作者: 张陈成
学号: 023071910029

K-理论笔记

稳定自由模

1 稳定自由模

定义 1 (有限长度)**.** 称 R-模 X 具有有限长度, 若存在合成列 $X = X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \cdots \supseteq X_n = 0$ 使得每一 X_{k-1}/X_k 均为单模.

命题 1. Jordan–Hölder 定理表明有限长度模的合成列给出恒定的单模列, 至多相差一个置换. 因此对有限长度模的正合列 $0 \to L \to M \to N \to 0$, 有 $l(L)+l(N) = l(M)$. 对有限长度的 R-模 M 以及任取 $f \in \mathrm{End}_R(M)$, 有

$$l(\ker(f)) + l(\mathrm{im}(f)) = l(M).$$

从而 f 是单自同态 $\Longleftrightarrow$ f 是满自同态 $\Longleftrightarrow$ f 是自同构.

定义 2 (自由模的秩)**.** 自由模的长度为秩.

例 1. 除环上的模 (线性空间) 均自由. 对除环 D 上的代数 A 以及自由 A-模 M, 总有

$$\mathrm{rank}_A(M) = \frac{\dim_D(M)}{\dim_D(A)}.$$

一般的, 单 Artin 代数 R 形如 $M_n(D)$, 从而自由 R-模是 $\mathrm{rank}_R \cdot n^2$ 维线性空间.

命题 2. 任意模为自由模之商模.

证明. 此前已证明, 模范畴到集合范畴的自由-遗忘伴随给出自由模到模的满态射 (余单位). 具体地, 取 (左) R-模 M, 则

$$M \simeq \bigoplus_{m \in M} \langle m \rangle \Big/ \{R \text{ 作用给出的商关系}\} \qquad (\simeq FU(M)/\sim).$$

□

定义 3 (指数不变环)**.** 环 R 指数不变, 当且仅当 $\bigoplus_{\kappa_i} R$ 在不同的基数下是不同构的自由 R-模.

命题 3. R 指数不变, 若存在 R 到除环的非平凡环同态 $R \to D$.

证明. 此时 D 为 R-模, 遂有函子

$$D \otimes_R - : R\text{−FreeMod} \to D\mathrm{Vect}, \quad V \mapsto D \otimes_R V.$$

此时自由 R-模的基对应线性空间 $D \otimes_R V$ 的基. 显然 R 指数不变. □

例 2. 以下是指数不变环的例子.

1. 取交换环 A 以及极大理想 $\mathfrak{m}$, 则有环同态 $R \to R/\mathfrak{m}$. 从而交换环指数不变.
2. 一切交换环上的群代数 $k[G]$ 具有环同态 $g \mapsto g^0$, 从而指数不变.
3. 有限维代数为指数不变环, 考虑维度即可.

例 3. 给定环 R 与任意无穷基数 κ, 记自同态环 $\Gamma := \mathrm{End}_R\left(\bigoplus_{\mathbb{N}} R\right)$. 则对任意 $m < \omega$, 有

$$\Gamma^m \simeq \mathrm{Hom}_R\left(\bigoplus_{\mathbb{N}} R, \bigoplus_{m}\left(\bigoplus_{\mathbb{N}} R\right)\right) \simeq \mathrm{Hom}_R\left(\bigoplus_{\mathbb{N}} R, \bigoplus_{\mathbb{N}} R\right) = \Gamma. \tag{1}$$

故 Γ 不是指数不变环.

定义 4 (稳定自由模)**.** 称 P 为稳定自由 R-模, 若存在基数 κ, λ 使得有正合列

$$0 \to P \to R^\lambda \to R^\kappa \to 0. \tag{2}$$

注 1. 结合代数学常识, 自由模 $\underset{\neq}{\Longrightarrow}$ 稳定自由模 $\underset{\neq}{\Longrightarrow}$ 投射模 $\underset{\neq}{\Longrightarrow}$ 平坦模 $\underset{\neq}{\Longrightarrow}$ 无扰模.

命题 4. 若上式中 $\lambda \geq \omega$ 且 $\kappa < \omega$, 则 $P \simeq R^\lambda$.

证明. 若存在 $n \in \mathbb{N}$ 与 $\lambda \geq \omega$ 使得 $R^n \oplus P \overset{\varphi}{\simeq} R^\lambda$, 则有包含关系

$$\varphi(R^n) \hookrightarrow R^m \hookrightarrow R^\lambda.$$

考虑直和 $R^\lambda = R^m \oplus Q$ 以及 $\lambda = \lambda + \omega = \lambda \cdot \omega$, 则有

$$P \simeq Q \oplus (R^m \cap \varphi(P)) \simeq R^\lambda \oplus Q \oplus R^\omega \oplus (R^m \cap \varphi(P)).$$

以下仅需证明 $R^\lambda \oplus Q \simeq R^\lambda$ 以及 $R^\omega \oplus (R^m \cap \varphi(P)) \simeq R^\omega$. 此处仅关注前者. 注意到

$$\begin{aligned} Q \oplus R^\lambda &\simeq Q \oplus R^{\omega\cdot\lambda} \\ &\simeq Q \oplus \underbrace{(R^m \oplus Q) \oplus (R^m \oplus Q) \oplus (R^m \oplus Q) \oplus \cdots}_{\text{可数和}} \\ &\simeq \underbrace{(Q \oplus R^m) \oplus (Q \oplus R^m) \oplus (Q \oplus R^m) \oplus Q \cdots}_{\text{可数和}} \\ &\simeq R^{\omega\cdot\lambda} \simeq R^\lambda. \end{aligned}$$

从而得证. 同理, 若正合列中 $\lambda > \kappa \geq \omega$, 则 $P \simeq R^\lambda$. □

注 2. 因此我们通常关心有限生成的稳定自由模.

命题 5. 给定交换环 R, 则 $P \oplus R \simeq R^2$ 当且仅当 $P \simeq R$.

证明. 在 $P \oplus R \simeq R^2$ 两侧作用二次外微分, 依照 Künneth 定理[1]有

$$\bigwedge^2(P \oplus R) \simeq \bigwedge^2(P) \oplus P \simeq R = \bigwedge^2(R \oplus R).$$

在上式两端作用 $\bigwedge^2$, 直接有 $\bigwedge^2(P) = 0$. 因此 $P \simeq R$. □

[1] 交换环上有等式 $\bigwedge^n(M \oplus N) = \bigoplus_{0 \leq k \leq n} \bigwedge^i(M) \otimes_R \bigwedge^{n-k}(N)$.

注 3. 类似地, 简单应用伴随矩阵可证明 $R^n \oplus P \simeq R^{n+1} \Leftrightarrow P \simeq R$. 命题 5 无法推广至非交换情形. 同时, 也无法将命题 5 推广至 $R^3 \simeq R \oplus P \implies P \simeq R^2$.

命题 6. 考虑 $R := \mathbb{R}[X,Y,Z]/(X^2+Y^2+Z^2-1)$, 置 $P := \{(F,G,H) \in R^3 \mid FX+GY+HZ=0\}$. 则 $R \oplus P \simeq R^3$, 但 $P \not\simeq R^2$.

证明. 满射 $\pi := (X,Y,Z)^T \cdot : R^3 \to R$ 给出分解 $R^3 \simeq P \oplus R$. 继而考虑 $\mathbb{R}^3$ 中向量场

$$R^3 \ni (F,G,H) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad p \mapsto (F(p), G(p), H(p)).$$

此处 π 无非向量场 (X,Y,Z) 的内积算子. 下断言 P 非自由模, 若不然, 则 P 的基为给出两组与 (X,Y,Z) 处处垂直的连续向量场. 对任意 $(x,y,z) \in S^2$, 作为 P-基的向量场与 (X,Y,Z) 张成 $\mathbb{R}^3$. 由于 S^2 上不存在非退化连续向量场 (Poincaré 毛球定理), 矛盾. $\square$

命题 7 (指数不变环强条件)**.** 给定环 R, 以下命题的强度严格递增, 即后者推出前者, 反之未必.

1. R 是指数不变环.
2. 若投射模 P 使得 $R^m \simeq R^n \oplus P$ 对某些 $m, n \in \mathbb{Z}$ 成立, 则 $m \geq n$.

   等价地, 秩 n 的自由模无法由 $m < n$ 个元素生成. 此处商映射 $R^m \to R^n$ 给出可裂短正合列 $0 \to K \to R^m \to R^n \to 0$. 由于 R^n 投射, 故存在投射模的直和分解 $R^m \simeq R^n \oplus P$.
3. 若存在投射模 P 使得 $R^n \simeq R^n \oplus P$, 则 $P = 0$.

   等价地, 任意生成 R^n 的 n 个元素都是自由的.
4. 对任意 $r \in R$, 存在 $x \in R$ 使得 $rxr = r$.

以上四条等价于

1. 对 $X, Y \in R^{m\times n}$, 若 X^TY 与 YX^T 均为单位阵, 则 $m = n$.
2. 对 $X, Y \in R^{m\times n}$, 若 X^TY 为单位阵, 则 $m \geq n$.
3. 对 $X, Y \in R^{n\times n}$, 若 X^TY 为单位阵, 则 YX^T 亦然.

其中, 第三条等价于中山性, 即 $R^n \overset{f}{\twoheadrightarrow} R^n \quad \implies \quad R^n \overset{f}{\simeq} R^n$.

注 4. 称 R 是 Dedekind 有限的, 若单侧逆元一定是双侧逆元. 第三条表明 $GL(R)$ 是 Dedekind 有限的.

2 对偶模, 投射模的结构

定义 5 (对偶模)**.** 定义左 R-模 P 的对偶模为左 R^{op}-模 $P^* := \mathrm{Hom}_R(P, R)$.

定理 1 (对偶基定理)**.** 左 R-模 P 是投射模, 当且仅当存在指标集 I 与 $\{(x_i, f_i) \in P \times P^*\}_{i\in I}$, 使得对任意 $x \in P$ 总有限和的分解[2]

$$x = \sum_{i\in I} f_i(x) \cdot x_i.$$

[2] 若将 x 写作 $\sum_{i\in I} a_i \cdot x_i$ 之有限和形式, 则分解不必唯一; 显然, 分解唯一当且仅当 P 是自由模.

证明. 若 $\{x_i\}_{i\in I}$ 与 $\{f_i\}_{i\in I}$ 既定, 今考虑满态射

$$\varphi:\bigoplus_{i\in I}Re_i\to P,\quad \sum r_ie_i\mapsto\sum r_ia_i.$$

可检验 φ 的右逆为

$$\mu:P\to\bigoplus_{i\in I}Re_i,\quad x\mapsto\sum f_i(x)e_i.$$

此处 $\varphi(\mu(x))=\sum\varphi(f_i(x)e_i)=\sum f_i(x)e_i=x$. 由 φ 可裂满知 P 投射.

反之, 若 P 投射, 考虑某自由模到 P 的可裂满态射即可构造 $\{x_i\}_{i\in I}$ 与 $\{f_i\}_{i\in I}$. □

命题 8. 典范态射 $\varepsilon:P\to P^{**}$ 单.

证明. 对 $x\in\ker(\varepsilon)$, 总有 $f(x)=0$ 对一切 $f\in P^*$ 成立. 依照定理 1 取对偶基, 只能有 $P=0$. □

例 4 (无限 (可数) 生成投射模不必为有限生成投射模之直和)**.** 考虑区间上的实连续函数环 $R=C([0,1])$, 考虑理想 $I:=\{f\in R\mid\overline{\operatorname{supp}(f)}\subseteq(0,1]\}$. 下依次证明

1. I 是投射 R-模.
2. 有限生成 R-投射模自由.
3. I 非自由模.

对第一条, 依照定理 1 构造基底如下

$$\begin{aligned}
y_0 &:= \text{ 折线段 }\quad (0,0)-(2^{-1},0)-(1,1),\\
y_k &:= \text{ 折线段 }\quad (0,0)-((k+3)^{-1},0)-((k+2)^{-1},1)-((k+1)^{-1},0)-(1,0)\quad (k\in\mathbb{N}_+).
\end{aligned}$$

取 $x_k\in R$ 使得 $x_k^2=y_k$, 记 $f_k:x\mapsto x\cdot x_k$. 注意到 $\{y_k\}_{k\geq0}$ 为 $(0,1]$ 的单位分解, 依定义知有限和 $x=\sum_{k\geq0}f_k(x)\cdot x_k$ 对一切 $x\in R$ 成立. 根据定理 1 之刻画, I 是投射 R-模.

对第二条, 依照 Swan 定理知 $[0,1]$ 可缩, 从而有限生成的投射模自由. 有无更直接证明?

对第三条, 若 $I\simeq\bigoplus_{i\in I}Re_i$, 则 $\operatorname{Ann}_R(e_i)=(0)$, 但任意 $x\in I$ 的零化理想非零, 矛盾.

原旨 1. 无限生成投射模为可数生成投射模的直和.