作者: 张陈成
学号: 023071910029

K-理论笔记

外微分拾遗

目录

1 模的外积

定义 1 (对称 (反对称) 函数)**.** 给定 R-模 M 与 N. 今取定 $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ 以及态射 $M^m \xrightarrow{f} N$.

1. 称 f 是对称的, 若 $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(m)})$ 对一切置换 $\sigma \in S_m$ 成立;
2. 称 f 是反对称的, 若 $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (-1)^\sigma f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(m)})$ 对一切置换 $\sigma \in S_m$ 成立;
3. 称 f 是交错的, 若 f 满足以下论断: 若存在 $i \neq j$ 使得 $x_i = x_j$, 则 $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$.

显然, 反对称等价于 “对换改变符号”, 亦等价于交错.

定义 2 (模的外积)**.** 给定反对称态射 $M^m \xrightarrow{f} N$, 则有如下交换图

$$\begin{tikzcd}
 & \ker(\tilde{f}) \arrow[d] & \\
M^m \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & \bigotimes^m M \arrow[r, two heads, "j"] \arrow[d, dashed, "\tilde{f}"'] & \bigwedge^m(M) \arrow[dl, dashed, "\bar{f}"] \\
 & N &
\end{tikzcd}.$$

1. $\pi : M^m \to \bigotimes^m M$ 由张量积之范性质保证.
2. 对任意反对称态射 $f \in \mathrm{Hom}_R(M^m, N)$, 总有 $\ker(\tilde{f}) \subseteq \langle x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \mid 存在 i \neq j \text{ 使得} x_i = x_j \rangle =: J$.

从而定义外积 $\bigwedge^m(M) := \dfrac{\bigotimes^m M}{J}$. 用泛性质语言描述之, 任意 M^m 出发的反对称态射通过 $\bigwedge^m(M)$ 分解.

例 1. $\bigwedge^0(M) \simeq \bigotimes^0(M) \simeq R$, $\bigwedge^1(M) \simeq \bigotimes^1(M) \simeq M$. 记 $I := (x, y)$ 为 R 的理想, 则 $\bigwedge^2(I)$ 为主理想.

命题 1. 若 M 有限生成, 记其极小生成集大小为 n. 则 $\bigwedge^m(M) = 0$ 对一切 $m > n$ 成立.