作者: 张陈成
学号: 023071910029

K-理论笔记

交换环的 Picard 群

1 交换环的 Picard 群

定理 1. 给定交换环 R 与连续函数 $f : \mathrm{Spec}(R) \to X$, 其中 X 具备离散拓扑. 存在分解 $R \simeq \prod R_i$ 使得 $\coprod \mathrm{Spec}(R_i) \simeq \mathrm{Spec}(R)$, 且 $f|_{\mathrm{Spec}(R_i)}$ 为常映射.

证明. □

定义 1 (可逆模)**.** 称 M 是交换环 R 上有限生成的模. 称 M 可逆, 若以下等价命题成立.

1. 存在 R-模 N 使得 $M \otimes N \simeq R$, 且 $M \simeq \mathrm{Hom}_R(N, R)$.
2. $M \otimes_R -$ 为 R-模范畴到自身的等价.
3. M 是有限生成的秩恒为 1 的投射模.

实际上有 $\mathrm{Hom}_R(N, R) \simeq M$.

定义 2 (Picard 群)**.** 记环 R 中 Picard 群为 $\mathrm{Pic}(R)$ 有限生成可逆模 $\langle M \rangle$ 构成的乘法群. 其中

1. $\langle M \otimes_R N \rangle = \langle M \rangle \cdot \langle N \rangle$.
2. $\langle \mathrm{Hom}_R(M, R) \rangle = \langle M \rangle^{-1}$.
3. $\langle R \rangle$ 为乘法单位.

注 1. $\mathrm{Pic} : \mathrm{Ring} \to \mathrm{Ab}$ 为 (协变) 函子. 特别地,

$$\mathrm{Pic} : \left[R \xrightarrow{f} S \right] \mapsto [P \mapsto S \otimes_R P].$$