De Rham 上同调简介

概念拾遗

Lie 导数 试回顾 Lie 导数的定义以及若干性质.

- k-形式 ω 关于切向量场 X 拉回之求导即 Lie 导数 $L_X\omega$, 记 $\{\phi_t\}$ 为 X 生成的(局部)单参数子群, $\phi_t(p)=\phi(t,p)$ 为 p 处的积分曲线, 满足 $X(\phi_{t_0}(p))=\phi(t,p)'(t_0)$. 定义 Lie 导数在切向量上 Y_i 上作用为

$$(L_X\omega)(Y_1,\dots,Y_s):=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\omega_{\phi(t,p)}((\phi_t)_*(Y_1),\dots(\phi_t)_*(Y_s))\right)_{t=0}=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi_t)^*(\omega)\right)_{t=0}.$$

- 对 M 上光滑函数 f, $L_X(f)=\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\phi(t,p))\right)_{t=0}=Xf.$
- 拉回映射给出 $(\phi_t)^*(\omega\wedge\eta)=(\phi_t)^*(\omega)\wedge(\phi_t)^*(\eta)$, 求导得 $L_X(\omega\wedge\eta)=L_X(\omega)\wedge\eta+\omega\wedge L_X(\eta)$.
- 外微分与拉回映射可交换, 即 $f:M\to N$ 与 M 上切向量 X 给出 $(\forall g\in A^0(M))$

$$f^*(\mathrm{d}g)(X)=\mathrm{d}g(f_*X)=(f_*X)(g)=X(f^*g)=\mathrm{d}(f^*g)X.$$

  对微分形式 $g\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}$ 之证明类似. 因此 d 与 Lie 导数可交换, 即, $\mathrm{d}L_X=L_X\mathrm{d}$.
- Lie 导数与 Lie 括号可换, 即, $[L_X,L_Y]=L_{[X,Y]}$. 证明略.
- 有恒等式 $\mathrm{d}\circ i_X+i_X\circ\mathrm{d}=L_X$. 记 $\omega=f\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^k=f\tau$, 则

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(i_X(\omega))&=\mathrm{d}f\wedge i_X(\tau)+f\mathrm{d}i_X(\tau)\\
&=\mathrm{d}f\wedge i_X(\tau)+f\mathrm{d}\sum_{1\le s\le k}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_{s-1}}\wedge\mathrm{d}X(x^{i_s})\wedge\mathrm{d}x^{i_{s+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^k;\\
i_X(\mathrm{d}\omega)&=i_X(\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}\tau)=(Xf)\mathrm{d}\tau-\mathrm{d}f\wedge i_X(\tau);\\
L_X(\omega)&=L_X(f)\mathrm{d}\tau+fL_X(\mathrm{d}\tau)\\
&=(Xf)\mathrm{d}\tau+f\mathrm{d}\sum_{1\le s\le k}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_{s-1}}\wedge\mathrm{d}X(x^{i_s})\wedge\mathrm{d}x^{i_{s+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^k.
\end{aligned}$$

  从而得证.

定义 [外幂]: 给定开区域 $U\subset\mathbb{R}^n$ 以及光滑函数环 $R=C^\infty(U)$, 定义自由 R-模(不妨想象作 R-线性空间)

$$M=R\mathrm{d}x^1\oplus R\mathrm{d}x^2\oplus\cdots\oplus R\mathrm{d}x^n.$$

其中 $m\in M$ 形如

$$m=\sum_{1\le i\le n}m_i\mathrm{d}x^i\qquad(m_i\in R).$$

定义交换环 R 上的模 $\bigwedge^k M$ 为 k 个 M 的外积(wedge), 其元素形如张量积

$$\sum_I f_I\cdot\mathrm{d}x^{i_1}\otimes_R\cdots\otimes_R\mathrm{d}x^{i_k}.$$

> 对任意 $x,y\in M$ 与 $f\in R$, $x\otimes_R fy=fx\otimes_R y$. 同时 $(-\otimes_R-)$ 为 R-双线性映射.

称张量积 $\otimes_R$ 为外积 $\wedge$, 若其满足反对称性, 即,

$$\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^j=-\mathrm{d}x^j\otimes\mathrm{d}x^i\qquad(\forall 1\le i,j\le n).$$

定义 [外导数 d^k] 记 U 上微分 r-形式 $A^r(U) := \bigwedge^r M$, 定义外导数

$$\mathrm{d}^k : A^r(U) \longrightarrow A^{r+1}(U), \quad \text{元素略.}$$

特别地, 有 R-模间的同构 $A^0(U) \simeq R$, $A^1(U) \simeq M$ 等.

定义 [闭形式与恰当形式] 取 $\omega \in A^r(U)$, 其中 $1 \le r \le n$.

1. 称 ω 为闭形式当且仅当 $\mathrm{d}^r\omega = 0$, 即, $\omega \in Z^r(U;\mathbb{R}) := \ker(d^r)$;
2. 称 ω 为恰当形式当且仅当存在 $g \in A^{r-1}(U)$ 使得 $\mathrm{d}g = \omega$, 即, $g \in B^r(U;\mathbb{R}) := \mathrm{im}(\mathrm{d}^{r-1})$.

定义 [(上)链复形] 姑且记 $\mathrm{d}^{-1} : 0 \to A^0(U)$ 为零映射, 对任意 $0 \le r \le n$ 总有链

$$0 \xrightarrow{\mathrm{d}^{-1}} A^0(U) \xrightarrow{\mathrm{d}^0} A^1(U) \xrightarrow{\mathrm{d}^1} \cdots \xrightarrow{\mathrm{d}^{n-1}} A^n(U) \xrightarrow{\mathrm{d}^n} 0 \qquad (d^r \circ d^{r-1} = 0).$$

称之链复形. 换言之, $A^r(U)$ 中恰当形式一定是闭形式.

问题 闭形式与恰当形式何时等价? 目前之所学表明:

- [Poincaré 引理] 对任意单连通区域 $U \subset \mathbb{R}^n$, $A^1(\mathbb{R}^n)$ 中闭形式与恰当形式等价.
- [链复形的基本性质] 恰当形式 $\implies$ 闭形式.

De Rham 上同调群一瞥

定义 [de Rham 上同调群] 定义 de Rham 上同调群为 Abel 群 $H^k_{\mathrm{dR}}(U;\mathbb{R}) := \dfrac{Z^k(U;\mathbb{R})}{B^k(U;\mathbb{R})} = \dfrac{\ker(\mathrm{d}^k)}{\mathrm{im}(\mathrm{d}^{k-1})}$.

> 以下记 $H^k_{\mathrm{dR}}(U) := H^k_{\mathrm{dR}}(U;\mathbb{R})$; 若 $\mathrm{H}^k_{\mathrm{dR}}(U) \simeq \mathbb{R}^m$, 则可简略地记作 $\mathrm{H}^k_{\mathrm{dR}}(U) = \mathbb{R}^m$.

例 [$U\dot\cup V \subset \mathbb{R}^2$ 的上同调群 $H^0_{\mathrm{dR}}(-)$] 此处 $\dot\cup$ 表示无交并. 依照定义, $\mathrm{im}(\mathrm{d}^{-1}) = 0$, 从而

$$H^0_{\mathrm{dR}}(U\dot\cup V) \simeq \ker(\mathrm{d}^0) = \{c \cdot \mathrm{id}_U + c'\mathrm{id}_V \mid c, c' \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}^2.$$

例 [$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 的上同调群 $H^1_{\mathrm{dR}}(-)$] 以下为证明思路.

1. $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \dfrac{\ker(\mathrm{d}^1)}{\mathrm{im}(\mathrm{d}^0)}$ 非平凡, 因为 $[0] \ne [\mathrm{d}\theta] := \left[\dfrac{x^1\mathrm{d}x^2 - x^2\mathrm{d}x^1}{x^1x^1 + x^2x^2}\right]$. 此处 $\mathrm{d}\theta$ 是定义在开集
$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(r,0) \mid r \ge 0\}$$
上的恰当 1-形式, 但 $\mathrm{d}\theta$ 在 $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 上非恰当形式, 因为单位圆周上的积分 $\displaystyle\oint_{S^1} \mathrm{d}\theta = 2\pi \ne 0$.
2. 对任意 $\omega \in A^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, 存在唯一的 $C \quad (= \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\oint_S \omega)$ 使得 $\omega - C\mathrm{d}\theta$ 在 $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 上任意环路积分为 0.
3. 从而 $g := \displaystyle\int_{(1,0)}^{(x^1,x^2)} (\omega - C\mathrm{d}\theta)$ 为 $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 上良定义的积分, 其中 $\mathrm{d}g = \omega - C\mathrm{d}\theta$.
4. 因此有内自同构 $\ker(\mathrm{d}^1) = \{r\mathrm{d}\theta \mid r \in \mathbb{R}\} \oplus \mathrm{im}(\mathrm{d}^0) \simeq \mathbb{R} \oplus \mathrm{im}(\mathrm{d}^0)$, 故 $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \mathbb{R}$.

注 对二维情形, $\dim_{\mathbb{R}} H^1_{\mathrm{dR}}(U)$ 为连通分支的数量, $\dim_{\mathbb{R}} H^1_{\mathrm{dR}}(U)$ 为洞的数量.

定理 [Poincaré 引理] 对 $1 \le k \le n$, 总有 $H^k_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^n) = 0$; $H^0_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$. 证明思路如下.

1. 对任意 $\omega := a\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$, 有 $\omega := \mathrm{d}\left[\displaystyle\int_0^{x^1} a(t, x^2, \ldots, x^n)\mathrm{d}t \cdot \mathrm{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n\right]$.
2. 对 $1 \le k \le n-1$ 以及闭 k-形式 ω, 记 $\omega = \omega_1 + \mathrm{d}x^1 \wedge \omega_2$, 其中 ω_i 不含 $\mathrm{d}x^1$. 记 $\omega_2 = \sum_I a_I \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^I$, 则
$$\mathrm{d}x^1 \wedge \omega_2 = \mathrm{d}\left[\int_0^{x^1} a_I(t, x^I)\mathrm{d}t \cdot \sum_I a_I \mathrm{d}x^I\right] =: \mathrm{d}\tau.$$

因此 $\omega-\tau$ 为不含 x^1 的闭 k-形式, 不妨视之为 $A^k(\mathbb{R}^{n-1})$ 中闭形式.

3. 依照前两步进行归纳即可.

同伦不变性

定义 [流形间映射之拉回诱导 de Rham 上同调群之同态] 光滑映射 $f: M\to N$ 将闭形式拉回为闭形式, 将恰当形式拉回为恰当形式. 故有群同态

$$f^*: H^k_{\mathrm{dR}}(N)\to H^k_{\mathrm{dR}}(M),\qquad [\omega]\mapsto[f^*\omega].$$

注 上链复形间的同态诱导了 ker 与 coker 构成的上链复形, 且上链复形同态自然给出.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker^0 \arrow[r, "?"] \arrow[d] & \ker^1 \arrow[r, "?"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "?"] & \ker^k \arrow[r, "?"] \arrow[d] & \ker^{k+1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] \arrow[d, bend right=60, "f^*"'] & A^0(N) \arrow[r, "d^0"] \arrow[d] & A^1(N) \arrow[r, "d^1"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "d^{k-1}"] & A^k(N) \arrow[r, "d^k"] \arrow[d] & A^{k+1}(N) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^0(M) \arrow[r, "d^0"] \arrow[d] & A^1(M) \arrow[r, "d^1"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "d^{k-1}"] & A^k(M) \arrow[r, "d^k"] \arrow[d] & A^{k+1}(M) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{coker}^0 \arrow[r, "?"] & \mathrm{coker}^1 \arrow[r, "?"] & \cdots \arrow[r, "?"] & \mathrm{coker}^k \arrow[r, "?"] & \mathrm{coker}^{k+1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

由于 $\mathrm{im} f^*=\mathrm{coker}(\ker f^*)=\ker(\mathrm{coker} f^*)$, 从而 f^* 给出的 de Rham 上同调群间同态是自然的.

例 我们有理由相信, $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})=H^1_{\mathrm{dR}}((\mathbb{R}^2\setminus\{0\})\times\mathbb{R})$, 因为余维度为 2 的洞决定 H^1_{dR}. 验证略.

定理 对任意微分流形 M 均有 $H^k_{\mathrm{dR}}(M)=H^k_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}\times M)$. 其中 $0\le k\le n$, M 局部同胚于 $\mathbb{R}^n$.

> 提示: $\mathbb{R}\times M$ 上 k-形式 ω 与 M 上 k-形式 $\omega_{t=r_0}$ (给定 $r_0\in\mathbb{R}$) 等价. 不妨设 $\omega=\omega_1+\mathrm{d}t\wedge\omega_2$, 其中 ω_i 不含 $\mathrm{d}t$. 考虑 $i_{\partial_t}:=\langle\partial_t,-\rangle$ 在 ω 上的作用, 故 $i_{\partial_t}(\omega)=\omega_2$. 从而当 $\mathrm{d}\omega=0$ 时有
>
> $$\mathrm{d}\omega_2=\mathrm{d}(i_{\partial_t}(\omega))=\mathrm{d}(i_{\partial_t}(\omega))+i_{\partial_t}(\mathrm{d}\omega)=L_{\partial_t}\omega=\partial_t\omega$$
>
> (注意恒等式 $\mathrm{d}\circ i_X+i_X\circ\mathrm{d}=L_X$). 遂有
>
> $$\omega-\omega_{t=r_0}=\int_{r_0}^t\partial_t\omega=\mathrm{d}\int_{r_0}^t\omega_2.$$
>
> 故 ω 为恰当形式当且仅当 $\omega_{t=r_0}$ 为恰当形式.

定义 [同伦光滑映射] 称光滑映射 $f,g: M\to N$ 同伦, 若存在光滑映射 $F:[0,1]\times M\to N$ 使得

$$F(0,-): M\to N, m\mapsto f(m),\qquad F(1,-): M\to N, m\mapsto g(m).$$

可将 F 光滑地延拓至 $\mathbb{R}\times M\to N$, 使得 $F(t,-)=f(-)$ 若 $t\le 0$, $F(t,-)=g(-)$ 若 $t\ge 0$.

> 取记 $\tilde{F}(t,-)=f(-)$, 若 $t\le\dfrac{1}{2}$; $\tilde{F}(t,-)=g(-)$ 若 $t>\dfrac{1}{2}$. 考虑 t 方向半径为 $\dfrac{1}{4}$ 的磨光函数即可.

定理 [同伦映射诱导了 de Rham 上同调群间的相同态射] 根据 $f=F\circ i_0$ 与 $g=F\circ i_1$, 有

$$f^* = i_0^* \circ F^*, \qquad g^* = i_1^* \circ F^*.$$

由于 i_0 与 i_1 保持等价的微分形式(见 $H^k_{\mathrm{dR}}(M) = H^k_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R} \times M)$), 从而 f^* 与 g^* 给出上同调群的相同态射.

例子杂谈

定义 对非紧流形 M, 定义 $A^k_c(M) \subset A^k(M)$ 为具有紧支撑的 k-形式全体. 例如 $H^0_{\mathrm{dR},c}(M) \neq 0$ 当且仅当 M 紧.

例 映射 $A^k_c(\mathbb{R} \times M) \to A^{k-1}_c(M), \quad \omega \mapsto \int_{\mathbb{R}} i_{\partial_t}\omega$ 给出同构 $H^q_{\mathrm{dR},c}(\mathbb{R} \times M) \simeq H^{q-1}_{\mathrm{dR},c}(M)$.

例 de Rham 上同调群的若干计算方法.

1. 采用(Lie)群作用可证明 $H^k_{\mathrm{dR}}(T^n) = \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$ 等.
2. 采用同伦不变性可真证明 Möbius 带与环 S^1 有相同的 de Rham 上同调群等.
3. 对开集覆盖 $M = U \cup V$, 短正合列 $0 \to A^k(M) \to A^k(U) \oplus A^k(V) \to A^k(U \cap V) \to 0$ 给出长正合列(蛇引理)

$$\cdots \to H^k_{\mathrm{dR}}(M) \to H^k_{\mathrm{dR}}(U) \oplus H^k_{\mathrm{dR}}(V) \to H^k_{\mathrm{dR}}(U \cap V) \xrightarrow{\widetilde{d^k}} H^{k+1}_{\mathrm{dR}}(M) \to \cdots.$$

   可据此归纳 $H^n_{\mathrm{dR}}(S^n) = \mathbb{R}, k < n$ 时有 $H^k_{\mathrm{dR}}(S^n) = 0$.
4. Künneth 定理表明对某些好的流形 M, 有

$$H^k_{\mathrm{dR}}(M \times N) \simeq \bigoplus_{0 \le s \le k} H^{k-s}_{\mathrm{dR}}(M) \otimes H^k_{\mathrm{dR}}(N).$$

5. 等等.