作者: 张陈成
学号: 023071910029

K-理论笔记
交换环的 Picard 群

1 Zariski 拓扑简介

2 交换环的 Picard 群

定义 1 (投射模的秩函数)**.** Kaplansky 定理表明局部环上的投射模自由, 其交换且有限生成之情形已在前文证明 (中山引理之推论). 今给定交换环 R, 定义投射模 P 的秩函数为

$$\mathrm{rank}_P : \mathrm{spec}(R) \to \mathbb{N}, \quad \mathfrak{p} \mapsto \mathrm{rank}_{R_\mathfrak{p}}(P_\mathfrak{p}).$$

简而言之, $\mathrm{rank}_P(\mathfrak{p})$ 是 R-模 P 在 $\mathfrak{p}$-局部化下 (作为自由 $R_\mathfrak{p}$-模) 的秩.

命题 1 (对偶模回顾)**.** 给定交换环 R, 定义 $X \in \mathsf{Ob}(R\text{−Mod})$ 的对偶模为

$$X^* := \mathrm{Hom}_{R-\mathrm{Mod}}(X, R) \quad \in \mathsf{Ob}(R^{\mathrm{op}}-\mathrm{Mod}).$$

有以下关于对偶模的常用性质.

1. $\varepsilon : P \to P^{**}$ 为典范单态射.
2. 自由模与投射模的一种等价定义如下.
   - F 是**自由** R**-模**, 当且仅当存在指标集 I 与 $\{(x_i, f_i) \in F \times F^*\}_{i\in I}$ 使得有分解 (有限和) $x = \sum_{i\in I} f_i(x)x_i$, 且有限和 $x = \sum_{i\in I} a_i x_i$ 对一切 $x \in F$ **唯一**.
   - P 是**投射** R**-模**, 当且仅当存在指标集 I 与 $\{(x_i, f_i) \in P \times P^*\}_{i\in I}$ 使得有分解 (有限和) $x = \sum_{i\in I} f_i(x)x_i$, 但有限和 $x = \sum_{i\in I} a_i x_i$ 对 $x \in P$ **不必唯一**.
3. 有限生成投射模的对偶模同为投射 R-模. 具体地, 对任意 $P \oplus Q \simeq R^n$ 总有

$$\mathrm{Hom}_R(P, R) \oplus \mathrm{Hom}_R(Q, R) \simeq \mathrm{Hom}_R(R^n, R) \simeq (\mathrm{End}_R(R))^n \simeq R^n.$$

   此时 $\varepsilon : P^{**} \simeq P$ 为同构.

定义 2 (R-模范畴的半环结构)**.** $(R\text{−Mod}, \oplus, \otimes)$ 为交换半环, 即,

1. 环中元素为 $\mathsf{Ob}(R\text{−Mod})/\simeq$. 为方便记号, 今后省略商关系.
2. $(R\text{−Mod}, \oplus)$ 为交换幺半群, 其幺元为 0;

3. $(R\mathrm{-Mod}, \otimes)$ 为交换幺半群, 其幺元为 R;

4. $\oplus$ 与 $\otimes$ 分别作为加法与乘法, 满足分配律.

注 1. 函子 $-\otimes M$ 给出范畴 $R\mathrm{-Mod}$ 到自身的范畴等价, 当且仅当 M 是环 $(R\mathrm{-Mod}, \oplus, \times)$ 的乘法可逆元. 换言之, 存在 N 使得 $N \otimes M \simeq R \simeq M \otimes N$.

定义 3 (可逆模 (线丛))**.** 交换半环 $(R\mathrm{-Mod}, \oplus, \otimes)$ 中的单位 (可逆乘法元) 全体为**可逆模 (线丛)**.

定义 4. 取交换环 R 上有限生成模 M. 称 M 可逆, 若以下等价命题成立.

1. 存在 R-模 N 使得 $M \otimes N \simeq R$. 换言之, M (所属的同构类) 是环 $(R\mathrm{-Mod}, \oplus, \otimes)$ 中的乘法逆元.

2. $M \otimes_R -$ 为 R-模范畴到自身的等价.

3. M 是有限生成的秩恒为 1 的投射模.

实际上有 $\mathrm{Hom}_R(N, R) \simeq M$.

定义 5 (Picard 群)**.** 记环 R 中 Picard 群为 $\mathrm{Pic}(R)$ 有限生成可逆模 $\langle M\rangle$ 构成的乘法群. 其中

1. $\langle M \otimes_R N\rangle = \langle M\rangle \cdot \langle N\rangle$.

2. $\langle \mathrm{Hom}_R(M, R)\rangle = \langle M\rangle^{-1}$.

3. $\langle R\rangle$ 为乘法单位.

注 2. $\mathrm{Pic} : \mathrm{Ring} \to \mathrm{Ab}$ 为 (协变) 函子. 特别地,

$$\mathrm{Pic} : \left[R \xrightarrow{f} S\right] \mapsto [P \mapsto S \otimes_R P].$$