作者: 张陈成
学号: 023071910029

K-理论笔记

Dedekind 整环简介

1 Dedekind 整环简介

定义 1 (代数数)**.** **代数数域**为 $\mathbb{Q}$ 的有限扩域, 从而是单的代数扩域, 故不妨视作 $\mathbb{C}$ 的子域. **代数数**为代数数域中的数, 从而是某一 $\mathbb{Q}[X]$ 中多项式在 $\mathbb{C}$ 上的根.

定义 2 (代数整数)**.** 记 $\overline{\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{C}$ 为 $\mathbb{Z}[X]$ 中一切整系数首一多项式在 $\mathbb{C}$ 中的根之并. 由矩阵论知识知其为环, 称作**代数整环**. 代数数域 K 中的代数整数全体为子环 $\mathcal{O}_K := K \cap \overline{\mathbb{Z}}$.

注 1. 记代数数之全体为 $\overline{\mathbb{Q}}$, 即 $\mathbb{Q}$ 在集合 $\overline{\mathbb{Z}}$ 上的扩张.

命题 1. 对 $\overline{\mathbb{Q}}$ 中子环嵌入 $A \hookrightarrow B$, 有限集 $S := \{y_i\}_{i \in I_0} \subseteq B$ 由 A 上的代数整数组成, 当且仅当 $A[S]$ 为有限生成 A-模.

证明. 仅证明 $|S| = 1$ 即可. 一方面, 若 $y \in B$ 在 A 上代数整, 则 $A[y]$ 为有限生成 A-模. 另一方面, 若 $A[y]$ 为有限生成 A-模, 记 $a_1, \ldots, a_m$ 为生成元. 则

$$y \cdot (a_1, \ldots, a_n) = U \cdot (a_1, \ldots, a_m) \qquad (U \in A^{m \times m}).$$

考虑伴随矩阵知 $\det(y \cdot I_m - U) = 0$, 这也直接给出了 y 的首一 A-系数零化多项式. □

例 1. 例如对 $n \in \mathbb{N}_+$, 有代数数域 $K_n := \mathbb{Q}[\sqrt{-n}]$. 此处 $r + s\sqrt{-n} \in K_n$ 为代数整数当且仅当

$$(X - r)^2 + s^2 \cdot n = X^2 - 2rX + r^2 + s^2 \cdot n$$

为整系数多项式. 因此 $\mathcal{O}_{K_n} = \mathbb{Z}\left[\dfrac{\sqrt{-n}+1}{2}\right]$ 当且仅当 $n + 3 \in 4\mathbb{Z}$; 反之 $\mathcal{O}_{K_n} = \mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$.

定义 3 (迹, 范数)**.** 对任意数域的代数扩张 E/F, 任取 $x \in E$, 则数乘 $x\cdot : y \mapsto xy$ 是 E 作为 F-线性空间的自同构. 称 $x\cdot$ 的迹与范数为 x 在域扩张 E/F 下的**迹与范数**, 分别记作 $\mathrm{Tr}_{E/F}(x)$ 与 $\mathrm{N}_{E/F}$.

例 2. $\mathrm{Tr} : E \to F$ 是 F-线性空间的同态, $\mathrm{N} : E^\times \to F^\times$ 是乘法群同态.

命题 2. 对代数数域间的扩域 E/F, 记 E 到代数闭包 $\overline{F}$ 的 F-不变域嵌入为 $(E, \overline{F})_F$, 则任意 $f \in (E, \overline{F})_F$ 保持任意 $x \in E$ 的 F-极小多项式. 对任意 $x_0 \in E$ 使得 $F(x_0) = E$, 极小多项式 $m_{x_0}(X)$ 无重根, 从而在 E 上形如

$$m_{x_0}(X) = \prod_{0 \le i \le \deg m_{x_0} - 1} (X - x_i).$$

因此 $(E, \overline{F})_F = \{x_0 \mapsto x_i\}_{0 \le i \le \deg m_{x_0} - 1}$, 大小为 n. 进一步地,

$$\mathrm{Tr}_{E/F} : x \mapsto \sum_{f \in (E, \overline{F})_F} f(\alpha), \qquad \mathrm{N}_{E/F} : x \mapsto \prod_{f \in (E, \overline{F})_F} f(\alpha).$$

命题 3 (传递公式)**.** 对数域的扩张 $E/M/F$, 有 $\mathrm{Tr}_{E/F} = \mathrm{Tr}_{E/M} \circ \mathrm{Tr}_{M/F}$ 与 $\mathrm{N}_{E/F} = \mathrm{N}_{E/M} \circ \mathrm{N}_{M/F}$.

定义 4 (判别式)**.** 对数域扩张 E/F 与有限集 $\{x_i \in E\}_{1\le i\le n}$, 定义**判别式**为 $\det(\mathrm{Tr}_{E/F}(x_i x_j))$.

注 2. 对 $[E:F] \le n$, 上述判别式为

$$\det\left((f_i x_j)^T_{f_i\in(L,\overline{K})_K,1\le j\le n} \cdot (f_i x_j)_{f_i\in(L,\overline{K})_K,1\le j\le n}\right).$$

特别地, 判别式非零当且仅当 $\{x_i\}_{1\le i\le n}$ 为 F-线性无关的.

定义 5 (域的判别式)**.** 给定代数数域 $E/\mathbb{Q}$ 与一组 $\mathbb{Z}$-基 S. 在定义 4 中置 $F = \mathbb{Q}$, $S = \{x_i\}_{1\le i\le [E:\mathbb{Q}]}$, 记作 Δ_F.

命题 4. 记 Δ_F 为数域 F 的判别式, 则 $\Delta_F \equiv 0, 1 \pmod 4$.

证明. 记 $[F:\mathbb{Q}] = d$. 考虑定义 2 记平方根 $(\pm)\sqrt{\Delta_F} = \sum_{\tau\in S_d}\prod_{f\in(F,\mathbb{C})_\mathbb{Q},x_i\in S}(f_i x_i) = P - N$. 其中 P (N) 为求和式中的正 (负) 项. 由于 $P+N$ 与 PN 在一切 $f_i \in (F,\mathbb{C})_\mathbb{Q}$ 下不动, 从而属于 $\mathbb{Q}$. 再因 P 与 N 均为代数整数, 从而属于 $\mathbb{Z}$. 显然

$$\Delta_F \equiv (P-N)^2 \equiv (P+N)^2 \pmod 4.$$

而 $(P+N)^2$ 是整数的平方. □

命题 5. $\mathcal{O}_K$ 的任意非零理想是秩为 n 的自由交换群, 其中 $n = [K:\mathbb{Q}]$.

证明. 取 $K/\mathbb{Q}$ 基 $\{\alpha_i\}_{1\le i\le n}$, 不妨设 $\alpha_i \in \mathcal{O}_K$. 记 $M := \bigoplus \mathbb{Z}\alpha_i$. 定义对偶基

$$\alpha_i^\vee := \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha_i \cdot -) \in \mathrm{Hom}_\mathbb{Q}(K, \mathbb{Q}).$$

从而 (注意到扩张可分)

$$M^\vee := \bigoplus \mathbb{Z}\alpha_i^\vee \simeq \{x \in K \mid \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha_i x) \in \mathbb{Z}, \forall i\}.$$

遂有 $M \subseteq \mathcal{O}_K \subseteq M^\vee$. 取理想 $I \subseteq \mathcal{O}_K$, 则任取 $x \in I$, 有 $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(x)\mathcal{O}_K \subseteq I$. 因此

$$\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(x)M \subseteq I \subseteq \mathcal{O}_K \subseteq M^\vee.$$

注意到

$$\left|\frac{M^\vee}{\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(x)M}\right| = \det(\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha_i\alpha_j)) \cdot \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(x)^n < \infty.$$

从而 $\mathrm{rank}_\mathbb{Z}(I) = \mathrm{rank}_\mathbb{Z}(M) = n$. □

定义 6 (Dedekind 环的等价定义)**.** 对整环 R, 以下叙述等价.

1 环遗传. 换言之, 投射模的子模为投射模.

2-a Noether 环, 且所有极大理想处的局部化环为离散赋值环.

2-b Noether 环, 且所有极大理想处的局部化环为主理想整环.

3 所有理想作为 R 模可逆. 即, 对任意理想 $I \subseteq R$, 存在 $J \subseteq \mathrm{Frac}(R)$ 使得 $I \otimes_R J \simeq IJ \simeq R$. 此处取

$$J = I^* := \mathrm{Hom}_R(I, R) \simeq \{x \in \mathrm{Frac}(R) \mid xI \subseteq R\}.$$

注 3. 一般情形下, $I \otimes_R J \simeq IJ$ 为同构, 若 I 或 J 平坦.

4 整数闭, Noether 但非 Artin (换言之, Krull 维度为 1, 非零素理想极大).

5 Noether 且 Prüfer (平坦模等价于无扰模).

6-a 所有真理想为素理想之积.

6-b 所有真理想为极大理想之积.

6-c 所有真理想为素理想之积, 且分解唯一.

6-d 所有真理想为极大理想之积, 且分解唯一.

注 4. 根据定义 6 第一条以及命题 5, 任何代数整数环 $\mathcal{O}_K$ 是 Dedekind 整环.

定义 7 (分式理想与逆)**.** 若 $\mathcal{O}$ 为 Dedekind 整环, 其分式理想为有限生成的 $\mathrm{frac}(\mathcal{O})$-子模. 对任意定义分式理想的逆为

$$\mathfrak{a}^{-1} := (\mathcal{O} : \mathfrak{a}) := \{x \in \mathrm{frac}(\mathcal{O}) \mid x \cdot \mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}\}.$$

可定义分式理想全体为所有 $\mathcal{O}$ 的理想在 $(-)^{-1}$ 下的完备化.

定义 8 (Dedekind 整环的分式理想群)**.** 取 Dedekind 整环 $\mathcal{O}$, 则所有分式理想关于单位元 $(1) = \mathcal{O}$ 与逆运算 $(-)^{-1}$ 构成乘法交换群, 记作分式理想群为 $\mathcal{I}_K$.

注 5. $\mathcal{I}_K$ 的良定义性基于定义 6 的第六条 (c).

命题 6. 给定 Dedekind 整环 R, 有限生成的投射模等价于理想的有限直和.

证明. 先证明理想为投射模. 若 $I = (x)$ 为主理想, 则 $I \simeq R, x \mapsto 1$. 若不然, 任取非零 $x \in I$, 有分解

$$I = \prod \mathfrak{p}_i^{e_i}, \quad (x) = \prod \mathfrak{p}_i^{f_i} \quad (I \mid (x)).$$

由于存在 y 使得 $v_{\mathfrak{p}_i}(y) = f_i - e_i \geq 0$, 故 $(x, y) = I$, 且有互素关系 $\gcd((x), (y)) = I$. 此时存在 $a, b \in I^{-1}$ 使得 $ax + by = 1$. 注意到 (复合的) 恒等映射

$$\mathcal{O}_K^2 \to I \to \mathcal{O}_K^2, \quad (m, n) \mapsto (xm + yn) \mapsto (m, n),$$

从而 I 为直和项. 反之, 投射模等价于自由模, 从而为理想的直和. $\square$

命题 7. 对 Dedekind 整环 $\mathcal{O}$ 而言, 理想 $\mathfrak{a}$ 的对偶模与逆模相同, 即,

$$(\mathcal{O} : \mathfrak{a}) = \mathfrak{a}^{-1} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathfrak{a}, \mathcal{O}).$$