



K-理论笔记

K_1

1 环的 Bass-Whitehead 群

定义 1. 仿照定义 ??, 记有限生成 R -投射模的自同构为序对 $(P, f) := P \xrightarrow{f} P$. 记

1. 记商关系 $\langle P, f \rangle = \langle P', f' \rangle$ 当且仅当存在同构 φ 使得有交换图

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\varphi} & P' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ P & \xrightarrow{\varphi} & P' \end{array}$$

2.a. 记商关系 $[P, f] = [P', f'] + [P'', f'']$, 若有正合列的同构

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P' & \xrightarrow{\iota} & P & \xrightarrow{\pi} & P'' \longrightarrow 0 \\ & & f' \downarrow & & f \downarrow & & f'' \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & P' & \xrightarrow{\iota} & P & \xrightarrow{\pi} & P'' \longrightarrow 0 \end{array}.$$

2.b. 记商关系 $[P, f \circ g] = [P, f] + [P, g]$.

记有限生成 R -投射模的自同构为序对 (P, f) 在商关系 $[\cdot]$ 下生成的交换群为 $K_1(R)$

注 1. $\langle P, f \rangle \mapsto [P, f]$ 是良定义的商映射.

命题 1. 若存在 $f \in \text{Aut}_R(P)$ 以及不相等的自然数 m 与 n , 使得 $f^m(P) \simeq f^n(P)$, 则 $[P, f] = 0$.

命题 2. 任取 $[P, f] \in K_1(R)$, 则逆元为 $[P, f] + [P, f^{-1}] = [P, \text{id}_P] = 0$.

定义 2 ($GL_n(-)$ 与 $E_n(-)$). 记 R 为环, $M_n(R)$ 为 n -阶矩阵环. 记一般线性群 $GL_n(R) := M_n(R)^\times$, 初等因子群 $E_n(R)$ 由形如 $I + rE_{i,j} \in M_n(R)$ 的初等因子生成.

定义 3 (交换子). 记群 G 中的交换子为映射 $[\cdot, \cdot] : G \times G \rightarrow G$, $(a, b) \mapsto aba^{-1}b^{-1}$.

命题 3. 有以下论断.

1. 对 $n \geq 3$, 有 $[E_n(R), E_n(R)] = E_n(R)$. 一般地, 初等矩阵是交换子.

2. $GL_n(R)$ 中对角为 1 的上三角矩阵属于 $E_n(R)$.

3. 对任意 $X \in GL_n(R)$, 有 $\begin{pmatrix} X & \\ & X^{-1} \end{pmatrix} \in E_{2n}(R)$.

4. $\begin{pmatrix} [GL_n(R), GL_n(R)] & \\ & I \end{pmatrix} \subseteq E_{2n}(R)$.

证明. 依次证明如下.

1. 注意到 $1 + xE_{i,j} = [1 + xE_{i,k}, 1 + E_{k,j}]$.

2. 依照 $\begin{pmatrix} 1 & v^T \\ & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v^T \\ & I \end{pmatrix}$ 归纳, 一切对角为 1 的上三角矩阵均在 E_n 中.

3. 对任意 $X \in GL_n(R)$, 有

$$\begin{pmatrix} X & \\ & X^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & X - I \\ & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \\ & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & X^{-1} - I \\ & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \\ -X & I \end{pmatrix}.$$

4. 对任意 $X, Y \in GL_n(R)$, 有等式

$$\begin{pmatrix} [X, Y] & \\ & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & \\ & X^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y & \\ & Y^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{-1}Y^{-1} & \\ & YX \end{pmatrix}.$$

□

定义 4 (稳定线性群). 依照 $GL_n(R) \hookrightarrow GL_{n+1}(R)$, $X \mapsto \begin{pmatrix} X & \\ & 1 \end{pmatrix}$ 给出极限

$$GL(R) := \varinjlim GL_m(R) \quad \begin{array}{ccc} & \xleftarrow{\iota_n} & GL_n(R) \\ & & \downarrow \\ GL(R) & \xleftarrow{\iota_{n+1}} & GL_{n+1}(R) \end{array}.$$

记稳定线性群与稳定初等因子群分别为

$$GL(R) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} \iota_n(GL_n(R)), \quad E_n(R) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} \iota_n(E_n(R)).$$

命题 4. 有群的短正合列 $1 \rightarrow E(R) \rightarrow GL(R) \rightarrow K_1(R) \rightarrow 1$.

证明. $GL(R)$ 到 $K_1(R)$ 的典范态射由极限诱导如下

$$\begin{array}{ccc} f & \longmapsto & [R^n, f] \\ GL_n(R) & \xrightarrow{[R^n, -]} & K_1(R) \\ \downarrow -\oplus \text{id}_{R^m} & \nearrow [R^{n+m}, -] & \\ GL_{n+m}(R) & & \end{array}.$$

由于 $K_1(R)$ 交换, 从而可将 $GL(R)$ 到 $K_1(R)$ 的态射分解如下.

$$\begin{array}{ccc} \text{Grp} & GL(R) & \longrightarrow K_1(R) \\ \downarrow \wr & \downarrow & \parallel \\ \text{Ab} & \frac{GL(R)}{[GL(R), GL(R)]} & \longrightarrow K_1(R) \end{array}.$$

此处 $[GL(R), GL(R)] = \bigcup [GL_n(R), GL_n(R)] = \bigcup E_n(R) = E(R)$. 往证 $\frac{GL(R)}{E(R)} \xrightarrow{\varphi} K_1(R)$. 换言之, 对任意有

限生成投射模 P , $[\text{Aut}(P)] \rightarrow \frac{GL(R)}{E(R)} \xrightarrow{\varphi} K_1(R)$, $f \mapsto [P, f]$ 是同构.

对任意有限生成投射模的自同构 (P, f) , 取同构 $\sigma : P \oplus Q \simeq R^n$. 兹断言以下复合的恒等映射良定义, 即无关乎 Q, n 与 σ 之选取.

$$\begin{array}{ccccc}
 P & \hookrightarrow & P \oplus Q & \xrightarrow{\sigma} & R^n \\
 [P, f] \quad \Longleftrightarrow \quad \downarrow f & & \downarrow f \oplus g & & \downarrow \sigma(f \oplus g)\sigma^{-1} \quad \Longrightarrow \quad [P, f]. \\
 P & \hookrightarrow & P \oplus Q & \xrightarrow{\sigma} & R^n
 \end{array}$$

以上交换图中, 直线单箭头均为同构.

- 由于 $K_1(R)$ 交换, 故 $\varphi(\sigma(f \oplus g)\sigma^{-1}) = \varphi(\sigma)\varphi(\sigma^{-1})\varphi(f \oplus g) = \varphi(f \oplus g)$.
- 若将 Q 替换作 $Q \oplus R^k$, 并考虑 $P \oplus Q \oplus R^k$ 的自同构 $f \oplus g \oplus \text{id}_{R^k}$, 则像不变. 结合命题 ?? 知像与 Q, n 之选取无关.

□

注 2. $K_1(R) = \frac{GL(R)}{[GL(R), GL(R)]} = H_1(GL(R), \mathbb{Z})$ 无非稳定线性群的交换化.

命题 5 ($K_1(-)$ 的函子性). $K_1 : \text{Ring} \rightarrow \text{Ab}$ 为 (协变) 函子.

命题 6. 对环 R 与任意正整数 m, n , 有同构 $K_1(M_n(R)) \simeq K_1(M_m(R))$.

证明. Morita 等价给出相同的 K_1 群. 实际上, $GL(M_n(R)) = GL(GL_n(R)) = GL(R)$, 再对两端交换化即可. □

命题 7. $K_1(R \times S) \simeq K_1(R) \oplus K_1(S)$. 证明同上.