作者: 张陈成
学号: 023071910029

K-理论笔记

交换环的 Picard 群

---

1 可逆模 = 线丛 = 交换半环 $R-\mathrm{Mod}$ 中单位

定义 1 (有限生成投射模的秩函数)**.** kaplansky 定理表明局部环上的投射模自由, 其交换且有限生成之情形已在前文证明 (中山引理之推论). 今给定交换环 R, 定义有限生成投射模 P 的秩函数为

$$\mathrm{rank}_P : \mathrm{spec}(R) \to \mathbb{N}, \quad \mathfrak{p} \mapsto \mathrm{rank}_{R_\mathfrak{p}}(P_\mathfrak{p}).$$

简而言之, $\mathrm{rank}_P(\mathfrak{p})$ 是 R-模 P 在 $\mathfrak{p}$-局部化下 (作为自由 $R_\mathfrak{p}$-模) 的秩.

命题 1 (秩函数的乘法)**.** 给定交换环 R 与有限生成投射 R-模 M 与 N, 则有

$$\mathrm{rank}_{M\otimes N}(\mathfrak{p}) \mapsto \mathrm{rank}_M(\mathfrak{p}) \cdot \mathrm{rank}_N(\mathfrak{p}) \quad (\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{spec}(R)).$$

证明. 此处投射模的张量积仍投射. 考虑 $M \oplus M' \simeq R^\lambda$, 则有

$$(M \otimes N) \oplus (M' \otimes N) \simeq R^\lambda \otimes N \simeq N^\lambda.$$

从而 $M \otimes N$ 仍为自由模的直和项, 因此投射. 假定 $M_\mathfrak{p} \simeq R_\mathfrak{p}^m$ 以及 $N_\mathfrak{p} \simeq R_\mathfrak{p}^n$, 则

$$M_\mathfrak{p} \otimes_{R_\mathfrak{p}} N_\mathfrak{p} \simeq R_\mathfrak{p}^m \otimes_{R_\mathfrak{p}} R_\mathfrak{p}^n \simeq R_\mathfrak{p}^{mn}.$$

$\square$

注 1. 由于有限生成投射模有限展示, 从而局部化与 $\mathrm{Hom}_R(P,-)$ 可交换. 类比上述证明有, $\mathrm{rank}_{\mathrm{Hom}_R(P,Q)} = \mathrm{rank}_P \cdot \mathrm{rank}_Q$.

命题 2 (对偶模回顾)**.** 给定交换环 R, 定义 $X \in \mathsf{Ob}(R-\mathrm{Mod})$ 的对偶模为

$$X^* := \mathrm{Hom}_{R-\mathrm{Mod}}(X, R) \quad \in \mathsf{Ob}(R^{\mathrm{op}}-\mathrm{Mod}).$$

有以下关于对偶模的常用性质.

1. $\varepsilon : P \to P^{**}$ 为典范单态射.
2. 自由模与投射模的一种等价定义如下.
   - F 是**自由** R**-模**, 当且仅当存在指标集 I 与 $\{(x_i, f_i) \in F \times F^*\}_{i\in I}$ 使得有分解 (有限和) $x = \sum_{i\in I} f_i(x)x_i$, 且有限和 $x = \sum_{i\in I} a_i x_i$ 对一切 $x \in F$ **唯一**.

- P 是**投射 R-模**, 当且仅当存在指标集 I 与 $\{(x_i, f_i) \in P \times P^*\}_{i \in I}$ 使得有分解 (有限和) $x = \sum_{i \in I} f_i(x)x_i$, 但有限和 $x = \sum_{i \in I} a_i x_i$ 对 $x \in P$ **不必唯一**.

3. 有限生成投射模的对偶模同为投射 R-模. 具体地, 对任意 $P \oplus Q \simeq R^n$ 总有

$$\mathrm{Hom}_R(P, R) \oplus \mathrm{Hom}_R(Q, R) \simeq \mathrm{Hom}_R(R^n, R) \simeq (\mathrm{End}_R(R))^n \simeq R^n.$$

此时 $\varepsilon : P^{**} \simeq P$ 为同构.

命题 3 (有限生成投射模之对偶不改变秩函数)**.** 取 R 上有限生成投射模 P, 则有

$$P_{\mathfrak{p}}^n \simeq R_{\mathfrak{p}}^n \simeq \mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(P_{\mathfrak{p}}, R_{\mathfrak{p}})^n \simeq (P_{\mathfrak{p}}^*)^n \simeq (P^*)_{\mathfrak{p}}^n.$$

命题 4 (秩函数运算总结)**.** 对交换环 R 上有限生成模, 有如下秩函数的等式 (逐点相等).

1. rank_{R^n} 为 $\mathrm{spec}(R)$ 到 $\{n\}$ 的常函数.

2. $\mathrm{rank}_{P \oplus Q} = \mathrm{P} + \mathrm{rank}_Q$.

3. $\mathrm{rank}_{P \otimes Q} = \mathrm{P} \cdot \mathrm{rank}_Q$.

4. $\mathrm{rank}_{\mathrm{Hom}_R(P,Q)} = \mathrm{rank}(P) \cdot \mathrm{rank}(Q)$.

5. $\mathrm{rank}(P) = \mathrm{rank}(P^*)$.

定义 2 (R-模范畴的半环结构)**.** $(R\mathrm{-Mod}, \oplus, \otimes)$ 为交换半环, 即,

1. 环中元素为 $\mathsf{Ob}(R\mathrm{-Mod})/\simeq$. 为方便记号, 今后省略商关系.

2. $(R\mathrm{-Mod}, \oplus)$ 为交换幺半群, 其幺元为 0;

3. $(R\mathrm{-Mod}, \otimes)$ 为交换幺半群, 其幺元为 R;

4. $\oplus$ 与 $\otimes$ 分别作为加法与乘法, 满足分配律.

定义 3 (可逆模 (线丛))**.** 交换半环 $(R\mathrm{-Mod}, \oplus, \otimes)$ 中的单位 (可逆乘法元) 全体为**可逆模 (线丛)**.

命题 5. 取交换环 R 上有限生成模 M. 称 M 可逆, 若以下等价命题成立.

1. 存在 R-模 N 使得 $M \otimes N \simeq R$. 换言之, M (所属的同构类) 是环 $(R\mathrm{-Mod}, \oplus, \otimes)$ 中的乘法逆元.

2. $M \otimes_R -$ 为 R-模范畴到自身的等价. 换言之, 存在 $N \otimes -$ 使得 $(M \otimes N \otimes -) \simeq (R \otimes -)$.

3. M 是有限生成的秩恒为 1 的投射模.

若前两则成立, 则可取 $\mathrm{Hom}_R(N, R) \simeq M$.

证明. $1 \iff 2$ 是显然的. 函子 $- \otimes M$ 给出范畴 $R\mathrm{-Mod}$ 到自身的范畴等价, 当且仅当 M 是环 $(R\mathrm{-Mod}, \oplus, \times)$ 的乘法可逆元. 换言之, 存在 N 使得 $N \otimes M \simeq R \simeq M \otimes N$.

$3 \implies 1$ 若 M 是秩 1 的投射模, 记 $N = M^*$, 并考虑赋值映射

$$M \otimes N \to R, \quad x \otimes f \mapsto f(x).$$

显然该映射对任意素理想的局部化是同构. 由于 M 投射, 从而对任意素理想 $\mathfrak{p}$,

$$R_{\mathfrak{p}} \simeq \mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, R_{\mathfrak{p}}) \simeq (\mathrm{Hom}_R(M,R))_{\mathfrak{p}} \simeq N_{\mathfrak{p}}.$$

因此 $N = M^*$ 也是秩为 1 的投射模. 由于 $M_{\mathfrak{p}} \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}} \simeq R_{\mathfrak{p}}$ 对一切 $\mathfrak{p}$ 成立, 从而 $M \otimes N \simeq R$.

1 $\implies$ 3 在 $M \otimes N \simeq R$ 两端作 $\mathfrak{p}$-局部化, 则 $\mathrm{rank}_M = \mathrm{rank}_N = \mathrm{rank}_R$. 下仅需证明 M 与 N 投射. 记 M 的有限生成元 $\{m_i\}_{1\le i\le m}$ 与一组 $\{n_i\}_{1\le i\le m} \subseteq N$ 使得有

$$\sum_{1\le i\le m} m_i \otimes n_i = 1 \otimes 1 \quad (\simeq 1 \in R)\,.$$

以此构造满同态 $N^m \twoheadrightarrow R$, 其中 $(x_1, \dots x_m) \mapsto \sum_{1\le i\le m} m_i \otimes x_i$. 显然该满同态可裂, 记

$$N^m \simeq R^m \otimes N \simeq R \oplus Q.$$

从而 $R^m \simeq R^m \otimes (M \otimes N) \simeq N^m \otimes N \simeq (R \oplus Q) \otimes N \simeq N \oplus (Q \otimes N)$. 因此 N 投射. 对称地, M 亦投射. □

定义 4 (Picard 群)**.** 记环 R 中 Picard 群为 $\mathrm{Pic}(R)$ 有限生成可逆模 $\langle M\rangle$ 构成的乘法群. 其中

1. $\langle M \otimes_R N\rangle = \langle M\rangle \cdot \langle N\rangle$.
2. $\langle \mathrm{Hom}_R(M,R)\rangle = \langle M\rangle^{-1}$.
3. $\langle R\rangle$ 为乘法单位.

注 2. $\mathrm{Pic} : \mathrm{Ring} \to \mathrm{Ab}$ 为 (协变) 函子. 特别地,

$$\mathrm{Pic} : \left[R \xrightarrow{f} S\right] \mapsto [P \mapsto S \otimes_R P].$$

结合律与单位律由张量积的结合律保证.

2 一些代数几何解释