

Hahn-Banach 定理

注: 本章讨论一般的度量空间, 从而使用序列刻画连续性及紧致性等足矣, 暂不大动干戈.

Banach 空间与范数

Def. 称 X 为域 $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ 上的线性空间, 若且仅若满足 "八条规则".

Def. 称 p 为线性空间 X 上的一个半范数, 若且仅若

- $p : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.
- $\forall a > 0, x \in X : p(ax) = ap(x)$.
- $\forall x, y \in X : p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

特别地, 若 $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, 则称 p 为范数.

Example. 范数为半范数. 线性算子的绝对值也为半范数, 其为范数当且仅当算子的余维度为 0 (即在任意一维空间上不是零算子).

Example. 范数直接导出度量. 半范数不一定导出度量, 因为缺失自反性.

Def. 称 $(X, \|\cdot\|)$ 为 Banach 空间, 若且仅若其为完备的范数空间.

Example. 有限维线性空间一定为 Banach 空间. 无穷维线性空间不一定为 Banach 空间: 例如内积空间 $(\text{span}(e_1, e_2, \dots), \|\cdot\|)$ 不为 Banach 空间, 因为 Cauchy 列 $\{\sum_{k=1}^n k^{-1} e_k\}_{n \geq 1}$ 的极限不在原空间中.

Def. 称 ℓ 为 X 上的线性泛函, 若且仅若

- $\ell : X \rightarrow \mathbb{F}, \mathbb{F} = \mathbb{R} \text{ 或 } \mathbb{C}$ 取决于 X 所在的域.
- ℓ 为线性映射, 即 $\ell(x + cy) = \ell(x) + c\ell(y), \forall x, y \in X, \forall c \in \mathbb{F}$.

Def. 称 T 为线性空间 X 到线性空间 U 上的 \mathbb{F} -线性算子, 若且仅若 $T : X \rightarrow U$ 为线性映射, 即 $T(x + cy) = T(x) + cT(y), \forall x, y \in X, \forall c \in \mathbb{F}$.

特别地, $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}$ 为 \mathbb{R} -线性算子, 但在 \mathbb{C} 上不再线性. \mathbb{C} -线性算子一定为 \mathbb{R} -线性算子.

Example. 线性泛函即某一 X 到 \mathbb{F} 上的线性算子.

Def. 记 X 到 Y 的线性算子空间为 $\mathcal{L}(X, Y)$.

Def. 算子 $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ 的范数为 $\|T\| := \sup \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$.

Example. $\mathcal{L}(X, Y)$ 不一定为范数空间, 因为算子范数可能达到无穷.

Def. 取 $\mathcal{B}(X, Y) := \{T \mid \|T\| < \infty\}$ 为 $\mathcal{L}(X, Y)$ 的线性子空间, 即有界算子空间.

Prop. 对 $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, 以下概念等价:

1. T 在某一点 $x_0 \in X$ 连续.
2. T 在 X 上连续.
3. T 在 X 上一致连续.
4. $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.

Proof. 前三条等价是因为算子的线性性.

3. 与 4. 等价是因为

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \|x - x'\| < \delta : \|T(x) - T(x')\| < \varepsilon$$

$$\text{等价于 } \|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}.$$

□

Example. $\mathcal{B}(X, Y)$ 为 Banach 空间, 因为任意 Cauchy 列 $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 的逐点极限恰导出某一有界线性算子, 记作 $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 之极限.

原始定理

Thm. (Hahn-Banach) 设 X 为 \mathbb{F} 上的线性空间, Y 为 X 的线性子空间, p 为 X 上的半范数, ℓ 为 Y 上的范数. 若 $p(y) \geq \ell(y)$ 对一切 $y \in Y$ 成立, 则存在 X 上的线性泛函 $\tilde{\ell}(: X \rightarrow \mathbb{F})$ 使得

- $\tilde{\ell}(y) = \ell(y), \forall y \in Y$.
- $p(x) \geq \ell(x), \forall x \in X$.

Proof.

Step 1. 当 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 时, 假设 $Y \subsetneq X$, 取 $z_0 \in X \setminus Y$. 对任意 $y, y' \in Y$, 总有

$$\ell(y + y') \leq p(y + y') \leq p(y + z_0) + p(y' - z_0).$$

从而 $\ell(y') - p(y' - z_0) \leq p(y + z_0) - \ell(y), \forall y, y' \in Y$. 记

- $m = \sup_{y' \in Y} (\ell(y') - p(y' - z_0)),$
- $M = \inf_{y \in Y} (p(y + z_0) - \ell(y)).$

显然 $m \leq M$. 取 $\tilde{\ell}(z_0) = a \in [m, M]$ 即可得 ℓ 在 $\text{span}(Y, z_0)$ 上的延拓.

Step 2. 当 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ 时, ℓ 为 \mathbb{C} 上的线性泛函, $\text{Re}(\ell)$ 为 \mathbb{R} 上的线性泛函. 取 $\ell(x) = \text{Re}(\ell(x)) - i\text{Re}(\ell(ix))$ 即可.

Step 3. 记作 $(Z^\#, \ell^\#)$ 为 (Y, ℓ) 在 $Z^\#$ 上的一种延拓. 考虑 P 为 (Y, ℓ) 在某一线性子空间上的延拓所构成的偏序集, 记 $(Z^\#, \ell^\#) \leq (Z^\$, \ell^\$)$ 当且仅当 $Z^\# \subset Z^\$$ 且 $\ell^\#|_{Z^\#} = \ell^\$$. 对任意 P 中的链 $\{(Z_i, \ell_i)\}_{i \in I}$, 存在极大元

$$(Z_0, \ell_0), \quad Z_0 = \cup_{i \in I} Z_i, \ell_0|_{Z_i} = \ell_i.$$

若极大元 (Z_0, ℓ_0) 满足 $Z_0 \subsetneq X$, 则存在 $z_0 \in X \setminus Z_0$ 使得 (Z_0, ℓ_0) 可扩张为更大的元, 矛盾! 因此只能有 $Z_0 = X$.

□

注: *Hahn-Banach* 定理未涉及 *Banach* 空间, 连续线性泛函等限定.

Col. 对任意 $x_0 \in X$, 存在 X 上连续线性泛函 ℓ , 使得 $|\ell(x_0)| = \|x_0\|$.

Proof. 只需考虑 $x_0 \neq 0$ 时情形. 对 X 上的半范数 $\|\cdot\|$ 与一维空间 $\text{span}(x_0)$ 上的连续线性泛函 $\ell(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\|$ 采用 *Hahn-Banach* 定理即可.

□

Col. ℓ 为 X 上的连续线性泛函, 则 $\|x_0\| = \sup_{\|\ell\|=1} |\ell(x_0)|$.

Proof. 只需考虑 $x_0 \neq 0$ 时情形. 一方面, $\sup_{\|\ell\|=1} |\ell(x_0)| \leq \sup_{\|\ell\|=1} \|x_0\| = \|x_0\|$. 另一方面, 存在使得 $|\ell(x_0)| = \|x_0\|$ 且 $\|\ell\| = 1$ 的连续线性泛函, 因此不等式可取等.

□

Col. 对 X 的线性子空间 Y 与任意 $x_0 \in X \setminus Y$, 记 $d_0 := \inf_{y \in Y} \|x_0 - y\|$ 为 x_0 到 Y 的距离, 则存在 X 上的连续线性泛函 ℓ 使得 ℓ 在 Y 上恒为 0 且 $\ell(x_0) = d_0$.

Proof. 定义半范数 $p(x) := \inf_{y \in Y} \|x - y\|$ 即可.

Example. 连续线性泛函延拓并非显然事实. 例如取 X 为 $[0, 1]$ 上的 $\text{span}(1, x, x^2, \dots)$, 范数 $\|f\| := (\int_{[1,2]} |f|^2)^{1/2}$, 则存在线性泛函 ℓ 使得 $\ell(x) = \ell(x^2) = \dots = 0$. 若定义 $\ell(1)$ 使得 ℓ 仍连续, 则只能有 $\ell(1) = 0$. 因为 $\{(x-1)^k\}_{k \geq 1}$ 收敛至 0, 从而 $\ell((x-1)^k) = (-1)^k \ell(1)$ 只能收敛至 0, 故 $\ell(1) = 0$.

应用: 凸集分离定理

Def. 称 S 为 X 中的凸集, 若且仅若 $\forall x, y \in S, \forall \theta \in [0, 1]$, 总有 $\theta x + (1 - \theta)y \in S$.

Thm. 设 A 为凸开集, B 为凸集, $A \cap B = \emptyset$, 则存在 \mathbb{R} -连续线性泛函 ℓ 使得

$$\sup_{x \in A} \ell(x) \geq \inf_{y \in B} \ell(y),$$

即超平面 $\ell(z) = \sup_{x \in A} \ell(x)$ 分离 A 与 B .

Proof.

Step 1. 取 $A - B := \{x - y \mid x \in A, y \in B\}$, 任取 $x_0 \in A - B$, 记 $C := \{x - y - x_0 \mid x \in A, y \in B\}$. 显然 C 为开集且包含原点.

Step 2. 作 X 上的半范数 $p(z) := \min\{\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid z \in \lambda \cdot C\}$, 则 p 在 C 边界上取值为 1. 取 $\text{span}(x_0)$ 上的线性泛函 f 满足 $f(x_0) = p(x_0)$, 则存在延拓 \tilde{f} 使得 \tilde{f} 在 X 上取值不超过 p .

Step 3. 注意到 $x_0 \notin C$, 从而 $\forall x \in A, y \in B$,

$$\tilde{f}(x - y - x_0) = \tilde{f}(x) - \tilde{f}(y) - p(x_0) \leq \tilde{f}(x) - \tilde{f}(y).$$

从而 $\tilde{f}(y) \leq \tilde{f}(x)$ 恒成立.

□

Col. A 为凸开集, B 为与 A 不相交的凸集, 则存在 \mathbb{R} -连续线性泛函 ℓ 与 $c \in \mathbb{R}$ 使得 $\sup_{x \in A} \ell(x) > c \geq \inf_{y \in B} \ell(y)$.

Col. A 为紧凸集, B 为与 A 不相交的闭凸集, 则存在 \mathbb{R} -连续线性泛函 ℓ 使得 $(\sup_{x \in A} \ell(x), \inf_{y \in B} \ell(y))$ 为区间.

Proof. 注意到 A 上连续函数 $d_B(x) = \inf_{y \in B} d(x, y)$ 在紧集 A 上取达正的最小值, 从而存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $A + t\varepsilon$ 为与 B 不交的凸开集 ($t \in (0, 1)$).

□

应用: 二次对偶的典范嵌入

Def. 记 X 为 \mathbb{F} 上线性空间, 定义对偶空间为 $X^* := \mathcal{B}(X, \mathbb{F})$.

Thm. 存在等距嵌入 $J: X \rightarrow X^{**}, x \mapsto J_x$, 等距即 $\|x\| \equiv \|J_x\|$.

Proof. 一方面, $J_x: X^* \rightarrow \mathbb{F}, \ell \mapsto J_x(\ell) = \ell(x)$ 为良定义的线性映射, 从而 J 为线性空间的嵌入. 另一方面, 由 Hahn-Banach 定理之推论得

$$\|J_x\| = \sup_{\|\ell\|=1} |J_x(\ell)| = \sup_{\|\ell\|=1} |\ell(x)| = \|x\|.$$

从而为等距嵌入.

□

Def. 称 X 为自反的, 若且仅若 $J: X \rightarrow X^{**}$ 为同构.

Example. 空间

$$\ell^p := \{x = \{x_n\}_{n \geq 1} \mid \|x\|_{\ell^p} = \sqrt[p]{\sum_{n \geq 1} |x_n|^p} < \infty\}$$

为反射的, 若 $p \in (1, +\infty)$. 特别地, $(\ell^p)^* = \ell^q$, 其中 $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Proof. 不难验证 $(\ell^p)^*$ 包含 ℓ^q 中一切元素, 因为任意 $f \in \ell^q$, 总有

$$\|f\| = \sup_{\|x\|_{\ell^p}=1} |f(x)| \leq \|f\|_{\ell^q} \cdot \|x\|_{\ell^p} < \infty.$$

另一方面, 由于 $\text{span}(\{e_n\}_{n \geq 1})$ 在 ℓ^p 中稠密, 从而 $\forall f \in (\ell^p)^*$ 可记作

$$\sum_{n \geq 1} a_n e_n \mapsto \sum_{n \geq 1} a_n c_n.$$

由于对任意 $\{a_n\}_{n \geq 1} \in \ell^p$, 总存在 $\{c_n\}_{n \geq 1}$ 使得

$$|\sum_{n \geq 1} a_n c_n| = \|a\|_{\ell^p} \cdot \|c\|_{\ell^q}$$

因此 $\|f\|_{\ell^q} < \infty$ 是必要的. 证毕.

□

Prop. 对某些 $\ell \in X^*$, 或不存在 $x \in X$ 使得 $\frac{|\ell(x)|}{\|x\|} = \|\ell\|$, 此时空间不自反.

Proof. 根据 Hahn-Banach 定理, 存在 $\varphi \in X^{**}$ 使得 $\frac{\|\varphi(\ell)\|}{\|\varphi\|}$. 若 $J: X \rightarrow X^{**}$ 为同构, 则存在唯一的 $x \in X$ 使得 $J_x = \varphi$. 这与 $\frac{|\ell(x)|}{\|x\|} = \|\ell\|$ 矛盾!

□

职是之故, $\ell^1, (C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty), \ell^\infty, c_0$, 以及非自反空间的对偶空间等均非自反.

Example. c_0 表示一切收敛至 0 的数列, 则 $(c_0)^* = \ell^1$.

Proof. 注意到 $\text{span}\{e_k\}_{k \geq 1}$ 在 c_0 中稠密, 则 $f \in (c_0)^*$ 可写作

$$f: x = \sum_{k \geq 1} c_k e_k \mapsto \sum_{k \geq 1} f(e_k) c_k.$$

根据 Abel-Dirichlet 判别法, 显然 ℓ^1 中一切元素均在 $(c_0)^*$ 中. 反之若存在 f 使得 $\sum_{k \geq 1} |f(e_k)| = \infty$, 下证明 f 无解, 即存在 $x \in c_0$ 使得 $f(x) = \infty$.

换言之, 需找到比 $\sum_{k \geq 1} |f(e_k)| = \infty$ 发散速度更慢的级数 $\sum_{k \geq 1} |x_n| \cdot |f(e_k)| = \infty$, 其中 $x_n \rightarrow 0$. 实际上, 取正项序列 $\{D_k\}_{k \geq 1}$ 使得 $\sum_{k \geq 1} D_k = \infty$. 记 $d_k = \frac{D_k}{D_1 + \cdots + D_{k-1}}$, 则

$$\begin{aligned} & \bullet \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d_k}{D_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{D_1 + \cdots + D_{k-1}} = 0, \\ & \bullet \sum_{k \geq 1} d_k > \sum_{k \geq 1} \int_{D_1 + \cdots + D_{k-1}}^{D_1 + \cdots + D_k} \frac{dx}{x} = \infty. \end{aligned}$$

得证.

□

Example. 证明 $(\ell^1)^* = \ell^\infty$.

Proof. 显然 $\ell^\infty \subset (\ell^1)^*$. 注意到 $\text{span}\{e_k\}_{k \geq 1}$ 在 ℓ^1 中稠密, 则 f 可写作

$$f: x = \sum_{k \geq 1} c_k e_k \mapsto \sum_{k \geq 1} f(e_k) c_k.$$

若存在 $\{e_{n_k}\}_{k \geq 1}$ 使得 $|f(e_{n_k})| \rightarrow \infty$, 则 ℓ^1 中收敛至 0 的序列 $\{e_{n_k} \cdot \sqrt{|f(e_{n_k})|}^{-1}\}$ 在 f 下发散, 与 f 之连续性矛盾.

□

Example. ℓ^1 不自反, 即存在无法在 ℓ^1 中表示的 ℓ^∞ 中的泛函.

Proof. 记 c 为收敛数列之全体, 显然 $c_0 \subsetneq c \subsetneq \ell^\infty$. 显然, c 上泛函 $\lim_{n \rightarrow \infty}$ 无法用 ℓ^1 表示. 下证明 $\lim_{n \rightarrow \infty}$ 的某种延拓可在 ℓ^∞ 中定义.

记 $p(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} |x_n|$ 为 ℓ^∞ 上的半范数, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 为真子空间 $c \subsetneq \ell^\infty$ 上的连续线性泛函. 根据 Hahn-Banach 定理, 存在延拓 \tilde{f} 使得

- $\tilde{f}(x) = f(x), \forall x \in c.$
- $|\tilde{f}(x)| \leq p(x).$

□

Thm. $(\ell^\infty)^*$ 等距同构于 $\beta\mathbb{N}$ 上有限 Borel 测度.

Proof. 留作 Stone-Čech compactification 的补充内容.

□

应用: **Banach** 极限

Thm. (Generalised Hahn-Banach theorem, Agnew & Morse) 记 $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X, X)$ 为一族两两可交换的线性映射 (即 \mathcal{A} 为交换算子半群), X 上的半范数 p 满足 $p(Ax) \leq p(x), \forall A \in \mathcal{A}$. 若存在线性子空间 $Y \subset X$ 上的线性泛函 ℓ 使得

- $\ell(y) \leq p(y), \forall y \in Y.$
- $\mathcal{A}|_Y \subset \mathcal{L}(Y, Y).$
- $\ell(Ay) = \ell(y), \forall y \in Y, \forall A \in \mathcal{A}.$

从而存在延拓 $\tilde{\ell}$ 使得

- $\tilde{\ell}(x) \leq p(x), \forall x \in X.$
- $\tilde{\ell}(Ax) = \tilde{\ell}(x), \forall A \in \mathcal{A}, \forall x \in X.$

Proof. 略, 自行查看 Lax 的泛函分析.

□

此时可定义 ℓ^∞ 上的某种极限 $\text{LIM}_{n \rightarrow \infty}$ 使得

- $\text{LIM}_{n \rightarrow \infty} \in (\ell^\infty)^*.$
- $\text{LIM}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \forall x \in c \subsetneq \ell^\infty.$
- $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \text{LIM}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n, \forall x \in \ell^\infty.$
- $\text{LIM}_{n \rightarrow \infty}$ 在左平移算子与右平移算子下不变.

Def. 称满足以上性质的 $\text{LIM}_{n \rightarrow \infty}$ 为 Banach 极限.

Prop. 可定义有界函数空间上的 Banach 极限.

应用: **Tauberian** 理论

Tauberian 理论研究一类单参数变换的函数族对所在空间的刻画, 例如证明了平移算子在 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 上作用的轨道在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中稠密的充要条件.

Lemma. $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n), \forall t \in \mathbb{R}^n, \exists \varepsilon > 0, \exists h (\|h\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon)$ 使得 $\hat{h}(s) = \hat{f}(t) - \hat{f}(s)$ 对一切 $s \in U$ 成立, U 为某一 t 的邻域.

Proof. 取 $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\hat{g} \equiv 1$ 在原点附近成立. 任取 $\forall \lambda > 0$, 置

$$\begin{aligned} g_\lambda(x) &:= e^{it \cdot x} \lambda^{-n} g(x/\lambda), \\ h_\lambda(x) &:= \hat{f}(t) g_\lambda(x) - (f * g_\lambda)(x). \end{aligned}$$

此处 g_λ 为缩放后的 Fourier 变换之积分项, h_λ 用于导出 g 与之平移的积分差. 注意到 $\hat{g}_\lambda(s) = 1$ 在 t 的某邻域 U_λ 中成立, 则对 $s \in V_\lambda$ 总有 $\hat{h}(s) = \hat{f}(t) - \hat{f}(s)$. 注意到

$$h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) [e^{-it \cdot y} g_\lambda(x) - g_\lambda(x - y)] dy.$$

从而据控制收敛定理有

$$\begin{aligned} \|h_\lambda\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |h_\lambda| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f| \cdot \int_{\mathbb{R}^n} |g(\xi) - g(\xi - \lambda^{-1}y)| \\ &\stackrel{\lambda \rightarrow 0}{=} 0. \end{aligned}$$

□

Thm. 取 $\phi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 取子空间

$$Y \subset [L^1(\mathbb{R}^n) \cap \{f \mid f * \phi = 0\}].$$

则 $Z(Y) := \cap_{f \in Y} \{s \in \mathbb{R}^n \mid \hat{f}(s) = 0\}$ 包含 $\hat{\phi}$ 的紧支撑.

Proof. 选定 $t \in Z(Y)^c$, 则存在 $f \in Y$ 使得 $\hat{f}(t) = 1$. 根据引理, 存在 $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\|h\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < 1$, 使得 $\hat{h}(s) = 1 - \hat{f}(s)$ 在 t 的某一邻域 U 中成立. 下仅需证明 $\hat{\phi} = 0$ 对 U 中元素成立. 等价地, $\hat{\phi} \cdot \hat{\psi}$ 对一切速降空间中在 U 中有紧支撑的 $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 成立, 再等价地, $\psi * \phi = 0$.

置 $g_0 = \psi$, $g_m = h * g_{m-1}$, 由 Young 不等式知 $\|g_m\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|h\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^m \cdot \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$. 注意到 $(1 - \hat{h}(s))\hat{\psi}(s) = \hat{\psi}(s)\hat{f}(s)$, 故 $\hat{\psi} = \sum_{m=1}^{\infty} \hat{h}^m \hat{\psi} \hat{f}$. 由于 $\|h\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < 1$, 故 $\sum_{n \geq 1} \hat{h}^m \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 从而得

$$\psi * \phi = \left(\sum_{n \geq 1} g_m \right) * f * \phi = 0.$$

□

Thm. (Wiener) 记 \mathcal{L}_0 为平移算子群, $Y \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ 为 \mathcal{L}_0 的不变子空间, 则 $Y = L^1(\mathbb{R}^n)$.

Proof. $\forall f \in Y, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, 平移算子 $L_{x_0} : Y \rightarrow Y, f(x) \mapsto f(x + x_0)$. 若存在 $\phi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\int f \check{\phi} = 0$ 对一切 $f \in Y$ 恒成立, 则 $f * \phi = 0$. 根据上一定理, $\hat{\phi}$ 的支撑为空集, 从而 $\hat{\phi} = 0$. 注意到 Fourier 变换在 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上一一对应, 从而 $\phi = 0$ a.e. in $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

由于 $T^\perp = 0$, 根据 Hahn-Banach 定理知 $Y = L^1(\mathbb{R}^n)$.

□

Col. 取 $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$, Y 为 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 上包含 K 的最小闭子空间, 则 $Y = L^1(\mathbb{R}^n)$ 若且仅若 $\hat{K}(t) \neq 0$ 对任意 $t \in \mathbb{R}$ 成立.

Proof. 注意到 $Z(Y) = \{t \in \mathbb{R}^n \mid \hat{K}(t) = 0\}$. 根据 Wiener 定理, $Z(Y)$ 空当且仅当 $Y = L^1(\mathbb{R}^n)$.

□