作者: 张陈成
学号: 023071910029

K-理论笔记

Noether 环上的投射模与平坦模

1 Noether 环上的投射模与平坦模

定义 1 (有限生成, 有限展示)**.** 对环 R-模 X, 有以下定义.

1. 称 X 是有限生成的, 若存在有限集 S 使得 $S \cdot R \simeq X$. 换言之, 存在正合列
$$R^n \longrightarrow X \longrightarrow 0.$$

2. 称 X 是有限展示的, 若存在正合列
$$R^m \longrightarrow R^n \longrightarrow X \longrightarrow 0.$$

注 1. 对任意模, 有限长度 $\implies$ 有限生成.

注 2. 有限展示模是生成元间关系有限的有限生成模.

命题 1. Noether 环上的有限生成模等价于有限展示模.

证明. 考虑如下有限生成模的投射分解, 其中 κ 是某一基数

$$\begin{tikzcd} & & & X \arrow[dr, hook] & & \\ R^\kappa \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & R^n \arrow[ur, two heads] \arrow[rr, "f"] & & X \arrow[r] & 0 \cdot \\ & \ker(f) \arrow[ur, hook] & & & & \end{tikzcd}$$

由于 $\ker(f)$ 作为 Noether 环上的模是有限生成的, 从而可取 $\kappa < \omega$. 反之显然. □

命题 2. 给定有限生成 R-模 X 与态射 $X \xrightarrow{f} f(X)$, 则 $f(X)$ 有限生成而 $\ker(f)$ 未必. 若 $f(X)$ 有限展示, 则 $\ker(f)$ 有限生成.

证明. X 的有限生成集在 f 下的像仍有限生成; 对 $\ker(f)$, 考虑商环诱导的 $\mathbb{R}[X_1, \ldots]$-模同态
$$\mathbb{R}[X_1, \ldots] \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(0, \ldots),$$
其核显然不是有限生成的.

注 3. 该反例进而说明有限长度与有限展示互不包含.

若 $f(X)$ 是有限展示的, 则有正合列间同态

$$
\begin{tikzcd}
 & R^m \arrow[d, dotted, two heads] \arrow[dr, dotted] & & & \\
0 \arrow[r] & \ker(fg) \arrow[r] \arrow[d, dashed, two heads] & R^n \arrow[r, "fg"] \arrow[d, "g"] \arrow[dr] & f(X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker(f) \arrow[r] & X \arrow[r, "f"'] & f(X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
.
$$

以上长虚线 $\ker(fg) \twoheadrightarrow \ker(f)$ 有核的泛性质给出, 满射性由五引理给出. 依照 $f(X)$ 的有限展示性给出 $R^m \to R^n$ 及其满-单分解, 即得 $\ker(f)$ 是 R^m 的商, 从而有限生成. □

命题 3. 仿照命题 2, 给定模正合列 $0 \to K \to X \to Y \to 0$, 则有如下结论.

1. 若 K 有限生成, Y 有限生成, 则 X 有限生成.
2. 若 X 有限生成, 则 Y 有限生成, 但 K 未必.
3. 若 X 有限生成, Y 有限展示, 则 K 有限生成. 即, 命题 2.
4. 若 K 有限生成, X 有限展示, 则 Y 有限展示.
5. 若 K 有限展示, Y 有限展示, 则 X 有限展示.

证明. 证明如下.

1. 取 $S_K \subseteq K$ 为 K 的有限生成集, $S_Y \subseteq X$ 使得像 $\overline{S_Y}$ 是 Y 的有限生成集, 且 $|S_Y| = |\overline{S_Y}|$. 命题由以下交换图给出:

$$
\begin{tikzcd}
 & & n & n+m & m & \\
\text{Set} & 0 \arrow[r] & S_K \arrow[r] \arrow[u, "|\cdot|"] \arrow[d, "R\cdot"] & S_K \dot{\cup} S_Y \arrow[r] \arrow[u, "|\cdot|"] \arrow[d, "R\cdot"] & \overline{S_Y} \arrow[r] \arrow[u, "|\cdot|"] \arrow[d, "R\cdot"] & 0 \\
R\text{−FreeMod} & 0 \arrow[r] & R^n \arrow[r] \arrow[d, two heads] & R^{m+n} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & R^m \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\
R\text{−Mod} & 0 \arrow[r] & K \arrow[r] & X \arrow[r] & Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
.
$$

2. 有限生成模的像显然是有限生成模, 核未必, 见命题 2.
3. 即命题 2.
4. 考虑满射 $R^m \twoheadrightarrow X$ 与 $R^n \twoheadrightarrow K$ 诱导的正合列间同态, 则 g 为满射. 根据蛇引理, 核 $\ker(f) \twoheadrightarrow \ker(g)$ 是满同态.

$$
\begin{tikzcd}
 & R^l \arrow[r, dashed, two heads] & \ker(f) \arrow[r, dashed, two heads] \arrow[d] & \ker(g) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & R^n \arrow[r] \arrow[d, two heads] & R^{m+n} \arrow[r] \arrow[d, two heads, "f"] & R^m \arrow[r] \arrow[d, dashed, two heads, "g"] \arrow[dl, two heads] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & X \arrow[r] & Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
.
$$

由 X 的有限展示性与命题 2 知 $\ker(f)$ 有限生成, 故存在某一 R^l 到 $\ker(g)$ 的满射. 从而存在正合列 $R^l \to R^m \to Y \to 0$, 即, Y 有限展示.

5. 以上交换图给出自由模链复形到题设中短正合列的满态射. 根据蛇引理有

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker_1 \arrow[r] \arrow[d] & \ker_2 \arrow[r] \arrow[d] & \ker_3 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dddll, dashed, bend right, "\delta"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & R^n \arrow[r] \arrow[d] & R^{m+n} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & R^m \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & X \arrow[r] & Y \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}.$$

根据命题 2, $\ker_3$ 与 $\ker_1$ 有限生成, 因此 $\ker_2$ 有限生成. 根据上一条, X 有限展示.

□

命题 4. 对有限展示 R 模 X 与局部化函子 $S^{-1}(-)$, 有自然同构

$$S^{-1}\mathrm{Hom}_R(X,-) \simeq \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}X, S^{-1}(-)).$$

证明. 对任意 $f \in \mathrm{Hom}_R(X,Y)$, 定义 $S^{-1}R$-模同态 $S^{-1}(f) : \dfrac{x}{s} \mapsto \dfrac{f(x)}{s}$. 遂有正合列的交换图

$$\begin{tikzcd}
 & & & & 0 \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 & & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
X \arrow[u] & & \mathrm{Hom}_R(X,Y) \arrow[d] & & S^{-1}\mathrm{Hom}_R(X,Y) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}X, S^{-1}Y) \arrow[d] \\
R^m \arrow[u] & \xRightarrow{\mathrm{Hom}_R(-,Y)} & \mathrm{Hom}_R(R^m,Y) \arrow[d] & \xRightarrow{S^{-1}(-)} & S^{-1}\mathrm{Hom}_R(R^m,Y) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}R^m, S^{-1}Y) \arrow[d] \\
R^n \arrow[u] & & \mathrm{Hom}_R(R^n,Y) & & S^{-1}\mathrm{Hom}_R(R^n,Y) \arrow[r, "\simeq"] & \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}R^n, S^{-1}Y)
\end{tikzcd}.$$

由五引理知中间处为同构. □

注 4. 对有限生成模, 上述同态为单而未必满. 考虑交换环 $R = \mathbb{R}[X_0, X_1, \ldots]$ 以及商环给出模 $X = \mathbb{R}[X_0]$, 则 X 有限生成单非有限展示. 考虑

$$Y = R/(X_0X_1, X_0^2X_2, \ldots, X_0^nX_n, \ldots),$$

则 R-模同态 $f : X \to Y$ 形如 $1 \mapsto F$. 存在足够大的 m 使得 $f(X_0^m) = F \cdot X_0^m = g(X_0)$. 此时对任意 k 均有

$$0 = f(0) = f(X_0^m \cdot X_k) = X_k \cdot g(X_0)/(X_0^k).$$

因此 $g(X_0)/(X_0^k)$ 恒为 0, 从而 $g(X_0) = 0$. 取 $S = \{1, X_0, X_0^2, \ldots\}$, 则 $S^{-1}\mathrm{Hom}_R(X,Y) = S^{-1}0 = 0$. 但另一方面,

$$S^{-1}X \simeq S^{-1}Y \simeq \mathbb{R}[X_0^{\pm}].$$

显然 $\mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}X, S^{-1}Y) = \mathrm{End}_{S^{-1}R}(\mathbb{R}[X_0^{\pm}]) \neq 0$, 遂矛盾.

定义 2 (秩, 纤维)**.** 对 R-模 X 给出的秩函数

$$\operatorname{rank}_X : \operatorname{Spec}(R) \to \mathbb{N}, \quad \mathfrak{p} \mapsto \dim_{R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}} \left(\frac{X}{\mathfrak{p}X}\right)_\mathfrak{p}.$$

此处局部化与商模交换, 局部环 $A_\mathfrak{p}$ 具有唯一的极大理想 $\mathfrak{p}$, 故

$$\left(\frac{X}{\mathfrak{p}X}\right)_\mathfrak{p} \simeq (R/\mathfrak{p} \otimes_\mathfrak{p} X)_\mathfrak{p} \simeq \frac{R_\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}} \otimes_{R_\mathfrak{p}} X_\mathfrak{p},$$

称作 X 在 $\mathfrak{p}$ 处的纤维.

命题 5 (Noether 环上投射模的等价定义)**.** 对 Noether 环 R 上有限生成模 X, X 投射当且仅当对任意 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$, $X_\mathfrak{p}$ 是自由 $R_\mathfrak{p}$-模.

证明. 注意到 P 有限表示, 故局部化保持 $\operatorname{Hom}(P, -)$ 的正合性, 从而保持投射模. 记局部环 $A := R_\mathfrak{p}$, 极大理想 $\mathfrak{m} := \mathfrak{p}_\mathfrak{p}$. 取 $M := X_\mathfrak{p}$ 的极小有限生成集 $S = \{x_i\}_{1 \le i \le n}$, 其在 $A \to A/\mathfrak{m}$ 中的项为 $\overline{S} = \{\overline{x_i}\}_{1 \le i \le n}$. 记投射模的直和关系 $M \oplus N \simeq A^n \simeq \bigoplus_{1 \le i \le n} Ax_i$. 从而

$$M/\mathfrak{m}M \simeq A^n/\mathfrak{m} \simeq M/\mathfrak{m}M \oplus N/\mathfrak{m}N$$

考虑线性空间维度以及中山引理, 得 $N = 0$. 故 $X_\mathfrak{p}$ 是自由 $R_\mathfrak{p}$-模.

相反地, 若 $\operatorname{Hom}_{R_\mathfrak{p}}(P_\mathfrak{p}, (-)_\mathfrak{p}) \simeq \operatorname{Hom}_R(P, -)_\mathfrak{p}$ 对任意 $\mathfrak{p}$ 均正合, 则只需证明正合列间关系

$$L_\mathfrak{p} \xrightarrow{f_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \xrightarrow{g_\mathfrak{p}} N_\mathfrak{p} \quad (\forall \mathfrak{p}) \qquad \Longrightarrow \; L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N.$$

由于局部化保持零态射, 从而保持链复形. 记 $T := \dfrac{\ker(f)}{\operatorname{im}(g)}$, 则 $T_\mathfrak{p} = 0$ 对一切素理想 (包括极大理想) 成立, 因此 $T = 0$. $\square$

注 5. Kaplansky 定理表明非交换局部环上的非有限生成投射模 (即可数生成投射模之直和) 仍自由. 必要时补充证明.

命题 6. 投射模与平坦模的关系如下

$$\begin{tikzcd} \text{有限展示投射模} \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{有限生成投射模} \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{有限展示平坦模} \arrow[r, Rightarrow] & \text{有限生成平坦模} \arrow[lll, Rightarrow, bend left, "\text{当且仅当是 (右) 完美环上的左模}"] \end{tikzcd}.$$

证明. 一般地, 有限展示推出有限生成, 投射模推出平坦模, 且投射模有限生成当且记当有限展示. 下证明有限展示平坦模 X 投射. 定义特征模函子为正合函子 $\operatorname{Hom}_\mathbb{Z}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, 具体如下

$$(-)^* : R\text{−Mod} \to R^{\text{op}}\text{−Mod}, \quad M \mapsto \operatorname{Hom}_\mathbb{Z}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \quad \Big([m \mapsto rm] \mapsto [f(x) \mapsto f(x)r = f(rx)]\Big).$$

取 X 的展示 $R^m \to R^n \to X \to 0$ 以及任意 R-S-双模 Y, 有同构

$$Y^* \otimes R^m = (Y^*)^m \simeq (\operatorname{Hom}_R(R, Y)^*)^m \simeq (\operatorname{Hom}_R(R, Y)^m)^* \simeq \operatorname{Hom}_R(R^m, Y)^*.$$

从而有正合列间的同态

$$\begin{tikzcd} Y^* \otimes R^m \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & Y^* \otimes R^n \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & Y^* \otimes X \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \arrow[d, "\simeq"] \\ \operatorname{Hom}_R(R^m, Y)^* \arrow[r] & \operatorname{Hom}_R(R^n, Y)^* \arrow[r] & \operatorname{Hom}_R(X, Y)^* \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}.$$

其中 φ 为态射范畴之余核. 依照五引理, φ 为同构. 由于 $- \otimes X$ 正合, 故 $(-)^* \otimes X \simeq \operatorname{Hom}_R(X, -)^*$ 正合, 从而 X 投射. $\square$

命题 7. 依照命题 6 与命题 5, (左) Noether 环 (右) 完美.