



## K-理论笔记

### 投射模简介

## 1 Abel 中投射对象的等价定义

**定义 1** (群, 环, 域, 模以及代数, Abel 范畴等). 略.

**定义 2** (投射对象). 称 Abel 范畴  $\mathcal{A}$  中对象  $P$  为**投射对象**, 若任意满态射  $X \xrightarrow{\pi} Y$  与态射  $P \xrightarrow{f} Y$  给出提升  $\tilde{f}$ , 使得有交换图

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \tilde{f} \swarrow & \downarrow f & \\ X & \xrightarrow{\pi} Y & \longrightarrow 0 \end{array} \quad (f = \pi \circ \tilde{f}).$$

**命题 1** (投射对象的等价定义). 取 Abel 范畴  $\mathcal{A}$  中对象  $P$ , 则以下等价命题成立时  $P$  为投射对象.

1.  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, -)$  右正合, 从而为正合函子<sup>1</sup>;
2.  $P$  符合定义 2 之表述 (由提升性质定义);
3. 形如  $X \rightarrow P \rightarrow 0$  的正合列均可裂.

**证明.** 先证明  $1 \implies 2 \implies 3$ . 若  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, -)$  (协变) 右正合, 则函子保持任意满态射  $X \xrightarrow{\pi} Y$ . 即, 任意  $P \xrightarrow{f} Y$  有原像  $P \xrightarrow{\tilde{f}} X$ . 遂有交换图

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, X)} & P \\ \pi \downarrow & \xRightarrow{h^P} \downarrow & \downarrow \text{id} \\ Y & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, Y)} & P \end{array} \quad \begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\tilde{f}} X & \\ \text{id} \downarrow & \tilde{f} \swarrow & \downarrow \pi \\ P & \xrightarrow{f} Y & \end{array}$$

可见  $P$  满足定义 2 之表述. 是故满态射  $X \xrightarrow{\pi} P$  给出可裂短正合列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow X \xrightarrow{\pi} P \longrightarrow 0$$

$\begin{array}{ccc} & P & \\ \tilde{\text{id}} \swarrow & \downarrow \text{id} & \\ & P & \end{array}$

对  $3 \implies 1$ , 注意到 Abel 范畴有拉回<sup>2</sup>. 今考虑  $X \xrightarrow{\pi} Y \xleftarrow{f} P$  的拉回 (下图左)

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{a} & P \\ \downarrow b & \lrcorner & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{\pi} & Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & C & \\ \theta \swarrow & \downarrow \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} & \searrow 0 \\ \ker(f, \pi) & \xrightarrow{\iota} X \oplus P & \xrightarrow{(f, \pi)} Y \\ \tau \swarrow & \uparrow \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} & \searrow 0 \\ & C & \end{array}$$

<sup>1</sup>试回忆:  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -) : \mathcal{A} \rightarrow \text{Ab}$  对一切  $X \in \text{Ob}(\mathcal{A})$  均是左正合的.

<sup>2</sup>Abel 范畴之态射范畴仍为 Abel 范畴, 因此态射范畴中存在二元积. 再由此对应原 Abel 范畴之拉回即可.

上图 (右) 中  $\theta$  由核之泛性质定义,  $\tau$  由拉回之泛性质定义. 遂有  $(C, \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}) = (\ker(f, \pi), \iota)$ . 即,

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}} X \oplus P \xrightarrow{(f, \pi)} Y$$

为正合列. 由于  $\pi$  满, 从而上述正合列补全为短正合列, 因此原拉回也是推出. 作态射  $(a, \pi)$  之核, 并约定  $\ker \pi$  至  $P$  的零映射, 则下图实线处交换

$$\begin{array}{ccccc} \ker a & \xrightarrow{i} & C & \xrightarrow{a} & P \\ \downarrow \tilde{b} & \nearrow \varphi & \downarrow b & \searrow 0 & \downarrow f \\ \ker \pi & \xrightarrow{i'} & X & \xrightarrow{\pi} & Y \end{array}$$

作出由拉回之泛性质定义的态射  $\varphi$ , 再经  $\ker a$  作出  $\tilde{\varphi}$ . 注意到

$$\begin{aligned} i \circ \tilde{\varphi} \circ \tilde{b} &= \varphi \circ \tilde{b} = i, \\ i' \circ \tilde{b} \circ \tilde{\varphi} &= b \circ i \circ \tilde{\varphi} = b \circ \varphi = i', \end{aligned}$$

因此  $\tilde{b}$  于  $\tilde{\varphi}$  给出  $\ker a \simeq \ker \pi$ . 请读者自证如下交换图 (上下两行正合)

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker a & \xrightarrow{i} & C & \xrightarrow{a} & P \xrightarrow{c} \operatorname{coker} a = 0 \\ & & \downarrow \simeq & & \downarrow b & & \downarrow f \\ 0 & \longrightarrow & \ker \pi & \xrightarrow{i'} & X & \xrightarrow{\pi} & Y \xrightarrow{c'} \operatorname{coker} \pi = 0 \end{array}$$

由已知, 第一行正合列可裂. 不妨取  $P \xrightarrow{a'} C \xrightarrow{a} P$  之复合为恒等映射, 则下图给出任意  $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P, Y)$  之原像  $b \circ a' \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P, X)$ .

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P, Y) & & P \xrightarrow{f} Y \\ \uparrow & & \swarrow a \quad \searrow b \\ \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(P, X) & & P \xrightarrow{a'} C \xrightarrow{b} X \\ & & \dashrightarrow b \circ a' \end{array}$$

□

注 1 (推出-拉回的对边法则). 对图

$$\begin{array}{ccc} & \bullet & \\ a_1 \nearrow & & \searrow b_2 \\ \bullet & & \bullet \\ a_2 \searrow & & \nearrow b_1 \\ & \bullet & \end{array}$$

1. 若上图为推出且  $a_i$  单, 则上图也为拉回且  $b_i$  单;
2. 若上图也为拉回且  $b_i$  满, 则上图也为推出且  $a_i$  满.

## 2 投射对象的性质

**命题 2** (投射对象之收缩仍为投射对象). 取投射对象  $P$ , 若存在  $Q, a, b$  使得  $Q \xrightarrow{a} P \xrightarrow{b} Q$  为恒等映射, 则  $Q$  投射.

证明. 记  $g$  为投射对象  $P$  诱导的提升,  $\tilde{f} = g \circ a$  自然是  $f$  的提升.

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{id} & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\ Q & \xrightarrow{a} & P & \xrightarrow{b} & Q \\ \tilde{f} \downarrow & \swarrow g & \downarrow & \swarrow f & \\ X & \xrightarrow{\pi} & Y & & \end{array} .$$

□

**命题 3** (余积保持投射模). 对任意集合  $I$ . 余积  $\coprod_{i \in I} P_i$  为投射对象当且仅当每一  $P_i$  为投射对象.

证明. 若  $\coprod_{i \in I} P_i$  投射, 则每一  $P_i$  作为其收缩仍投射. 反之, 考虑下图

$$\begin{array}{ccc} P_i & \xrightarrow{e_i} & \coprod_{i \in I} P_i \\ \tilde{f}_i \downarrow & \swarrow \tilde{f} & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{\pi} & Y \end{array} .$$

其中  $\tilde{f}_i$  为  $f \circ e_i$  之提升,  $\tilde{f}$  由余积定义给出. 显然  $\pi \circ \tilde{f} = f$ .

□

**命题 4** (态射范畴中的基本投射对象). 选定 Abel 范畴  $\mathcal{A}$  与投射对象  $P$ , 则  $0 \rightarrow P$  与  $P \xrightarrow{\text{id}} P$  为态射范畴的投射对象. 直接验证之即可.

**定义 3.** 称  $\mathcal{A}$  有足够多投射对象, 若任意对象  $M \in \text{Ob}(\mathcal{A})$  同构于某一投射模之商.

**命题 5.** 设  $\mathcal{A}$  为具有足够多投射对象的 Abel 范畴, 则其态射范畴仍有足够多的投射对象, 且任意投射对象为  $\begin{smallmatrix} 0 \\ \downarrow \\ Q \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} P \\ \downarrow \text{id} \\ P \end{smallmatrix}$  的直和项 ( $P$  与  $Q$  均为投射对象).

证明. 对任意  $X \xrightarrow{f} Y$ , 有投射模  $P$  与  $Q$  使得下图交换

$$\begin{array}{ccccc} P & \xlongequal{\quad} & P & \xrightarrow{\pi} & X \\ (1,0)^T \downarrow & & \tilde{f} \circ \pi \downarrow & \swarrow \tilde{f} & \downarrow f \\ P \oplus Q & \xrightarrow{(\tilde{f} \circ \pi, \text{id})} & Q & \xrightarrow{\pi'} & X' \end{array} .$$

显然态射范畴中同有足够多的投射对象. 注意到  $\begin{smallmatrix} 0 \\ \downarrow \\ Q \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} P \\ \downarrow \text{id} \\ P \end{smallmatrix}$  到  $P \xrightarrow{\tilde{f} \circ \pi} Q$  满, 遂可裂.

□

### 3 投射对象为自由对象之直和项

**定义 4** (自由对象). 若存在自由-遗忘伴随  $\mathcal{C} \begin{smallmatrix} \xrightarrow{U} \\ \tau \\ \xleftarrow{F} \end{smallmatrix} \text{Set}$ , 则称集合在  $F$  下的像为自由对象.

注 2. 依照 Mitchell 嵌入定理, 小 Abel 范畴与某一模范畴等价. 相应地, 自由对象即自由模.

注 3. 类比定义 2,  $\text{Set}$  中任意对象既投射且内射.

**命题 6.** 若右伴随保持满态射, 则左伴随保持投射对象. 直接验证即可.

注 4 (自由对象投射的充分条件). 若定义 4 中  $U$  保持满态射, 则左伴随 (自由函子) 保持投射对象.

**命题 7.** 假定定义 4 中  $U$  保持满态射, 且  $\mathcal{C}$  允许直和, 则投射模等价于自由模的直和项.

证明. 一方面, 余单位作为自然变换诱导满自函子  $FU : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}, FU(X) \mapsto X$ . 遂可裂满. 因此一切投射模以自由模直和项之形式出现. 另一方面, 命题 6 表明自由对象均投射.  $\square$

**定理 1.** 若具体范畴  $\mathcal{C}$  与集合范畴间存在自由-遗忘伴随, 且遗忘函子  $U$  保持满射, 则任意对象是自由对象的商, 故  $\mathcal{C}$  有足够多投射对象. 若  $\mathcal{C}$  为 Abel 范畴, 则投射模等价于自由模的直和项.

**例 1.** 应当留意以下例子:

1. 模范畴中, 投射模为自由模直和项, 考虑自然的遗忘函子即可.
2. (小) 环范畴中存在某些非满射的满态射  $R \rightarrow \text{frac}(R)$ , 此时  $\text{frac}(R)$  自由但不投射.
3. 有限 Abel 群范畴与集合范畴间不存在自由-遗忘伴随, 同时没有足够的投射对象.

**定理 2.** 主理想整环遗传, 其自由模之子模仍自由. 特别地, 自由模与投射模等价.

**定理 3.** 自由群之子群自由, 从而群范畴的自由对象等价于投射对象.

证明. 熟知自由群之子群自由. 应注意: 即便群范畴允许直和与正合列, 一般地有

$$\text{左可裂} \iff \text{可裂} \xRightarrow{\neq} \text{右可裂}.$$

常将右可裂对应半直积. 同时强调自由群的泛性质: 任意集合  $S$  至群  $G$  的映射  $f : S \rightarrow G$  通过  $S$  生成的自由群与典范映射  $\iota : S \rightarrow F(S)$  唯一分解. 即, 存在唯一的群同态  $\varphi$  使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & G \\ \downarrow \iota & \nearrow \exists! \varphi & \\ F(S) & & \end{array}.$$

熟知群范畴之满态射与满射等价, 定理 1 表明自由群投射. 反之, 任意投射对象  $G$  为自由群之商, 且该满同态  $FU(G) \twoheadrightarrow G$  之右逆为  $G \hookrightarrow FU(G)$ . 由于  $G$  为自由群之子群, 从而自由.  $\square$

注 5. 若群  $G$  使得一切正合列可裂, 则  $G$  平凡.<sup>3</sup>

<sup>3</sup>证明思路: 若右可裂正合列可裂, 当且仅当收缩之像为中间群的正规子群, 此后不难构造具体例子.