范畴论简介

范畴简介

Definition 1.1.1. 范畴 $\mathcal{C}$ 包含三要素

- $\mathcal{C}$ 中对象所成的类, 记作 $\mathsf{Obj}(\mathcal{C})$.
- $\forall A, B \in \mathsf{Obj}(\mathcal{C})$, 记 $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ 为 A 至 B 的态射.
- 对任意 $A, B, C \in \mathsf{Obj}(\mathcal{C})$, 总存在态射的复合

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) &\to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C) \\ (f, g) &\mapsto gf.\end{aligned}$$

Definition 1.1.2. 以上定义出的范畴 $\mathcal{C}$ 满足如下公理

- **A1.** 在有意义时总有复合 $(fg)h = f(gh)$.
- **A2.** 对任意 $A \in \mathsf{Obj}(\mathcal{C})$, 存在 $1_A \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ 使得

$$\begin{aligned}\forall f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, A), &\quad 1_A f = f. \\ \forall g \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \cdot), &\quad g 1_A = g.\end{aligned}$$

- **A3.** $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \cap \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D) \neq \emptyset$ 若且仅若 $(A = C) \wedge (B = D)$.

Definition 1.1.3. 取 $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, 称

- f 为单的若且仅若对任意 $g, h \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A), fg = fh \Leftrightarrow g = h$.
- f 为满的若且仅若对任意 $g, h \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C), gf = hf \Leftrightarrow g = h$.

Notation 1.1.4. 记 $f : A \rightarrowtail B$ 为单的 f. 记 $f : A \twoheadrightarrow B$ 为满的 f.

Def. 取 $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, 称 f 为同构 (可逆) 若且仅若存在 $g \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ 使得

$$gf = 1_A, \quad fg = 1_B.$$

此时称 A 与 B 为同构的.

Examples. 常见范畴如下

Ex1. $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ 为单且满的 $\Longleftarrow f$ 为同构, 反之未必

▼ **Proof of the theorem**

一方面, f 为同构时一定存在 f' 使得 $ff' = 1_B$, 从而

$$gf = hf \Leftrightarrow gff' = hff' \Leftrightarrow g = h.$$

得 f 为满的. 同理 f 为单的.

另一方面, 考虑 Hausdorff 空间与连续映射所成的范畴, 则嵌入 $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ 为单且满的 (满足左右消去律, 但并非同构).

Ex2. 对 $\mathcal{C} = \mathbb{S}ets$, 证明单态射即单射.

▼ **Proof.**

$\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, f为单的若且仅若对任意 $g, h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$ 总有

$$g = h \Leftrightarrow fg = fh.$$

f 为单时, 下证明 f 为单设. 若存在不同的 $x_1, x_2 \in A$ 使得 $f(x_1) = f(x_2)$, 考虑 g 与 h 分别为将一切 C 中元素映至 x_1 与 x_2 的态射即得 f 非单, 矛盾.

f 为单射时, 下证明 f 为单的, 只需证 $fg = fh \implies g = h$. 若存在 $x_0 \in C$ 使得 $fg(x_0) = fh(x_0)$ 而 $g(x_0) \neq f(x_0)$, 则 $g(x_0)$ 与 $h(x_0)$ 在 f 下的像相同, 矛盾!

Example. 称 $(X, \leqq)$ 为半序集若且仅若 X 满足自反性 $(x \leqq x)$ 与传递性 $((x \leqq y) \wedge (y \leqq z) \implies x \leqq z)$. 例如整数集关于整除偏序形成半序集, 至少 $-1 \leqq 1$ 且 $1 \leqq -1$.

记范畴 $\mathcal{C}$ 为半序集 X 与偏序关系 $\leqq$ 所成的范畴. 取

- $\mathsf{Obj}(\mathcal{C}) = X$.
- $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) = \begin{cases} \{i_y^x\}, & x \leqq y, \\ \emptyset, & \text{otherwise.} \end{cases}$$
- 态射满足复合关系 $i_z^y i_y^x = i_z^x$.

Example. 称 $\mathcal{C}$ 为小范畴若且仅若 $\mathsf{Obj}(\mathcal{C})$ 为集合 (并非真类).

Def. 称 $\mathcal{C}^{op}$ 为 $\mathcal{C}$ 的反变范畴, 若且仅若

- $\mathsf{Obj}(\mathcal{C}^{op}) = \mathsf{Obj}(\mathcal{C})$.

- $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A,B)=\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(B,A)$. 特别地,

$$f\in\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(B,A)\Leftrightarrow f^{op}\in\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A,B).$$

- $g^{op}f^{op}=(fg)^{op}$.

Proposition. $(\mathcal{C}^{op})^{op}=\mathcal{C}$.

▼ **Proof of the proposition**

显然 \mathsf{Obj}(\mathcal C)=\mathsf {Obj}((C^{op})^{op}). 注意到 f 与 (f^{op})^{op} 间存在自然对应, 故 (\mathcal C^{op})^{op}=\mathcal C.

Prop. $f\in\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ 为单 (满), 若且仅若 f^{op} 为满 (单).

▼ **Proof of the proposition**

注意到

$$(f^{op}g^{op}=f^{op}h^{op})\Leftrightarrow(gf)^{op}=(hf)^{op}\Leftrightarrow gf=hf.$$

反之亦然即可.

Example. 记 $\mathbb{G}$ 为群范畴, 即 $\mathsf{Obj}(\mathbb{G})$ 为一切群, 态射为群同态. 则**满(单)态射等价于满(单)同态**.

▼ **Proof of the theorem**

单(满)同态视作集合运算时为单射与满射, 自然满足右(左)消去律, 从而时单(满)态射.

兹有断言: 群单态射为单同态. 反之, 若 $f\in\operatorname{Hom}_{\mathbb{G}}(G,H)$ 非单同态, 取

$$\begin{aligned}g_1&:\ker(f)\to\ker(f), && x\mapsto x,\\ g_2&:\ker(f)\to\{e\}, && x\mapsto e.\end{aligned}$$

易知 $f\circ g_1=f\circ g_2:\ker(f)\to\{e\}$, 但 $g_1\neq g_2$.

兹有断言: 群满态射为满同态. 取 $f\in\operatorname{Hom}_{\mathbb{G}}(G,H)$ 为满态射, $R:=H/f(G)$ 为右陪集分解, 记 S 为 $R\dot\cup\{\emptyset\}$ 的置换群. 显然 H 在 S 上的右作用给出浸入

$$g_1:H\hookrightarrow S,h\mapsto\begin{pmatrix}f(G)h'\mapsto f(G)h'h,\\ \{\infty\}\mapsto\{\infty\}.\end{pmatrix}$$

取对换 $\sigma \in S$, 其中 $f(G) \leftrightarrow \{\infty\}$. 定义 $g_2(x) := \sigma \circ g_1(x) \circ \sigma$. 显然 $g_1 \neq g_2$. 根据满态射定义, $g_1 \circ f = g_2 \circ f$.

注意到 $g_1 \circ f(x)$ 与 $g_2 \circ f(x)$ 为相同的置换若且仅若 $g_1 \circ f(x)$ 与 σ 可交换, 若且仅若 $f(x)$ 固定 $f(G)$. 从而 S 只能为交换群, 即 $f(G) = H$.

Example. 记 ${}_R\mathcal{M}$ 为左 R-模范畴, 即 $\mathsf{Obj}({}_R\mathcal{M})$ 为一切左 R-模, 态射为左 R-模同态. 则**满(单)态射等价于满(单)同态**.

▼ **Proof of the theorem**

同上, 单(满)同态视作集合运算时为单射与满射, 自然满足右(左)消去律, 从而时单(满)态射.

反之, 若 $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ 非左 R-模的单同态, 取

$$
\begin{aligned}
g_1 &: \ker(f) \to \ker(f), \quad && x \mapsto x, \\
g_2 &: \ker(f) \to \{e\}, && x \mapsto e.
\end{aligned}
$$

则 $f \circ g_1 = f \circ g_2 : \ker(f) \mapsto \{e\}$, 而 $g_1 \neq g_2$.

反之, 若 $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ 非左 R-模的满同态, 取

$$
\begin{aligned}
g_1 \ &:N \to N, && x \mapsto x, \\
g_2 \ &:N \to N/\mathrm{im}(f), \quad && x \mapsto x + \mathrm{im}(f).
\end{aligned}
$$

从而 $g_1 \circ f = g_2 \circ f : M \mapsto \{e\}$, 而 $g_1 \neq g_2$.

Example. 记 $\mathbb{R}ing$ 为环范畴, 即 $\mathsf{Obj}(\mathbb{R}ing)$ 为一切环, 态射为环同态. 则**单态射等价于单同态**; 但是, **满同态推出满态射, 而反之未然**.

▼ **Proof of the theorem**

下仅例证**对环范畴而言, 满态射一般不蕴含满同态**.

环 R 到分式域的嵌入为满态射. 例如 $f : R \to \mathrm{frac}(R), x \mapsto x$ 为满态射, $g_1, g_2 : \mathrm{frac}(R) \to S$ 满足 $g_1 \circ f = g_2 \circ f$. 显然 $g_i \circ f$ 对应唯一的 g_i (这也是分式域的泛性质), 从而 $g_1 = g_2$.

Def. 称 $I \in \mathsf{Obj}(\mathcal{C})$ 为起始元, 若 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(I, X)$ 有且仅有一个元素, $\forall X \in \mathsf{Obj}(\mathcal{C})$.

Def. 称 $T \in \mathsf{Obj}(\mathcal{C})$ 为终末元, 若 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, T)$ 有且仅有一个元素, $\forall X \in \mathsf{Obj}(\mathcal{C})$.

Def. 称 $Z \in \mathsf{Obj}(\mathcal{C})$ 为零元当且仅当其同为初始元与终末元.

Example. 单元集合为 $\mathbb{S}tes$ 中的终末元. $\mathbb{S}ets$ 中无初始元.

Example. 0 为 $\mathbb{A}G$ 中的零元; $(\mathbb{R}, \leq)$ 中不含初始元与终末元.

Thm. $\mathcal{C}$ 为含 0 元的范畴. 则

1. 对任意给定的零元 x, y 与 x 同构当且仅当 y 为零元.
2. 取 Z 为零元, 记 $\{0_{AZ}\} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Z), \{0_{ZB}\} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, B)$, 复合态射

$$A \xrightarrow{0_{AZ}} Z \xrightarrow{0_{ZB}} B.$$

与零元之选取无关.

▼ **Proof of the theorem**

对 **1.**, 取任意零元 Z 与 Z', (唯一地) 取 $f : Z \to Z', g : Z' \to Z$. 由于 $fg = 1_Z, gf = 1_{Z'}$, 从而 $Z \cong Z'$. 相反地, 若 A 与零元 Z 同构, 则存在唯一的 $f : A \to Z$, $g : Z \to A$. 因此

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A) =: \{gh \mid h : C \to Z\}.$$

为一元集, 即 A 为终末元. 同理, A 为起始元.

对 **2.**, 任取 Z 与 Z', 构造如下交换图. 易见

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dr, "0_{ZB}"] \arrow[dd, bend right, "g"'] & \\
A \arrow[ur, "0_{AZ}"] \arrow[dr, "0_{AZ'}"'] & & B \\
& Z' \arrow[ur, "0_{Z'B}"'] \arrow[uu, bend right, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

$$0_{Z'B}0_{AZ'} = (0_{ZB}g)(f0_{AZ}) = 0_{ZB}(gf)0_{AZ} = 0_{ZB}0_{AZ}.$$

🔗 链接

Def. 对含有零元 Z 的范畴 $\mathcal{C}$, 记 $0_{AB} = 0_{ZB}0_{AZ}$ 为 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ 中的零态射.

Proposition. $\mathcal{C}$ 为有零元的范畴, 取 $f : A \to B, g : B \to C$. 若 $f = 0$ 或 $g = 0$, 则 $gf = 0$.

▼ **Proof of the proposition**

不妨设 Z 为零元, 则 $f = 0$ 时

$$gf = g0_{AB} = (g0_{ZB})0_{AZ} = 0_{ZC}0_{AZ} = 0_{AC}.$$

$g=0$ 时

$$gf=0_{BC}f=0_{ZC}(0_{BZ}f)=0_{ZC}0_{AZ}=0_{AC}.$$

Definition. 记 $\{X_i\}_{i\in I}$ 为一族 $\mathcal{C}$ 中以 I 为指标的对象, 称 X 为 $\{X_i\}_{i\in I}$ 的直积若且仅若存在一族投影态射 $p_i:X\to X_i$ 使得满足泛性质:

对任意 $Y\in\mathsf{Obj}(\mathcal{C})$, 与态射 $f_i:Y\to X_i$, 存在唯一的 $f:Y\to X$ 使得 $p_if=f_i$. 常记作 $(X,p_i)=:\prod_{i\in I}X_i$.

Prop. (X,p_i) 与 (X',p_i') 均为 $\{X_i\}_{i\in I}$ 之直积, 则 $X\cong X'$.

▼ **Proof of the proposition**

考虑态射 $f:X\to X'$, $g:X'\to X$. 根据直积性质得交换图.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dd, "f"'] \arrow[dr, "p_i"] & & X' \arrow[ll, "g"'] \arrow[dl, "p'"'] \\
& X_i & \\
X' \arrow[ur, "p'_i"] \arrow[rr, "g"'] & & X \arrow[ul, "p_i"'] \arrow[uu, "f"']
\end{tikzcd}$$

🔗链接

态射 p_i 与 p_i' 满足 $p_i=p_i(gf)$, $p_i'=p_i'(fg)$. 由唯一性知 $gf=1_X$, $fg=1_{X'}$. 从而 X 与 X' 之间存在同构.

Def. 记 $\{X_i\}_{i\in I}$ 为一族 $\mathcal{C}$ 中以 I 为指标的对象, 称 X 为 $\{X_i\}_{i\in I}$ 的余直积若且仅若存在一族嵌入态射 $q_i:X_i\to X$ 使得满足泛性质:

对任意 $Y\in\mathsf{Obj}(\mathcal{C})$, 与态射 $g_i:X_i\to Y$, 存在唯一的 $g:X\to Y$ 使得 $gq_i=g_i$. 常记作 $(X,q_i)=:\coprod_{i\in I}X_i$.

Prop. (X,q_i) 与 (X',q_i') 均为 $\{X_i\}_{i\in I}$ 之余直积, 则 $X\cong X'$.

▼ Proof of the proposition

同"直积在同构意义下唯一"之证明过程.

Prop. $\mathcal{C}$ 中直积 (X,p_i) 等同于 $\mathcal{C}^{op}$ 中余直积 (X,q_i).

Thm. 记 $\mathcal{C}$ 为含零元的范畴, 则

- 取 $\prod_{i\in I}X_i$, 则对任意 $j\in I$, 存在唯一的 $f_j:X_j\to X$ 使得

$$p_if_j=\begin{cases}1_{X_i}, & j=i,\\ 0, & j\neq i.\end{cases}$$

此时 p_i 为满的.

- 取 $\coprod_{i\in I} X_i$, 则对任意 $j \in I$, 存在唯一的 $g_j : X \to X_j$ 使得

$$g_j q_i = \begin{cases} 1_{X_i}, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$$

此时 p_i 为单的.

▼ **Proof of the theorem**

定义

$$f_j^i : X_i \to X_j, f_j^i = \begin{cases} 1_{X_i}, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$$

端详下交换图, 不难看出唯一的 f_j 与 g_j 即为所得.

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[d, "f_j^i"] & \coprod_i X_i \arrow[l, "p_i"'] \\ X_j \arrow[ur, "\exists \mid f_j"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "q_i"] \arrow[d, "f_j^i"] & \coprod_i X_i \arrow[dl, "\exists \mid g_j"] \\ X_j & \end{tikzcd}$$

🔗链接

Example. 记半序关系所称的范畴 $\mathcal{C} = (\mathbb{R}, \leq)$, 其中

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) = \begin{cases} \{i_y^x\}, & x \leq y, \\ \emptyset, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

则 $\prod_{i\in I} r_i = \inf\{r_i\}_{i\in I}$, $\coprod_{i\in I} r_i = \sup\{r_i\}_{i\in I}$.

▼ **Proof**

首先应保证 $\prod_{i\in I} r_i$ 与一切 r_i 可建立态射, 从而 $\prod_{i\in I} r_i \leq \inf\{r_i\}_{i\in I}$. 若 $\prod_{i\in I} r_i < \inf\{r_i\}_{i\in I}$, 则任取 $r_- \in (\prod_{i\in I} r_i, \inf\{r_i\}_{i\in I})$, 总有

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(r_-, \prod_{i\in I} r_i)$ 为空. 因此 r_- 到任意 r_i 的态射为空, 矛盾.

余直积同理.

Example. 正整数整除关系所称的范畴 $\mathcal{C} = (\mathbb{Z}_{\geq 1}, |)$ 中, 直积为数组的最大公因数, 余直积为数组的最小公倍数.

加性范畴

Def. 称 $\mathcal{C}$ 为预加性范畴若且仅若其包含以下性质:

1. 包含零元.
2. 一切 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ 均为加法 Abel 群.
3. 在定义完备时, 分配律成立.

Def. 称预加性范畴为加性范畴若且仅若其余直积均有限.

Example. $\mathbb{S}ets$ 不是加性范畴. $\mathbb{A}G$ 为加性范畴.

Thm. 记 $\{X_i\}_{i=0}^n \subset \mathsf{Obj}(\mathcal{C})$, $q_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, X_0)$. 则

1. $(X, q_i) = \coprod_{i=1}^n X_i$ 当且仅当对任意 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 总有唯一的 $p_j : X \to X_i$ 使得

$$p_j q_j = \begin{cases} 1_{X_i}, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$$

2. 上述 p_i 使得 $(X, p_i) = \prod_{i=1}^n X_i$.

▼ **Proof of the theorem**

定义

$$f_j^i : X_i \to X_j, f_j^i = \begin{cases} 1_{X_i}, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$$

$\Rightarrow$: 根据余直和之定义, 存在唯一的 $p_j : X \to X_j$ 使得 $p_j q_i = f_j^i$. 注意到

$$\left(\sum_{j=1}^n q_j p_j \right) q_i = \sum_{j=1}^n (q_j)(p_j q_i) = q_i, \quad \forall i \in I.$$

$\Leftarrow$: $\forall Y \in \mathsf{Obj}(\mathcal{C})$, 取态射 $f_i : X_i \to Y$, 定义 $f : X \to Y$ 为 $f := \sum_{j=1}^n f_j p_j$. 注意到

$$fq_i = \sum_{j=1}^n f_j(p_j q_i) = f_i, \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n.$$

兹有断言: 存在唯一的 $f : X \to Y$ 使得 $fq_i = f_i$. 今取 $g : X \to Y$ 使得 $gq_i = f_i$, 则

$$g = 1_X \ = g\sum_{j=1}^n q_j p_j = \sum_{j=1}^n (gq_j)p_j = \sum_{j=1}^n f_j p_j = f.$$

继而证明上述 p_i 使得 $(X, p_i) = \prod_{i=1}^n X_i$. 对任意态射 $h_i : Y \to X_i$, 记 $h = \sum_{j=1}^n q_j h_j$, 则

$$p_i h = \sum_{j=1}^n (p_i q_j) h_j = h_i.$$

从而存在 h 使得 $p_i h = h_i$. 今证明 h_i 之唯一性, 若 $h' : Y \to X$ 同样满足 $p_i h' = h_i$, 则

$$h' = 1_X h' = \left(\sum_{j=1}^n q_j p_j\right) h' = \sum_{j=1}^n q_j (p_j h') = \sum_{j=1}^n q_j h'_j = h.$$

是以上述 p_i 使得 $(X, p_i) = \prod_{i=1}^n X_i$.

Prop. 若 $\mathcal{C}$ 为加性范畴, 则 $\mathcal{C}^{op}$ 亦然.

▼ **Proof**

取 $\{X_i\}_{i=1}^n \subset \mathsf{Obj}(\mathcal{C})$, 考虑 $(X, p_i^{op}) = \coprod_{i=1}^n X_i$ 即可.

Abel 范畴

Def. 称 $f : A \to B$ 为加性范畴 $\mathcal{A}$ 中的态射, 定义

- $\ker(f)$ 为态射 $i : K \to A$, 满足 $fi = 0$. 同时对于 $\forall g : X \to A$ 使得 $fg = 0$, 存在唯一的 $\theta : X \to K$ 使得 $g = i\theta$.

- $\operatorname{coker}(f)$ 为态射 $\pi : B \to C$ 使得 $\pi f = 0$. 同时对于 $\forall g : B \to X$ 使得 $gf = 0$, 存在唯一的 $\theta : C \to X$ 使得 $g = \theta\pi$.

换言之, 使得如下图交换

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, blue, "\exists \mid \theta"'] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "0"] & \\
K \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& X & \\
A \arrow[ur, "0"] \arrow[r, "f"] & B \arrow[u, "g"] \arrow[r, "\pi"] & C \arrow[ul, blue, "\exists \mid \theta"']
\end{tikzcd}$$

🔗链接

Prop. $i^{op} = \operatorname{coker}(f^{op})$, $\pi^{op} = \ker(f^{op})$.

Prop. $\ker(f)$ 与 $\operatorname{coker}(f)$ 唯一.

▼ **Proof**

记 $i : K \to A$ 与 $i' : K' \to A$ 均为 $\ker(f)$, 则有交换图

$$\begin{tikzcd}
& K' \arrow[dl, "\exists \mid \theta"'] \arrow[d, "i'"] \arrow[dr, "0"] \arrow[dd, bend right, dashed, blue, "1_{K'}"] & \\
K \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\exists \mid \theta'"'] & A \arrow[r, "f"] & B \\
& K' \arrow[u, "i'"'] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

🔗链接

从而 $\theta\theta' = 1_K, \theta'\theta = 1_{K'}$, 故 $K \cong K'$.

Prop. $\ker(0)$ 与 $\operatorname{coker}(0)$ 为同构映射.

▼ Proof

注意到如下交换图

其中存在单态射 $A \to K$ 与 $K \to A$ 且其复合为 1_A, 故

- $i : A \to K$,
- $\pi : B \to C$,

均为同构.

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[d, "1_A"] \arrow[dr, "0"] \arrow[dl, bend right, "\cong"'] & & \\
K \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "0_{AB}"] \arrow[dr, "0"] & B \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "1_B"] & C \\
& & B \arrow[ur, bend right, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

🔗链接

Thm. $f : A \to B$ 为加性范畴 $\mathcal{A}$ 中的态射.

1. 若 $\ker(f)$ 存在, 则 f 为单的若且仅若 $\ker(f) = 0$.
2. 若 $\operatorname{coker}(f)$ 存在, 则 f 为满的若且仅若 $\operatorname{coker}(f) = 0$.

▼ **Proof of the theorem**

若 $\ker(f) = 0$, 取 $g, h : X \to A$ 使得 $fg = fh$, 则 $f(g-h) = 0$. 从而存在唯一的 $\theta : X \to K$ 使得 $g - h = 0$, $\theta = 0$. 因此 $g = h$, 从而 f 为单的.

反之, f 为单的, 则 $fi = 0$ 表明 $f = 0$.

Def. 任取 $B \in \mathsf{Obj}(\mathcal{A})$, 考虑态射 $\{(A, f) \mid f : A \to B\}$. 称 (A, f) 与 (A', f') 等价, 若且仅若存在同构 $\theta : A \to A'$ 使得 $f'\theta = f$.

Def. 等价类 $[(A, f)]$ 为 B 的子对象.

Example. B 的子对象可能仅有 $[(B, 1_B)]$.

Def. 任取 $B \in \mathsf{Obj}(\mathcal{A})$, 考虑态射 $\{(f, C) \mid f : B \to C\}$. 称 (f, C) 与 (f', c') 等价, 若且仅若存在同构 $\theta : C \to C'$ 使得 $\theta f = f'$.

Def. 等价类 $[(f, C)]$ 为 B 的商对象.

Def. 称加性范畴为 Abel 范畴, 若且仅若

1. 一切态射存在 $\ker$ 与 coker.
2. 一切单态射为其 coker 的 $\ker$, 一切满态射为其 $\ker$ 之 coker.
3. 任意态射 α 可被分解为 $\lambda\sigma$, 其中 σ 为满的且 λ 为单的.

Example. $\mathbb{A}G$ 为 Abel 范畴.

Def. 称 $\mathbb{F}AG$ 为自由 Abel 群范畴, 当且仅当其态射为群同态, 对象为自由 Abel 群 (即有基底, 亦即对 $g \neq e$ 总有 $o(g) = \infty$).

Example. $\mathbb{F}AG$ 并非 Abel 范畴, 至少商群并非都是自由 Abel 群.

▼ **Proof of the theorem**

记 $A = \langle a \rangle, B = \langle b \rangle$ 为自由 Abel 群, 定义 $f : A \to B$, $f(na) = 2nb, \forall n \in \mathbb{Z}$. 显然 f 为单态射但非同构. 若 $\mathbb{F}AG$ 为 Abel 范畴, 今取 $\pi : B \to C$ 为 f 之 coker, 其中 C 为自由 Abel 群, 则 $0 = \pi f(a) = \pi(2b) = 2\pi(b) \in C$. 由于 C 自由, 从而 $\pi(b) = 0$. 是故 $\pi \equiv 0$, f 为同构, 导出矛盾.

Thm. 若 Abel 范畴中态射同为单与满的, 则为同构.

▼ **Proof of the theorem**

取 $\alpha \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ 单且满, 今证明 α 为同构. 注意到

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[dr, tail, "i"] & & D \arrow[dr, tail, "\lambda"] & & C \\
& A \arrow[ur, two heads, "\sigma"] \arrow[rr, tail, two heads, "\alpha"] & & B \arrow[ur, two heads, "\pi"] &
\end{tikzcd}$$

🔗链接

显然 $i = \ker(\alpha)$ 等价于 $i = \ker(\sigma)$, 即对任意 $g : X \to A$ 使得 $\alpha g = 0$, 存在唯一的 $\theta : X \to K$ 使得 $i\theta = g$; 而 $\lambda\sigma g = 0 = \lambda 0$, 根据单态射性质知 $\sigma g = 0$, 进而 $\ker(\alpha)$ 与 $\ker(\sigma)$ 等价.

同理, 由 $h\lambda\sigma = 0\sigma \Leftrightarrow h\lambda = 0$ 可知 $\operatorname{coker}(\alpha)$ 与 $\operatorname{coker}(\lambda)$ 等价. 由于 $\lambda = \ker(0)$, $\sigma = \operatorname{coker}(0)$ 均为同构, 则 $\alpha = \lambda\sigma$ 为同构.

Def. 记 $\alpha : A \to B$ 为 Abel 范畴中的态射, 记像 $\operatorname{im}(\alpha) := \ker(\operatorname{coker}(\alpha))$.

Prop. α 的像无非分解 $\alpha = \lambda\sigma$ 中的 \lambda.

▼ **Proof**

注意到

$$\begin{aligned}\ker(\operatorname{coker}(\alpha)) &= \ker(\operatorname{coker}(\lambda)) \\ &= \ker(\pi) \\ &= \lambda.\end{aligned}$$

Def. 称 $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ 为 Abel 范畴中在 B 处正合的列, 若且仅若 $\operatorname{im}(\alpha) = \ker(\beta)$.

Def. 左正合列具有形式 $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$.

Def. 右正合列具有形式 $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$.

Def. 正合列为左正合且右正合的列.

函子

Def. 称 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 为范畴间的共变函子, 若且仅若满足

F1. $\forall C \in \mathsf{Obj}(\mathcal{C}), FC \in \mathsf{Obj}(\mathcal{D})$.

F2. $\forall C \in \mathsf{Obj}(\mathcal{C}), F(1_{\mathcal{C}}) = 1_{FC}$.

F3. 若 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)$, 则 $Ff \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FC_1, FC_2)$.

F4. $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2), \forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_2, C_3),\ F(gf) = FgFf$.

Def. 称 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 为范畴间的共变函子, 若且仅若满足 **F1-2.** 与

F3'. 若 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)$, 则 $Ff \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FC_2, FC_1)$.

F4'. $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2), \forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_2, C_3), F(gf) = FfFg$.

Remark. 通常定义函子为共变或反变的.

Example. $\forall A \in \mathsf{Obj}(\mathcal{C})$, 定义 $F : \mathcal{C} \to \mathbb{S}ets$ 为

- $\forall B \in \mathsf{Obj}(\mathcal{C}), FB = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.
- $\forall \tau : B \to B'$, $F\tau : FB \to FB'$ 满足 $(F\tau)f = \tau f$ 对任意 $f \in FB$ 成立.

此处 F 为共变函子.

同理, $\forall A \in \mathsf{Obj}(\mathcal{C})$, 定义 $G : \mathcal{C} \to \mathbb{S}ets$ 为

- $\forall B \in \mathsf{Obj}(\mathcal{C}), GB = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$.
- $\forall \tau : B \to B', G\tau : GB' \to GB$ 满足 $(G\tau)f = f\tau$ 对任意 $f \in GB'$ 成立.

此处 F 为反变函子.

Example. 置 $\mathcal{C} = \mathbb{G}$, $\mathcal{D} = \mathbb{A}G$. 对任意群 G, 定义 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 满足 $FG = G/G'$, 其中 G' 为换位子群. 则同态 $f : G \to H$ 诱导

$$Ff : G/G' \to H/H'.$$

此处 F 为共变函子.

Example. 忘却函子 $F : \mathbb{R}ing \to \mathbb{A}b$ 满足 $F(R,+,\cdot) \to (R,+), F\varphi = \varphi$.

Def. 称范畴 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 间的共变函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$

- 为满的, 若且仅若 $\forall A, B \in \mathsf{Obj}(\mathcal{C})$, 总有满射

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, FB).$$

- 为忠实的, 若且仅若 $\forall A, B \in \mathsf{Obj}(\mathcal{C})$, 总有单射

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, FB).$$

- 为忠实浸入, 若且仅若 F 为满的, 忠实的, 且作用在对象上为一一的.

Def. 称加性范畴 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 间的函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 为加性函子, 若且仅若

$$F(f+g) = Ff + Fg, \quad \forall f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B).$$

Def. 称 Abel 范畴 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 间的加性共变函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 为

- 半正合的, 若且仅若 $\mathcal{C}$ 中正合列 $(0 \to)A \to B \to C(\to 0)$ 推出正合列 $FA \to FB \to FC$.
- 左正合的, 若且仅若 $\mathcal{C}$ 中正合列 $0 \to A \to B \to C(\to 0)$ 推出正合列 $0 \to FA \to FB \to FC$.
- 右正合的, 若且仅若 $\mathcal{C}$ 中正合列 $(0 \to)A \to B \to C \to 0$ 推出正合列 $FA \to FB \to FC \to 0$.
- 正合的, 若且仅若 $\mathcal{C}$ 中正合列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 推出正合列 $0 \to FA \to FB \to FC \to 0$.

此处考虑或忽视括号中内容均可, 同为正合性之等价定义.

关于 Abel 范畴上加性反变函子的正合性之序数同理, 此处从略.

自然变换

Def. 取 $E, F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 间的共变函子, 自然变换 $\tau : E \to F$ 为一族映射满足 $\tau_A : EA \to FA, \forall A \in \mathsf{Obj}(\mathcal{A})$, 使得对任意 $f : A \to A'$ 总有交换图

$$\begin{tikzcd} EA \arrow[r, "Ef"] \arrow[d, "\tau_A"'] & EA' \arrow[d, "\tau_{A'}"] \\ FA \arrow[r, "Ff"'] & FA' \end{tikzcd}$$

🔗链接

Def. 若自然变换 τ_A 对 $\forall A \in \mathsf{Obj}(\mathcal{A})$ 均为同构, 则称 τ 为自然同构, 记作 $E \cong F$.

Example. 记 $\mathcal{V}$ 为域 k 上线性空间所成之范畴, $\forall V \in \mathsf{Obj}(\mathcal{V})$, 记 $V^* := \mathrm{Hom}_k(A, k)$ 为对偶, 同理有 V^{**}.
定义共变函子 $F : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ 满足

- $FV = V^{**}, \forall V \in \mathsf{Obj}(\mathcal{V})$.
- $Ff = f^{**} := (f^*)^*, \forall f \in \mathrm{Hom}_k(V_1, V_2)$.

定义自然变换 $\tau_V : V \to V^{**}$ 为

$$\tau_V(x)(\theta) =: \theta(x), \quad \forall x \in V, \theta \in V^*.$$

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "1f"] \arrow[d, "\tau_{V_1}"'] & V_2 \arrow[d, "\tau_{V_2}"] \\ V_1^{**} \arrow[r, "Ff = f^{**}"] & V_2^{**} \end{tikzcd}$$

🔗链接

容易验证右侧交换图. 从而 τ 为 $1_{\mathcal{V}}$ 到 F 的自然变换.

▼ **Proof of the theorem**

实际上, 对任意 $x \in V_1, \theta \in V_2^*$, 总有 $\tau_{V_2}(1_{\mathcal{V}} f)(x)(\theta) = \theta f(x)$. 注意到 f^* 诱导映射

$$f^* : V_2^* \to V_1^*, (\theta : V_2 \to k) \mapsto \theta f.$$

从而 $(f^*)^* \tau_{V_1}(x)(\theta) = \tau_{V_1}(x) f^* \theta = (f^* \theta)x = \theta f(x)$.

$\mathbb{S}ets$	set	map

从而根据余直积之定义, 存在唯一的 $h_i : X \to X$ 使得 $hq_i = q_i$, 从而 $h_i = 1_X = \sum_{j=1}^n q_j p_j$.