



## K-理论笔记 泛函分析拾遗

### 1 泛函分析拾遗, $C^*$ 代数简介

**定义 1** (Banach 代数). 称复 Banach 空间  $(X, \|\cdot\|)$  为 Banach 代数, 若存在  $X$  上的乘法使得  $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ .

注 1. 不妨假定 Banach 代数有单位元. 实际上, 总可以对具有乘法结构加群添加单位元. 任给 Banach 代数  $(X, \|\cdot\|, \cdot)$ , 定义含有单位元的 Banach 代数  $(X \oplus \mathbb{C}, \|\cdot\|', \odot)$  如下.

- 范数  $\|(x, z)\|' := \|x\| + |z|$  满足  $\mathbb{C}$ -线性性与次可加性.
- 乘法  $(x, z) \odot (y, w) := (xy + zy + wx, zw)$  与结合律, 分配律, 范数相容.
- 单位元  $(0, 1)$  具有范数 1, 且与乘法相容.

上述单位化过程对交换 Banach 代数亦适用.

**命题 1** (逆元子群). Banach 代数的逆元全体  $X^\times$  为开群, 且  $(-)^{-1}$  为同胚.

证明. 任取  $x \in X^\times$ , 以及  $t \in B(0, \|x^{-1}\|)$ , 根据一致收敛性有

$$e = (x + t)(x^{-1} - x^{-1}tx^{-1} + x^{-1}tx^{-1}tx^{-1} - \dots) = (x + t) \cdot x^{-1} \cdot \sum_{n \geq 1} (-tx^{-1})^n.$$

往证  $(-)^{-1}$  的连续性. 注意到  $|\|(x + s)^{-1}\| - \|x^{-1}\|| \leq \|x^{-1}\| \cdot |1 - \|e + x^{-1}s\||$ , 往后仅需验证单位元处逆映射连续. 对足够小的  $s$ , 有

$$\|e - (e - s)^{-1}\| = \left\| \sum_{n \geq 1} s^n \right\| \leq \frac{|s|}{1 - \|s\|}.$$

从而  $(e - s)^{-1} \in B\left(e, \frac{|s|}{1 - |s|}\right)$ . 证毕. □

**定义 2** ((双边) 理想). Banach 代数  $X$  的理想为线性子空间  $I$ , 满足  $IX + XI \subseteq I$ .

**命题 2**. 真理想之闭包也是真理想. 特别地, 极大理想闭.

证明. 真理想  $I \subsetneq X$  中元素不可逆, 从而对任意  $r \in I$  总有  $\|e - r\| \geq 1$ . 显然  $\bar{I} \subsetneq X$ . 极大理想  $\mathfrak{m}$  的存在性由选择公理保证, 再由  $\mathfrak{m} \subseteq \bar{\mathfrak{m}} \subsetneq X$  知  $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{m}}$ . □

**定义 3** (商代数). 给定 Banach 代数  $X$  与理想  $I$ , 商代数  $X/I$  的单位元为  $e + I$ , 范数定义作

$$\|x + I\|_{X/I} := \inf_{r \in I} \|x + r\|_X.$$

注 2. 商算子  $X \xrightarrow{\pi} X/I$  的范数为 1.

定义 4 (特征). 称  $\mathbb{C}$ -代数同态 (可乘线性泛函)  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{C}$  为特征.

命题 3. 特征有如下特性.

1. 特征的范数为 1, 且在  $X^*$  中弱-\* 紧.
2.  $\varphi$  是特征, 当且仅当  $\varphi(e) = 1$  与  $\varphi(x^2) = \varphi(x)^2$  成立.
3. 特征与极大理想对应.

证明. 以下依次证明之.

1. 仅需证明对任意  $x \in X$  均有  $|\varphi(x)| \leq 1$ . 若不然, 则存在  $x \in X$  使得  $e - \frac{x}{\varphi(x)}$  可逆, 但

$$\varphi\left(e - \frac{x}{\varphi(x)}\right) = \varphi(e) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x)} = 0.$$

这与  $\varphi: X^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  矛盾. 对弱-\* 紧性, Banach-Alaoglu 定理表明 1-范数的线性泛函全体弱-\* 紧, 因此证明全体特征弱-\* 闭即可. 直接验证之, 显然.

2. 注意到  $0 = \varphi(x+y)^2 - \varphi((x+y)^2) = \varphi(xy+yx) - 2\varphi(x)\varphi(y)$ , 故  $\varphi$  与  $\ker(\varphi)$  相容. 根据

$$2x(yxy) + 2(yxy)x = (xy+yx)^2 + (xy-yx)^2,$$

从而  $x \in \ker(\varphi)$  当且仅当  $(xy \pm yx) \in \ker(\varphi)$ , 即  $xy, yx \in \ker(\varphi)$ . 遂有

$$0 = \varphi((x - e\varphi(x))(y - e\varphi(y))) = \varphi(xy) - \varphi(x)\varphi(y), \quad \forall x, y \in X.$$

3. 先证明特征  $\varphi_1 = \varphi_2$  当切仅当  $\ker(\varphi_1) = \ker(\varphi_2)$ . 往证必要性. 若  $\varphi_1 \neq \varphi_2$ , 则存在  $x$  使得  $\varphi_1(x) \neq \varphi_2(x)$ . 此时  $x - e\varphi_1(x)$  为  $\varphi_1$  的核, 但非  $\varphi_2$  的核. 遂得证.

由于  $\dim_{\mathbb{C}}(X/\varphi_i) = 1$ , 故  $\ker(\varphi_i)$  为极大理想. 相反地, 给定任意极大理想  $\mathfrak{m} \subseteq X$ , 则  $X/\mathfrak{m}$  为复交换可除 Banach 代数, 因此只能是  $\mathbb{C}$ . 商映射  $X/\mathfrak{m}$  自然给出特征. 结合特征到极大理想的典范映射是单的, 因此是一一对应.

□

定义 5 (全纯函数). 对开区域  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  与 Banach 代数  $X$ , 称  $f: \Omega \rightarrow X$  是全纯的当且仅当极

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$$

对任意  $z_0 \in \Omega$  存在.

注 3. 若  $X$  是复拓扑线性空间, 则称  $f: \Omega \rightarrow X$  弱全纯, 当且仅当对任意对偶空间中的线性泛函  $l \in X^*$  总有全纯函数

$$l(f): \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto (l(f))(x) = l(f(x)).$$

若  $X$  为复 Banach 空间, 则弱全纯函数等价于全纯函数.

**命题 4.** 类比复分析中证明, 全纯函数  $f : \Omega \rightarrow X$  满足以下性质.

1.  $f$  光滑.
2. 定义参数化闭道路  $\gamma \subseteq \Omega$  关于  $z_0 \in (\mathbb{C} \setminus \gamma)$  的盈数为  $\text{Ind}_\gamma(z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} \in \mathbb{Z}$ .
3. (Cauchy 定理) 若  $\gamma$  在  $\Omega$  上零伦, 即, 对任意  $z_0 \in (\mathbb{C} \setminus \Omega)$  均有  $\text{Ind}_\gamma(z_0) = 0$ , 则  $\int_\gamma f(z)dz = 0$ .
4. (Cauchy 积分公式) 对任意参数化闭曲线  $\gamma$  与  $z_0 \in (\Omega \setminus \gamma)$ , 总有

$$\text{Ind}_\gamma(z_0) \cdot f(z_0) = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

5. (Liouville 定理) 取  $Y \subseteq X^*$  分离  $X$ , 若对任意  $l \in Y$ ,  $l(f) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  有界, 则  $f$  是常映射.

**定义 6 (谱).** 给定 Banach 代数  $X$ , 定义  $x \in X$  的谱为

$$\sigma(x) := \{z \in \mathbb{C} \mid (ze - x) \notin X^\times\}.$$

**定理 1.**  $\sigma(x) \in \overline{B(0, \|x\|)}$ , 且  $\sigma$  为非空闭集.

证明. 对任意  $|z| > \|x\|$  有  $ze - x = ze(1 - z^{-1}x)$ . 注意到  $\|z^{-1}x\| < 1$ , 故  $x$  可逆, 从而  $\sigma(x) \subseteq \overline{B(0, \|x\|)}$ . 作连续函数  $T_x := (\cdot)e - x : \mathbb{C} \rightarrow X$ , 从而闭集  $(X \setminus X^\times) \cap T_x(\mathbb{C})$  的原像仍是闭集. 最后证明  $\sigma(x)$  非空, 若不然, 则  $\|(ze - x)^{-1}\|$  在  $\mathbb{C}$  上定义. 注意到  $\lim_{z \rightarrow \infty} |z|^{-1} \|(e - z^{-1}x)^{-1}\| = 0$ , 从而  $(ze - x)^{-1}$  一致有界. 依照 Liouville 定理,  $ze - x$  为常数算子, 矛盾.  $\square$

**定义 7 (广义幂零元).** 根据 Laurent 展开直接验证得幂零元的谱为  $\{0\}$ ; 相应地, 称谱为  $\{0\}$  的元素为广义幂零元.

**定义 8 (谱半径).** 定义  $x \in X$  的谱半径为紧集  $\sigma(x)$  中模长最大者, 记  $r(x)$ .

**命题 5.**  $r(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$ .

证明. 一方面,  $r(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$  是显然的. 另一方面, 有 Laurent 展开

$$(ez - x)^{-1} = \sum_{n \geq 0} z^{-n+1} x^n \quad (|z| > r(x)).$$

以上收敛半径为  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|z^{-1-n}x^n\| \leq 1$ , 从而  $r(x) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{\|x^n\|}$ . 综上, 得证.  $\square$

注 4.  $r : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  上半连续, 即, 对一切依范数收敛的序列  $x_n \rightarrow x$  总有

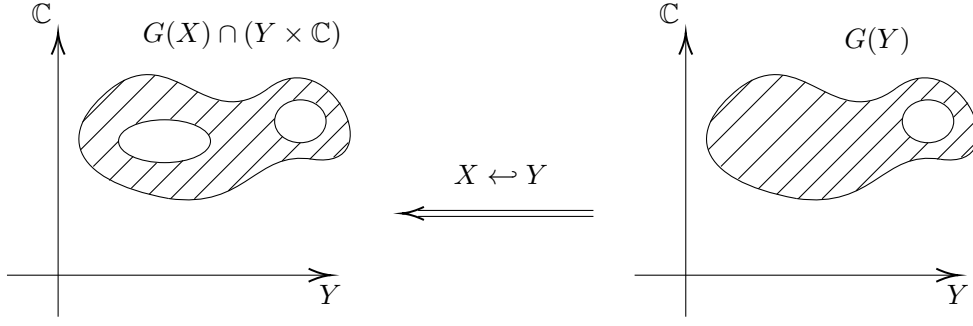
$$\limsup_{n \rightarrow \infty} r(x_n) \leq r(x).$$

注 5. 谱可以定义在一般  $X$ -算子上, 其中  $x : X \rightarrow X, y \mapsto xy$  自然是 Banach 空间的算子. 归根结底, 算子代数也是 Banach 代数.

**命题 6.** 对 Banach 代数  $X$  与子代数  $Y$ , 定义

$$G(X) := \{(x, z) \in X \times \mathbb{C} \mid z \notin \sigma_X(x)\}.$$

则  $G(Y)$  无非  $G(X) \cap (\mathbb{C} \times Y)$  去掉若干连通分支, 且数量不超过  $\omega \cdot \dim_{\mathbb{C}} Y$ .



证明. 将证明拆解为如下步骤.

1. 对任意  $y \in Y$ , 有  $\partial\sigma_Y(y) \subseteq \sigma_X(y) \subseteq \sigma_Y(y)$ . 于是  $\sigma_Y(y)$  无非  $\sigma_X(y)$  填上若干开连通分支.
2. 任意给定  $\sigma_X(x)$ , 则对任意小的  $\varepsilon$ -网  $\bigcup_{t \in \sigma_X(x)} B(t, \varepsilon)$ , 存在  $\delta$  使得对任意  $\|y\| < 1$  均有

$$\sigma_X(x + \delta y) \subseteq \bigcup_{t \in \sigma_X(x)} B(t, \varepsilon).$$

换言之,  $\sigma_X(-)$  关于  $\varepsilon$ -网诱导的度量连续. 记上述  $\varepsilon$ -网作  $N_\varepsilon$ .

对第一部分,  $\sigma_X(y) \subseteq \sigma_Y(y)$  是显然的, 因为  $Y^\times \subseteq X^\times$ . 对任意  $z_0 \in \partial\sigma_Y(y)$ , 存在道路

$$z : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad (0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \sigma_Y(y), \quad 0 \mapsto z_0.$$

因此对  $t \in (0, 1]$ ,  $(z(t)e - y)^{-1} \in Y^\times \subseteq X^\times$ . 若  $z_0 \notin \sigma_X(y)$ , 则根据  $(-)^{-1}$  的连续性知  $(z_0e - y)^{-1} \in X^\times$ . 注意到  $Y$  是  $X$  的闭子空间, 故  $\{(z(t)e - y)^{-1} \mid t \in [0, 1]\}$  的原像均在  $Y$  中. 显然  $(z_0e - y)^{-1} \in Y$  有逆元  $(z_0r - y) \in Y$ .

对第二部分, 考虑连续映射  $N : \mathbb{C} \setminus \sigma_X(x) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $z \mapsto \|(ze - x)^{-1}\|$ . 显然  $N(\infty) = 0$ , 故  $N$  在  $\mathbb{C} \setminus N_\varepsilon$  中有上界  $M$ . 根据  $(-)^{-1}$  与  $\|\cdot\|$  之连续性, 存在  $\delta = M^{-1}$  使得对任意  $\|x' - x\| < \delta$  与  $z \in \mathbb{C} \setminus N_\varepsilon$ , 总有

$$\|(ze - x) - (ze - x')\| < \delta \leq \frac{1}{\|(ze - x)^{-1}\|}.$$

因此  $1 > \|e - (ze - x)^{-1}(ze - x')\|$ . 这也说明

$$e - \left( e - (ze - x)^{-1}(ze - x') \right) = (ze - x)^{-1}(ze - x') \in X^\times.$$

对一切  $y \in Y$ , 步骤一中填充的连通分支数量至多可数, 从而  $G(Y)$  与  $G(X) \cap (\mathbb{C} \times Y)$  相差的连通分支数不超过  $\omega \cdot \dim_{\mathbb{C}} Y$ .  $\square$

**定义 9** (伴随, Banach<sup>\*</sup> 代数). Banach 代数  $X$  上的伴随为  $\mathbb{R}$ -反自同构  $(-)^* : X \rightarrow X$ , 满足

$$(z \cdot x)^* = \bar{z}x^*, \quad (x^*)^* = x.$$

称具有伴随的 Banach 代数为 **Banach<sup>\*</sup> 代数**.

**命题 7.** 自伴元全体  $\{x = x^* \mid x \in X\}$  为包含  $e$  的  $X$  的实子空间.

**命题 8.**  $x$  可逆当且仅当  $x^*$  可逆, 且  $(x^{-1})^* = (x^*)^{-1}$ ,  $\sigma_X(x)$  与  $\sigma_X(x^*)$  共轭.

证明. 注意到  $(ze - x)^*((ze - x)^{-1})^* = ((ze - x)^{-1}(ze - x))^* = e^* = e$ . 从而  $\sigma_X(x)$  与  $\sigma_X(x^*)$  共轭. 考虑  $z = 0$ , 则  $x \in X^\times$  当且仅当  $x^* \in X^\times$ .  $\square$

**定义 10** ( $C^*$  代数). 称 Banach $^*$  代数为  $C^*$  代数, 当且仅当  $(-)^*$  等距.

注 6. 对一般交换 Banach 代数,  $(-)^*$  等距当且仅当  $\|xx^*\| = \|x^*x\| = \|x\|^2 = \|x^2\|$ .

**命题 9** ( $C^*$  代数的单位化). 对非单位  $C^*$  代数  $X$  未完待续.

**定义 11** (正规元, 酉元, 自伴元 (实元)). 称  $x \in X$  正规, 若且仅若  $x^*x = xx^*$ ; 称  $x$  是酉的, 若且仅若  $x^*x = xx^* = e$ ; 称  $x$  是自伴的 (实的) 若且仅若  $x = x^*$ .

**命题 10** ( $C^*$  代数中正规元, 酉元, 实元的谱). 正规元满足  $r(x) = \|x\|$ . 酉元的谱为  $S^1$  中的若干闭弧 (点), 实元的谱为  $\mathbb{R}$  中的有限闭集之并.

证明. 显然  $r(x) \leq \|x\|$ . 注意到

$$\|x^{2^n}\| = \sqrt{\|(x^*)^{2^n}x^{2^n}\|} = \sqrt{\|(x^*x)^{2^n}\|} \leq \sqrt{\|x^*x\|^{2^n}} = \|x\|^{2^n},$$

从而  $r(x) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x^{2^n}\|^{2^{-n}} = \|x\|$ . 因此  $r(x) = \|x\|$ . 从而酉元的谱在单位闭圆盘内, 且关于共轭运算封闭, 因此在  $S^1$  上. 结合紧性知酉元的谱为  $S^1$  上有限闭圆弧 (点) 之并. 给定实元  $x$ , 收敛幂级数定义的  $\exp(ix)$  是酉元. 对任意  $z \in \sigma_X(x)$ , 往证  $\exp(iz)$  为  $\exp(ix)$  的谱. 注意到

$$\exp(iz) - \exp(ix) = (ze - x) \left( \sum_{n \geq 1} \frac{i^n}{n!} \sum_{0 \leq k \leq n} z^k x^{n-k} \right) =: (ze - x)T.$$

显然  $T$  可逆, 从而  $\sigma_X(\exp(iz)) = \exp(i\sigma_X(z)) \in S^1$ . 这表明实元的谱在  $\mathbb{R}$  中, 结合紧性知谱为有限闭区间之并.  $\square$

注 7. 一般地, 全纯函数保持谱. 即, 对一切定义在  $\sigma_X(x)$  的某个  $\varepsilon$  网上的全纯函数  $f$  总有  $f(\sigma_X(x)) = \sigma_X(f(x))$ .

**命题 11.** 取 Banach $^*$  代数中任意元  $x$ , 总有  $\ker(x) = \ker(x^*x)$ .

证明.  $xy = 0 \implies y^*x^*xy = 0 \implies (xy)^*(xy) = 0 \implies xy = 0$ .  $\square$

**命题 12.** 在命题 6 中置  $X$  与  $Y$  为  $C^*$  代数, 则  $G(Y) = G(X) \cap (\mathbb{C} \times Y)$ .

证明. 对任意  $x \in Y$ , 往证  $x \in Y^\times$  当且仅当  $x \in X^\times$ . 对任意  $x \in Y$ , 实元的谱  $\sigma_Y(x^*x)$  内部为空, 根据命题 6 知  $\sigma_X(x^*x) = \sigma_Y(x^*x)$ . 结合命题 11 知  $x^* \in X^\times$  当且仅当  $x^* \in Y^\times$ . 得证.  $\square$

注 8.  $C^*$  代数扩张不改变谱.

**定义 12** (Gel'fand 变换). 定义极大理想空间  $\mathfrak{M}$  为赋予弱- $*$  拓扑的特征全体, 则  $\mathfrak{M}$  是紧的. 依照命题 3 等极大理想与特征. 定义 Gel'fand 变换为如下线性映射

$$\widehat{(-)} : X \rightarrow C(\mathfrak{M}), \quad x \mapsto [\mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi \mapsto \varphi(x)].$$

**命题 13.** 若  $X$  是交换 Banach 代数, 则有如下命题.

1.  $\widehat{(-)}$  是交换 Banach 代数的连续同态, 且范数为 1.
2.  $\ker \widehat{(-)} = J(X) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}} \mathfrak{m}$  为 Jacobson 根.

3.  $\widehat{x} : \mathfrak{M} \rightarrow \sigma_X(x)$ ,  $\varphi \mapsto \varphi(x)$  给出交换 Banach 代数与谱的对应.

4.  $\|\widehat{x}\| := \sup_{\varphi \in \mathfrak{M}} |\varphi(x)| = r(x)$ .

5. 以下关于复半单交换 Banach 代数  $X$  的论断等价.

(a)  $J(X) = 0$ . 根据以上,  $\widehat{(-)}$  是交换 Banach 代数范畴的单态射.

(b)  $\mathfrak{M}$  分离  $X$ . 即, 对任意不相等的  $x, y \in X$ , 总存在  $\varphi \in \mathfrak{M}$  使得  $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ .

(c) 谱半径  $r(-)$  为范数. 换言之,  $X$  中不存在非零的广义幂零元.

6.  $\widehat{(-)} : X \rightarrow C(\mathfrak{M})$  等距当且仅当  $\|x^2\| = \|x\|^2$ .

证明. 下依次证明之.

1. 注意到  $\widehat{xy}(\varphi) = \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \widehat{x}(\varphi)\widehat{y}(\varphi)$ ,  $\widehat{e} = 1$ , 故  $\widehat{(-)}$  为同态. 由于特征范数为 1, 故  $\widehat{X}$  的范数满足

$$\|\widehat{x}\| := \sup_{\varphi \in \mathfrak{M}} |\varphi(x)| \leq \|x\|.$$

从而  $\|\widehat{(-)}\| \leq 1$ . 考虑单位元知  $\|\widehat{(-)}\| = 1$ .

2. 注意到  $\widehat{r} = 0$  当且仅当  $\varphi(r) = 0$  对任意  $\varphi \in \mathfrak{M}$  成立, 故当且仅当  $r \in J(X)$ .

3. 一方面, 对任意  $\varphi \in \mathfrak{M}$ , 总有  $\varphi : (\varphi(x)e - x) \mapsto 0$ , 从而  $\varphi(x) \in \sigma_X(x)$ . 另一方面, 对任意  $z \in \sigma(x)$ , 考虑包含不可逆元  $ze - x$  的极大理想即可.

4. 根据上一条,  $\|\widehat{x}\| = \sup_{\varphi \in \mathfrak{M}} |\varphi(x)| = \sup_{z \in \sigma(x)} |z| = r(x)$ .

5. 对任意  $(x - y) \in J(X)$ , 总有  $\varphi(x) = \varphi(y)$  对一切  $\varphi \in \mathfrak{M}$  成立, 因此 (a) 与 (b) 等价. 若非 (b), 则存在非零的  $x$  使得  $\|\widehat{x}\| = r(x) = 0$ , 遂得非 (c). 既证  $\|\widehat{x}\| = r(x)$  是良定义的范数, 从而 (b) 蕴含 (c).

6. 一方面, 若  $\|\widehat{x}\| = \|x\|$  恒成立, 则依照  $\widehat{x \cdot x}(\varphi) = (\widehat{x}(\varphi))^2$  可知  $\|x^2\| = \|\widehat{x^2}\| = \|\widehat{x}\|^2 = \|x\|^2$ . 另一方面, 若  $\|x^2\| = \|x\|^2$ , 则有

$$\|\widehat{x}\| = r(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2^n]{\|x^{2^n}\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2^n]{\|x\|^{2^n}} = \|x\|.$$

□

注 9. 上述第 5 条 (b) 表明全体特征 (极大理想) 有自然的紧 Hausdorff 拓扑.

命题 14. 记  $C(K)$  为紧 Hausdorff 空间上的连续复函数全体, 则  $\|\cdot\| := \|\cdot\|_\infty$  给出复 Banach 代数结构. 则极大理想空间  $\mathfrak{M}$  与  $K$  无异. 实际上,  $C(X)$  中极大理想形如  $\ker(g \mapsto g(x_0))$ . 遂有同构

$$\widehat{(-)} : C(X) \xrightarrow{\sim} C(\mathfrak{M}), \quad f \mapsto [\ker(g \mapsto g(x_0)) \mapsto f(x_0)].$$

证明. 先证明  $C(X)$  中的极大理想形如  $\ker(g \mapsto g(x_0))$ . 记  $\mathfrak{m}_{x_0} = \ker(g \mapsto g(x_0))$ , 则  $C(X)/\mathfrak{m}_{x_0} = \mathbb{C}$  是域, 从而  $\mathfrak{m}_{x_0}$  是极大理想. 若存在极大理想  $\mathfrak{m}$  与形如  $\mathfrak{m}_{x_0}$  的理想不同, 则对任意  $x \in X$ , 总存在  $l_x \in \mathfrak{m}$  使得  $l_x(x) = 1$ . 遂得开覆盖  $\{\text{supp}(l_x)\}_{x \in X}$ , 记  $\{\text{supp}(l_{x_k})\}_{1 \leq k \leq n}$  为有限子覆盖. 注意到

$$\left( \sum_{1 \leq k \leq n} |f_{x_k}(x)|^2 \right) \in (C(X))^\times \cap \mathfrak{m},$$

从而  $\mathfrak{m}$  中理想包含可逆元, 与假定矛盾.

□

**定理 2** (Gel'fand 对偶). 交换  $C^*$  代数范畴与紧 Hausdorff 空间范畴范畴等价.

证明. 先证明定义 12 给出交换  $C^*$  代数  $X$  到极大理想空间  $C(\mathfrak{M})$  的等距同构, 且保持  $(-)^*$ . 注意到

$$\widehat{x^*} : \varphi \mapsto \varphi(x^*) = \overline{\varphi(x)}, \quad \widehat{\widehat{x}} : [\varphi \mapsto \overline{\varphi(x)}].$$

从而  $\widehat{(-)}$  为保持  $(-)^*$  的同态.

□

未完待续.

**定理 3** (Riez 算法). 未完待续.