

# 范畴论简介

## 范畴简介

**Definition 1.1.1.** 范畴  $\mathcal{C}$  包含三要素

- $\mathcal{C}$  中对象所成的类, 记作  $\text{Obj}(\mathcal{C})$ .
- $\forall A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ , 记  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  为  $A$  至  $B$  的态射.
- 对任意  $A, B, C \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ , 总存在态射的复合

$$\begin{aligned}\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C) \\ (f, g) &\mapsto gf.\end{aligned}$$

**Definition 1.1.2.** 以上定义出的范畴  $\mathcal{C}$  满足如下公理

- **A1.** 在有意义时总有复合  $(fg)h = f(gh)$ .
- **A2.** 对任意  $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ , 存在  $1_A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$  使得

$$\begin{aligned}\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, A), \quad 1_A f &= f. \\ \forall g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \cdot), \quad g 1_A &= g.\end{aligned}$$

- **A3.**  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \cap \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D) \neq \emptyset$  若且仅若  $(A = C) \wedge (B = D)$ .

**Definition 1.1.3.** 取  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ , 称

- $f$  为单的若且仅若对任意  $g, h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$ ,  $fg = fh \Leftrightarrow g = h$ .
- $f$  为满的若且仅若对任意  $g, h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$ ,  $gf = hf \Leftrightarrow g = h$ .

**Notation 1.1.4.** 记  $f : A \rightarrowtail B$  为单的  $f$ . 记  $f : A \twoheadrightarrow B$  为满的  $f$ .

**Def.** 取  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ , 称  $f$  为同构 (可逆) 若且仅若存在  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$  使得

$$gf = 1_A, \quad fg = 1_B.$$

此时称  $A$  与  $B$  为同构的.

**Examples.** 常见范畴如下

**Ex1.**  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  为单且满的  $\Leftarrow f$  为同构, 反之未必

▼ Proof of the theorem

一方面,  $f$  为同构时一定存在  $f'$  使得  $ff' = 1_B$ , 从而

$$gf = hf \Leftrightarrow gff' = hff' \Leftrightarrow g = h.$$

得  $f$  为满的. 同理  $f$  为单的.

另一方面, 考虑 Hausdorff 空间与连续映射所成的范畴, 则嵌入  $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  为单且满的 (满足左右消去律, 但并非同构).

**Ex2.** 对  $\mathcal{C} = \text{Sets}$ , 证明单态射即单射.

▼ Proof.

$\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ,  $f$  为单的若且仅若对任意  $g, h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$  总有

$$g = h \Leftrightarrow fg = fh.$$

$f$  为单时, 下证明  $f$  为单设. 若存在不同的  $x_1, x_2 \in A$  使得  $f(x_1) = f(x_2)$ , 考虑  $g$  与  $h$  分别为将一切  $C$  中元素映至  $x_1$  与  $x_2$  的态射即得  $f$  非单, 矛盾.

$f$  为单射时, 下证明  $f$  为单的, 只需证  $fg = fh \implies g = h$ . 若存在  $x_0 \in C$  使得  $fg(x_0) = fh(x_0)$  而  $g(x_0) \neq f(x_0)$ , 则  $g(x_0)$  与  $h(x_0)$  在  $f$  下的像相同, 矛盾!

**Example.** 称  $(X, \leq)$  为半序集若且仅若  $X$  满足自反性 ( $x \leq x$ ) 与传递性 ( $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \implies x \leq z$ ). 例如整数集关于整除偏序形成半序集, 至少  $-1 \leq 1$  且  $1 \leq -1$ .

记范畴  $\mathcal{C}$  为半序集  $X$  与偏序关系  $\leq$  所成的范畴. 取

- $\text{Obj}(\mathcal{C}) = X$ .

- $$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) = \begin{cases} \{i_y^x\}, & x \leq y, \\ \emptyset, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- 态射满足复合关系  $i_z^y i_y^x = i_z^x$ .

**Example.** 称  $\mathcal{C}$  为小范畴若且仅若  $\text{Obj}(\mathcal{C})$  为集合 (并非真类).

**Def.** 称  $\mathcal{C}^{op}$  为  $\mathcal{C}$  的反变范畴, 若且仅若

- $\text{Obj}(\mathcal{C}^{op}) = \text{Obj}(\mathcal{C})$ .

- $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ . 特别地,

$$f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A) \Leftrightarrow f^{op} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A, B).$$

- $g^{op} f^{op} = (fg)^{op}$ .

**Proposition.**  $(\mathcal{C}^{op})^{op} = \mathcal{C}$ .

▼ **Proof of the proposition**

显然  $\text{Obj}(\text{mathcal C}) = \text{Obj}((\mathcal{C}^{op})^{op})$ . 注意到  $f$  与  $(f^{op})^{op}$  间存在自然对应, 故  $\text{mathcal C}^{op} = \text{mathcal C}$ .

**Prop.**  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  为单 (满), 若且仅若  $f^{op}$  为满 (单).

▼ **Proof of the proposition**

注意到

$$(f^{op} g^{op} = f^{op} h^{op}) \Leftrightarrow (gf)^{op} = (hf)^{op} \Leftrightarrow gf = hf.$$

反之亦然即可.

**Example.** 记  $\mathbb{G}$  为群范畴, 即  $\text{Obj}(\mathbb{G})$  为一切群, 态射为群同态. 则**满(单)态射等价于满(单)同态**.

▼ **Proof of the theorem**

单(满)同态视作集合运算时为单射与满射, 自然满足右(左)消去律, 从而单(满)态射.

兹有断言: 群单态射为单同态. 反之, 若  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{G}}(G, H)$  非单同态, 取

$$\begin{aligned} g_1 : \ker(f) &\rightarrow \ker(f), & x &\mapsto x, \\ g_2 : \ker(f) &\rightarrow \{e\}, & x &\mapsto e. \end{aligned}$$

易知  $f \circ g_1 = f \circ g_2 : \ker(f) \rightarrow \{e\}$ , 但  $g_1 \neq g_2$ .

兹有断言: 群满态射为满同态. 取  $f \in \text{Hom}_{\mathbb{G}}(G, H)$  为满态射,  $R := H/f(G)$  为右陪集分解, 记  $S$  为  $R \dot{\cup} \{\emptyset\}$  的置换群. 显然  $H$  在  $S$  上的右作用给出浸入

$$g_1 : H \hookrightarrow S, h \mapsto \begin{pmatrix} f(G)h' \mapsto f(G)h'h, \\ \{\infty\} \mapsto \{\infty\}. \end{pmatrix}$$

取对换  $\sigma \in S$ , 其中  $f(G) \leftrightarrow \{\infty\}$ . 定义  $g_2(x) := \sigma \circ g_1(x) \circ \sigma$ . 显然  $g_1 \neq g_2$ . 根据满态射定义,  $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ .

注意到  $g_1 \circ f(x)$  与  $g_2 \circ f(x)$  为相同的置换若且仅若  $g_1 \circ f(x)$  与  $\sigma$  可交换, 若且仅若  $f(x)$  固定  $f(G)$ . 从而  $S$  只能为交换群, 即  $f(G) = H$ .

**Example.** 记  ${}_R\mathcal{M}$  为左  $R$ -模范畴, 即  $\text{Obj}({}_R\mathcal{M})$  为一切左  $R$ -模, 态射为左  $R$ -模同态. 则满(单)态射等价于满(单)同态.

#### ▼ Proof of the theorem

同上, 单(满)同态视作集合运算时为单射与满射, 自然满足右(左)消去律, 从而单(满)态射.

反之, 若  $f \in \text{Hom}_R(M, N)$  非左  $R$ -模的单同态, 取

$$\begin{aligned} g_1 : \ker(f) &\rightarrow \ker(f), & x &\mapsto x, \\ g_2 : \ker(f) &\rightarrow \{e\}, & x &\mapsto e. \end{aligned}$$

则  $f \circ g_1 = f \circ g_2 : \ker(f) \mapsto \{e\}$ , 而  $g_1 \neq g_2$ .

反之, 若  $f \in \text{Hom}_R(M, N)$  非左  $R$ -模的满同态, 取

$$\begin{aligned} g_1 : N &\rightarrow N, & x &\mapsto x, \\ g_2 : N &\rightarrow N/\text{im}(f), & x &\mapsto x + \text{im}(f). \end{aligned}$$

从而  $g_1 \circ f = g_2 \circ f : M \mapsto \{e\}$ , 而  $g_1 \neq g_2$ .

**Example.** 记  $\text{Ring}$  为环范畴, 即  $\text{Obj}(\text{Ring})$  为一切环, 态射为环同态. 则单态射等价于单同态; 但是, 满同态推出满态射, 而反之未然.

#### ▼ Proof of the theorem

下仅例证对环范畴而言, 满态射一般不蕴含满同态.

环  $R$  到分式域的嵌入为满态射. 例如  $f : R \rightarrow \text{frac}(R), x \mapsto x$  为满态射,  $g_1, g_2 : \text{frac}(R) \rightarrow S$  满足  $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ . 显然  $g_i \circ f$  对应唯一的  $g_i$  (这也是分式域的泛性质), 从而  $g_1 = g_2$ .

**Def.** 称  $I \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  为起始元, 若  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(I, X)$  有且仅有一个元素,  $\forall X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ .

**Def.** 称  $T \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  为终末元, 若  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, T)$  有且仅有一个元素,  $\forall X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ .

**Def.** 称  $Z \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  为零元当且仅当其同为初始元与终末元.

**Example.** 单元集合为  $\mathcal{S}ets$  中的终末元.  $\mathcal{S}ets$  中无初始元.

**Example.**  $0$  为  $\mathbb{A}G$  中的零元;  $(\mathbb{R}, \leq)$  中不含初始元与终末元.

**Thm.**  $\mathcal{C}$  为含  $0$  元的范畴. 则

1. 对任意给定的零元  $x, y$  与  $x$  同构当且仅当  $y$  为零元.
2. 取  $Z$  为零元, 记  $\{0_{AZ}\} = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Z), \{0_{ZB}\} = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, B)$ , 复合态射

$$A \xrightarrow{0_{AZ}} Z \xrightarrow{0_{ZB}} B.$$

与零元之选取无关.

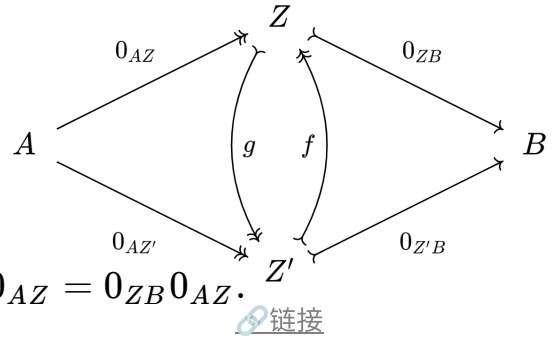
#### ▼ Proof of the theorem

对 1., 取任意零元  $Z$  与  $Z'$ , (唯一地) 取  $f: Z \rightarrow Z', g: Z' \rightarrow Z$ . 由于  $fg = 1_Z, gf = 1_{Z'}$ , 从而  $Z \cong Z'$ . 相反地, 若  $A$  与零元  $Z$  同构, 则存在唯一的  $f: A \rightarrow Z, g: Z \rightarrow A$ . 因此

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A) =: \{gh \mid h: C \rightarrow Z\}.$$

为一元集, 即  $A$  为终末元. 同理,  $A$  为起始元.

对 2., 任取  $Z$  与  $Z'$ , 构造如下交换图.  
易见



**Def.** 对含有零元  $Z$  的范畴  $\mathcal{C}$ , 记  $0_{AB} = 0_{ZB}0_{AZ}$  为  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  中的零态射.

**Proposition.**  $\mathcal{C}$  为有零元的范畴, 取  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ . 若  $f = 0$  或  $g = 0$ , 则  $gf = 0$ .

#### ▼ Proof of the proposition

不妨设  $Z$  为零元, 则  $f = 0$  时

$$gf = g0_{AB} = (g0_{ZB})0_{AZ} = 0_{ZC}0_{AZ} = 0_{AC}.$$

$g = 0$  时

$$gf = 0_{BC}f = 0_{ZC}(0_{BZ}f) = 0_{ZC}0_{AZ} = 0_{AC}.$$

**Definition.** 记  $\{X_i\}_{i \in I}$  为一族  $\mathcal{C}$  中以  $I$  为指标的对象, 称  $X$  为  $\{X_i\}_{i \in I}$  的直积若且仅若存在一族投影态射  $p_i : X \rightarrow X_i$  使得满足泛性质:

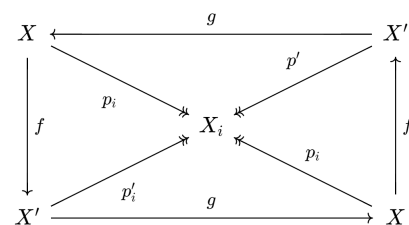
对任意  $Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ , 与态射  $f_i : Y \rightarrow X_i$ , 存在唯一的  $f : Y \rightarrow X$  使得  $p_i f = f_i$ . 常记作  $(X, p_i) =: \prod_{i \in I} X_i$ .

**Prop.**  $(X, p_i)$  与  $(X', p'_i)$  均为  $\{X_i\}_{i \in I}$  之直积, 则  $X \cong X'$ .

#### ▼ Proof of the proposition

考虑态射  $f : X \rightarrow X', g : X' \rightarrow X$ . 根据直积性质得交换图.

态射  $p_i$  与  $p'_i$  满足  $p_i = p_i(gf)$ ,  $p'_i = p'_i(fg)$ . 由唯一性知  $gf = 1_X$ ,  $fg = 1_{X'}$ . 从而  $X$  与  $X'$  之间存在同构.



[链接](#)

**Def.** 记  $\{X_i\}_{i \in I}$  为一族  $\mathcal{C}$  中以  $I$  为指标的对象, 称  $X$  为  $\{X_i\}_{i \in I}$  的余直积若且仅若存在一族嵌入态射  $q_i : X_i \rightarrow X$  使得满足泛性质:

对任意  $Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ , 与态射  $g_i : X_i \rightarrow Y$ , 存在唯一的  $g : X \rightarrow Y$  使得  $gq_i = g_i$ . 常记作  $(X, q_i) =: \coprod_{i \in I} X_i$ .

**Prop.**  $(X, q_i)$  与  $(X', q'_i)$  均为  $\{X_i\}_{i \in I}$  之余直积, 则  $X \cong X'$ .

#### ▼ Proof of the proposition

同"直积在同构意义下唯一"之证明过程.

**Prop.**  $\mathcal{C}$  中直积  $(X, p_i)$  等同于  $\mathcal{C}^{op}$  中余直积  $(X, q_i)$ .

**Thm.** 记  $\mathcal{C}$  为含零元的范畴, 则

- 取  $\prod_{i \in I} X_i$ , 则对任意  $j \in I$ , 存在唯一的  $f_j : X_j \rightarrow X$  使得

$$p_i f_j = \begin{cases} 1_{X_i}, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$$

此时  $p_i$  为满的.

- 取  $\prod_{i \in I} X_i$ , 则对任意  $j \in I$ , 存在唯一的  $g_j : X \rightarrow X_j$  使得

$$g_j q_i = \begin{cases} 1_{X_i}, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$$

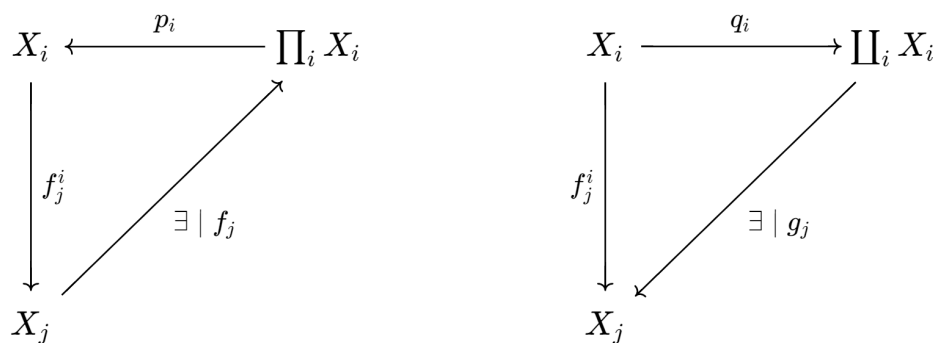
此时  $p_i$  为单的.

### ▼ Proof of the theorem

定义

$$f_j^i : X_i \rightarrow X_j, f_j^i = \begin{cases} 1_{X_i}, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$$

端详下交换图, 不难看出唯一的  $f_j$  与  $g_j$  即为所得.



[链接](#)

**Example.** 记半序关系所称的范畴  $\mathcal{C} = (\mathbb{R}, \leq)$ , 其中

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) = \begin{cases} \{i_y^x\}, & x \leq y, \\ \emptyset, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

则  $\prod_{i \in I} r_i = \inf\{r_i\}_{i \in I}$ ,  $\coprod_{i \in I} r_i = \sup\{r_i\}_{i \in I}$ .

### ▼ Proof

首先应保证  $\prod_{i \in I} r_i$  与一切  $r_i$  可建立态射, 从而  $\prod_{i \in I} r_i \leq \inf\{r_i\}_{i \in I}$ . 若  $\prod_{i \in I} r_i < \inf\{r_i\}_{i \in I}$ , 则任取  $r_- \in (\prod_{i \in I} r_i, \inf\{r_i\}_{i \in I})$ , 总有

$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(r_-, \prod_{i \in I} r_i)$  为空. 因此  $r_-$  到任意  $r_i$  的态射为空, 矛盾.

余直积同理.

**Example.** 正整数整除关系所称的范畴  $\mathcal{C} = (\mathbb{Z}_{\geq 1}, |)$  中, 直积为数组的最大公因数, 余直积为数组的最小公倍数.

## 加性范畴

**Def.** 称  $\mathcal{C}$  为预加性范畴若且仅若其包含以下性质:

1. 包含零元.
2. 一切  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  均为加法 Abel 群.
3. 在定义完备时, 分配律成立.

**Def.** 称预加性范畴为加性范畴若且仅若其余直积均有限.

**Example.**  $\text{Sets}$  不是加性范畴.  $\mathbb{A}G$  为加性范畴.

**Thm.** 记  $\{X_i\}_{i=0}^n \subset \text{Obj}(\mathcal{C})$ ,  $q_i \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, X_0)$ . 则

1.  $(X, q_i) = \coprod_{i=1}^n X_i$  当且仅当对任意  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  总有唯一的  $p_j : X \rightarrow X_j$  使得

$$p_j q_j = \begin{cases} 1_{X_j}, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$$

2. 上述  $p_i$  使得  $(X, p_i) = \prod_{i=1}^n X_i$ .

### ▼ Proof of the theorem

定义

$$f_j^i : X_i \rightarrow X_j, f_j^i = \begin{cases} 1_{X_i}, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ : 根据余直和之定义, 存在唯一的  $p_j : X \rightarrow X_j$  使得  $p_j q_i = f_j^i$ . 注意到

$$\left( \sum_{j=1}^n q_j p_j \right) q_i = \sum_{j=1}^n (q_j)(p_j q_i) = q_i, \quad \forall i \in I.$$



$\Leftarrow: \forall Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ , 取态射  $f_i : X_i \rightarrow Y$ , 定义  $f : X \rightarrow Y$  为  $f := \sum_{j=1}^n f_j p_j$ . 注意到

$$f q_i = \sum_{j=1}^n f_j (p_j q_i) = f_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

兹有断言: 存在唯一的  $f : X \rightarrow Y$  使得  $f q_i = f_i$ . 今取  $g : X \rightarrow Y$  使得  $g q_i = f_i$ , 则

$$g = 1_X g = g \sum_{j=1}^n q_j p_j = \sum_{j=1}^n (g q_j) p_j = \sum_{j=1}^n f_j p_j = f.$$

继而证明上述  $p_i$  使得  $(X, p_i) = \prod_{i=1}^n X_i$ . 对任意态射  $h_i : Y \rightarrow X_i$ , 记  $h = \sum_{j=1}^n q_j h_j$ , 则

$$p_i h = \sum_{j=1}^n (p_i q_j) h_j = h_i.$$

从而存在  $h$  使得  $p_i h = h_i$ . 今证明  $h_i$  之唯一性, 若  $h' : Y \rightarrow X$  同样满足  $p_i h' = h_i$ , 则

$$h' = 1_X h' = \left( \sum_{j=1}^n q_j p_j \right) h' = \sum_{j=1}^n q_j (p_j h') = \sum_{j=1}^n q_j h'_j = h.$$

是以上述  $p_i$  使得  $(X, p_i) = \prod_{i=1}^n X_i$ .

**Prop.** 若  $\mathcal{C}$  为加性范畴, 则  $\mathcal{C}^{op}$  亦然.

▼ **Proof**

取  $\{X_i\}_{i=1}^n \subset \text{Obj}(\mathcal{C})$ , 考虑  $(X, p_i^{op}) = \prod_{i=1}^n X_i$  即可.

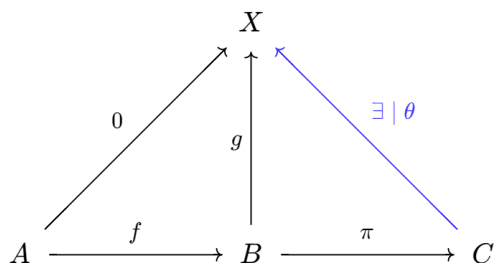
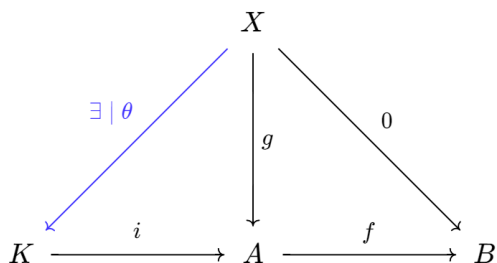
## Abel 范畴

**Def.** 称  $f : A \rightarrow B$  为加性范畴  $\mathcal{A}$  中的态射, 定义

- $\ker(f)$  为态射  $i : K \rightarrow A$ , 满足  $fi = 0$ . 同时对于  $\forall g : X \rightarrow A$  使得  $fg = 0$ , 存在唯一的  $\theta : X \rightarrow K$  使得  $g = i\theta$ .

- $\text{coker}(f)$  为态射  $\pi : B \rightarrow C$  使得  $\pi f = 0$ . 同时对于  $\forall g : B \rightarrow X$  使得  $gf = 0$ , 存在唯一的  $\theta : C \rightarrow X$  使得  $g = \theta\pi$ .

换言之, 使得如下图交换



[链接](#)

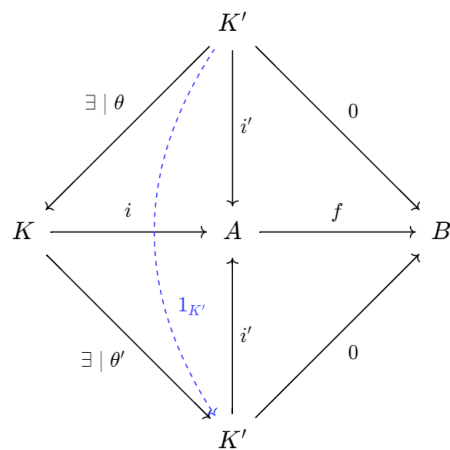
**Prop.**  $i^{op} = \text{coker}(f^{op})$ ,  $\pi^{op} = \text{ker}(f^{op})$ .

**Prop.**  $\text{ker}(f)$  与  $\text{coker}(f)$  唯一.

#### ▼ Proof

记  $i : K \rightarrow A$  与  $i' : K' \rightarrow A$  均为  $\text{ker}(f)$ , 则有交换图

从而  $\theta\theta' = 1_K$ ,  $\theta'\theta = 1_{K'}$ , 故  $K \cong K'$ .



[链接](#)

**Prop.**  $\text{ker}(0)$  与  $\text{coker}(0)$  为同构映射.

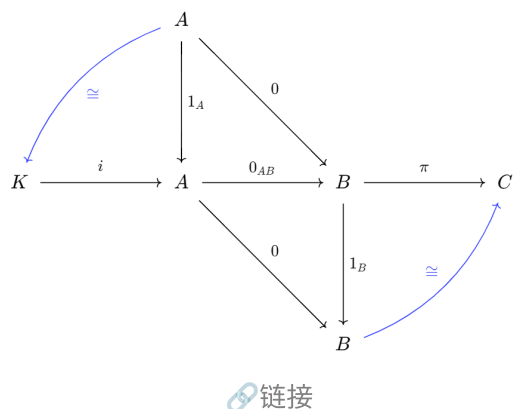
#### ▼ Proof

注意到如下交换图

其中存在单态射  $A \rightarrow K$  与  $K \rightarrow A$   
且其复合为  $1_A$ , 故

- $i : A \rightarrow K$ ,
- $\pi : B \rightarrow C$ ,

均为同构.



**Thm.**  $f : A \rightarrow B$  为加性范畴  $\mathcal{A}$  中的态射.

1. 若  $\ker(f)$  存在, 则  $f$  为单的若且仅若  $\ker(f) = 0$ .
2. 若  $\operatorname{coker}(f)$  存在, 则  $f$  为满的若且仅若  $\operatorname{coker}(f) = 0$ .

#### ▼ Proof of the theorem

若  $\ker(f) = 0$ , 取  $g, h : X \rightarrow A$  使得  $fg = fh$ , 则  $f(g - h) = 0$ . 从而存在唯一的  $\theta : X \rightarrow K$  使得  $g - h = 0, \theta = 0$ . 因此  $g = h$ , 从而  $f$  为单的.

反之,  $f$  为单的, 则  $fi = 0$  表明  $f = 0$ .

**Def.** 任取  $B \in \operatorname{Obj}(\mathcal{A})$ , 考虑态射  $\{(A, f) \mid f : A \rightarrow B\}$ . 称  $(A, f)$  与  $(A', f')$  等价, 若且仅若存在同构  $\theta : A \rightarrow A'$  使得  $f'\theta = f$ .

**Def.** 等价类  $[(A, f)]$  为  $B$  的子对象.

**Example.**  $B$  的子对象可能仅有  $[(B, 1_B)]$ .

**Def.** 任取  $B \in \operatorname{Obj}(\mathcal{A})$ , 考虑态射  $\{(f, C) \mid f : B \rightarrow C\}$ . 称  $(f, C)$  与  $(f', c')$  等价, 若且仅若存在同构  $\theta : C \rightarrow C'$  使得  $\theta f = f'$ .

**Def.** 等价类  $[(f, C)]$  为  $B$  的商对象.

**Def.** 称加性范畴为 Abel 范畴, 若且仅若

1. 一切态射存在  $\ker$  与  $\operatorname{coker}$ .
2. 一切单态射为其  $\operatorname{coker}$  的  $\ker$ , 一切满态射为其  $\ker$  之  $\operatorname{coker}$ .
3. 任意态射  $\alpha$  可被分解为  $\lambda\sigma$ , 其中  $\sigma$  为满的且  $\lambda$  为单的.

**Example.**  $\mathbb{A}G$  为 Abel 范畴.

**Def.** 称  $\mathbb{F}AG$  为自由 Abel 群范畴, 当且仅当其态射为群同态, 对象为自由 Abel 群 (即有基底, 亦即对  $g \neq e$  总有  $o(g) = \infty$ ).

**Example.**  $\mathbb{F}AG$  并非 Abel 范畴, 至少商群并非都是自由 Abel 群.

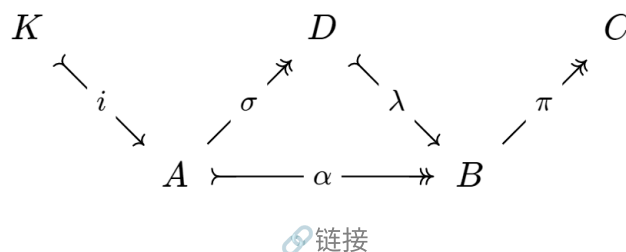
### ▼ Proof of the theorem

记  $A = \langle a \rangle, B = \langle b \rangle$  为自由 Abel 群, 定义  $f : A \rightarrow B, f(na) = 2nb, \forall n \in \mathbb{Z}$ . 显然  $f$  为单态射但非同构. 若  $\mathbb{F}AG$  为 Abel 范畴, 今取  $\pi : B \rightarrow C$  为  $f$  之 coker, 其中  $C$  为自由 Abel 群, 则  $0 = \pi f(a) = \pi(2b) = 2\pi(b) \in C$ . 由于  $C$  自由, 从而  $\pi(b) = 0$ . 是故  $\pi \equiv 0, f$  为同构, 导出矛盾.

**Thm.** 若 Abel 范畴中态射同为单与满的, 则为同构.

### ▼ Proof of the theorem

取  $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  单且满, 今证明  $\alpha$  为同构. 注意到



显然  $i = \ker(\alpha)$  等价于  $i = \ker(\sigma)$ , 即对任意  $g : X \rightarrow A$  使得  $\alpha g = 0$ , 存在唯一的  $\theta : X \rightarrow K$  使得  $i\theta = g$ ; 而  $\lambda\sigma g = 0 = \lambda 0$ , 根据单态射性质知  $\sigma g = 0$ , 进而  $\ker(\alpha)$  与  $\ker(\sigma)$  等价.

同理, 由  $h\lambda\sigma = 0\sigma \Leftrightarrow h\lambda = 0$  可知  $\text{coker}(\alpha)$  与  $\text{coker}(\lambda)$  等价. 由于  $\lambda = \ker(0), \sigma = \text{coker}(0)$  均为同构, 则  $\alpha = \lambda\sigma$  为同构.

**Def.** 记  $\alpha : A \rightarrow B$  为 Abel 范畴中的态射, 记像  $\text{im}(\alpha) := \ker(\text{coker}(\alpha))$ .

**Prop.**  $\alpha$  的像无非分解  $\alpha = \lambda\sigma$  中的  $\lambda$ .

### ▼ Proof

注意到

$$\begin{aligned}
\ker(\operatorname{coker}(\alpha)) &= \ker(\operatorname{coker}(\lambda)) \\
&= \ker(\pi) \\
&= \lambda.
\end{aligned}$$

**Def.** 称  $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$  为 Abel 范畴中在  $B$  处正合的列, 若且仅若  $\operatorname{im}(\alpha) = \ker(\beta)$ .

**Def.** 左正合列具有形式  $0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ .

**Def.** 右正合列具有形式  $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$ .

**Def.** 正合列为左正合且右正合的列.

## 函子

**Def.** 称  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  为范畴间的共变函子, 若且仅若满足

**F1.**  $\forall C \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C}), FC \in \operatorname{Obj}(\mathcal{D})$ .

**F2.**  $\forall C \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C}), F(1_C) = 1_{FC}$ .

**F3.** 若  $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)$ , 则  $Ff \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(FC_1, FC_2)$ .

**F4.**  $\forall f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2), \forall g \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C_2, C_3), F(gf) = FgFf$ .

**Def.** 称  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  为范畴间的共变函子, 若且仅若满足 **F1-2.** 与

**F3'.** 若  $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)$ , 则  $Ff \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(FC_2, FC_1)$ .

**F4'.**  $\forall f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2), \forall g \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(C_2, C_3), F(gf) = FfFg$ .

**Remark.** 通常定义函子为共变或反变的.

**Example.**  $\forall A \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ , 定义  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$  为

- $\forall B \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C}), FB = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ .
- $\forall \tau : B \rightarrow B', F\tau : FB \rightarrow FB'$  满足  $(F\tau)f = \tau f$  对任意  $f \in FB$  成立.

此处  $F$  为共变函子.

同理,  $\forall A \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C})$ , 定义  $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$  为

- $\forall B \in \operatorname{Obj}(\mathcal{C}), GB = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ .
- $\forall \tau : B \rightarrow B', G\tau : GB' \rightarrow GB$  满足  $(G\tau)f = f\tau$  对任意  $f \in GB'$  成立.

此处  $F$  为反变函子.

**Example.** 置  $\mathcal{C} = \mathbb{G}$ ,  $\mathcal{D} = \mathbb{A}G$ . 对任意群  $G$ , 定义  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  满足  $FG = G/G'$ , 其中  $G'$  为换位子群. 则同态  $f : G \rightarrow H$  诱导

$$Ff : G/G' \rightarrow H/H'.$$

此处  $F$  为共变函子.

**Example.** 忘却函子  $F : \mathbb{R}ing \rightarrow \mathbb{A}b$  满足  $F(R, +, \cdot) \rightarrow (R, +)$ ,  $F\varphi = \varphi$ .

**Def.** 称范畴  $\mathcal{C}$  与  $\mathcal{D}$  间的共变函子  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$

- 为满的, 若且仅若  $\forall A, B \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$ , 总有满射

$$F : \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, FB).$$

- 为忠实的, 若且仅若  $\forall A, B \in \mathbf{Obj}(\mathcal{C})$ , 总有单射

$$F : \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \mathbf{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, FB).$$

- 为忠实浸入, 若且仅若  $F$  为满的, 忠实的, 且作用在对象上为一一的.

**Def.** 称加性范畴  $\mathcal{C}$  与  $\mathcal{D}$  间的函子  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  为加性函子, 若且仅若

$$F(f + g) = Ff + Fg, \quad \forall f, g \in \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B).$$

**Def.** 称 Abel 范畴  $\mathcal{C}$  与  $\mathcal{D}$  间的加性共变函子  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  为

- 半正合的, 若且仅若  $\mathcal{C}$  中正合列  $(0 \rightarrow)A \rightarrow B \rightarrow C(\rightarrow 0)$  推出正合列  $FA \rightarrow FB \rightarrow FC$ .
- 左正合的, 若且仅若  $\mathcal{C}$  中正合列  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C(\rightarrow 0)$  推出正合列  $0 \rightarrow FA \rightarrow FB \rightarrow FC$ .
- 右正合的, 若且仅若  $\mathcal{C}$  中正合列  $(0 \rightarrow)A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  推出正合列  $FA \rightarrow FB \rightarrow FC \rightarrow 0$ .
- 正合的, 若且仅若  $\mathcal{C}$  中正合列  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  推出正合列  $0 \rightarrow FA \rightarrow FB \rightarrow FC \rightarrow 0$ .

此处考虑或忽视括号中内容均可, 同为正合性之等价定义.

关于 Abel 范畴上加性反变函子的正合性之序数同理, 此处从略.

## 自然变换

**Def.** 取  $E, F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  间的共变函子, 自然变换  $\tau : E \rightarrow F$  为一族映射满足  $\tau_A : EA \rightarrow FA, \forall A \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ , 使得对任意  $f : A \rightarrow A'$  总有交换图

$$\begin{array}{ccc} EA & \xrightarrow{Ef} & EA' \\ \downarrow \tau_A & & \downarrow \tau_{A'} \\ FA & \xrightarrow{Ff} & FA' \end{array}$$

[链接](#)

**Def.** 若自然变换  $\tau_A$  对  $\forall A \in \text{Obj}(\mathcal{A})$  均为同构, 则称  $\tau$  为自然同构, 记作  $E \cong F$ .

**Example.** 记  $\mathcal{V}$  为域  $k$  上线性空间所成之范畴,  $\forall V \in \text{Obj}(\mathcal{V})$ , 记  $V^* := \text{Hom}_k(A, k)$  为对偶, 同理有  $V^{**}$ . 定义共变函子  $F : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  满足

- $FV = V^{**}, \forall V \in \text{Obj}(\mathcal{V})$ .
- $Ff = f^{**} := (f^*)^*, \forall f \in \text{Hom}_k(V_1, V_2)$ .

定义自然变换  $\tau_V : V \rightarrow V^{**}$  为

$$\tau_V(x)(\theta) =: \theta(x), \quad \forall x \in V, \theta \in V^*.$$

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{1f} & V_2 \\ \downarrow \tau_{V_1} & & \downarrow \tau_{V_2} \\ V_1^{**} & \xrightarrow{Ff = f^{**}} & V_2^{**} \end{array}$$

[链接](#)

容易验证右侧交换图. 从而  $\tau$  为  $1_{\mathcal{V}}$  到  $F$  的自然变换.

### ▼ Proof of the theorem

实际上, 对任意  $x \in V_1, \theta \in V_2^*$ , 总有  $\tau_{V_2}(1_{\mathcal{V}} f)(x)(\theta) = \theta f(x)$ . 注意到  $f^*$  诱导映射

$$f^* : V_2^* \rightarrow V_1^*, (\theta : V_2 \rightarrow k) \mapsto \theta f.$$

$$\text{从而 } (f^*)^* \tau_{V_1}(x)(\theta) = \tau_{V_1}(x) f^* \theta = (f^* \theta)x = \theta f(x).$$

Sets	set	map
------	-----	-----

从而根据余直积之定义, 存在唯一的  $h_i : X \rightarrow X$  使得  $hq_i = q_i$ , 从而  $h_i = 1_X = \sum_{j=1}^n q_j p_j$ .