作者: 张陈成
学号: 023071910029

K-理论笔记

交换环的 Picard 群

1 投射模的秩 (纤维)

定义 1 (秩, 纤维)**.** 对 R-模 X 给出的秩函数

$$\operatorname{rank}_X : \operatorname{Spec}(R) \to \mathbb{N}, \quad \mathfrak{p} \mapsto \dim_{R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}} \left(\frac{X}{\mathfrak{p}X}\right)_\mathfrak{p}.$$

此处局部化与商模交换, 局部环 $A_\mathfrak{p}$ 具有唯一的极大理想 $\mathfrak{p}$, 故

$$\left(\frac{X}{\mathfrak{p}X}\right)_\mathfrak{p} \simeq (R/\mathfrak{p} \otimes_\mathfrak{p} X)_\mathfrak{p} \simeq \frac{R_\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}} \otimes_{R_\mathfrak{p}} X_\mathfrak{p},$$

称作 X 在 $\mathfrak{p}$ 处的纤维.

命题 1 (Noether 环上投射模的等价定义)**.** 对 Noether 环 R 上有限生成模 X, X 投射当且仅当对任意 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$, $X_\mathfrak{p}$ 是自由 $R_\mathfrak{p}$-模.

证明. 注意到 P 有限表示, 故局部化保持 $\operatorname{Hom}(P, -)$ 的正合性, 从而保持投射模. 记局部环 $A := R_\mathfrak{p}$, 极大理想 $\mathfrak{m} := \mathfrak{p}_\mathfrak{p}$. 取 $M := X_\mathfrak{p}$ 的极小有限生成集 $S = \{x_i\}_{1\leq i\leq n}$, 其在 $A \to A/\mathfrak{m}$ 中的项为 $\overline{S} = \{\overline{x_i}\}_{1\leq i\leq n}$. 记投射模的直和关系 $M \oplus N \simeq A^n \simeq \bigoplus_{1\leq i\leq n} Ax_i$. 从而

$$M/\mathfrak{m}M \simeq A^n/\mathfrak{m} \simeq M/\mathfrak{m}M \oplus N/\mathfrak{m}N$$

考虑线性空间维度以及中山引理, 得 $N = 0$. 故 $X_\mathfrak{p}$ 是自由 $R_\mathfrak{p}$-模.

相反地, 若 $\operatorname{Hom}_{R_\mathfrak{p}}(P_\mathfrak{p}, (-)_\mathfrak{p}) \simeq \operatorname{Hom}_R(P, -)_\mathfrak{p}$ 对任意 $\mathfrak{p}$ 均正合, 则只需证明正合列间关系

$$L_\mathfrak{p} \xrightarrow{f_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \xrightarrow{g_\mathfrak{p}} N_\mathfrak{p} \quad (\forall \mathfrak{p}) \qquad \Longrightarrow \; L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N.$$

由于局部化保持零态射, 从而保持链复形. 记 $T := \dfrac{\ker(f)}{\operatorname{im}(g)}$, 则 $T_\mathfrak{p} = 0$ 对一切素理想成立, 因此 $T = 0$. □

注 1. Kaplansky 定理表明非交换局部环上的非有限生成投射模 (即可数生成投射模之直和) 仍自由.

命题 2. 有限展示 R-模 X 投射, 当且仅当 $R_\mathfrak{p}$ 对一切 $\mathfrak{p} \in \operatorname{spec}(R)$ 投射 (等价地, 自由).

命题 3. 前已证明有限生成投射模, 有限展示投射模, 有限展示平坦模彼此等价. 对 Noether 而言, 有限生成与有限展示等价, 故 (左) Noether 环 (右) 完美.

定义 2 (有限生成投射模的秩函数)**.** kaplansky 定理表明局部环上的投射模自由, 其交换且有限生成之情形已在前文证明 (中山引理之推论). 今给定交换环 R, 定义有限生成投射模 P 的秩函数为

$$\operatorname{rank}_P : \operatorname{spec}(R) \to \mathbb{N}, \quad \mathfrak{p} \mapsto \operatorname{rank}_{R_\mathfrak{p}}(P_\mathfrak{p}).$$

简而言之, $\operatorname{rank}_P(\mathfrak{p})$ 是 R-模 P 在 $\mathfrak{p}$-局部化下 (作为自由 $R_\mathfrak{p}$-模) 的秩.

命题 4 (秩函数的乘法)**.** 给定交换环 R 与有限生成投射 R-模 M 与 N, 则有

$$\operatorname{rank}_{M\otimes N}(\mathfrak{p}) \mapsto \operatorname{rank}_M(\mathfrak{p}) \cdot \operatorname{rank}_N(\mathfrak{p}) \quad (\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{spec}(R)).$$

证明. 此处投射模的张量积仍投射. 考虑 $M \oplus M' \simeq R^\lambda$, 则有

$$(M \otimes N) \oplus (M' \otimes N) \simeq R^\lambda \otimes N \simeq N^\lambda.$$

从而 $M \otimes N$ 仍为自由模的直和项, 因此投射. 假定 $M_\mathfrak{p} \simeq R_\mathfrak{p}^m$ 以及 $N_\mathfrak{p} \simeq R_\mathfrak{p}^n$, 则

$$M_\mathfrak{p} \otimes_{R_\mathfrak{p}} N_\mathfrak{p} \simeq R_\mathfrak{p}^m \otimes_{R_\mathfrak{p}} R_\mathfrak{p}^n \simeq R_\mathfrak{p}^{mn}.$$

□

注 2. 由于有限生成投射模有限展示, 从而局部化与 $\operatorname{Hom}_R(P, -)$ 可交换. 类比上述证明有, $\operatorname{rank}_{\operatorname{Hom}_R(P,Q)} = \operatorname{rank}_P \cdot \operatorname{rank}_Q$.

2 可逆模 = 线丛 = 交换半环 $R-\mathrm{Mod}$ 中单位

命题 5 (对偶模回顾)**.** 给定交换环 R, 定义 $X \in \mathsf{Ob}(R-\mathrm{Mod})$ 的对偶模为

$$X^* := \operatorname{Hom}_{R-\mathrm{Mod}}(X, R) \quad \in \mathsf{Ob}(R^{\mathrm{op}}-\mathrm{Mod}).$$

有以下关于对偶模的常用性质.

1. $\varepsilon : P \to P^{**}$ 为典范单态射.

2. 自由模与投射模的一种等价定义如下.

   - F 是**自由** R**-模**, 当且仅当存在指标集 I 与 $\{(x_i, f_i) \in F \times F^*\}_{i\in I}$ 使得有分解 (有限和) $x = \sum_{i\in I} f_i(x)x_i$, 且有限和 $x = \sum_{i\in I} a_i x_i$ 对一切 $x \in F$ **唯一**.
   - P 是**投射** R**-模**, 当且仅当存在指标集 I 与 $\{(x_i, f_i) \in P \times P^*\}_{i\in I}$ 使得有分解 (有限和) $x = \sum_{i\in I} f_i(x)x_i$, 但有限和 $x = \sum_{i\in I} a_i x_i$ 对 $x \in P$ **不必唯一**.

3. 有限生成投射模的对偶模同为投射 R-模. 具体地, 对任意 $P \oplus Q \simeq R^n$ 总有

$$\operatorname{Hom}_R(P, R) \oplus \operatorname{Hom}_R(Q, R) \simeq \operatorname{Hom}_R(R^n, R) \simeq (\operatorname{End}_R(R))^n \simeq R^n.$$

   此时 $\varepsilon : P^{**} \simeq P$ 为同构.

命题 6 (有限生成投射模之对偶不改变秩函数)**.** 取 R 上有限生成投射模 P, 则有

$$P_\mathfrak{p}^n \simeq R_\mathfrak{p}^n \simeq \operatorname{Hom}_{R_\mathfrak{p}}(P_\mathfrak{p}, R_\mathfrak{p})^n \simeq (P_\mathfrak{p}^*)^n \simeq (P^*)_\mathfrak{p}^n.$$

命题 7 (秩函数运算总结)**.** 对交换环 R 上有限生成模, 有如下秩函数的等式 (逐点相等).

1. $\operatorname{rank}_{R^n}$ 为 $\operatorname{spec}(R)$ 到 $\{n\}$ 的常函数.

2. $\operatorname{rank}_{P\oplus Q} = \mathrm{P} + \operatorname{rank}_Q$.

3. $\operatorname{rank}_{P\otimes Q} = \mathrm{P}\cdot \operatorname{rank}_Q$.

4. $\operatorname{rank}_{\mathrm{Hom}_R(P,Q)} = \operatorname{rank}(P)\cdot \operatorname{rank}(Q)$.

5. $\operatorname{rank}(P) = \operatorname{rank}(P^*)$.

定义 3 (R-模范畴的半环结构)**.** $(R\mathrm{-Mod},\oplus,\otimes)$ 为交换半环, 即,

1. 环中元素为 $\mathsf{Ob}(R\mathrm{-Mod})/\simeq$. 为方便记号, 今后省略商关系.

2. $(R\mathrm{-Mod},\oplus)$ 为交换幺半群, 其幺元为 0;

3. $(R\mathrm{-Mod},\otimes)$ 为交换幺半群, 其幺元为 R;

4. $\oplus$ 与 $\otimes$ 分别作为加法与乘法, 满足分配律.

定义 4 (可逆模 (线丛))**.** 交换半环 $(R\mathrm{-Mod},\oplus,\otimes)$ 中的单位 (可逆乘法元) 全体为**可逆模 (线丛)**.

命题 8. 取交换环 R 上有限生成模 M. 称 M 可逆, 若以下等价命题成立.

1. 存在 R-模 N 使得 $M\otimes N\simeq R$. 换言之, M (所属的同构类) 是环 $(R\mathrm{-Mod},\oplus,\otimes)$ 中的乘法逆元.

2. $M\otimes_R -$ 为 R-模范畴到自身的等价. 换言之, 存在 $N\otimes -$ 使得 $(M\otimes N\otimes -)\simeq(R\otimes -)$.

3. M 是有限生成的秩恒为 1 的投射模.

若前两则成立, 则可取 $\mathrm{Hom}_R(N,R)\simeq M$.

证明. $1\iff 2$ 是显然的. 函子 $-\otimes M$ 给出范畴 $R\mathrm{-Mod}$ 到自身的范畴等价, 当且仅当 M 是环 $(R\mathrm{-Mod},\oplus,\times)$ 的乘法可逆元. 换言之, 存在 N 使得 $N\otimes M\simeq R\simeq M\otimes N$.

$3\implies 1$ 若 M 是秩 1 的投射模, 记 $N=M^*$, 并考虑赋值映射

$$M\otimes N\to R,\quad x\otimes f\mapsto f(x).$$

显然该映射对任意素理想的局部化是同构. 由于 M 投射, 从而对任意素理想 $\mathfrak{p}$,

$$R_{\mathfrak{p}}\simeq \mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}},R_{\mathfrak{p}})\simeq(\mathrm{Hom}_R(M,R))_{\mathfrak{p}}\simeq N_{\mathfrak{p}}.$$

因此 $N=M^*$ 也是秩为 1 的投射模. 由于 $M_{\mathfrak{p}}\otimes_{R_{\mathfrak{p}}}N_{\mathfrak{p}}\simeq R_{\mathfrak{p}}$ 对一切 $\mathfrak{p}$ 成立, 从而 $M\otimes N\simeq R$.

$1\implies 3$ 在 $M\otimes N\simeq R$ 两端作 $\mathfrak{p}$-局部化, 则 $\operatorname{rank}_M=\operatorname{rank}_N=\operatorname{rank}_R$. 下仅需证明 M 与 N 投射. 记 M 的有限生成元 $\{m_i\}_{1\le i\le m}$ 与一组 $\{n_i\}_{1\le i\le m}\subseteq N$ 使得有

$$\sum_{1\le i\le m} m_i\otimes n_i = 1\otimes 1\quad(\simeq 1\in R).$$

以此构造满同态 $N^m\twoheadrightarrow R$, 其中 $(x_1,\dots x_m)\mapsto\sum_{1\le i\le m} m_i\otimes x_i$. 显然该满同态可裂, 记

$$N^m\simeq R^m\otimes N\simeq R\oplus Q.$$

从而 $R^m\simeq R^m\otimes(M\otimes N)\simeq N^m\otimes N\simeq(R\oplus Q)\otimes N\simeq N\oplus(Q\otimes N)$. 因此 N 投射. 对称地, M 亦投射. □

定义 5 (Picard 群)**.** 记环 R 中 Picard 群为 $\mathrm{Pic}(R)$ 有限生成可逆模 $\langle M\rangle$ 构成的乘法群. 其中

1. $\langle M \otimes_R N \rangle = \langle M \rangle \cdot \langle N \rangle$.

2. $\langle \mathrm{Hom}_R(M, R) \rangle = \langle M \rangle^{-1}$.

3. $\langle R \rangle$ 为乘法单位.

注 3. $\mathrm{Pic} : \mathrm{Ring} \to \mathrm{Ab}$ 为 (协变) 函子. 特别地,

$$\mathrm{Pic} : \left[R \xrightarrow{f} S \right] \mapsto [P \mapsto S \otimes_R P].$$

结合律与单位律由张量积的结合律保证.

3 一些代数几何解释