作者: 张陈成
学号: 023071910029

K-理论笔记

Banach 空间范畴

---

1 Banach 空间的范畴化刻画

定义 1 (Banach 空间)**.** 给定完备域 $\mathbb{F}$, Banach 空间即完备赋范线性空间. 以下假设 $\mathbb{F}$ 给定.

定义 2 (范畴 Ban_∞ 与 Ban_1)**.** 定义范畴 Ban_∞ 与 Ban_1 中对象均为 Banach 空间. 其中 Ban_∞ 中态射为连续线性映射 (范数有限); Ban_1 中态射为压缩线性映射 (范数不超过 1).

命题 1. Ban_∞ 为加法范畴, 但非 Abel 范畴. Ban_∞ 亦然.

证明. 下仅讨论 Ban_∞. 若 Ban_∞ 为 Abel 范畴, 则任意 Ban_∞ 中态射 $X \xrightarrow{f} Y$ 补全为正合列

$$0 \to \ker(f) \to X \to Y \to \mathrm{coker}(f) \to 0.$$

此处 $\ker(f) = f^{-1}\{0\}$ 为 Banach 空间 X 的闭子空间, 从而为 Banach 空间; 但 coker 未必完备, 例如

$$f : \ell^1(\mathbb{C}) \to \ell^1(\mathbb{C}), \quad \{x_n\}_{n\geq 1} \mapsto \{2^{-n} \cdot x_n\}$$

是 Banach 空间中非满的稠密态射, 从而 $\mathrm{im}(f)$ 不完备. 而 Abel 范畴中 $\mathrm{im}(f) \simeq \ker(\mathrm{coker}(f))$, 因此 $\mathrm{coker}(f)$ 必不为 Banach 空间. □

2 张量积

定义 3 (张量积及其范数)**.** 取 $X, Y \in \mathrm{Ban}_\infty$, 依线性空间之定义记张量积 $X \otimes Y$. 定义 $u \in X \otimes Y$ 的范数为

$$\|u\| := \inf \sum_{\text{有限和}} \|x_i\| \cdot \|y_i\| \quad \left(u = \sum_{\text{有限和}} x_i \otimes y_i\right).$$

记 $X \otimes Y$ 在上述范数下的完备化空间为 $X \hat{\otimes} Y$.

注 1. 嵌入 $X \hat{\otimes} Y \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathrm{Hom}(X^*, Y)$ 定义如下:

$$\iota : \sum x_i \otimes y_i \mapsto \left[f \mapsto \sum f(x_i) y\right].$$

该嵌入保持范数, 实际上有

$$\left\|\sum x_i \otimes y_i\right\|_{X\hat{\otimes}Y} = \sup_{\|f\|,\|g\|\leq 1} \left|\sum f(x_i) \cdot g(y_i)\right| = \sup_{\|f\|\leq 1} \left\|\sum f(x_i) y_i\right\|_X.$$

类似地, 有嵌入 $X \hat{\otimes} Y \hookrightarrow \mathrm{Hom}(Y^*, X)$.

命题 2 (张量积的泛性质)**.** 对有界双线性映射 $\varphi : X \times Y \to Z$, 存在唯一的 $X\hat{\otimes}Y$ 使得以下论断成立.

1. 存在典范态射 $\pi : X \times Y \to X\hat{\otimes}Y$ 与 $\hat{\varphi} : X\hat{\otimes}Y \to Z$ 使得有交换图 $\hat{\varphi} \circ \pi = \varphi$;
2. $\|\hat{\varphi}\| \le \|\varphi\|$. 故上述泛性质对 Ban_1 同样适用.

命题 3 ($Y\hat{\otimes}-$ 与 $\mathrm{Hom}(Y, -)$ 的伴随)**.** Ban_∞ (相应地, Ban_1) 中的 Tensor-Hom 伴随指以下自然同构

$$\mathrm{Hom}(Y\hat{\otimes}X, Z) \simeq \mathrm{Hom}(X, \mathrm{Hom}(Y, Z)).$$

例 1 ($\ell^p(-)$ 函子)**.** 对给定的 $1 \le p \le \infty$, 定义 $\ell^p(-)$ 为 Ban_∞ (相应地, Ban_1) 到自身的函子. 具体地,

$$\ell^p(X) \subseteq \prod_{i\in\mathbb{N}} X, \quad \|(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\|_{\ell^p(X)} = \|(\|x_i\|_X)_{i\in\mathbb{N}}\|_{\ell^p} < \infty.$$

实际上, $\ell^p(-) \simeq -\hat{\otimes}\ell^p$ 是函子间同构[1].

依照 Tensor-Hom 伴随, $\ell^\infty(X^*) \simeq (\ell^1(X))^*$ 对一切 X 自然. 类似地定义 c^0 为收敛至 0 的序列, 类似地定义 $c^0(-)$, 则有

$$\ell^\infty(X^{**}) \simeq (\ell^1(X^*))^* \simeq (c^0(X))^{**}.$$

[1]将 $\ell^p(-)$ 视作函子 $\ell^p_n(-) : X \to X^n$ 的极限, 显然 $\ell^p_1(-) \hookrightarrow \ell^p_2 \hookrightarrow \cdots$ 与左伴随函子可换