记号

记$\mathcal{P}$为可测空间$(\Omega, \mathscr{F})$上的测度（或为有符号测度、复测度等），故$\mathcal{P} \in \prod_{n\geq 1} \mathbb{F}^{(n)}$可视作所有至多可数的有序数组，即

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= (p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots) && \text{数组无限,} \\ \mathcal{P} &= (p_1, \cdots, p_n, 0, 0\cdots) && \text{数组有限.} \end{aligned}$$

定义$\cup : (\mathcal{P}_1, \cdots, \mathcal{P}_n, \cdots) \mapsto (\mathcal{P}_1, \cdots, \mathcal{P}_n, \cdots)$为数组之保序无交并。

Rényi 公设：

1. 实值性：$H(\mathcal{P})$ 为非常值的实函数；
2. 对称性：$H(\mathcal{P})$ 关于$\mathcal{P}$中索引p_i对称；
3. 连续性：$H(\mathcal{P})$ 关于$\mathcal{P}$中变元连续（强调：不是关于$\mathcal{P}$连续）；

> *$H \notin C(\{\mathcal{P}\})$。例：不妨设$\mathcal{P}$是至多可列的，定义度量*
>
> $$d(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|p_i^{(1)} - p_i^{(2)}|}{2^i}$$
>
> *即有反例。*

4. 归一性：$H((1/2)) = 1$;
5. 可加性：$H(\mathcal{P}_1 * \mathcal{P}_2) = H(\mathcal{P}_1) + H(\mathcal{P}_2)$;

> *由于对称性在公设内提及，故需考虑数组之顺序，不妨记$\mathcal{P}_1 * \mathcal{P}_2$为矩阵$(p_i^{(1)} p_j^{(2)})$所对应之数组。若不考虑序关系，则*
>
> $$\mathcal{P}_1 * \mathcal{P}_2 := \cup_{p_i^{(1)} \in \mathcal{P}_1, p_j^{(2)} \in \mathcal{P}_2} \{p_i^{(1)} p_j^{(2)}\}$$

6. 中值性：存在单调连续函数$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得

$$H(\mathcal{P}_1\cup\mathcal{P}_2)=g^{-1}\left[\frac{w(\mathcal{P}_1)g(H(\mathcal{P}_1))+w(\mathcal{P}_2)g(H(\mathcal{P}_2))}{w(\mathcal{P}_1\cup\mathcal{P}_2)}\right]$$

其中$w(\mathcal{P})=|\sum_{p_i\in\mathcal{P}}p_i|$为权；

7. 光滑性：$H((q,1-q))$于$q=0$光滑。

信息熵推导

Lemma 于公设5下，对任意$q\neq 0$均有$H((q))=-c_q\log|q|$，其中常数$c_q\in\mathbb{R}$满足对任意$q_1/q_2\in\mathbb{Q}$均有$c_{q_1}=c_{q_2}$。其中，H之可表述性取决于选择公理。

证明：置$f(q):=H((q))$，则对任意$n\in\mathbb{Z}^*$有$f(nq)=nf(q)$，进而对任意$r\in\mathbb{Q}^*$均有$f(rq)=rf(q)$。得证。

Lemma 加之公设3下，对任意$q\neq 0$均有$H((q))=c\log|q|$，其中常数$c\in\mathbb{R}$。

证明：沿用函数f。据实数之完备性，取收敛于$x\in\mathbb{R}^*$的非零有理数列$\{r_i\}$即有$f(r_n)\to f(x)$。得证。

Lemma 加之公设1，即有$H((q))=-c\log|q|$，其中$c\in\mathbb{R}^*$。

证明：显然。

Lemma 加之公设4，对任意$q\neq 0$均有$H((q))=-\log_2|q|$。

证明：显然。

Lemma 加之公设6，则g为线性函数或指数函数。

证明：由公设6知

$$\begin{aligned}H(\mathcal{P})=&H((p_1)\cup\cdots\cup(p_n)\cup\cdots)\\=&g^{-1}\left[\frac{\sum_i w((p_i))g(H((p_i)))}{w((p_1)\cup\cdots\cup(p_n)\cup\cdots)}\right]\\=&g^{-1}\left[\frac{\sum_i|p_i|g(-\log_2|p_i|)}{\sum_i|p_i|}\right]\end{aligned}$$

置$f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R},t\mapsto g(-\log_2 t)$，易知$g$单调连续。由公设5，考虑$H(\mathcal{P}*(q))$则有

$$f^{-1}\left[\frac{\sum_i|p_i|f(|p_iq|)}{|\sum_i p_i|}\right]=|q|f^{-1}\left[\frac{\sum_i|p_i|f(|p_i|)}{|\sum_i p_i|}\right]$$

置$h_q(t)=f(|q|t)$，则

$$h_q^{-1}\left[\frac{\sum_i|p_i|h_q(|p_i|)}{|\sum_i p_i|}\right]=f^{-1}\left[\frac{\sum_i|p_i|f(|p_i|)}{|\sum_i p_i|}\right]$$

可见h_q与f等价平均，下证明f与h_q为线性关系，即$h_q=a_qf+b_q$。

首先，对任意$\mathcal{P}$，$h_q=a_qf+b_q$即说明h_q与f等价平均，下证明h_q一定为a_qf+b_q形式。

Lemma 设$\sum c_n=1,c_n>0$，$\phi(x)$为严格单调且连续的函数，记加权平均
$\mathfrak{R}_\phi(a):=\phi^{-1}[\sum_n c_n\phi(a)]$，则$\mathfrak{R}_\chi(a)\equiv\mathfrak{R}_\psi(a)$的充要条件为存在常数$\alpha$与$\beta$使得
$\chi=\alpha\psi+\beta$.

证明：考虑对任意$t\in[H,K]$

$$\begin{aligned}x&:=\psi^{-1}\left[\frac{K-t}{K-H}\psi(H)+\frac{t-H}{K-H}\psi(K)\right]\\&=\chi^{-1}\left[\frac{K-t}{K-H}\chi(H)+\frac{t-H}{K-H}\chi(K)\right]\end{aligned}$$

则当t遍历(H,K)时，x取遍(H,K)中所有值，因此

$$\begin{aligned}\chi(x)&=\frac{K-t}{K-H}\chi(H)+\frac{t-H}{K-H}\chi(K)\\&=\frac{\psi(K)-\psi(x)}{\psi(K)-\psi(H)}\chi(H)+\frac{\psi(x)-\psi(H)}{\psi(K)-\psi(H)}\chi(K)\\&=\alpha\psi(x)+\beta\end{aligned}$$

必要性得证。充分性显然，故引理得证。

因此得函数方程：$f(|q|t)=s(|q|)f(t)+r(|q|)$，其中$s(|q|)$与$r(|q|)$与$|q|$关联之常数，且$s(|q|)>0$。同时即得$f(|q|)=r(|q|)$。以$y$代$|q|$，得

$$\begin{aligned}f(ty)=s(y)f(t)+f(y)\\f(ty)=s(t)f(y)+f(t)\end{aligned}$$

故$\dfrac{s(t)-1}{f(t)}=\dfrac{s(y)-1}{f(y)}$。因此存在常数$c$使得$s(t)=1+cf(t)$，回代得

$$f(ty)=cf(t)f(y)+f(t)+f(y)$$

1. 当$c=0$时，解即为$f=C\log t$；
2. 当$c\neq 0$时，原方程化为$[cf(ty)+1]=[cf(t)+1][cf(y)+1]$，解为$f=\dfrac{x^\alpha-1}{c}$，这里$\alpha$为任意常数。

故$g(x)=-ax+b$或$a\cdot 2^{(1-\alpha)x}+b$。

Lemma 加之剩余公理，则$g(x)=a\cdot 2^{(1-2k)x}$，其中$k\in\mathbb{N}^+$。

由公理6知$H((q,1-q))=H((q)\cup(1-q))$，故：

当$g(x)=-ax+b$时有

$$-aH((q,1-q))+b=a[q\log_2 q+(1-q)\log_2(1-q)]+b$$

即$H((q,1-q))=-q\log q-(1-q)\log(1-q)$，显然$H\in C^\infty(Q)$。此时

$$H(\mathcal{P})=-\frac{\sum_i|p_i|\log_2|p_i|}{|\sum_i p_i|}$$

当$g(x)=a\cdot 2^{(1-\alpha)x}+b$有

$$a\cdot 2^{(1-\alpha)H(\mathcal{P})}+b=\frac{a\sum_i|p_i|^\alpha+b\sum_i|p_i|}{|\sum_i p_i|}$$

取$\mathcal{P}=(q,1-q)$，由于$\dfrac{|q|+|1-q|}{|q+1-q|}$于$q=0$处不可微，故$b=0$。因此

$$H((q,1-q))=\frac{\log_2[|q|^\alpha+|1-q|^\alpha]}{1-\alpha}$$

显然$\alpha>0$时则$H((0,1))$无界，舍，同时公设1要求$\alpha\neq 0$，故$\alpha<0$。若α非整数，则考虑$q\in\mathbb{R}_+$，有

$$\frac{\mathrm{d}H((q,1-q))}{\mathrm{d}q}=\frac{\alpha}{(\alpha-1)\ln 2}\cdot\frac{q^{\alpha-1}+(1-q)^{\alpha-1}}{q^\alpha+(1-q)^\alpha}$$

故容易推得

$$\frac{\mathrm{d}^n H((q,1-q))}{\mathrm{d}q^n}=C_n\cdot\frac{p_1^{(n)}(q)+p_2^{(n)}(q)[q^{\alpha-n}+(1-q)^{\alpha-n}]}{p_2^{(n)}(q)}$$

其中$p_k^{(n)}(q)$为由$q^{\alpha-m}+(1-q)^{\alpha-m},\quad\mathbb{Z}\ni m<n$组成的多项式。因此取$n$为某一大于$\alpha$之常数，则有$\dfrac{\mathrm{d}^n H((q,1-q))}{\mathrm{d}q^n}=\infty$，矛盾。因此$\alpha$为整数。

同时，α需为偶数，反之$\dfrac{\mathrm{d}^n H((q,1-q))}{\mathrm{d}q^n}$于$q=0^-$及$q=0^+$时不等。

因此

$$H(\mathcal{P})=H_{2k}(\mathcal{P})=-\frac{1}{2k-1}\log_2\left[\frac{\sum_i|p_i|^{2k}}{|\sum_i p_i|}\right]$$

其中$k\in\mathbb{N}^+$。

结论

$$H(\mathcal{P})=H_{2k}(\mathcal{P})=-\frac{1}{2k-1}\log_2\left[\frac{\sum_i|p_i|^{2k}}{|\sum_i p_i|}\right]$$

或

$$H(\mathcal{P})=-\frac{\sum_i|p_i|\log_2|p_i|}{|\sum_i p_i|}$$

均为符合Rényi 公设之信息熵。