关于 Lie 群, 量子群, 晶体基等的历史事件综述.

Part I Lie 群的一致正定性理论

简介 一致正定性研究一列关联对象的正定性关系, 具体应用如编码理论, 统计, 生成矩阵分解算法及不等式等.

(1930s-, Gantmacher, Krein, and Schoenberg 等人为主的老派) 矩阵的一致正定性, 如行列式中非负子式之和等. 如正项 Vandermonde 矩阵中子方阵行列均非负, G_{2,4} 型 Grassmannian 的 Plücker 坐标满足形如 Ptolemy 定理的恒等式

$$\Delta_{12,12}\Delta_{12,34}+\Delta_{12,14}\Delta_{12,23}=\Delta_{12,13}\Delta_{12,24}.$$

即后文所见的 A_2 型丛代数.

- (1994, Lusztig) 于 [Luz93] 提出研究一般代数群中的一致正定性. 主要是 Lie 群 G 中的某一幂幺根 $N_\pm$ 的正定部分, 记做 $G_{\geq 0}\cap N_\pm$. 例如典型群 $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ 中

  $$N=\left\{\begin{pmatrix}1 & * & * \\ & 1 & * \\ & & 1\end{pmatrix}\right\}$$

  的一致正定性 $\Delta_{1,2}$, $\Delta_{1,3}$, $\Delta_{2,3}$, $\Delta_{12,23}$. 满足 A_2 型丛代数关系

  $$\Delta_{12,23}+\Delta_{1,3}=\Delta_{1,2}\Delta_{2,3}.$$

- (Bruhat 2-胞腔分解的一致正定性理论) Bruhat 胞腔即 Lie 群以 Weyl 群元素的为指标的分解, 对有限域上的 Lie 理论与组合学极有作用, 早期工作如 [Iwa65].

例子 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ (A_2 型 Lie 群)的丛代数结构.

Lie 理论汇总

- G 为单连通半单复 Lie 群, $B_\pm$ 为 Borel 子群, $N_\pm$ 为相应的幂幺根, H 为极大环面. G 中具有 Gauss 分解的元素 $x=[x]_-[x]_0[x]_+$ 构成开集 $G_0=N_-HN$.
- 记 G 对应的 Lie 代数为 $\mathfrak{g}:=\mathrm{Lie}\,G$, 则 $\mathfrak{h}:=\mathrm{Lie}\,H$ 为 Cartan 子代数. 记 $\Phi\subseteq\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h},\mathbb{C})\setminus\{0\}$ 为根系, 则有分解

  $$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\bigoplus_{\alpha\in\Phi}\mathfrak{g}_\alpha.$$

  记 $\Pi=\{\alpha_1,\dots,\alpha_r\}\subseteq\Phi$ 为单根, 此处 r 为 Lie 群的秩. 取 $\{\alpha_i^\vee\}_{i=1}^r\subseteq\mathfrak{h}$ 为单余根, 记 $C=(c_{i,j})_{r\times r}$ 为 Cartan 矩阵, 其中 $c_{i,j}:=\langle\alpha_i^\vee,\alpha_j\rangle:=\alpha_j(\alpha_i^\vee)$.
- 对 $\alpha_i\in\Pi$, 总有 $\dim\mathfrak{g}_{\alpha_i}=1$, 从而 $\langle\mathfrak{g}_{\pm\alpha_i}\rangle$ 生成同构于 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 的 Lie 子代数. 记 Lie 代数嵌入同态 $\iota_i:\langle\mathfrak{g}_{\pm\alpha_i}\rangle\hookrightarrow\mathfrak{g}$ 对应 Lie 群间同态 $\phi_i:\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\to G$, 即交换图

  $$\begin{tikzcd}
  \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \arrow[r, "\phi_i"] \arrow[d, bend right, "\mathrm{Lie}"'] & G \arrow[d, bend right, "\mathrm{Lie}"'] \\
  \langle\mathfrak{g}_{\pm\alpha_i}\rangle \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[u, bend right, "\exp"'] & \mathfrak{g} \arrow[u, bend right, "\exp"']
  \end{tikzcd}$$

  记单参数子群

$$x_i(t) = \exp(e_i t) = \phi_i \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N,$$
$$x_{-i}(t) = \exp(f_i t) = \phi_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \in N_-,$$
$$h_i(t) = \exp(h_i t) = \phi_i \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \in H.$$

- 记 Weyl 群为 $\mathrm{span}_{\mathbb{Z}}(\Phi)$ 之自同构群的子群, 其生成元为一切垂直于 α_i 的反射 s_i, 此处 $\alpha_i \in \Pi$ 为任意单根. 另一方面, 可视 $W := \mathrm{Norm}_G(H)/H$. 即,

  $$s_i = \overline{s_i} H, \quad \overline{s_i} := \phi_i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Norm}_G(H).$$

  任取 $w \in W$, 规定其长度为表示自身所需的最小反射数量, 记

  $$\ell(w) := \min\{k \mid s_{i_1} \cdots s_{i_k} = w\} \in \mathbb{N}.$$

- 记 $\dot\cup$ 为无交并. G 有 Bruhat 胞腔分解

  $$G = \dot\bigcup_{w \in W} BwB = \dot\bigcup_{w \in W} B_- w B_-.$$

  任取 $u, v \in W$, 记 $G^{u,v} = BuB \cap B_- v B_-$, 则有 Bruhat 双胞腔分解

  $$G = \dot\bigcup_{u,v \in W} G^{u,v}.$$

$\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ 中 Bruhat 双胞腔 $G^{u,v}$ 的丛代数结构由以下算法给出.

1. 以 $S_3 \simeq W = \langle s_1, s_2 \mid s_1^2 = s_2^2 = (s_1 s_2)^3 \rangle$ ($r = 2$) 为例.
2. 令 $u = \prod_k s_{i_k}$, $v = \prod_l s_{j_l}$. 定义字

   $$\vec{i} = [-r, \ldots, -1, i_1, \ldots, i_{\ell(u)}, -j_1, \ldots, -j_{-\ell(v)}].$$

   为使得模型不过于简单, 此处不妨取 u, v 为最长字 $w_0 = s_1 s_2 s_1$. 即 $u = s_1 s_2 s_1$, $v = s_{-1} s_{-2} s_{-1}$, $r = 2$, 得

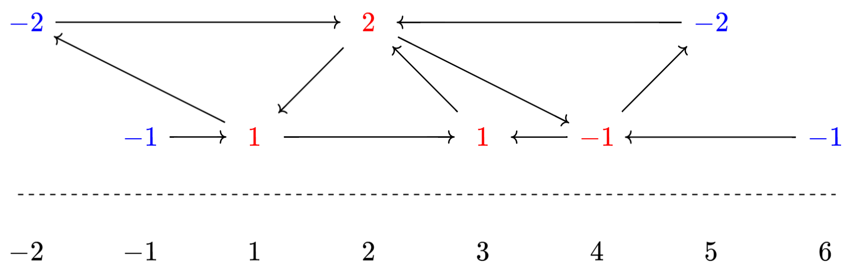
   $$\vec{i} = [-r \cdots -1] \cdot u \cdot v = [-2, -1, 1, 2, 1, -1, -2, -1].$$

3. 将 $\vec{i}$ 中字体标序为 $-2, -1, 1, \ldots, 6$. 定义 k^+ 使得 $|s_{k^+}| = |s_k|$ 的最小后继序数(若不存在, 则记作 $\ell(u) + \ell(v) + 1 = 7$).
4. 下复原丛代数对应的箭图 Q. 此处 $\vec{i}$ 的长度 $m = \ell(u) + \ell(v) + 2$ 为箭图中的顶点总数, u 与 v 中包含的字元数(区分符号)为冻结顶点数. 此处 $|Q_0| = 8$, 冻结顶点数为 4, 从而可迁顶点数为 4. 其中, 可迁顶点对应

   $$\{1 \leq k \leq \ell(u) + \ell(v) \mid k^+ \leq \ell(u) + \ell(v)\}.$$

   对 $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ 而言, 可迁点为 $\{1, 2, 3, 4\}$. 现定义 $k < l$ 的连边为(不考虑冻结点间的边)

   - 若 $k^+ = l$, 则 k 与 l 间连横向边. 方向由 s_l 符号决定, 即 $\underset{k}{\circ} \to \underset{l}{\oplus}$ 或 $\underset{k}{\circ} \leftarrow \underset{l}{\ominus}$.
   - 若同时有 (1) $l < k^+ < l^+$; (2) $c_{|i_k|,|i_l|} \neq 0$, $i_l \cdot i_{k^+} > 0$, 则连斜向边. 方向为 $\underset{l}{\circ} \to \underset{k^+}{\ominus} \quad \underset{l^+}{\ominus}$ 或 $\underset{l}{\circ} \leftarrow \underset{k^+}{\oplus} \quad \underset{l^+}{\oplus}$, 数量为 $\max(-c_{|i_k|,|i_l|}, 1)$.
   - 若同时有 (1) $l < l^+ < k^+$; (2) $c_{|i_k|,|i_l|} \neq 0$, $i_l \cdot i_{l^+} < 0$, 则连斜向边. 方向为 $\underset{l}{\circ} \to \underset{l^+}{\ominus} \quad \underset{k^+}{\oplus}$ 或 $\underset{l}{\circ} \leftarrow \underset{l^+}{\oplus} \quad \underset{k^+}{\ominus}$, 数量为 $\max(-c_{|i_k|,|i_l|}, 1)$.



对应的转移矩阵为

	1	2	3	4
−2	1	1		
−1	1			
1		−1	1	
2	1		−1	1
3	−1	1		1
4		−1	1	
5		1		−1
6				1

对应的丛单项式即 $\{x_i(t)\}_{i=-2,-1,1,\dots,6}$, 对应的行列式恒等式是自明的.

广义主子式 一般性理论见 [FZ03], [FZ98] 等. 记基本权为 $\{\varpi_i\}_{i=1}^r \subseteq \mathfrak{h}^*$, 使得 $\langle \alpha_j^\vee, \varpi_i \rangle = \delta_{i,j}$. 对于 A_r 型 Lie 群而言,

- 对 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}, \mathbb{C}) \ni E_{i,j} : \mathfrak{sl}(r+1, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}, (a_{p,q})_{(r+1)\times(r+1)} \mapsto a_{i,j}$, 有
$$\mathrm{ad}(h)(X_{i,j}) = [(E_{i,i} - E_{j,j})(h)](X_{i,j}).$$
从而定义单根 $\alpha_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1}$.
- 选择并形式地记余单根 $\alpha_i^\vee = X_{i,i} - X_{i+1,i+1} \in \mathbb{C}$, 从而 $\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = c_{i,j}$.
- ϖ_i 恰为 $\sum_{k=1}^i E_{k,k}$, 从而特征 $x^{\varpi_i} = [x]_0^{\varpi_i}$ 对应主子式 $\Delta_{\varpi_i,\varpi_i} = \Delta_{1\cdots i,1\cdots i}$.
- 取 $u, v \in W \simeq S_{r+1}$, 则有主子式
$$\Delta_{u\varpi_i, v\varpi_i}(x) = \Delta_{\varpi_i,\varpi_i}(u^{-1}xv).$$

对非 A_r 型 Lie 群而言, 同样可采用基本权与 Weyl 群定义广义主子式.

例子 G_2 型 Lie 群的丛代数结构(基本思路)

- 采用 引理 2.8 给出的升次公式. 即, 对任意 $f \in \mathbb{C}[G]$, 总有
$$E_i^k(f') = k!f, \quad 若\ f(xt^{h_i}) = t^k f(x), k \geq 0.$$
- 从而对 G_2 型量子群而言, 有 $E_1(\Delta_{\varpi_1,s_1\varpi_1}) = \Delta_{\varpi_1,\varpi_1}$. 考虑逆变换 $\Delta_{\varpi_1,s_1\varpi_1} = F_i(\Delta_{\varpi_1,\varpi_1})$, 以及记 $[F_i]_s = \dfrac{F_i^s}{s!}$, 得
$$\begin{aligned}
&\Delta_{\varpi_1,s_1\varpi_1} = [F_1]_1(\Delta_{\varpi_1,\varpi_1}), && \Delta_{\varpi_1,s_2s_1s_2s_1\varpi_1} = [F_2]_1[F_1]_2[F_2]_1[F_1]_1(\Delta_{\varpi_1,\varpi_1}),\\
&\Delta_{\varpi_1,s_2s_1\varpi_1} = [F_2]_1[F_1]_1(\Delta_{\varpi_1,\varpi_1}), && \Delta_{\varpi_1,w_0\varpi_1} = [F_1]_1[F_2]_1[F_1]_2[F_2]_1[F_1]_1(\Delta_{\varpi_1,\varpi_1}).\\
&\Delta_{\varpi_1,s_1s_2s_1\varpi_1}[F_1]_2[F_2]_1[F_1]_1(\Delta_{\varpi_1,\varpi_1}), &&
\end{aligned}$$
- 依照字 $\vec{i} = (-2, -1, 1, 2, 1, 2, 1, 2)$ 给出 Bruhat 双胞腔 G^{e,w_0} 中的丛代数结构

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & {\color{blue}-1} \arrow[r] & {\color{red}1} \arrow[rr] \arrow[dll] & & {\color{red}1} \arrow[rr] \arrow[dl] & & {\color{blue}1} \arrow[dl] & \\
{\color{blue}-2} \arrow[rrr] & & & {\color{red}2} \arrow[rr] \arrow[ul] & & {\color{red}2} \arrow[rr] \arrow[ul] & & {\color{blue}2} \\
-2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6
\end{tikzcd}
$$

对应的丛变单项式如下

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & {\color{blue}\Delta_{\varpi_1,w_0\varpi_1}} \arrow[r] & {\color{red}\Delta_{\varpi_1,s_2s_1s_2s_1\varpi_1}} \arrow[rr] \arrow[dll] & & {\color{red}\Delta_{\varpi_1,s_2s_1\varpi_1}} \arrow[rr] \arrow[dl] & & {\color{blue}\Delta_{\varpi_1,\varpi_1}} \arrow[dl] & \\
{\color{blue}\Delta_{\varpi_2,w_0\varpi_2}} \arrow[rrr] & & & {\color{red}\Delta_{\varpi_2,s_2s_1s_2\varpi_2}} \arrow[rr] \arrow[ul] & & {\color{red}\Delta_{\varpi_2,s_2\varpi_2}} \arrow[rr] \arrow[ul] & & {\color{blue}\Delta_{\varpi_2,\varpi_2}} \\
-2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6
\end{tikzcd}
$$

待补充.