基础代数学第一章模论总结

章璞

上海交通大学数学科学学院

2021 年 11 月 8 日

我提供这个总结的目的是抛砖引玉，激发同学自己写这样的章节总结。因此，这是一个提纲性的，同学们可以填上具体的内容；另一方面，同学们以自己的思路写类似的总结，则更好；如果能够包含自己的新发现，那就达到一个很高的水平。

§0.1 第一个侧面：各类模

• 模的概念 (包括 2 种定义)；
模的基本构造方法 (包括提升，直和，直积，张量积)；
双模 (包括 Hom 空间的双模结构；张量积的双模结构)

• Hom 与直和的相交换的具体情况；
Hom 与直积的相交换的具体情况

• 模同态的矩阵表达

• 循环模，有限生成模

• 单模 (包括 Schur 引理)；半单模 (包括半单模的等价刻画)；不可分解模 (不可分解模但非单模的例子)；
一个重要的例子：代数 $F[x]/\langle x^n \rangle \ \ (n \geq 2)$ 的所有有限维不可分解模

• 范畴与函子的概念；
范畴中零对象的概念；
范畴中单态射的概念；
范畴中满态射的概念；
在一般的范畴中，同构既是单态射也是满态射；反之未必 (例子)

• 正合列的概念；
关于正合性的追图法；
正合函子；左正合函子；右正合函子；
(两种) Hom 函子是左正合函子；
(两种) 张量函子是右正合函子

• Artin 模及其性质；
Noether 模及其性质；一个模是 Noether 模当且仅当其任一子模均是有限生成模；
Artin 环及其性质；一个环是左 Artin 环当且仅当有限生成左模是 Artin 模;

Noether 环及其性质；一个环是左 Noether 环当且仅当其任一左理想均是有限生成的；也当且仅当有限生成左模是 Noether 模; 也当且仅当有限生成左模的子模是有限生成的;

左 (相应地，右) Artin 环未必是右(相应地，左) Artin 环；

左 (相应地，右) Noether 环未必是右(相应地，左) Noether 环；

• 局部环的概念；

模的自同态环的局部性可以推出其只有平凡的幂等元，也可以推出这个模的不可分解性

• 自由模，投射模 (包括投射模的等价刻画)；

自由模与投射模的关系 (包括投射模不是自由模的例子)；

Serre - Quillen - Suslin 定理：主理想整环上的n元的多项式环上的有限生成投射模都是自由模；

自由模和投射模的意义：任意模均是自由模的商模，任意有限生成模均是有限秩自由模的商模；任意模均是投射模的商模，任意有限生成模均是有限生成投射模的商模

• 内射模的等价刻画；内射模判定的 Baer 准则；

主理想整环上的模是内射模当且仅当它是可除模. 因此, ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ 和 ${}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 均是内射 $\mathbb{Z}$-模;

若 M 是内射 $\mathbb{Z}$-模, 则 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R_R, M)$ 是内射左 R-模；

内射模的意义：任意模均是内射模的子模 (但对于一般的环来说, 并非任意有限生成模均是有限生成内射模的子模)；

• 张量积的定义与性质 (特别地，泛性质的方法)

平坦模；平坦模与投射模的关系 (包括平坦模不是投射模的例子)

§0.2 第二个侧面：模论中几个重要的基本定理

• 关于半单代数结构和表示的 Wedderburn-Artin 定理；

• 关于两个范畴等价的判定定理：函子 F 是等价函子当且仅当 F 是满 (full), 忠实 (faithful), 稠密 (dense).

• 关于合成列在等价意义下唯一的 Jodan - Hölder 定理

• 关于有限维 (结合)代数只有有限个单模的定理

• 关于有合成列的模的直和分解的 Fitting 引理

• 关于左 Noether 环的多项式环的 Hilbert 基定理

• 关于有合成列的模分解成有限个不可分解直和的 Krull-Remak-Schmidt 定理

• 关于正合性的基本引理：

蛇引理 (强形式, 通常形式， 弱形式)

五引理； 短五引理

• 关于双模作成的张量函子与 Hom 函子作成伴随对的定理 (两种形式)