判断题(默认$\mathbb{R}$上)

1. $[0,1]$上存在测度为1的疏集(疏集即无内点的集合).
2. 存在边界点不可数之集合.
3. 存在离散点集(离散点集即集合中任一点非聚点), 其闭包为不可数集.
4. 存在可数个两两不交的不可数稠密集.
5. 存在补集测度无穷大的稠密开集.
6. 存在测度与闭包之测度不等的开集.
7. 定义第一纲集为可数疏集之并, 则$[0,1]$上存在测度为1的第一纲集.
8. 定义第二纲集为非第一纲集者, 则存在零测的第二纲集.
9. 存在零测的不可数稠密集.
10. 存在不可数集, 其每个闭子集可数.

解析:

1. 考虑$[0,1]\setminus\mathbb{Q}$.
2. 考虑$[0,1]\setminus\mathbb{Q}$.
3. 取构造$[0,1]$上Cantor集时诸所去区间之中点, 其构成一离散点集. 易知其导集至少包含了Cantor集, 故不可数.
4. 取$A_n=\mathbb{Q}+\sqrt{p_n}$, p_n为第n个素数. 记$B_0=\mathbb{Q}$, $B_n=A_n\cup[-n,n]$. 取$C_0=B_0$, $C_n=B_n\setminus\cup_{i=1}^{n-1}B_n$即可.
5. 记$\mathbb{Q}=\{r_n\}$, 取$A_n=(-\varepsilon^n+r_n,\varepsilon^n+r_n)$, 其中$\varepsilon$为充分小的正数. 则$\cup_{n\geq 0}A_n$即为所求.
6. 记$\mathbb{Q}\cap[0,1]=\{r_n\}$, 取$A_n=(-\varepsilon^n+r_n,\varepsilon^n+r_n)$, 其中$\varepsilon$为充分小的正数. 则$\cup_{n\geq 0}A_n$即为所求.
7. 记$r=\dfrac{1-\alpha}{3-2\alpha}$, 在$[0,1]$区间中依次取出互不相交的$2^k$个长度为$r^k$的开区间即可得测度为$\alpha$之(完备)疏集. 对如上构造所得的诸测度为$1-n^{-1}$之集合取并即可.
8. 取上题所得之集合(A)相对$[0,1]$之补集(B)即可. 若该补集为第一纲集合, 则由Baire引理知$A\cup B$为可数疏集之并, 与$[0,1]$完备矛盾.
9. 考虑Cantor集合与$\mathbb{Q}$之并.
10. 这本书P189-190.