作者: 张陈成

学号: 023071910029



## K-理论笔记

## Noether 环上的投射模与平坦模

## 1 Noether 环上的投射模与平坦模

定义 1 (有限生成, 有限展示). 对环 R-模 X, 有以下定义.

1. 称 X 是有限生成的, 若存在有限集 S 使得  $S \cdot R \simeq X$ . 换言之, 存在正合列

$$R^n \longrightarrow X \longrightarrow 0.$$

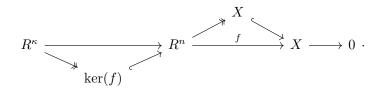
2. 称 X 是有限展示的, 若存在正合列

$$R^m \longrightarrow R^n \longrightarrow X \longrightarrow 0.$$

- 注 1. 对任意模, 有限长度 ⇒ 有限生成.
- 注 2. 有限展示模是生成元间关系有限的有限生成模.

命题 1. Noether 环上的有限生成模等价于有限展示模.

证明. 考虑如下有限生成模的投射分解, 其中  $\kappa$  是某一基数



由于  $\ker(f)$  作为 Noether 环上的模是有限生成的, 从而可取  $\kappa < \omega$ . 反之显然.

**命题 2.** 给定有限生成 R-模 X 与态射  $X \xrightarrow{f} f(X)$ , 则 f(X) 有限生成而  $\ker(f)$  未必. 若 f(X) 有限展示,则  $\ker(f)$  有限生成.

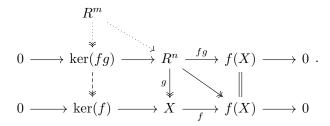
证明. X 的有限生成集在 f 下的像仍有限生成; 对  $\ker(f)$ , 考虑商环诱导的  $\mathbb{R}[X_1,\ldots]$ -模同态

$$\mathbb{R}[X_1,\ldots] \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(0,\ldots),$$

其核显然不是有限生成的.

注 3. 该反例进而说明有限长度与有限展示互不包含.

若 f(X) 是有限展示的,则有正合列间同态



以上长虚线  $\ker(fg) \to \ker(f)$  有核的泛性质给出,满射性由五引理给出. 依照 f(X) 的有限展示性给出  $R^m \to R^n$  及其满-单分解,即得  $\ker(f)$  是  $R^m$  的商,从而有限生成.

**命题 3.** 仿照命题 2, 给定模正合列  $0 \to K \to X \to Y \to 0$ , 则有如下结论.

- 1. 若 K 有限生成, Y 有限生成, 则 X 有限生成.
- 2. 若 X 有限生成,则 Y 有限生成,但 K 未必.
- 3. 若 X 有限生成, Y 有限展示, 则 K 有限生成. 即, 命题 2.
- 4. 若 K 有限生成, X 有限展示, 则 Y 有限展示.
- 5. 若 K 有限展示, Y 有限展示, 则 X 有限展示.

证明,证明如下.

1. 取  $S_K \subseteq K$  为 K 的有限生成集,  $S_Y \subseteq X$  使得像  $\overline{S_Y}$  是 Y 的有限生成集, 且  $|S_Y| = |\overline{S_Y}|$ . 命题由以下交换图给出:

- 2. 有限生成模的像显然是有限生成模, 核未必, 见命题 2.
- 3. 即命题 2.
- 4. 考虑满射  $R^m \to X$  与  $R^n \to K$  诱导的正合列间同态, 则 g 为满射. 根据蛇引理, 核  $\ker(f) \to \ker(g)$  是满同态.

由 X 的有限展示性与命题 2 知  $\ker(f)$  有限生成, 故存在某一  $R^l$  到  $\ker(g)$  的满射. 从而存在正合列  $R^l \to R^m \to Y \to 0$ , 即, Y 有限展示.

5. 以上交换图给出自由模链复形到题设中短正合列的满态射. 根据蛇引理有

$$0 \longrightarrow \ker_{1} \longrightarrow \ker_{2} \longrightarrow \ker_{3} \longrightarrow 0$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$0 \longrightarrow R^{n} \longrightarrow R^{m+n} \longrightarrow R^{m} \longrightarrow 0$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

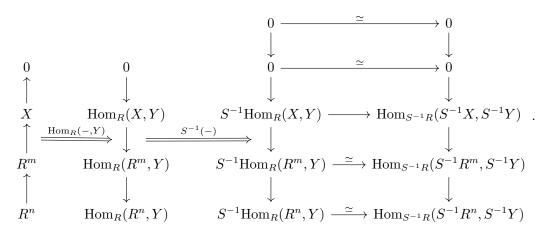
$$0 \longrightarrow K \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow 0$$

根据命题 2, ker3 与 ker1 有限生成, 因此 ker2 有限生成. 根据上一条, X 有限展示.

**命题 4.** 对有限展示 R 模 X 与局部化函子  $S^{-1}(-)$ , 有自然同构

$$S^{-1}\operatorname{Hom}_R(X,-) \simeq \operatorname{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}X,S^{-1}(-)).$$

证明. 对任意  $f \in \operatorname{Hom}_R(X,Y)$ , 定义  $S^{-1}R$ -模同态  $S^{-1}(f): \frac{x}{s} \mapsto \frac{f(x)}{s}$ . 遂有正合列的交换图



由五引理知中间处为同构.

注 4. 对有限生成模, 上述同态为单而未必满. 考虑交换环  $R=\mathbb{R}[X_0,X_1,\ldots]$  以及商环给出模  $X=\mathbb{R}[X_0]$ , 则 X 有限生成单非有限展示. 考虑

$$Y = R/(X_0X_1, X_0^2X_2, \dots, X_0^nX_n, \dots),$$

则 R-模同态  $f: X \to Y$  形如  $1 \mapsto F$ . 存在足够大的 m 使得  $f(X_0^m) = F \cdot X_0^m = g(X_0)$ . 此时对任意 k 均有

$$0 = f(0) = f(X_0^m \cdot X_k) = X_k \cdot g(X_0) / (X_0^k).$$

因此  $g(X_0)/(X_0^k)$  恒为 0, 从而  $g(X_0)=0$ . 取  $S=\{1,X_0,X_0^2,\ldots\}$ , 则  $S^{-1}\mathrm{Hom}_R(X,Y)=S^{-1}0=0$ . 但另一方面,

$$S^{-1}X \simeq S^{-1}Y \simeq \mathbb{R}[X_0^{\pm}].$$

显然  $\operatorname{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}X, S^{-1}Y) = \operatorname{End}_{S^{-1}R}(\mathbb{R}[X_0^{\pm}]) \neq 0$ , 遂矛盾.

定义 2 (秩, 纤维). 对 R-模 X 给出的秩函数

$$\operatorname{rank}_X : \operatorname{Spec}(R) \to \mathbb{N}, \quad \mathfrak{p} \mapsto \dim_{R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}} \left(\frac{X}{\mathfrak{p}X}\right)_{\mathfrak{p}}.$$

此处局部化与商模交换, 局部环  $A_{\mathfrak{p}}$  具有唯一的极大理想  $\mathfrak{p}$ , 故

$$\left(\frac{X}{\mathfrak{p}X}\right)_{\mathfrak{p}} \simeq (R/\mathfrak{p} \otimes_{\mathfrak{p}} X)_{\mathfrak{p}} \simeq \frac{R_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}} \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} X_{\mathfrak{p}},$$

称作 X 在 p 处的纤维.

**命题 5** (Noether 环上投射模的等价定义). 对 Noether 环 R 上有限生成模 X, X 投射当且仅当对任意  $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ ,  $X_{\mathfrak{p}}$  是自由  $R_{\mathfrak{p}}$ -模.

证明. 注意到 P 有限表示, 故局部化保持  $\operatorname{Hom}(P,-)$  的正合性, 从而保持投射模. 记局部环  $A:=R_{\mathfrak{p}}$ , 极大理想  $\mathfrak{m}:=\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$ . 取  $M:=X_{\mathfrak{p}}$  的极小有限生成集  $S=\{x_i\}_{1\leq i\leq n}$ , 其在  $A\to A/\mathfrak{m}$  中的项为  $\overline{S}=\{\overline{x_i}\}_{1\leq i\leq n}$ . 记投射模的直和关系  $M\oplus N\simeq A^n\simeq\bigoplus_{1\leq i\leq n}Ax_i$ . 从而

$$M/\mathfrak{m}M \simeq A^n/\mathfrak{m} \simeq M/\mathfrak{m}M \oplus N/\mathfrak{m}N$$

考虑线性空间维度以及中山引理, 得 N=0. 故  $X_{p}$  是自由  $R_{p}$ -模.

相反地, 若  $\operatorname{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(P_{\mathfrak{p}},(-)_{\mathfrak{p}}) \simeq \operatorname{Hom}_{R}(P,-)_{\mathfrak{p}}$  对任意  $\mathfrak{p}$  均正合, 则只需证明正合列间关系

$$L_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{f_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{g_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}} \quad (\forall \mathfrak{p}) \quad \Longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N.$$

由于局部化保持零态射,从而保持链复形。记  $T:=\frac{\ker(f)}{\operatorname{im}(g)}$ ,则  $T_{\mathfrak{p}}=0$  对一切素理想 (包括极大理想) 成立,因此 T=0.

注 5. Kaplansky 定理表明非交换局部环上的非有限生成投射模 (即可数生成投射模之直和) 仍自由. 必要时补充证明.

## 命题 6. 投射模与平坦模的关系如下

证明. 一般地, 有限展示推出有限生成, 投射模推出平坦模, 且投射模有限生成当且记当有限展示. 下证明有限展示平坦模 X 投射. 定义特征模函子为正合函子  $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(-,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ , 具体如下

$$(-)^*: R{\operatorname{-Mod}} \to R^{\operatorname{op}}{\operatorname{-Mod}}, \quad M \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \quad \Big([m \mapsto rm] \mapsto [f(x) \mapsto f(x)r = f(rx)]\Big).$$

取 X 的展示  $R^m \to R^n \to X \to 0$  以及任意 R-S-双模 Y, 有同构

$$Y^* \otimes R^m = (Y^*)^m \simeq (\operatorname{Hom}_R(R,Y)^*)^m \simeq (\operatorname{Hom}_R(R,Y)^m)^* \simeq \operatorname{Hom}_R(R^m,Y)^*.$$

从而有正合列间的同态

$$Y^* \otimes R^m \longrightarrow Y^* \otimes R^n \longrightarrow Y^* \otimes X \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

$$\downarrow \simeq \qquad \qquad \downarrow \simeq \qquad \qquad \downarrow \varphi \qquad \qquad \downarrow \simeq \ldots$$

$$\operatorname{Hom}_R(R^m,Y)^* \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(R^n,Y)^* \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(X,Y)^* \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

其中  $\varphi$  为态射范畴之余核. 依照五引理,  $\varphi$  为同构. 由于  $-\otimes X$  正合, 故  $(-)^*\otimes X\simeq \operatorname{Hom}_R(X,-)^*$  正合, 从 而 X 投射.

命题 7. 依照命题 6 与命题 5, (左) Noether 环 (右) 完美.