



K-理论笔记

投射模简介

目录

1	Abel 中投射对象的等价定义	1
2	投射对象的性质	3
3	投射对象为自由对象之直和项	3

1 Abel 中投射对象的等价定义

定义 1 (群, 环, 域, 模以及代数, Abel 范畴等). 略.

定义 2 (投射对象). 称 Abel 范畴 \mathcal{A} 中对象 P 为**投射对象**, 若任意满态射 $X \xrightarrow{\pi} Y$ 与态射 $P \xrightarrow{f} Y$ 给出提升 \tilde{f} , 使得有交换图

$$\begin{array}{ccc}
 & P & \\
 \tilde{f} \swarrow & \downarrow f & \\
 X & \xrightarrow{\pi} & Y \longrightarrow 0
 \end{array}
 \quad (f = \pi \circ \tilde{f}).$$

命题 1 (投射对象的等价定义). 取 Abel 范畴 \mathcal{A} 中对象 P , 则以下等价命题成立时 P 为投射对象.

1. $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, -)$ 右正合, 从而为正合函子¹;
2. P 符合定义 2 之表述 (由提升性质定义);
3. 形如 $X \rightarrow P \rightarrow 0$ 的正合列均可裂.

证明. 先证明 $1 \implies 2 \implies 3$. 若 $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, -)$ (协变) 右正合, 则函子保持任意满态射 $X \xrightarrow{\pi} Y$. 即, 任意 $P \xrightarrow{f} Y$ 有原像 $P \xrightarrow{\tilde{f}} X$. 遂有交换图

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, X)} & P \\
 \pi \downarrow & \xRightarrow{h^P} \downarrow & \downarrow \text{id} \\
 Y & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, Y)} & P
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 P & \xrightarrow{\tilde{f}} & X \\
 \text{id} \downarrow & \tilde{f} \nearrow & \downarrow \pi \\
 P & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

¹ 试回忆: $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -) : \mathcal{A} \rightarrow \text{Ab}$ 对一切 $X \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ 均是左正合的.

可见 P 满足定义 2 之表述. 是故满态射 $X \xrightarrow{\pi} P$ 给出可裂短正合列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow X \xrightarrow{\pi} P \longrightarrow 0$$

$\begin{array}{c} P \\ \swarrow \tilde{\text{id}} \quad \downarrow \text{id} \\ X \end{array}$

对 $3 \implies 1$, 注意到 Abel 范畴有拉回². 今考虑 $X \xrightarrow{\pi} Y \xleftarrow{f} P$ 的拉回 (下图左)

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{a} & P \\ \downarrow b & \lrcorner & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{\pi} & Y \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} & & C & \xrightarrow{0} & Y \\ & \swarrow \theta & \downarrow \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} & \searrow (f, \pi) & \\ \ker(f, \pi) & \xrightarrow{\iota} & X \oplus P & \xrightarrow{(f, \pi)} & Y \\ & \swarrow \tau & \uparrow \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} & \nwarrow 0 & \\ & & C & \xrightarrow{0} & Y \end{array}$$

上图 (右) 中 θ 由核之泛性质定义, τ 由拉回之泛性质定义. 遂有 $(C, \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}) = (\ker(f, \pi), \iota)$. 即,

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}} X \oplus P \xrightarrow{(f, \pi)} Y$$

为正合列. 由于 π 满, 从而上述正合列补全为短正合列, 因此原拉回也是推出. 作态射 (a, π) 之核, 并约定 $\ker \pi$ 至 P 的零映射, 则下图实线处交换

$$\begin{array}{ccccc} \ker a & \xrightarrow{i} & C & \xrightarrow{a} & P \\ \downarrow \tilde{b} & \nearrow \varphi & \downarrow b & \searrow 0 & \downarrow f \\ \ker \pi & \xrightarrow{i'} & X & \xrightarrow{\pi} & Y \end{array}$$

$\begin{array}{c} \tilde{\varphi} \\ \curvearrowright \end{array}$

作出由拉回之泛性质定义的态射 φ , 再经 $\ker a$ 作出 $\tilde{\varphi}$. 注意到

$$\begin{aligned} i \circ \tilde{\varphi} \circ \tilde{b} &= \varphi \circ \tilde{b} = i, \\ i' \circ \tilde{b} \circ \tilde{\varphi} &= b \circ i \circ \tilde{\varphi} = b \circ \varphi = i', \end{aligned}$$

因此 \tilde{b} 于 $\tilde{\varphi}$ 给出 $\ker a \simeq \ker \pi$. 请读者自证如下交换图 (上下两行正合)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker a & \xrightarrow{i} & C & \xrightarrow{a} & P \xrightarrow{c} \text{coker } a = 0 \\ & & \simeq \downarrow & & \downarrow b & & \downarrow f \\ 0 & \longrightarrow & \ker \pi & \xrightarrow{i'} & X & \xrightarrow{\pi} & Y \xrightarrow{c'} \text{coker } \pi = 0 \end{array}$$

由已知, 第一行正合列可裂. 不妨取 $P \xrightarrow{a'} C \xrightarrow{a} P$ 之复合为恒等映射, 则下图给出任意 $f \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, Y)$ 之原像 $b \circ a' \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, X)$.

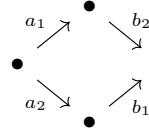
$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, Y) & & P \xrightarrow{f} Y \\ \uparrow & & \swarrow a \quad \searrow b \\ \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, X) & & \begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{a'} & C \\ & \searrow & \downarrow \\ & & X \end{array} \end{array}$$

$\begin{array}{c} \text{---} b \circ a' \text{---} \end{array}$

□

²Abel 范畴之态射范畴仍为 Abel 范畴, 因此态射范畴中存在二元积. 再由此对应原 Abel 范畴之拉回即可.

注 1 (推出-拉回的对边法则). 对图



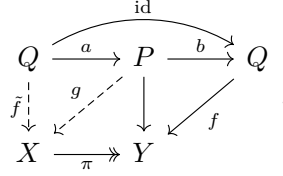
, 有如下结论:

1. 若上图为推出且 a_i 单, 则上图为拉回且 b_i 单;
2. 若上图为拉回且 b_i 满, 则上图为推出且 a_i 满.

2 投射对象的性质

命题 2 (投射对象之收缩仍为投射对象). 取投射对象 P , 若存在 Q, a, b 使得 $Q \xrightarrow{a} P \xrightarrow{b} Q$ 为恒等映射, 则 Q 投射.

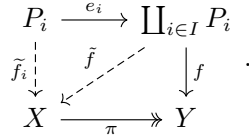
证明. 记 g 为投射对象 P 诱导的提升, $\tilde{f} = g \circ a$ 自然是 f 的提升.



□

命题 3 (余积保持投射模). 对任意集合 I . 余积 $\coprod_{i \in I} P_i$ 为投射对象当且仅当每一 P_i 为投射对象.

证明. 若 $\coprod_{i \in I} P_i$ 投射, 则每一 P_i 作为其收缩仍投射. 反之, 考虑下图



其中 \tilde{f}_i 为 $f \circ e_i$ 之提升, \tilde{f} 由余积定义给出. 显然 $\pi \circ \tilde{f} = f$.

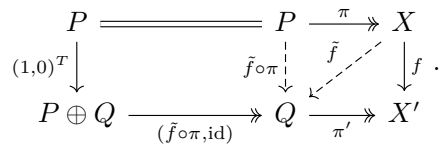
□

命题 4 (态射范畴中的基本投射对象). 选定 Abel 范畴 \mathcal{A} 与投射对象 P , 则 $0 \rightarrow P$ 与 $P \xrightarrow{\text{id}} P$ 为态射范畴的投射对象. 直接验证之即可.

定义 3. 称 \mathcal{A} 有足够多投射对象, 若任意对象 $M \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ 同构于某一投射模之商.

命题 5. 设 \mathcal{A} 为具有足够多投射对象的 Abel 范畴, 则其态射范畴仍有足够多的投射对象, 且任意投射对象为 $\begin{smallmatrix} 0 \\ \downarrow \\ P \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} P \\ \downarrow \text{id} \\ P \end{smallmatrix}$ 的直和项 (P 与 Q 均为投射对象).

证明. 对任意 $X \xrightarrow{f} Y$, 有投射模 P 与 Q 使得下图交换



显然态射范畴中同有足够多的投射对象. 注意到 $\begin{smallmatrix} 0 \\ \downarrow \\ P \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} P \\ \downarrow \text{id} \\ P \end{smallmatrix}$ 到, $P \xrightarrow{\tilde{f} \circ \pi} Q$ 满, 遂可裂.

□

3 投射对象为自由对象之直和项

定义 4 (自由对象). 若存在自由-遗忘伴随 $\mathcal{C} \begin{matrix} \xrightarrow{U} \\ \tau \\ \xleftarrow{F} \end{matrix} \text{Set}$, 则称集合在 F 下的像为自由对象.

注 2. 依照 Mitchell 嵌入定理, 小 Abel 范畴与某一模范畴等价. 相应地, 自由对象即自由模.

注 3. 类比定义 2, Set 中任意对象既投射且内射.

命题 6. 若右伴随保持满态射, 则左伴随保持投射对象. 直接验证即可.

注 4 (自由对象投射的充分条件). 若定义 4 中 U 保持满态射, 则左伴随 (自由函子) 保持投射对象.

命题 7. 假定定义 4 中 U 保持满态射, 且 \mathcal{C} 允许直和, 则投射模等价于自由模的直和项.

证明. 一方面, 余单位作为自然变换诱导满自函子 $FU : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}, FU(X) \mapsto X$. 遂可裂满. 因此一切投射模以自由模直和项之形式出现. 另一方面, 命题 6 表明自由对象均投射. \square

定理 1. 若具体范畴 \mathcal{C} 与集合范畴间存在自由-遗忘伴随, 且遗忘函子 U 保持满射, 则任意对象是自由对象的商, 故 \mathcal{C} 有足够多投射对象. 若 \mathcal{C} 为 Abel 范畴, 则投射模等价于自由模的直和项.

例 1. 应当留意以下例子:

1. 模范畴中, 投射模为自由模直和项, 考虑自然的遗忘函子即可.
2. (小) 环范畴中存在某些非满射的满态射 $R \rightarrow \text{frac}(R)$, 此时 $\text{frac}(R)$ 自由但不投射.
3. 有限 Abel 群范畴与集合范畴间不存在自由-遗忘伴随, 同时没有足够的投射对象.

定理 2. 主理想整环遗传, 其自由模之子模仍自由. 特别地, 自由模与投射模等价.

定理 3. 自由群之子群自由, 从而群范畴的自由对象等价于投射对象.

证明. 熟知自由群之子群自由. 应注意: 即便群范畴允许直和与正合列, 一般地有

$$\text{左可裂} \iff \text{可裂} \xrightarrow[\neq]{} \text{右可裂}.$$

常将右可裂对应半直积. 同时强调自由群的泛性质: 任意集合 S 至群 G 的映射 $f : S \rightarrow G$ 通过 S 生成的自由群与典范映射 $\iota : S \rightarrow F(S)$ 唯一分解. 即, 存在唯一的群同态 φ 使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & G \\ \downarrow \iota & \nearrow \exists! \varphi & \\ F(S) & & \end{array}.$$

熟知群范畴之满态射与满射等价, 定理 1 表明自由群投射. 反之, 任意投射对象 G 为自由群之商, 且该满同态 $FU(G) \twoheadrightarrow G$ 之右逆为 $G \hookrightarrow FU(G)$. 由于 G 为自由群之子群, 从而自由. \square

注 5. 若群 G 使得一切正合列可裂, 则 G 平凡.³

³证明思路: 若右可裂正合列可裂, 当且仅当收缩之像为中间群的正规子群, 此后不难构造具体例子.