



## $K$ -理论笔记 稳定自由模

### 1 稳定自由模

**定义 1** (有限长度). 称  $R$ -模  $X$  具有有限长度, 若存在合成列  $X = X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \cdots \supseteq X_n = 0$  使得每一  $X_{k-1}/X_k$  均为单模.

**命题 1.** Jordan-Hölder 定理表明有限长度模的合成列给出恒定的单模列, 至多相差一个置换. 因此对有限长度模的正合列  $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ , 有  $l(L) + l(N) = l(M)$ . 对有限长度的  $R$ -模  $M$  以及任取  $f \in \text{End}_R(M)$ , 有

$$l(\ker(f)) + l(\text{im}(f)) = l(M).$$

从而  $f$  是单自同态  $\iff f$  是满自同态  $\iff f$  是自同构.

**定义 2** (自由模的秩). 自由模的长度为秩.

**例 1.** 除环上的模 (线性空间) 均自由. 对除环  $D$  上的代数  $A$  以及自由  $A$ -模  $M$ , 总有

$$\text{rank}_A(M) = \frac{\dim_D(M)}{\dim_D(A)}.$$

一般的, 单 Artin 代数  $R$  形如  $M_n(D)$ , 从而自由  $R$ -模是  $\text{rank}_R \cdot n^2$  维线性空间.

**命题 2.** 任意模为自由模之商模.

证明. 直接根据命题 ?? . 具体地, 取 (左)  $R$ -模  $M$ , 则

$$M \simeq \bigoplus_{m \in M} \langle m \rangle / \{R \text{ 作用给出的商关系} \} \quad (\simeq FU(M) / \sim).$$

□

**定义 3** (指数不变环). 环  $R$  指数不变, 当且仅当  $\bigoplus_{\kappa_i} R$  在不同的基数下是不同构的自由  $R$ -模.

**命题 3.**  $R$  指数不变, 若存在  $R$  到除环的非平凡环同态  $R \rightarrow D$ .

证明. 此时  $D$  为  $R$ -模, 遂有函子

$$D \otimes_R - : R\text{-FreeMod} \rightarrow D\text{Vect}, \quad V \mapsto D \otimes_R V.$$

此时自由  $R$ -模的基对应线性空间  $D \otimes_R V$  的基. 显然  $R$  指数不变.

□

**例 2.** 以下是指数不变环的例子.

1. 取交换环  $A$  以及极大理想  $\mathfrak{m}$ , 则有环同态  $R \rightarrow R/\mathfrak{m}$ . 从而交换环指数不变.
2. 一切交换环上的群代数  $k[G]$  具有环同态  $g \mapsto g^0$ , 从而指数不变.
3. 有限维代数为指数不变环, 考虑维度即可.

**例 3.** 给定环  $R$  与任意无穷基数  $\kappa$ , 记自同态环  $\Gamma := \text{End}_R(\bigoplus_{\mathbb{N}} R)$ . 则对任意  $m < \omega$ , 有

$$\Gamma^m \simeq \text{Hom}_R\left(\bigoplus_{\mathbb{N}} R, \bigoplus_m \left(\bigoplus_{\mathbb{N}} R\right)\right) \simeq \text{Hom}_R\left(\bigoplus_{\mathbb{N}} R, \bigoplus_{\mathbb{N}} R\right) = \Gamma. \quad (1)$$

故  $\Gamma$  不是指数不变环.

**定义 4** (稳定自由模). 称  $P$  为稳定自由  $R$ -模, 若存在基数  $\kappa, \lambda$  使得有正合列

$$0 \rightarrow P \rightarrow R^\lambda \rightarrow R^\kappa \rightarrow 0. \quad (2)$$

注 1. 结合代数学常识, 自由模  $\xRightarrow{\neq}$  稳定自由模  $\xRightarrow{\neq}$  投射模  $\xRightarrow{\neq}$  平坦模  $\xRightarrow{\neq}$  无扰模.

**命题 4.** 若上式中  $\lambda \geq \omega$  且  $\kappa < \omega$ , 则  $P \simeq R^\lambda$ .

证明. 若存在  $n \in \mathbb{N}$  与  $\lambda \geq \omega$  使得  $R^n \oplus P \xrightarrow{\varphi} R^\lambda$ , 则有包含关系

$$\varphi(R^n) \hookrightarrow R^m \hookrightarrow R^\lambda.$$

考虑直和  $R^\lambda = R^m \oplus Q$  以及  $\lambda = \lambda + \omega = \lambda \cdot \omega$ , 则有

$$P \simeq Q \oplus (R^m \cap \varphi(P)) \simeq R^\lambda \oplus Q \oplus R^\omega \oplus (R^m \cap \varphi(P)).$$

以下仅需证明  $R^\lambda \oplus Q \simeq R^\lambda$  以及  $R^\omega \oplus (R^m \cap \varphi(P)) \simeq R^\omega$ . 此处仅关注前者. 注意到

$$\begin{aligned} Q \oplus R^\lambda &\simeq Q \oplus R^{\omega \cdot \lambda} \\ &\simeq Q \oplus \underbrace{(R^m \oplus Q) \oplus (R^m \oplus Q) \oplus (R^m \oplus Q) \oplus \cdots}_{\text{可数和}} \\ &\simeq \underbrace{(Q \oplus R^m) \oplus (Q \oplus R^m) \oplus (Q \oplus R^m) \oplus Q \cdots}_{\text{可数和}} \\ &\simeq R^{\omega \cdot \lambda} \simeq R^\lambda. \end{aligned}$$

从而得证. 同理, 若正合列中  $\lambda > \kappa \geq \omega$ , 则  $P \simeq R^\lambda$ . □

注 2. 因此我们通常关心有限生成的稳定自由模.

**命题 5.** 给定交换环  $R$ , 则  $P \oplus R \simeq R^2$  当且仅当  $P \simeq R$ .

证明. 在  $P \oplus R \simeq R^2$  两侧作用二次外微分, 依照 Künneth 定理<sup>1</sup>有

$$\bigwedge^2(P \oplus R) \simeq \bigwedge^2(P) \oplus P \simeq R = \bigwedge^2(R \oplus R).$$

在上式两端作用  $\bigwedge^2$ , 直接有  $\bigwedge^2(P) = 0$ . 因此  $P \simeq R$ . □

<sup>1</sup>交换环上有等式  $\bigwedge^n(M \oplus N) = \bigoplus_{0 \leq k \leq n} \bigwedge^k(M) \otimes_R \bigwedge^{n-k}(N)$ .

注 3. 类似地, 简单应用伴随矩阵可证明  $R^n \oplus P \simeq R^{n+1} \Leftrightarrow P \simeq R$ . 命题 5 无法推广至非交换情形. 同时, 也无法将命题 5 推广至  $R^3 \simeq R \oplus P \implies P \simeq R^2$ .

**命题 6.** 考虑  $R := \mathbb{R}[X, Y, Z]/(X^2 + Y^2 + Z^2 - 1)$ , 置  $P := \{(F, G, H) \in R^3 \mid FX + GY + HZ = 0\}$ . 则  $R \oplus P \simeq R^3$ , 但  $P \not\simeq R^2$ .

证明. 满射  $\pi := (X, Y, Z)^T \cdot : R^3 \rightarrow R$  给出分解  $R^3 \simeq P \oplus R$ . 继而考虑  $\mathbb{R}^3$  中向量场

$$R^3 \ni (F, G, H) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad p \mapsto (F(p), G(p), H(p)).$$

此处  $\pi$  无非向量场  $(X, Y, Z)$  的内积算子. 下断言  $P$  非自由模, 若不然, 则  $P$  的基为给出两组与  $(X, Y, Z)$  处处垂直的连续向量场. 对任意  $(x, y, z) \in S^2$ , 作为  $P$ -基的向量场与  $(X, Y, Z)$  张成  $\mathbb{R}^3$ . 由于  $S^2$  上不存在非退化连续向量场 (Poincaré 毛球定理), 矛盾.  $\square$

**命题 7** (指数不变环强条件). 给定环  $R$ , 以下命题的强度严格递增, 即后者推出前者, 反之未必.

1.  $R$  是指数不变环.

2. 若投射模  $P$  使得  $R^m \simeq R^n \oplus P$  对某些  $m, n \in \mathbb{Z}$  成立, 则  $m \geq n$ .

等价地, 秩  $n$  的自由模无法由  $m < n$  个元素生成. 此处商映射  $R^m \rightarrow R^n$  给出可裂短正合列  $0 \rightarrow K \rightarrow R^m \rightarrow R^n \rightarrow 0$ . 由于  $R^n$  投射, 故存在投射模的直和分解  $R^m \simeq R^n \oplus P$ .

3. 若存在投射模  $P$  使得  $R^n \simeq R^n \oplus P$ , 则  $P = 0$ .

等价地, 任意生成  $R^n$  的  $n$  个元素都是自由的.

4. 对任意  $r \in R$ , 存在  $x \in R$  使得  $rxr = r$ .

以上四条等价于

1. 对  $X, Y \in R^{m \times n}$ , 若  $X^T Y$  与  $Y X^T$  均为单位阵, 则  $m = n$ .

2. 对  $X, Y \in R^{m \times n}$ , 若  $X^T Y$  为单位阵, 则  $m \geq n$ .

3. 对  $X, Y \in R^{n \times n}$ , 若  $X^T Y$  为单位阵, 则  $Y X^T$  亦然.

其中, 第三条等价于中山性, 即  $R^n \xrightarrow{f} R^n \implies R^n \xrightarrow{f} R^n$ .

注 4. 称  $R$  是 Dedekind 有限的, 若单侧逆元一定是双侧逆元. 第三条表明  $GL(R)$  是 Dedekind 有限的.

**定义 5** (对偶模). 定义左  $R$ -模  $P$  的对偶模为左  $R^{\text{op}}$ -模  $P^* := \text{Hom}_R(P, R)$ .

**定理 1** (对偶基定理). 左  $R$ -模  $P$  是投射模, 当且仅当存在指标集  $I$  与  $\{x_i \in P\}_{i \in I}, \{f_i \in P^*\}_{i \in I}$ , 使得对任意  $x \in P$  总有限和的分解

$$\sum_{i \in I} f_i(x) \cdot x_i.$$

证明. 若  $\{x_i\}_{i \in I}$  与  $\{f_i\}_{i \in I}$  既定, 今考虑满态射

$$\varphi : \bigoplus_{i \in I} Re_i \rightarrow P, \quad \sum r_i e_i \mapsto \sum r_i a_i.$$

可检验  $\varphi$  的右逆为

$$\mu : P \rightarrow \bigoplus_{i \in I} Re_i, \quad x \mapsto \sum f_i(x) e_i.$$

此处  $\varphi(\mu(x)) = \sum \varphi(f_i(x) e_i) = \sum f_i(x) e_i = x$ . 由  $\varphi$  可裂满知  $P$  投射.

反之, 若  $P$  投射, 考虑某自由模到  $P$  的可裂满态射即可构造  $\{x_i\}_{i \in I}$  与  $\{f_i\}_{i \in I}$ . □

**命题 8.** 典范态射  $\varepsilon : P \rightarrow P^{**}$  单.

证明. 对  $x \in \ker(\varepsilon)$ , 总有  $f(x) = 0$  对一切  $f \in P^*$  成立. 依照定理 1 取对偶基, 只能有  $P = 0$ . □

**例 4** (无限 (可数) 生成投射模不必为有限生成投射模之直和). 考虑区间上的实连续函数环  $R = C([0, 1])$ , 考虑理想  $I := \{f \in R \mid \overline{\text{supp}(f)} \subseteq (0, 1]\}$ . 下依次证明

1.  $I$  是投射  $R$ -模.
2. 有限生成  $R$ -投射模自由.
3.  $I$  非自由模.

对第一条, 依照定理 1 构造基底如下

$$y_0 := \text{折线段 } (0, 0) - (2^{-1}, 0) - (1, 1),$$

$$y_k := \text{折线段 } (0, 0) - ((k+3)^{-1}, 0) - ((k+2)^{-1}, 1) - ((k+1)^{-1}, 0) - (1, 0) \quad (k \in \mathbb{N}_+).$$

取  $x_k \in R$  使得  $x_k^2 = y_k$ , 记  $f_k : x \mapsto x \cdot x_k$ . 注意到  $\{y_k\}_{k \geq 0}$  为  $(0, 1]$  的单位分解, 依定义知有限和  $x = \sum_{k \geq 0} f_k(x) \cdot x_k$  对一切  $x \in R$  成立. 根据定理 1 之刻画,  $I$  是投射  $R$ -模.

对第二条, 依照 Swan 定理知  $[0, 1]$  可缩, 从而有限生成的投射模自由. 有无更直接证明?

对第三条, 若  $I \simeq \bigoplus_{i \in I} Re_i$ , 则  $\text{Ann}_R(e_i) = (0)$ , 但任意  $x \in I$  的零化理想非零, 矛盾.

**命题 9.** 无限生成投射模为可数生成投射模的直和.