



## K-理论笔记

### Noether 环上的投射模与平坦模

## 1 有限展示与有限生成模

**定义 1** (有限生成, 有限展示). 对环  $R$ -模  $X$ , 有以下定义.

1. 称  $X$  是有限生成的, 若存在有限集  $S$  使得  $S \cdot R \simeq X$ . 换言之, 存在正合列

$$R^n \longrightarrow X \longrightarrow 0.$$

2. 称  $X$  是有限展示的, 若存在正合列

$$R^m \longrightarrow R^n \longrightarrow X \longrightarrow 0.$$

注 1. 对任意模, 有限长度  $\implies$  有限生成.

注 2. 有限展示模是生成元间关系有限的有限生成模.

**命题 1.** Noether 环上的有限生成模等价于有限展示模.

证明. 考虑如下有限生成模的投射分解, 其中  $\kappa$  是某一基数

$$\begin{array}{ccccccc} R^\kappa & \xrightarrow{\quad} & R^n & \xrightarrow{\quad} & X & \longrightarrow & 0 \\ & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & & \\ & & \ker(f) & & & & \end{array}$$

由于  $\ker(f)$  作为 Noether 环上的模是有限生成的, 从而可取  $\kappa < \omega$ . 反之显然. □

**命题 2.** 给定有限生成  $R$ -模  $X$  与态射  $X \xrightarrow{f} f(X)$ , 则  $f(X)$  有限生成而  $\ker(f)$  未必. 若  $f(X)$  有限展示, 则  $\ker(f)$  有限生成.

证明.  $X$  的有限生成集在  $f$  下的像仍有限生成; 对  $\ker(f)$ , 考虑商环诱导的  $\mathbb{R}[X_1, \dots]$ -模同态

$$\mathbb{R}[X_1, \dots] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(0, \dots),$$

其核显然不是有限生成的.

注 3. 该反例进而说明有限长度与有限展示互不包含.

若  $f(X)$  是有限展示的, 则有正合列间同态

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & R^m & & & & \\
 & & \downarrow & \nearrow & & & \\
 0 & \longrightarrow & \ker(fg) & \longrightarrow & R^n & \xrightarrow{fg} & f(X) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow g & \searrow & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & \ker(f) & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & f(X) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

以上长虚线  $\ker(fg) \twoheadrightarrow \ker(f)$  有核的泛性质给出, 满射性由五引理给出. 依照  $f(X)$  的有限展示性给出  $R^m \rightarrow R^n$  及其满-单分解, 即得  $\ker(f)$  是  $R^m$  的商, 从而有限生成.  $\square$

**命题 3.** 仿照命题 2, 给定模正合列  $0 \rightarrow K \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow 0$ , 则有如下结论.

1. 若  $K$  有限生成,  $Y$  有限生成, 则  $X$  有限生成.
2. 若  $X$  有限生成, 则  $Y$  有限生成, 但  $K$  未必.
3. 若  $X$  有限生成,  $Y$  有限展示, 则  $K$  有限生成. 即, 命题 2.
4. 若  $K$  有限生成,  $X$  有限展示, 则  $Y$  有限展示.
5. 若  $K$  有限展示,  $Y$  有限展示, 则  $X$  有限展示.

证明. 证明如下.

1. 取  $S_K \subseteq K$  为  $K$  的有限生成集,  $S_Y \subseteq X$  使得像  $\overline{S_Y}$  是  $Y$  的有限生成集, 且  $|S_Y| = |\overline{S_Y}|$ . 命题由以下交换图给出:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & n & & n+m & & m \\
 & & \uparrow \text{ } |\cdot| & & \uparrow \text{ } |\cdot| & & \uparrow \text{ } |\cdot| \\
 \text{Set} & & 0 \longrightarrow S_K \longrightarrow S_K \dot{\cup} S_Y \longrightarrow \overline{S_Y} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow R \cdot & & \downarrow R \cdot & & \downarrow R \cdot \\
 R\text{-FreeMod} & & 0 \longrightarrow R^n \longrightarrow R^{m+n} \longrightarrow R^m \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 R\text{-Mod} & & 0 \longrightarrow K \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow 0
 \end{array}$$

2. 有限生成模的像显然是有限生成模, 核未必, 见命题 2.
3. 即命题 2.
4. 考虑满射  $R^m \twoheadrightarrow X$  与  $R^n \twoheadrightarrow K$  诱导的正合列间同态, 则  $g$  为满射. 根据蛇引理, 核  $\ker(f) \twoheadrightarrow \ker(g)$  是满同态.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & R^l & \dashrightarrow & \ker(f) & \dashrightarrow & \ker(g) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & R^n & \longrightarrow & R^{m+n} & \longrightarrow & R^m \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow f & \nearrow & \downarrow g \\
 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y \longrightarrow 0
 \end{array}$$

由  $X$  的有限展示性与命题 2 知  $\ker(f)$  有限生成, 故存在某一  $R^l$  到  $\ker(g)$  的满射. 从而存在正合列  $R^l \rightarrow R^m \rightarrow Y \rightarrow 0$ , 即,  $Y$  有限展示.

5. 以上交换图给出自由模链复形到题设中短正合列的满态射. 根据蛇引理有

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \ker_1 & \longrightarrow & \ker_2 & \longrightarrow & \ker_3 \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & R^n & \longrightarrow & R^{m+n} & \longrightarrow & R^m \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y \longrightarrow 0
\end{array}$$

根据命题 2,  $\ker_3$  与  $\ker_1$  有限生成, 因此  $\ker_2$  有限生成. 根据上一条,  $X$  有限展示.

9

**命题 4.** 对有限展示  $R$  模  $X$  与局部化函子  $S^{-1}(-)$ , 有自然同构

$$S^{-1}\mathrm{Hom}_R(X, -) \simeq \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}X, S^{-1}(-)).$$

证明. 对任意  $f \in \text{Hom}_R(X, Y)$ , 定义  $S^{-1}R$ -模同态  $S^{-1}(f): \frac{x}{s} \mapsto \frac{f(x)}{s}$ . 遂有正合列的交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & & & & 0 & \xrightarrow{\quad \cong \quad} & 0 \\
\uparrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
X & & \text{Hom}_R(X, Y) & \xrightarrow{S^{-1}\text{Hom}_R(X, Y)} & \text{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}X, S^{-1}Y) & . & \\
\uparrow \text{Hom}_R(-, Y) & \xrightarrow{\quad \quad} & \xrightarrow{S^{-1}(-)} & & \downarrow & & \downarrow \\
R^m & & \text{Hom}_R(R^m, Y) & \xrightarrow{S^{-1}\text{Hom}_R(R^m, Y)} & \text{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}R^m, S^{-1}Y) & & \\
\uparrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
R^n & & \text{Hom}_R(R^n, Y) & \xrightarrow{S^{-1}\text{Hom}_R(R^n, Y)} & \text{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}R^n, S^{-1}Y) & & 
\end{array}$$

由五引理知中间处为同构.

注 4. 对有限生成模, 上述同态为单而未必满. 考虑交换环  $R = \mathbb{R}[X_0, X_1, \dots]$  以及商环给出模  $X = \mathbb{R}[X_0]$ , 则  $X$  有限生成单非有限展示. 考虑

$$Y = R/(X_0X_1, X_0^2X_2, \dots, X_0^nX_n, \dots),$$

则  $R$ -模同态  $f: X \rightarrow Y$  形如  $1 \mapsto F$ . 存在足够大的  $m$  使得  $f(X_0^m) = F \cdot X_0^m = g(X_0)$ . 此时对任意  $k$  均有

$$0 = f(0) = f(X_0^m \cdot X_k) = X_k \cdot g(X_0)/(X_0^k).$$

因此  $g(X_0)/(X_0^k)$  恒为 0, 从而  $g(X_0) = 0$ . 取  $S = \{1, X_0, X_0^2, \dots\}$ , 则  $S^{-1}\text{Hom}_R(X, Y) = S^{-1}0 = 0$ . 但另一方面,

$$S^{-1}X \simeq S^{-1}Y \simeq \mathbb{R}[X_0^\pm].$$

显然  $\text{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}X, S^{-1}Y) = \text{End}_{S^{-1}R}(\mathbb{R}[X_0^{\pm}]) \neq 0$ , 遂矛盾.

**命题 5.** 投射模与平坦模的关系如下

有限展示投射模  $\iff$  有限生成投射模  $\iff$  有限展示平坦模  $\implies$  有限生成平坦模 .  

 $\xleftarrow{\hspace{1.5cm}}$   
 当且仅当是 (右) 完美环上的左模

证明. 一般地, 有限展示推出有限生成, 投射模推出平坦模, 且投射模有限生成当且记当有限展示. 下证明有限展示平坦模  $X$  投射. 定义特征模函子为正合函子  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ , 具体如下

$$(-)^* : R\text{-Mod} \rightarrow R^{\text{op}}\text{-Mod}, \quad M \mapsto \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \quad \left([m \mapsto rm] \mapsto [f(x) \mapsto f(x)r = f(rx)]\right).$$

取  $X$  的展示  $R^m \rightarrow R^n \rightarrow X \rightarrow 0$  以及任意  $R$ - $S$ -双模  $Y$ , 有同构

$$Y^* \otimes R^m = (Y^*)^m \simeq (\text{Hom}_R(R, Y)^*)^m \simeq (\text{Hom}_R(R, Y)^m)^* \simeq \text{Hom}_R(R^m, Y)^*.$$

从而有正合列间的同态

$$\begin{array}{ccccccccc} Y^* \otimes R^m & \longrightarrow & Y^* \otimes R^n & \longrightarrow & Y^* \otimes X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \varphi & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \text{Hom}_R(R^m, Y)^* & \longrightarrow & \text{Hom}_R(R^n, Y)^* & \longrightarrow & \text{Hom}_R(X, Y)^* & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其中  $\varphi$  为态射范畴之余核. 依照五引理,  $\varphi$  为同构. 由于  $- \otimes X$  正合, 故  $(-)^* \otimes X \simeq \text{Hom}_R(X, -)^*$  正合, 从而  $X$  投射.  $\square$

## 2 投射模的秩 (纤维)

**定义 2** (秩, 纤维). 对  $R$ -模  $X$  给出的秩函数

$$\text{rank}_X : \text{Spec}(R) \rightarrow \mathbb{N}, \quad \mathfrak{p} \mapsto \dim_{R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}} \left( \frac{X}{\mathfrak{p}X} \right)_{\mathfrak{p}}.$$

此处局部化与商模交换, 局部环  $A_{\mathfrak{p}}$  具有唯一的极大理想  $\mathfrak{p}$ , 故

$$\left( \frac{X}{\mathfrak{p}X} \right)_{\mathfrak{p}} \simeq (R/\mathfrak{p} \otimes_{\mathfrak{p}} X)_{\mathfrak{p}} \simeq \frac{R_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}} \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} X_{\mathfrak{p}},$$

称作  $X$  在  $\mathfrak{p}$  处的纤维.

**命题 6** (Noether 环上投射模的等价定义). 对 Noether 环  $R$  上有限生成模  $X$ ,  $X$  投射当且仅当对任意  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$ ,  $X_{\mathfrak{p}}$  是自由  $R_{\mathfrak{p}}$ -模.

证明. 注意到  $P$  有限表示, 故局部化保持  $\text{Hom}(P, -)$  的正合性, 从而保持投射模. 记局部环  $A := R_{\mathfrak{p}}$ , 极大理想  $\mathfrak{m} := \mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$ . 取  $M := X_{\mathfrak{p}}$  的极小有限生成集  $S = \{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ , 其在  $A \rightarrow A/\mathfrak{m}$  中的项为  $\bar{S} = \{\bar{x}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ . 记投射模的直和关系  $M \oplus N \simeq A^n \simeq \bigoplus_{1 \leq i \leq n} Ax_i$ . 从而

$$M/\mathfrak{m}M \simeq A^n/\mathfrak{m} \simeq M/\mathfrak{m}M \oplus N/\mathfrak{m}N$$

考虑线性空间维度以及中山引理, 得  $N = 0$ . 故  $X_{\mathfrak{p}}$  是自由  $R_{\mathfrak{p}}$ -模.

相反地, 若  $\text{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(P_{\mathfrak{p}}, (-)_{\mathfrak{p}}) \simeq \text{Hom}_R(P, -)_{\mathfrak{p}}$  对任意  $\mathfrak{p}$  均正合, 则只需证明正合列间关系

$$L_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{f_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{g_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}} \quad (\forall \mathfrak{p}) \implies L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N.$$

由于局部化保持零态射, 从而保持链复形. 记  $T := \frac{\ker(f)}{\text{im}(g)}$ , 则  $T_{\mathfrak{p}} = 0$  对一切素理想成立, 因此  $T = 0$ .  $\square$

注 5. Kaplansky 定理表明非交换局部环上的非有限生成投射模 (即可数生成投射模之直和) 仍自由.

**命题 7.** 有限展示  $R$ -模  $X$  投射, 当且仅当  $R_{\mathfrak{p}}$  对一切  $\mathfrak{p} \in \text{spec}(R)$  投射 (等价地, 自由).

**命题 8.** 依照命题 5 与命题 6, (左) Noether 环 (右) 完美.