作者: 张陈成
学号: 023071910029

K-理论笔记

Dedekind 整环的算数信息

1 Dedekind 整环的 K_0 群

定理 1. Dedekind 整环 $\mathcal{O}$ 的 K_0 群为 $\mathbb{Z}\oplus\mathrm{Pic}(\mathcal{O})$.

证明. 取分式理想 I 与 J, 下证明 $I\oplus J\simeq\mathcal{O}\oplus IJ$. 取 $b\in J$ 使得 bJ^{-1} 为 $\mathcal{O}$ 的理想, 记唯一分解

$$bJ^{-1}=\prod_{1\leq i\leq n}\mathfrak{p}_i^{n_i}\quad(\mathfrak{p}_i\in\mathrm{Spec}(\mathcal{O}),n_i\geq 1).$$

再取 $a=\sum\limits_{1\leq i\leq n}a_i$, 其中

$$a_i\in I\cdot\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_{i-1}\cdot\mathfrak{p}_{i+1}\cdots\mathfrak{p}_n.$$

从而 $a_i\cdot I^{-1}\subseteq\mathfrak{p}_j$ 当且仅当 $i\neq j$; 反之 $a_i\cdot I^{-1}\not\subseteq\mathfrak{p}_i$. 此时 $aI^{-1}+bJ^{-1}=\mathcal{O}$. 取 $c\in I$ 与 $d\in J$ 使得 $ac+bd=1$. 考虑同构

$$\begin{aligned} I\oplus J &\xrightarrow[\simeq]{\left(\begin{smallmatrix} c & d\\ -b & a\end{smallmatrix}\right)} \mathcal{O}\oplus IJ \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (c\in I,d\in J),\\ (x,y) &\longmapsto (cx+dy,ay-bx)\end{aligned}$$

是以得证. 归纳知,

$$I_1\oplus I_2\oplus\cdots\oplus I_n=\mathcal{O}^{n-1}\oplus I_1I_2\cdots I_n.$$

下仅需证明对分式理想 I_1 与 I_2, $\mathcal{O}^n\oplus I_1\simeq\mathcal{O}^n\oplus I_2$ 当且仅当 $I_1=I_2$. 考虑

$$\bigwedge^{n+1}(\underbrace{\mathcal{O}\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}}_{n\text{ 个}}\oplus I_i)\simeq\left(\bigoplus_{i_1+\cdots i_{n+1}=n+1}\bigwedge^{n_1}\mathcal{O}\otimes_{\mathcal{O}}\cdots\otimes_{\mathcal{O}}\bigwedge^{i_n}\mathcal{O}\right)\otimes_{\mathcal{O}}\left(\bigwedge^{i_{n+1}}I_i\right).$$

对 $\mathcal{O}$ 秩 1 的投射模 P, 有 $\bigwedge^0\mathcal{P}=\mathcal{O}$, $\bigwedge^1\mathcal{P}=P$, 以及 $\bigwedge^2\mathcal{P}=0$. 因此上式右侧为 I_i. 因此, Dedekind 整环上任意秩为 n 的投射模形如 $\mathcal{O}^{n-1}\oplus I$, 其中 I 是分式理想. □

定义 1 (理想类群)**.** 代数数域 K 给出以下 (群) 正合列

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathcal{O}_K^\times & \longrightarrow & K^\times & \xrightarrow{x\mapsto x\cdot\mathcal{O}_K} & \mathcal{I}_K & \longrightarrow & \mathrm{Cl}_K & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

$$d\longmapsto\frac{d}{1}\qquad\qquad I\longmapsto I\cdot\mathrm{PID's}.$$

其中理想类群 Cl_K 作为 $\mathcal{I}_K$ 的商群, 商关系为乘以一个 (非零) 主理想整环.

命题 1 (局部化理想类群)**.** Dedekind 整环的局部化仍为 Dedekind 整环.

证明. Dedekind 整环商的局部化保持张量积, 正合列, 以及无扰模, 从而局部化环的无扰模仍是平坦的. 同时局部化保持有限生成模, 从而保持 Noether 环. 由以上两点, Dedekind 整环的局部化仍是 Dedekind 整环. □

例 1. 局部化 Dedekind 整环 $\mathcal{O}_{K,S}$ 的单位群 $\mathcal{O}_{K,S}^{\times}$ 与理想类群 $\mathrm{Cl}_{K,S}$ 满足以下正合列

$$x \longmapsto \frac{x}{1} \qquad\qquad (n_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}\subseteq S} \longmapsto \overline{\textstyle\prod_{\mathfrak{p}\subseteq S}\mathfrak{p}^{n_{\mathfrak{p}}}}$$

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}_K^{\times} \longrightarrow \mathcal{O}_{K,S}^{\times} \longrightarrow \mathbb{Z}^{|\{\mathfrak{p}|\mathfrak{p}\subseteq S\}|} \longrightarrow \mathrm{Cl}_K \longrightarrow \mathrm{Cl}_{K,S} \longrightarrow 1 \ .$$

$$\frac{x}{s} \longmapsto (v_{\mathfrak{p}}(s))_{\mathfrak{p}\subseteq S} \qquad\qquad \overline{I} \longmapsto \overline{I\cdot\textstyle\prod_{\mathfrak{p}\subseteq S}\mathfrak{p}^{n_{\mathfrak{p}}}}$$

其中正合性说明如下.

1. $\mathcal{O}_{K,S}^{\times} = \{x \in K \mid v_{\mathfrak{p}}(x) = 0, \mathfrak{p} \not\subseteq S\}$ 处正合性显然.
2. 注意到 $\mathbb{Z}^{(-)} \to \mathrm{Cl}_K$ 之核恰为形如 (x/s) 的主分式理想, 即 $\mathcal{O}_K^{\times} \to \mathbb{Z}^{(-)}$ 的像, 故 $\mathbb{Z}^{(-)}$ 处正合.
3. $\mathrm{Cl}_K \to \mathrm{Cl}_{K,S}$ 之核无非 $\{\mathfrak{p}\}_{\mathfrak{p}\subseteq S}$ 给出的非主理想, 即 $\mathbb{Z}^{(-)}$ 的像, 从而 Cl_K 处正合.
4. 由于 $\mathrm{Cl}_K \to \mathrm{Cl}_{K,S}$ 由等价关系之延拓给出, 从而为满射, 故 $\mathrm{Cl}_{K,S}$ 处正合.

定理 2 (Dirichlet 单位定理)**.** 考虑共轭作用 $f \mapsto \overline{f}$ 在域嵌入映射集 $(K,\mathbb{C})_{\mathbb{Q}}$ 上的作用. 记 r 与 s 分别为大小为 1 与 2 的轨道数量. 则 $\mathcal{O}_K^{\times} \simeq \mu_K \times \mathbb{Z}^{r+s-1}$.

定理 3 (Hermite-Minkowski)**.** 对任意 $M \in \mathbb{R}_+$, 判别式小于 M 的数域有限 (同构意义下).

定理 4 (Minkowski 界)**.** 给定数域 F, 则 $\sqrt{\Delta_F} \geq \dfrac{n^n}{n!}\cdot\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^s \geq \dfrac{n^n}{n!}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{[F:\mathbb{Q}]}$.

注 1. 因此类数有限.

命题 2. 类群到分式群有典范嵌入 $0 \to \mathrm{Cl}(R) \xrightarrow{f} \mathrm{Pic}(R) \to \mathrm{Pic}(T(R)) \to 0$. f 为同构当且仅当所有素理想有限生成.

未完待续.

2 Dedekind 整环的 K_1 群 (Dirichlet 单位定理之证明)

未完待续.

3 Dedekind 整环的 K 群杂谈

4 Dedekind 整环的算数信息

定义 2 (理想的范数)**.** 分式理想的范数为乘法群同态 $N : \mathrm{Pic}(\mathcal{O}_F) \to \mathbb{Q}_{>0}$. 其中

$$N(\mathfrak{a}) = [\mathcal{O}_F : \mathfrak{a}].$$

特别地, $N((a)) = \mathrm{N}_{F/\mathbb{Q}}(a)$. 此后不区分之.

注 2. 定理 4 表明对任意 $x\in\mathfrak{a}$, 总有 $|\mathrm{N}(x)|\le\left(\frac{2}{\pi}\right)^s\sqrt{|\Delta_F|}\cdot N(\mathfrak{a})$.

定义 3. 给定数域扩张 $F/\mathbb{Q}$, 定义 $\{z\in\mathbb{C}\mid\mathrm{Re}(z)>1\}$ 上的亚纯函数

$$\zeta_F(z):=\prod_{\mathfrak{p}\subseteq\mathcal{O}_F}\frac{1}{1-N(\mathfrak{p})^{-z}}=\sum_{\mathfrak{a}\subseteq\mathcal{O}_F}\frac{1}{N(\mathfrak{p})^z}.$$

注 3. 特别地, 置 $F=\mathbb{Q}$, 则有通常的 Riemann-ζ 函数 $\zeta(z)=\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^z}=\prod_{p\text{ 为质数}}\frac{1}{1-p^{-z}}$.

定理 5 (反射公式)**.** 记 $d=[F:\mathbb{Q}]=r+2s$, 则有反射公式

$$\zeta_F(1-z)=\sqrt{|\Delta_F|}^{2s-1}\cdot\cos^{r+s}\frac{\pi z}{2}\cdot\sin^s\frac{\pi z}{2}\cdot\left(2(2\pi)^{-z}\Gamma(z)\right)^d\cdot\zeta_F(z).$$

定理 6 (Siegel-Klingen)**.** 对正整数 n, $\zeta_F(-n)\in\mathbb{Q}$.

定理 7. $\zeta_F(z)$ 在 $\mathrm{Re}(s)\ge1$ 时无零点, 仅有的极点为 $s=1$ 处的单极点.

命题 3 (交重数定理)**.** 记 μ_n 为 $\zeta_F(z)$ 在 $z=-n$ 处的零点重数. 依照定理 5 与定理 7 有

$$\mu_n=\begin{cases}r+s-1 & n=0,\\ s & n\ge1\text{ 为奇数},\\ r+s & n\ge2\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

定理 8 (K_0-群的算数信息)**.** 对数域 F, 总有 $K_0(\mathcal{O}_F)\simeq\mathbb{Z}\oplus\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_F)$. 其中 $\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_F)=\mathrm{Cl}(\mathcal{O}_F)$.

定理 9 (K_1-群的算数信息)**.** 结合定理 2, 有

$$K_1(\mathcal{O}_F)\simeq\mathcal{O}_F^\times\simeq\mathbb{Z}^{r+s-1}\oplus\mu_F.$$

定理 10 (Bott 周期)**.** 记 r_n 为自由群 $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}K_n(\mathcal{O}_F)$ 的秩, 则有如下 4-周期的表格

n	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$	$2k$	$4k+3$	$4k+5$	$\cdots$
r_n	1	$\mu_F(0)$	0	$\mu_F(1)$	0	$\mu_F(2)$	0	$\cdots$	0	$\mu_F(2k+1)$	$\mu_F(2k+2)$	$\cdots$
$=$	1	$r+s-1$	0	s	0	$r+s$	0	$\cdots$	0	s	$r+s$	$\cdots$