作者: 张陈成
学号: 023071910029

K-理论笔记

投射模简介

---

1 Abel 范畴的投射对象

定义 1 (群, 环, 域, 模以及代数, Abel 范畴等)**.** 略.

定义 2 (投射对象)**.** 称 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中对象 P 为**投射对象**, 若任意满态射 $X \xrightarrow{\pi} Y$ 与态射 $P \xrightarrow{f} Y$ 给出提升 $\tilde{f}$, 使得有交换图

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}"'] \arrow[d, "f"] & \\ X \arrow[r, "\pi"'] & Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad (f = \pi \circ \tilde{f}).$$

命题 1 (投射对象的等价定义)**.** 取 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中对象 P, 则以下等价命题成立时 P 为投射对象.

1. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, -)$ 右正合, 从而为正合函子[1];
2. P 符合定义 2 之表述;
3. 形如 $X \to P \to 0$ 的正合列均可裂.

证明. 先证明 $1 \implies 2 \implies 3$. 若 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, -)$ (协变) 右正合, 则函子保持任意满态射 $X \xrightarrow{\pi} Y$. 即, 任意 $P \xrightarrow{f} Y$ 有原像 $P \xrightarrow{\tilde{f}} X$. 遂有交换图

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, two heads, "\pi"'] & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, X) \arrow[d] \\ Y & \arrow[Rightarrow, from=1-1, to=2-3, phantom] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P, Y) \end{tikzcd} \xRightarrow{h^P} \qquad \begin{tikzcd} P \arrow[r, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & X \arrow[d, two heads, "\pi"] \\ P \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] & Y \end{tikzcd}.$$

可见 P 满足定义 2 之表述. 是故满态射 $X \xrightarrow{\pi} P$ 给出可裂短正合列

$$\begin{tikzcd} & & & P \arrow[dl, dashed, "\widetilde{\mathrm{id}}"'] \arrow[d, dashed, "\mathrm{id}"] & \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r] & X \arrow[r, "\pi"'] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}.$$

对 $3 \implies 1$, 注意到 Abel 范畴有拉回 [2]. 今考虑 $X \xrightarrow{\pi} Y \xleftarrow{f} P$ 的拉回 (下图左)

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & P \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, two heads, "\pi"'] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & C \arrow[dl, dashed, bend right, "\theta"'] \arrow[d, "\binom{a}{-b}"'] \arrow[dr, bend left, "0"] & \\ \ker(f,\pi) \arrow[r, "\iota"'] \arrow[dr, dashed, bend right, "\tau"'] & X \oplus P \arrow[r, "(f,\pi)"] & Y \\ & C \arrow[u, "\binom{a}{-b}"] \arrow[ur, bend right, "0"'] & \end{tikzcd}.$$

[1] 试回忆: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -) : \mathcal{A} \to \mathrm{Ab}$ 对一切 $X \in \mathsf{Ob}(\mathcal{A})$ 均是左正合的.

[2] Abel 范畴之态射范畴仍为 Abel 范畴, 因此态射范畴中存在二元积. 再由此对应原 Abel 范畴之拉回即可.

上图 (右) 中 θ 由核之泛性质定义, τ 由拉回之泛性质定义. 遂有 $(C, \binom{a}{-b}) = (\ker(f,\pi), \iota)$. 即,

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{\binom{a}{-b}} X \oplus P \xrightarrow{(f,\pi)} Y$$

为正合列. 由于 π 满, 从而上述正合列补全为短正合列, 因此原拉回也是推出. 作态射 (a,π) 之核, 并约定 $\ker\pi$ 至 P 的零映射, 则下图实线处交换

$$\begin{tikzcd}
\ker a \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\tilde{b}"] & C \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"] & P \arrow[d, "f"] \\
\ker\pi \arrow[r, "i'"'] \arrow[u, dashed, bend left, "\tilde{\varphi}"] \arrow[ur, dashed, "\varphi"] \arrow[urr, bend right=10, "0"] & X \arrow[r, "\pi"'] & Y
\end{tikzcd} .$$

作出由拉回之泛性质定义的态射 φ, 再经 $\ker a$ 作出 $\tilde{\varphi}$. 注意到

$$i \circ \tilde{\varphi} \circ \tilde{b} = \varphi \circ \tilde{b} = i,$$
$$i' \circ \tilde{b} \circ \tilde{\varphi} = b \circ i \circ \tilde{\varphi} = b \circ \varphi = i',$$

因此 $\tilde{b}$ 于 $\tilde{\varphi}$ 给出 $\ker a \simeq \ker\pi$. 请读者自证如下交换图 (上下两行正合)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker a \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\simeq"'] & C \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] & P \arrow[r, "c"] \arrow[d, "f"] & \operatorname{coker} a \arrow[r, equal] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker\pi \arrow[r, "i'"'] & X \arrow[r, "\pi"'] & Y \arrow[r, "c'"'] & \operatorname{coker}\pi \arrow[r, equal] & 0
\end{tikzcd} .$$

由已知, 第一行正合列可裂. 不妨取 $P \xrightarrow{a'} C \xrightarrow{a} P$ 之复合为恒等映射, 则下图给出任意 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,Y)$ 之原像 $b \circ a' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,X)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,Y) & & P \arrow[rr, "f"] \arrow[dd, equal] & & Y \\
& & & C \arrow[ul, "a"'] \arrow[dr, "b"] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P,X) \arrow[uu] & & P \arrow[ur, dashed, "a'"] \arrow[rr, dashed, "b\circ a'"'] & & X \arrow[uu, two heads, "\pi"']
\end{tikzcd} .$$

□

注 1. 对图 $\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dr, "b_2"] & \\ \bullet \arrow[ur, "a_1"] \arrow[dr, "a_2"'] & & \bullet \\ & \bullet \arrow[ur, "b_1"'] & \end{tikzcd}$, 有如下结论:

1. 若上图为推出且 a_i 单, 则上图为拉回且 b_i 单;
2. 若上图为拉回且 b_i 满, 则上图为推出且 a_i 满.

命题 2 (投射对象之收缩仍为投射对象)**.** 取投射对象 P, 若存在 Q, a, b 使得 $Q \xrightarrow{a} P \xrightarrow{b} Q$ 为恒等映射, 则 Q 投射.

证明. 记 g 为投射对象 P 诱导的提升, $\tilde{f} = g \circ a$ 自然是 f 的提升.

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, "a"] \arrow[d, dashed, "\tilde{f}"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}"] & P \arrow[r, "b"] \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "g"'] & Q \arrow[dl, "f"] \\
X \arrow[r, two heads, "\pi"'] & Y &
\end{tikzcd} .$$

$\square$

命题 3 (余积保持投射模)**.** 对任意集合 I. 余积 $\coprod_{i\in I} P_i$ 为投射对象当且仅当每一 P_i 为投射对象.

证明. 若 $\coprod_{i\in I} P_i$ 投射, 则每一 P_i 作为其收缩仍投射. 反之, 考虑下图

$$\begin{tikzcd}
P_i \arrow[r, "e_i"] \arrow[d, dashed, "\tilde{f}_i"'] & \coprod_{i\in I} P_i \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}"'] \\
X \arrow[r, two heads, "\pi"'] & Y
\end{tikzcd}.$$

其中 $\tilde{f}_i$ 为 $f\circ e_i$ 之提升, $\tilde{f}$ 由余积定义给出. 显然 $\pi\circ\tilde{f} = f$. $\square$

命题 4 (态射范畴中的基本投射对象)**.** 选定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 与投射对象 P, 则 $0\to P$ 与 $P\xrightarrow{\mathrm{id}} P$ 为态射范畴的投射对象. 直接验证之即可.

定义 3. 称 $\mathcal{A}$ 有**足够多投射对象**, 若任意对象 $M\in\mathsf{Ob}(\mathcal{A})$ 同构于某一投射模之商.

命题 5. 设 $\mathcal{A}$ 为具有足够多投射对象的 Abel 范畴, 则其态射范畴仍有足够多的投射对象, 且任意投射对象为 $\begin{smallmatrix}0\\ \downarrow\\ Q\end{smallmatrix}\oplus\begin{smallmatrix}P\\ \downarrow \mathrm{id}\\ P\end{smallmatrix}$ 的直和项 (P 与 Q 均为投射对象).

证明. 对任意 $X\xrightarrow{f} f'$, 有投射模 P 与 Q 使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rr, equal] \arrow[d, "{(1,0)^T}"'] & & P \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[d, dashed, "\tilde{f}\circ\pi"'] & X \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}"'] \\
P\oplus Q \arrow[rr, two heads, "{(\tilde{f}\circ\pi,\mathrm{id})}"'] & & Q \arrow[r, two heads, "\pi'"'] & X'
\end{tikzcd}.$$

显然态射范畴中同有足够多的投射对象. 注意到 $\begin{smallmatrix}0\\ \downarrow\\ Q\end{smallmatrix}\oplus\begin{smallmatrix}P\\ \downarrow \mathrm{id}\\ P\end{smallmatrix}$ 到, $P\xrightarrow{\tilde{f}\circ\pi} Q$ 满, 遂可裂. $\square$

定义 4 (自由对象)**.** 若存在自由-遗忘伴随 $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "U"] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathrm{Set} \arrow[l, bend left, "F"] \end{tikzcd}$, 则称集合在 F 下的像为**自由对象**.

注 2. 依照 Mitchell 嵌入定理, 小 Abel 范畴与某一模范畴等价. 相应地, 自由对象即自由模.

注 3. 类比定义 2, Set 中任意对象既投射且内射.

命题 6. 若右伴随保持满态射, 则左伴随保持投射对象. 直接验证即可.

注 4 (自由对象投射的充分条件). 若定义 4 中 U 保持满态射, 则左伴随 (自由函子) 保持投射对象.

命题 7. 假定定义 4 中 U 保持满态射, 且 $\mathcal{C}$ 允许直和, 则投射模等价于自由模的直和项.

证明. 一方面, 余单位作为自然变换诱导满自函子 $FU:\mathcal{C}\to\mathcal{C}, FU(X)\mapsto X$. 遂可裂满. 因此一切投射模以自由模直和项之形式出现. 另一方面, 命题 6 表明自由对象均投射. $\square$

定理 1. 若具体范畴 $\mathcal{C}$ 与集合范畴间存在自由-遗忘伴随, 且遗忘函子 U 保持满射, 则任意对象是自由对象的商, 故 $\mathcal{C}$ 有足够多投射对象. 若 $\mathcal{C}$ 为 Abel 范畴, 则投射模等价于自由模的直和项.

例 1. 应当留意以下例子:

1. 模范畴中, 投射模为自由模直和项, 考虑自然的遗忘函子即可.

2. (小) 环范畴中存在某些非满射的满态射 $R \to \mathrm{frac}(R)$, 此时 $\mathrm{frac}(R)$ 自由但不投射.

3. 有限 Abel 群范畴与集合范畴间不存在自由-遗忘伴随, 同时没有足够的投射对象.

定理 2. 主理想整环遗传, 其自由模之子模仍自由. 特别地, 自由模与投射模等价.

定理 3. 自由群之子群自由, 从而群范畴的自由对象等价于投射对象.

证明. 熟知自由群之子群自由. 应注意: 即便群范畴允许直和与正合列, 一般地有

$$\text{左可裂} \iff \text{可裂} \underset{\neq}{\implies} \text{右可裂}.$$

常将右可裂对应半直积. 同时强调自由群的泛性质: 任意集合 S 至群 G 的映射 $f : S \to G$ 通过 S 生成的自由群与典范映射 $\iota : S \to F(S)$ 唯一分解. 即, 存在唯一的群同态 φ 使得下图交换

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & G \\ F(S) \arrow[ur, "\exists! \varphi"'] & \end{tikzcd}.$$

熟知群范畴之满态射与满射等价, 定理 1 表明自由群投射. 反之, 任意投射对象 G 为自由群之商, 且该满同态 $FU(G) \twoheadrightarrow G$ 之右逆为 $G \hookrightarrow FG(G)$. 由于 G 为自由群之子群, 从而自由. □

注 5. 若群 G 使得一切正合列可裂, 则 G 平凡.[3]

[3]证明思路: 若右可裂正合列可裂, 当且仅当收缩之像为中间群的正规子群, 此后不难构造具体例子.