2.2.1 称  $\mathcal U$  为 X 的一个覆盖,若且仅若  $\cup_{U\in\mathcal U}U=X$ . 称奇异单形  $\sigma:\Delta_q\to X$  为  $\mathcal U$ -小的若且仅若  $\sigma(\Delta_q)$  包含于某一  $U\in\mathcal U$  中.

Theorem 2.2.2 记  $S^{\mathcal{U}}_*(X)$  为  $\mathcal{U}$ -小奇异单形生成的链复形. 则嵌入映射  $i:S^{\mathcal{U}}_*(X) o S_*(X)$  为链映射, 且有以下同构

$$i_*: H_*(\widetilde{S_*^{\mathcal{U}}}(X)) \cong H_*(\tilde{S}_*(X)).$$

#### **▼** Proof of the theorem

未完待续



Remark 定理说明: 在研究同调群时, 小的单形比大的更重要.

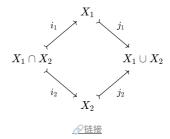
**Definition 2.2.3** 取拓扑空间的 X 的覆盖  $X_1$  和  $X_2$  使得  $X_1 \cup X_2 = X$ . 以  $\mathcal U$  记 X 的覆盖  $\{X_1,X_2\}$ , 且  $\mathcal U$ -小奇异单形生成的子链复形

$$S_*^{\mathcal{U}}(X) = S_*(X_1) + S_*(X_2).$$

右侧交换图中,记 $\Sigma_{X_i}$ 为 $X_i$ 中单形之集合,则

- $\Sigma_{X_1\cap X_2}=\Sigma_{X_1}\cap\Sigma_{X_2}$ ,
- $\Sigma_{(X_1 \cup X_2)^{\mathcal{U}}} = \Sigma_{X_1} \cup \Sigma_{X_2}$ .

从而有以下短正合列



$$0 o S_*(X_1 \cap X_2) \overset{h_\#}{ o} S_*(X_1) \oplus S_*(X_2) \overset{k_\#}{ o} S_*(X_1) + S_*(X_2) o 0.$$

其中  $h_{\#}$  与  $k_{\#}$  的取法可以是

$$h_{\#}(x) := i_{1\#}(x) - i_{2\#}(x), \quad k_{\#}(y,z) := j_{1\#}(y) + j_{2\#}(z).$$

抑或

$$h_{\#}(x) := i_{1\#}(x) + i_{2\#}(x), \quad k_{\#}(y,z) := j_{1\#}(y) - j_{2\#}(z).$$

Fact 2.2.4 根据 Theorem 2.1.2, 短正合列

$$0 o S_*(X_1 \cap X_2) \overset{h_\#}{ o} S_*(X_1) \oplus S_*(X_2) \overset{k_\#}{ o} S_*(X_1) + S_*(X_2) o 0$$

给出了长正合同调链

$$\cdots \rightarrow H_q(X_1 \cap X_2) \stackrel{\not \equiv / \mathfrak{A} 1}{\rightarrow} H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) \stackrel{\mathfrak{A} / \not \equiv}{\rightarrow} \left[ \left[ H_q(X_1) + H_q(X_2) \right] \stackrel{\not \bullet}{\rightarrow} H_{q-1}(X_1 \cap X_2) \right] \stackrel{\not \equiv / \mathfrak{A} 1}{\rightarrow} H_{q-1}(X_1) \oplus H_{q-1}(X_1) \oplus$$

此处的 差 与 和 取决于 **Definition 2.2.3** 中  $h_{\#}$  与  $k_{\#}$  的取法.

Definition 2.2.5 若嵌入映射  $i:S_*(X_1)+S_*(X_2) o S_*(X_1\cup X_2)$  诱导的同调群同态为同构, i.e.,

$$H_*(S_*(X_1) + S_*(X_2)) \to H_*(X_1 \cup X_2),$$

则称  $\{X_1,X_2\}$  构成 Mayer-Vietoris 耦.



Remark 若  $X_1$  与  $X_2$  之内部覆盖 X, 则

$$i: S_*(X_1) + S_*(X_2) o S_*(X_1 \cup X_2)$$

为同伦等价. 因此  $\{X_1,X_2\}$  构成 Mayer-Vietoris 耦.

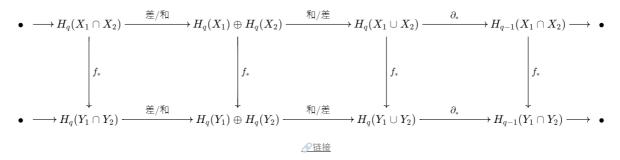
Theorem 2.2.6 若  $\{X_1,X_2\}$  构成 Mayer-Vietoris 耦, 则有如下正合同调序列 (运用同构关系  $H_*(S_*(X_1)+S_*(X_2)) \to H_*(X_1 \cup X_2)$ )

$$\cdots o H_q(\cap) \overset{\not \equiv/\mathfrak N}{ o} H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) \overset{\mathfrak n/\not \equiv}{ o} \overline{H_q(\cup) \overset{\color{red} o}{ o} H_{q-1}(\cap)} \overset{\not \equiv/\mathfrak N}{ o} \cdots.$$

Fact 2.2.7 上述 Mayer-Vietoris 正合列对增广链复形同理, 此处不赘述.

Theorem 2.2.8 结合 Theorem 2.2.6 与 Theorem 2.1.3, 若  $\{X_1,X_2\}$  与  $\{Y_1,Y_2\}$  分别为 X 与 Y 中的 Mayer-Vietoris 耦, 映射  $f:X\to Y$  满足  $f(X_i)\subset Y_i$  (i=1,2), 则以下图可交换

Mayer-Vietoris 同调 5



Example 2.2.9 计算球面  $S^n$  的简约同调群  $\tilde{H}_*(S^n)$ .

#### **▼** Solution

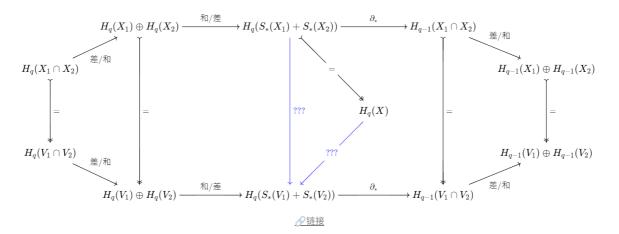
以下将证明南北半球为 Mayer-Vietoris 耦, 继而用数学归纳法求解.

若拓扑空间 X 为两个闭子集  $X_1$  与  $X_2$  的并, 交集  $X_1\cap X_2$  为某一开邻域 V 的形变收缩核, 下断言  $\left\{X_1,X_2\right\}$  为 Mayer-Vietoris 耦.

记  $V_i:=V\cup X_i$  为  $X_i$  的开邻域, 其中 i=1,2. 根据 **Definition 2.2.5** 之 **Remark**,  $\{V_1,V_2\}$  为 Mayer-Vietoris 耦. 只需证明

$$H_*(S_*(V_1) + S_*(V_2)) o H_*(S_*(X_1) + S_*(X_2))$$

为同构. 端详下图



根据 Theorem 2.1.4 (五引理), 蓝色箭头 (标问号?处) 均为同构.

零维球面  $S^0\cong\{p_1,p_2\}$ , 从而简约同调群

- $ilde{H}_q(S^0) = 0$ , 若  $q \geq 1$ ,
- $ilde{H}_0(S^0)=\mathbb{Z}$  (根据 Example 1.3.19).

既证明  $n \ge 1$  时,南北半球  $\{S_+^q, S_-^q\}$  系  $S^q$  之 Mayer-Vietoris 耦,根据 **Definition 1.3.18** 知可缩空间之简约同调群同构于 单点之简约同调群,即零同调. 观察 Mayer-Vietoris 正合同调列,

$$ilde{H}_q(S_*(S^q_+)+S_*(S^q_-))\stackrel{\partial_*}{
ightarrow} ar{ ilde{H}_{q-1}(S^q_+\cap S^q_-)= ilde{H}_{q-1}(S^{q-1})}$$

只能为同构. 从而

• 
$$ilde{H}_{q}(S^{q'}) = ilde{H}_{q-1}(S^{q'-1}) = \cdots = ilde{H}_{q-q'}(S^0) = 0$$
, 若  $q > q'$ .

・ 
$$ilde{H}_q(S^{q'})= ilde{H}_{q-1}(S^{q'-1})=\cdots= ilde{H}_0(S^0)=\mathbb{Z}$$
, 若  $q=q'$  .

・ 
$$ilde{H}_q(S^{q'}) = ilde{H}_{q-1}(S^{q'-1}) = \cdots = ilde{H}_0(S^{q'-q}) = 0$$
, 若  $q < q'$ .

综上,  $\tilde{H}_q(S^{q'}) = \delta_{qq'}\mathbb{Z}$ .

Mayer-Vietoris 同调 6

**Example 2.2.10** 记 X 为 Euclid 空间  $E^n$  中的凸闭集,  $f:X\to X$  为连续映射, 则 f 有不动点.

#### **▼** Solution

若不然, 则存在 f 使得  $f(x) \neq x$  对一切  $x \in X$  成立. 作以 f(x) 为端点射向 x 的射线, 记 g(x) 为射线与  $\partial X$  之交点. 根据凸集之定义, g 为 X 上良定义的映射. 显然 g 为连续映射.

不失一般性地记  $X=D^n$ ,即  $E^n$  中单位球. 由于  $g|_{S^n}:S^n\to S^n$  为同构,故  $g:D^n\to S^n$  为连续满射. 这与  $\tilde{H}_n(D^n)=0 \neq \mathbb{Z}=\tilde{H}_n(S^n)$  矛盾!

Definition 2.2.11 映射  $f:S^n o S^n$  诱导的同态

$$f_\#: ilde{H}_n(S^n) o ilde{H}_*(S^n), [1]\mapsto [d].$$

称 d 为**映射度**, 记作  $\deg f = d$ .



Remark Hopf 证明了**球面到自身映射下的同伦分类定理**, 即对映射  $f,g:S^n o S^n$  , 以下两则等价:

- 1.  $\deg f = \deg g$ .
- 2.  $f\simeq g:S^n o S^n$ .

球面的映射度满足以下简单性质:

- 1.  $\deg id = 1$ ,
- 2.  $\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$ ,
- 3. deg constant = 0.

## Example 2.2.12 n 维球面的镜面反射

$$r_n:S^n o S^n, (x_0,\ldots,x_n)\mapsto (-x_0,\ldots,x_n)$$

满足  $\deg r_n = -1$ .

#### **▼** Proof

注意到交换图

从而  $\deg(r_{q*}) = \deg(r_{q-1*}) = \cdots \deg(r_0) = -1.$ 



Corollary 作为推论, 对径映射

$$S^n o S^n, (x_0,\ldots,x_n)\mapsto (-x_0,\ldots,-x_n)$$

的映射度为  $(-1)^{n+1}$ .

Example 2.2.13 若 n 维球面  $S^n$  的子集 A 同胚于  $I^k:=\prod_{i=1}^k[0,1]$ , 则  $\tilde{H}_*(S^n\setminus A)=0$ .

# **▼** Proof

若 k=0, 则 A 为单点, 显然成立.

若 k < m 时引理成立,则 k = m 时,取闭链  $[z] \in \tilde{H}_*(S^n \setminus A)$ . 下证明 [z] = 0. 若反之,存在 z 使得  $[z] \neq 0$ . 取划分  $\pi$  使得  $S^n = S^n_+ \cup S^n_-$  使得  $S^n_+ \cap S^n_- = S^{n-1}$ ,同时  $A = A_+ \cup A_-$ , $A_+ \cap A_-$  同胚于  $I^{m-1}$ .根据 Theorem 2.2.6,有正合列

$$0 o ilde{H}_q(S^n\setminus A) o ilde{H}_q(S^n\setminus A_+)\oplus ilde{H}_q(S^n\setminus A_-) o 0.$$

由  $[z] \neq 0$  可知  $i_{+*}([z]) \neq i_{-*}([z])$ . 不妨设  $i_{1*([z])} \neq 0$ ,取  $A^{(1)} := A_+$ . 同理构造  $\{A^{(m)}\}$  使得每一  $A^{(m)}$  均同胚于  $I^m$ ,日满足

- 1.  $A\supset A^{(1)}\supset A^{(2)}\supset\cdots$
- 2.  $\cap_m A^{(m)} = p$  为单点,
- 3. 映射

$$i_*^{(m)}:(S^n\setminus A) o (S^n\setminus A^{(m)}),[z]
ot\mapsto 0.$$

由于  $\tilde{H}_*(S^n\setminus p)=0$ ,从而  $(S^n\setminus A)$  中的闭链 z 为  $(S^n\setminus p)\cong E^n$  中的边缘链. 设  $\partial c=z$ ,其中  $c\in S^n\setminus p$ ,即 c 为  $S^n\setminus p$  中有限个奇异单形之线性组合. 注意到存在  $m_0\in\mathbb{N}$  使得这些有限个奇异单形落在  $S^n\setminus A^{(m_0)}$  中,与  $0\neq [z]\in H_*(S^n\setminus A^{(m_0)})$  矛盾.

Example 2.2.14 若 n 维球面  $S^n$  的子集 A 同胚于  $S^k$ ,则  $\tilde{H}_q(S^n\setminus A)=0$  若  $q\neq n-k-1$ , $\tilde{H}_{n-k-1}(S^n\setminus A)=\mathbb{Z}$ .

#### **▼** Proof

k=0 时,  $(S^n\setminus A)\cong E^n$ , 故结论成立.

将 A 分作南北半球, i.e.,  $A_+\cup A_-$ . 显然  $\{S^n\setminus A_+,S^n\setminus A_-\}$  构成  $S^n\setminus (A_+\cap A_-)$  的 Mayer-Vietoris 耦. 根据 **Example 2.2.13** 知有以下正合同调链

$$0 o ilde{H}_{q+1}(S^n\setminus (A_+\cap A_-))\stackrel{\partial_*}{ o} ilde{H}_q(S^n\setminus A) o 0.$$

因此  $ilde{H}_{q+1}(S^n\setminus A')\cong ilde{H}_q(S^n\setminus A)$ , 其中  $A\cong S^k$ ,  $A'\cong S^{k-1}$ .



Corollary Example 2.2.14 给出了以下简单推论:

1.  $S^{n+1}$  中同胚于  $S^n$  的子集将  $S^{n+1}$  分作两个单连通的开集,  $S^n$  为公共边界.

特别地, n=1 时为 Jordan 曲线定理.

- 2.  $S^n$  不可能嵌入  $E^n$ .
- 3. 不同维度的流形一定不同胚.

流形即**各点存在邻域同胚于**  $E^n$  **之邻域**的拓扑.