Tilting Theory Walk through

ZCC

February 26, 2025

Abstract

本文走馬觀花式地介紹 tilting 理論. 先從藍寶書 [1] 之以下幾節開始.

Sec	**SubSec**	Title
II	1	Quivers and path algebras
II	2	Admissible ideals and quotients of the path algebra
II	3	The quiver of a finite dimensional algebra
III	1	Representations of bound quivers
III	2	The simple projective and injective modules
III	3	The dimension vector of a module and the Euler characteristic
IV	1	Irreducible morphisms and almost split sequences
IV	2	The Auslander-Reiten translations
IV	3	The existence of almost split sequences
IV	4	The Auslander-Reiten quiver of an algebra
IV	5	The first Brauer-Thrall conjecture
IV	6	Functorial approach to almost split sequences
VI	1	Torsion pairs
VI	2	Partial tilting modules and tilting modules
VI	3	The tilting theorem of Brenner and Butler
VI	4	Consequences of the tilting theorem
VI	5	Separating and splitting tilting modules
VI	6	Torsion pairs induced by tilting modules

Contents

1 代數基礎

1.1 Artin 代數的簡易對象: 單模, Rad, Top, 冪等分解

记号 (Artin 代數上的有限表現模)**.** 除非單獨强調, 否則行文遵照以下約定. Artin ↓

1. 默認所有域是代數閉域, 即 $k = \bar{k}$; 但特徵 $\mathrm{char}(k)$ 未必是零. 代數閉
2. 默認所有代數是有限維的, 但不必交換, 記作範疇 $\mathbf{alg}_k$. f.d.
3. 默認所有模都是有限生成右模, 記作 $\mathbf{mod}_A$ $(A \in \mathbf{alg}_k)$, 左模記作右 A^{op}-模. f.g. 右模
4. 對於單一的模, 將之視作固定的集合. 此時的**子模與商模是直接通過集合定義的**, 子模與商模亦可直接談論大小, 並無 "同構下唯一" 之說. 子集商集
5. 出於習慣, 將商模的子模表述做子模的商模, 稱作子商.

定义 (Jacobson 根)**.** 暫置 k 爲一般交換環. $\mathrm{Rad}(A)$ 等價定義如下. Rad ↓

1. $\mathrm{Rad}(A)$ 是一切極大左理想之交, 亦是一切極大右理想之交. 理想視角

   > $\mathrm{Rad}(A)$ 是**單邊定義的雙邊理想**; 但 Rad 未必是極大雙邊理的交 (見此 MSE 回答 [?]).

2. $\mathrm{Rad}(A)$ 由符合以下等價性質的元素 r 組成, 逆元視角

   (a) 對任意 $a \in A$, 總有 $1 - ar$ 可逆;

   (b) 對任意 $a \in A$, 總有 $1 - ra$ 可逆;

   (c) 對任意 $a \in A$, 總有 $1 - ar$ 存在右逆;

   (d) 對任意 $a \in A$, 總有 $1 - ra$ 存在左逆.

   > $\mathrm{Rad}(A)$ 由**所謂的小量**構成. 正如 $x \cdot f(x)$ 之於 $\mathbb{R}[x]$.

3. $\mathrm{Rad}(A)$ 是使得 $A/\mathrm{Rad}(A)$ 半單的最小模. 半單視角

定义 (頂)**.** 藉由以上第三點, 定義 $\mathrm{Top}(A) := A/\mathrm{Rad}(A)$. 等價地, Top ↓

1. Top 是 A 的極大半單商環,
2. Top 亦是 A 極大半單商模.
3. **對交換代數而言**, $\mathrm{Rad}(A)$ 恰是所有冪零對象 (同埋 0) 組成的理想. reduced

商去 Rad 所得的半單代數常記作 A_{red} (A-reduced).

定理. $A \twoheadrightarrow \mathrm{Top}(A)$ 是範疇 $\mathbf{alg}_k$ 的可裂滿. 換言之,

> Top 是半單的截面. (定理 1.6, [1])

命題 (環的半單性: Wedderburn-Artin)**.** 以下是 A 半單的等價定義 (以分號記). WA 定理

1. 所有 $\mathbf{mod}_A$ 是半單 A-模; 所有 $\mathbf{mod}_{A^{\mathrm{op}}}$ 是半單 A^{op}-模;

2. A 是半單左 A-模; A 是半單左 A^{op}-模;
3. (作爲 A-模, 下同) $\text{Top}(A) = A$; $\text{Rad}(A) = 0$; $\text{Soc}(A) = A$;
4. A 同構於矩陣乘法環 $\prod \mathbb{M}_{m_i}(k)$.

半單無關左右之選取, 在允許足夠不變子空間時 (如代數閉域), 一切都是矩陣除環.

命题 (回顧模半單性)**.** 總結以下重要而基本的定理. 半單定理

1. 單對象的 Schur 引理: $(S_i, S_j) \simeq k \cdot \text{id} \cdot \delta_{i,j}$. Schur
2. Krull-Schmidt 定理: $\textbf{mod}_A$ 的任何對象唯一分解做不可分解對象的直和. KS 範疇
3. Jordan-Holder 定理: 合成列良定義. 合成列在同構在允許重數, 相差一個置換的意義下唯一. G_0-群

例子 (冪等分解)**.** 考慮 $1 \in A$ 的兩類冪等分解:

1. (冪等分解) 存在極大的 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 使得 $e_i^2 = e_i$ 恆成立 (同構下唯一). 頂點 Q_0
2. (正交冪等分解) 存在極大的 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 使得 $e_i^2 = e_i$ 恆成立, 且諸 e_i 乘法交換 (同構下唯一). 連通分支

說白了, 就是環的積與模的積之別.

备注. 選定冪零理想 $I \subseteq A$, 則 A/I 的 (正交) 冪等元通過商映射 $A \twoheadrightarrow A/I$ 提升. 冪等提升
Formally smooth algebra (see [**?**]), lifting along irreducible polynomials, lifting of $\triangle$ morphisms (See personal notes $\triangle$ 1.1.1.).

定义. 給定不可分解對象, 有 $M \gg \text{Top}(M) \gg \text{End}(S)$ 與 $M \gg \text{End}(M) \gg k(\text{End}(M))$ 兩條路可選. 最後指向是同一剩餘域 (自同態對主體部分貢獻的數乘). 稱 R 是局部環, 當且僅當以下等價定義成立. 局部環 ↓

1. 存在最大左理想; 存在最大右理想;
2. 所有非單位元恰好構成雙邊理想; 理想視角
3. 對任意 $x \in R$, 有且僅有 x 可逆或者 $(1 - x)$ 可逆 (alternative); 逆元二擇
4. 冪等元只有 0 和 1;
5. 剩餘域 $A/\text{Rad}(A) \simeq k$. 視作單點

例子 (從單模到不可分解模)**.** 局部環幫助檢視不可分解對象 Ae 的自同態環, 因爲這等價於談論 eAe 是局部環. 以下描述等價.

1. M 是不可分解模;
2. $\text{End}(M)$ 是局部環;
3. 所有 $f : M \to M$ 是同構或是冪零的. Fitting

备注. 不可分解對象與單對象一一對應 (相差一個 reduction). 本質上, $\text{End}(S)$ 形如一維的 Jordan 塊, 但 $\text{End}(M)$ 可以是高維的 Jordan 塊.

1.2 Artin 代數的基本對偶: 投射蓋, 內射包

定义 (模之 Radical)**.** 給定子模 $N \leq M$, 以下是 $N = \mathrm{Rad}(M)$ 的等價定義. Rad 模

1. $N = M \cdot \mathrm{Rad}(A)$;
2. N 是 M 的極大子模的交; min-max
3. M/N 是 M 的極大半單商模.

類似地定義 $\mathrm{Top}(M) := M/\mathrm{Rad}(M)$.

备注. Rad 是 id 的加法子函子, Top 是 id 的加法商函子.

定义 (盈餘)**.** 稱 $L \subseteq M$ 是盈餘的, 當且僅當對一切 $N \subseteq M$, $(L + N = M) \Longleftrightarrow (N = M)$. 中山引理
更範疇化的解釋: $L \subseteq M$ 可以左向延拓成子模的 PBPO 方塊, 當且僅當 $N \subseteq M$ 取等號, 即,

$$\begin{array}{ccc} ? & \subseteq & L \\ \cap\!\shortmid & {\scriptstyle \mathrm{PB} \atop \mathrm{PO}} & \cap\!\shortmid \\ N & \subseteq & M \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{ccc} L & = & L \\ \cap\!\shortmid & & \cap\!\shortmid \\ M & = & M \end{array} . \tag{1}$$

备注. $\mathrm{Rad}(M)$ 是最大的盈餘模, 類似 "皇次子" (組合的第二比較量, 第一處 syzygy, 等等).

例子 (更精細的滿-單分解)**.** 模的表現由生成元與生成關係決定. 在本文約定下, 任意模都是某一 A^n 的商. 容易發現

> $f : M \to N$ 是滿射, 當且僅當誘導的 $\mathrm{Top}(f) : \mathrm{Top}(M) \to \mathrm{Top}(N)$ 是滿射.

Top: 保, 返滿

滿-單分解之 "滿", 可以分解作生成元的滿射 (先) 與生成關係的滿射 (後). 如極小投射表現, 談論這一分解的函子性暫無意義.

定义 (極小滿態射)**.** 稱滿態射 $p : X \twoheadrightarrow Y$ 是極小滿态射, 當且僅當以下等價條件成立. 極小滿

1. 對任意 $f : A \to X$, 複合 $p \circ f$ 滿當且僅當 f 滿. $p\circ(-)$ 保, 返滿
2. $\ker p \subseteq X$ 是 superfluous 的子模.
3. 上述 "滿-滿-單" 分解必然是 "同構-滿-同構". 僅商去生成關係

定义 (投射蓋)**.** 稱 $P(M) \twoheadrightarrow M$ 是投射蓋, 當且僅當這是投射模出發的極小滿態射.

1. 投射蓋 = 極少生成元自由張成的模. 此處的極小生成元可以選取 $\mathrm{Top}(M)$ 的提升.
2. 若 $Q \twoheadrightarrow M$ 是投射模出發的滿態射, 則 $P(M)$ 是 Q 的直和项.
3. 將 M 視作 $P(M)$ 的商集, 則 $\mathrm{Top}(M) = \mathrm{Top}(P(M))$.
4. $P = P(M)$, 當且僅當 M 同構於 $P \geq M \geq \mathrm{Top}(P)$. 極大被商模

投射蓋即最小的待商的投射模, 通過 Top 定位. 商去的子對象均是組合意義下的小量, 含於 Rad.

定义 (兩大基本對偶)**.** $(-,A)_A, (-,k)_k : \mathbf{mod}_A \to \mathbf{mod}_{A^{\mathrm{op}}}$ 是反變函子.

备注. 簡單地記 $D := (-,k)_k$. 不區分 D 與 D^{op}. *D*

定义 (餘盈餘)**.** 稱商模 $M \overset{-/\sim}{\twoheadrightarrow}$ 是餘盈餘的, 當且僅當商集的 PBPO 方塊蘊含等號:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, two heads, "-/\sim"] \arrow[d, two heads, "-/\sim"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}\ \mathrm{PO}"] & N \arrow[d, two heads, "-/\sim"] \\ L \arrow[r, two heads, "-/\sim"] & ? \end{tikzcd} \iff \begin{tikzcd} M \arrow[r, equal] \arrow[d, two heads, "-/\sim"] & M \arrow[d, two heads, "-/\sim"] \\ L \arrow[r, equal] & L \end{tikzcd}. \tag{2}$$

換言之, 稱商模 $M \twoheadrightarrow N$ 餘盈餘, 當且僅當 $(\mathrm{lcm}(N,L) = M) \iff (N = M)$.

盈餘子模: 雞肋的子對象 (生成元); 餘盈餘商模: 雞肋的商對象 (等價關係).

定义 (本性擴張)**.** 若將餘盈餘模視作 "內部滿射", 對應的 "內部單射 (ker)" 稱作本性擴張.

定理. $K \subseteq M$ 是本性擴張, 當且僅當 M 的任意非零子模與 K 恆有非零交. 對等表述: 本性擴張, 餘盈餘

Proof. $\Rightarrow$ 向: 假定 $K \subseteq M$ 本性擴張, 且存在非零子模 $M_0 \subseteq M$ 使得 $K \cap M_0 = 0$, 則 $\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d] & \frac{M}{K} \arrow[d] \\ \frac{M}{M_0} \arrow[r] & \frac{M}{K+M_0} \end{tikzcd}$ 是推出拉回, 此時 $M_0 = 0$ 導出矛盾. $\Leftarrow$ 向: 假定 M 的任意非零子模與 K 恆有非零交, 但存在推出拉回方塊 $\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d, "\neq"'] & \frac{M}{K} \arrow[d] \\ \frac{M}{A} \arrow[r] & \frac{M}{B} \end{tikzcd}$, 依照商集結構知 $K \cap A = 0$, 此時 K 與非零子模 A 有零交, 矛盾. □

簡單地說, 餘盈餘恰是本性擴張的商!

备注. 常用例子: $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{Z}$-模範疇的本性擴張. 作爲收尾, **內射模的本性擴張是平凡的**.

定义 (模之 Soc)**.** Soc 是與 Top 對標的概念: 極大半單子模, 即所有不可分解對象的極大半單子的直和.

备注. 改用對等表述: 極大半單子模, 就是極小本性子模.

定义 (極小單態射, 內射包等)**.** 仿照 1.2, $\mathrm{Soc}(f)$ 單當且僅當 f 單. 極小滿態射 i 的等價定義:

1. $\xrightarrow{i} \xrightarrow{f}$ 單, 當且僅當 f 單.
2. i 視作子模包含, 是本性擴張 (等價地, coker 餘盈餘).
3. 類似地, "滿-單-單" 分解必然是 "同構-單-同構".

稱 $M \hookrightarrow I(M)$ 是內射包, 當且僅當這是指向內射模的極小單態射. 跨度 $\mathrm{Soc}(M) \subseteq ? \subseteq I(M)$. 極大本性擴張

定理. 不可分解投射對象, 不可分解內射對象, 單對象一一對應.

$$\begin{tikzcd} \text{inj} \arrow[r, shift left, "\mathrm{Soc}"] & \text{sim} \arrow[l, shift left, "I(-)"] \arrow[r, shift right, "P(-)"'] & \text{proj} \arrow[l, shift right, "\mathrm{Top}"'] \end{tikzcd}. \tag{3}$$

中山函子 $\nu = D(-, A) \simeq - \otimes DA : \mathrm{End}(\mathbf{mod}_A)$ 直接對換不可分解投射模與內射模. ν 正合

定义 (基礎代數)**.** 將 A 寫作不可分解投射對象的直和, 當且僅當直和項彼此不同構, 稱 A 爲基礎代數.

备注. 思想: 扔掉重數. 構造: A 變成 $A^e := \sum e_i A e_i$. 函子視角: Morita 等價, 模都一樣: 方便畫 quiver

$$(- \otimes Ae_r) : \mathbf{mod}_A \simeq \mathbf{mod}_{A^e} : (- \otimes e_r A). \tag{4}$$

1.3 雜七雜八: Quiver 表示, 維度公式, [待歸類至別處]

定义 (箭圖)**.** 略. 有限型, 有限, 以及 $\mathbf{rep}(Q, I) \simeq \mathbf{mod}_{kQ/I}$ 日後補充

定义 (容許理想)**.** 容許理想 (Admissible ideal), 即增速可控的理想, 形如 $\mathrm{Rad}^2 \subseteq I \subseteq \mathrm{Rad}^k$ $(\exists n)$.

备注. 換言之, 生成關係是由 “長 ≥ 2 的邊” 決定.

定理 (Artin 代數實現作 (Q, I) 的方式)**.** 給定 A. 不妨設 A 是基礎代數, 同時聯通. 造 (kQ, I)

1. (點) 取正交冪等分解 $A = \bigoplus Ae_i$,
2. (邊) 找到 $\mathrm{Rad}(A)/\mathrm{Rad}^2(A)$ 的一組基,
3. (rel) 依照需求, 對前兩步決定的 quiver without rel 進行商.

特別地,

1. 不可分解投射模 $P(i)$ 是 i 出發的路代數;
2. 不可分解內射模 $I(i)$ 是 i 收尾的路代數 (投射的商);
3. 單模 $S(i)$ 是 i 單點所示的路代數;
4. Rad 是路理想 kQ_1-模.

定理 ($\mathbf{rep}(Q, I)$ 模結構)**.** 給定 $M \in \mathbf{rep}(Q, I)$, 則

1. 當且僅當 M 半單, 則 $\varphi_\alpha = 0$ 對一切 $\alpha \in Q_1$ 成立. 半單 $\Longleftrightarrow$ 無邊
2. $\mathrm{Soc}(M)$ 在第 $a \in Q_0$ 位的分量是 $\bigcap_{f: a \to ?} \ker(f)$. 特別地, $\bigcap_\emptyset = 0$.

   極大單子對象, 即向外箭頭之公共核.

3. $\mathrm{Top}(M)$ 在第 $a \in Q_0$ 位的分量是 $\bigwedge_{g: ? \to a} \mathrm{coker}(g)$. 特別地, $\bigwedge_\emptyset =$ 全. 此處商模之 $\wedge$ 即推出 (等價關係之并). φ 由對象的取法誘導, 自然是 0.

極大單商對象, 即向內箭頭之公共等價類.

4. $\mathrm{Rad}(M)$ 在第 $a \in Q_0$ 位的分量是 $\sum_{h:?\to a} \mathrm{im}(h)$. 特別地, $\sum_{\emptyset} = 0$.

根即入勢之公共像, 亦可視爲 kQ_1 誘導的東西.

命題 (擴張)**.** $\dim \mathrm{Ext}^1(S(a), S(b))$ 是 a 至 b 的邊數. 實現方式:

$$\mathrm{Ext}^1(S(a), S(b)) \simeq ([0 \to S(b) \to E \to S(a) \to 0]/\sim) \simeq e_a \cdot \frac{\mathrm{Rad}(A)}{\mathrm{Rad}^2(A)} \cdot e_b. \tag{5}$$

1.4 簡單的 AR 理論

Abstract

使用不可約態射, 左右極小幾乎可裂態射, AR 平移三種表述以刻畫**幾乎可裂短正合列**. 最後使用函子視角, 對已知的語言重述某些 “不明所以然” 的概念. 所有未給出的證明都能在 [1], [?] 中找到, 具體頁碼暫時從略.

1.4.1 範疇的 Rad, 不可約態射

命題. 同環態射, 範疇之 k-函子保持 Rad. 特別地, 有以下特例. 等同 1.1

1. $\mathrm{Rad}(X, X)$ 就是 $\mathrm{Rad}(\mathrm{End}(X))$.
2. 若 $\mathrm{End}(X)$ 與 $\mathrm{End}(Y)$ 是局部環, 則 $\mathrm{Rad}(X, Y)$ 恰是 $X \to Y$ 的非同構.
3. 若 $\mathrm{End}(X)$ 與 $\mathrm{End}(Y)$ 是局部環, 且 $X \not\cong Y$, 則 $\mathrm{Rad}(X, Y) = \mathrm{Hom}(X, Y)$.

簡單地說, $\mathrm{Rad}(X, Y) = \mathrm{Rad}(Y, Y) \circ \mathrm{Hom}(X, Y) \circ \mathrm{Rad}(X, X)$.

备注. $\mathrm{End}(X)$ 局部 $\Rightarrow$ X 不可分解; 反之, 通常需要 $\mathcal{C}$ Abel 以及 $\dim_k \mathrm{End}(X) < \infty$ 等條件. $\mathbf{mod}_A$ 好

定义 (不可約態射)**.** 約定 $\mathrm{Rad} := \mathrm{Rad}_A := \mathrm{Rad}_{\mathbf{mod}_A}$, 歸納地定義

1. $\mathrm{Rad}^0 = \mathrm{Hom}$, $\mathrm{Rad}^1 = \mathrm{Rad}$, 以及
2. $\mathrm{Rad}^{n+1} = \mathrm{Rad} \circ \mathrm{Rad}^n$. 路

例子 (Rad 的結構)**.** 定 X 與 Y 不可分解.

1. 若 $X = Y$, 則 $\mathrm{Rad}(X, Y)$ 是 $\mathrm{Rad}(\mathrm{End}(X))$;
2. 若 $X \not\cong Y$, 則 $\mathrm{Rad}(X, Y) = \mathrm{Hom}(X, Y)$;
3. 假定 X 不可分解, 則 $X \xrightarrow{f} Y$ 非可裂單, 當且僅當任意 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X$ 屬於 $\mathrm{Rad}(\mathrm{End}(X))$; Rad 吸收非可裂單, 滿的特定復合
4. 假定 Y 不可分解, 則 $X \xrightarrow{f} Y$ 非可裂滿, 當且僅當任意 $Y \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$ 屬於 $\mathrm{Rad}(\mathrm{End}(Y))$;
5. $f \in (\mathrm{Rad}(X, Y) \backslash \mathrm{Rad}^2(X, Y))$ (稱作 “不可約態射”) 具有以下性質: 不可約態射
   (a) f 既不是可裂單, 又不是可裂滿;

(b) 對任何分解 $X \to Z \to Y$, 或前箭頭是可裂單, 或後箭頭是可裂滿.

總之, 若 $X \to Z$ 可裂單, 則 $X \to Z \to X$ 相當于回頭路. 不可約態射 = 不能分作兩段單向路.

定理 (不可約單 (滿) 態射的結構)**.** 給定不可裂的正合列 $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$.

1. f 是不可約的, 當且僅當任意 $? \to N$ 分解 g, 或被 g 分解. 推論: N 不可分解. g 幾乎可裂滿
2. g 是不可約的, 當且僅當任意 $L \to ?$ 分解 f, 或被 f 分解. 推論: L 不可分解. f 幾乎可裂單

备注. 幾乎可裂單 (滿): 僅次於可裂單 (滿). a 的不可約, 對應 b 的幾乎可裂性.

交叉表述

1.4.2 極小態射

定义 (左 (右) 極小態射)**.** 大概會有

$$0 \to L \xrightarrow{\text{左極小, 左幾乎可裂}} M \xrightarrow{\text{右極小, 右幾乎可裂}} N \to 0. \tag{6}$$

. 此 ses 僅供輔助記憶, 實際上未必有單, 滿的假定.

1. 稱 $f : L \to M$ 是左極小的, 若 M 的自同構 α 方使 $\alpha \circ f = f$. 若吸收了 "大
2. 稱 $g : M \to N$ 是右極小的, 若 M 的自同構 α 方使 $g \circ \alpha = g$. 地方" 某自同態, 則該自同
3. 稱 $f : L \to M$ 是左幾乎可裂的, 若 f 非可裂滿, 且任意非可裂滿 $L \to ?$ 必經 f 分解; 態必爲同構 如幾乎可裂單
4. 稱 $g : M \to N$ 是右幾乎可裂的, 若 g 非可裂單, 且任意非可裂單 $? \to N$ 必經 g 分解; 如幾乎可裂滿

命题. 對 Abel 範疇, 以下是左 (右) 幾乎可裂態射單 (滿) 的充要條件:

1. 若 $g : M \to N$ 是右幾乎可裂態射, 則 g 滿當且僅當 N 非投射對象;
2. 若 $f : L \to M$ 是左幾乎可裂態射, 則 f 單當且僅當 K 非投射對象.

Proof. 僅看第一者, 假定 g 是右幾乎可裂態射. 若 g 滿, 則 g 非可裂滿, 從而 N 非投射. 若 g 非滿, 下證 N 投射.

(使用反證法) 假定 N 非投射, 則存在滿態射 $\psi : A \twoheadrightarrow B$ 使得 N 無法提升之. 提升性等價於 ψ 的拉回 (記作 α) 可裂. 由極小幾乎可裂的定義知, 存在 φ 使得下圖交換:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rrd, bend left, "f"] & & \\ & \bullet \arrow[lu, "\varphi"] \arrow[r, dashed, "\alpha"] \arrow[d, dashed] \arrow[rd, phantom, "\mathrm{PB}"] & N \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker}(f) \neq 0 \cdot \\ & A \arrow[r, two heads, "\psi"'] & B \end{tikzcd} \tag{7}$$

由 α 是滿態射, $\bullet \to N \to \operatorname{coker}(f)$ 亦滿. 這一復合是零態射. 從而 $\operatorname{coker}(f) = 0$, 矛盾. □

例子. 對 Artin 代數的設定, 右極小幾乎可裂態射要麼是非投射模的投射蓋, 要麼是投射模 P 的單態射 $\operatorname{Rad}(P) \hookrightarrow P$. 另一方向同理. 極小幾乎可裂, 二擇

定理 (不可約 v.s. 極小幾乎可裂)**.** 左 (右) 極小幾乎可裂態射的來源 (去向) 不可分解. 特別地,

1. 若 $f : L \to M$ 左極小幾乎可裂, 則 f 不可約;
2. 若 $f : L \to M$ 不可約 ($M \neq 0$), 當且僅當 f 可以補全作左極小幾乎可裂態射 $\binom{f}{g} : L \to M \oplus \overline{M}$;
3. 若 $g : M \to N$ 不可約 ($N \neq 0$), 當且僅當 g 可以補全作右極小幾乎可裂態射 $(g, h) : M \oplus \widetilde{M} \to N$.

極小幾乎可裂 $\subseteq$ 不可約; 不可約可反向補全作極小幾乎可裂態射. 此處沒有單射滿射的限定!

1.4.3 AR 平移, τ

定义 (AR 轉置 $\mathrm{Tr}(-)$)**.** 考慮極小投射表現 $M = \mathrm{coker}(P_1 \xrightarrow{f} P_0)$, 定義 $\mathrm{Tr}(M) := \mathrm{coker}(f^t)$.

$$\begin{array}{c} P_1 \xrightarrow{f} P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \\ 0 \longleftarrow \mathrm{Tr}(M) \longleftarrow P_1^t \xleftarrow{f^t} P_0^t \longleftarrow M^t \longleftarrow 0 \end{array} . \tag{8}$$

$\mathrm{Tr}(\mathrm{cok}(f)) \to \mathrm{cok}(f^t)$

命題 (Tr 基本性質)**.** Tr 與直和交換. 以下假定 M 不可分解.

1. 當且僅當 M 投射, $\mathrm{Tr}(M) = 0$;
2. 若 M 非投射, 則 $\mathrm{Tr}(\mathrm{Tr}(M)) \simeq M$ 是典範同構.

备注. $\mathrm{Tr}(-)$ 暫時沒有函子性 (畢竟 $\mathrm{Tr}(P) = 0$), 需要藉助穩定範疇.

定义 (AR 平移)**.** 給定極小投射表現 $\theta : P_1 \to P_0 \to M \to 0$, 考慮 $D(\theta^t)$, 得,

$$0 \to \tau(M) \to \nu(P_1) \to \nu(P_0) \to \nu(M) \to 0. \tag{9}$$

類似地, 對極小內射表現 $\eta : 0 \to M \to E_1 \to E_0$, 考慮 $\tau^{-1}; \mathrm{Tr} \circ D$, 得 $\tau = D \circ \mathrm{Tr}$

$$0 \to \nu^{-1}(M) \to \nu^{-1}(E_1) \to \nu^{-1}(E_0) \to \tau^{-1}(M) \to 0. \tag{10}$$

备注. 中山函子對偶投射模與內射模; AR 平移對偶極小投射表現與極小內射表現? 待解釋...

1.4.4 幾乎可裂短正合列

定理. 給定不可裂的短正合列

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0. \tag{11}$$

以下是幾乎可裂的等價命題.

1. f 左極小幾乎可裂, 且 g 右極小幾乎可裂;
2. f 左極小幾乎可裂; g 右極小幾乎可裂; 單邊

3. f 左幾乎可裂, 且 N 不可分解; L 不可分解, 且 g 右幾乎可裂.

4. L 与 N 不可分解, f 与 g 不可约.

命题. 函子性定理: 若 $0 \to L_0 \to M_0 \to N_0 \to 0$ 是另一幾乎可列短正合列, 則

$$\text{正合列同构} \iff (L \simeq L_0) \iff (N \simeq N_0). \tag{12}$$

實際上, 幾乎可裂短正合列必形如以下: $\tau(\mathrm{Top}(M)) = \mathrm{Rad}(M)$

$$0 \to N \to ? \to \tau^{-1}N \to 0 \quad (\mathrm{Ext}^1(\tau^{-1}N, N) \simeq k). \tag{13}$$

定理 (中項結構)**.** 假定 L 不可約, 則 $L \to \bigoplus M_i^{\oplus n_i}$ 左極小幾乎可裂等價於以下同時成立.

1. 所有分量 $L \to M_i$ 屬於 Rad.

2. 若有不可分解 M' 使得 $\mathrm{Rad}(L, M') \neq 0$, 則 M' 是直和項. 恰 Rad

3. 對任意 i, 以上 n_i 個態射恰是 $\frac{\mathrm{Rad}(L,M_i)}{\mathrm{Rad}^2(L,M_i)}$ 的一組基.

1.5 AR 大定理

定义 (穩定範疇, 穩定 Hom)**.** 定義 $\underline{\mathbf{mod}_A}$ 爲 $\mathbf{mod}_A$ 的投射穩定範疇 (加法商範疇, 局部化範疇). 特別地,

$$\underline{(X,Y)} = (X,Y)/\{\text{通過投射對象分解者}\}. \tag{14}$$

定理 (穩定等價大定理 I)**.** $\mathrm{Tr} : \underline{\mathbf{mod}_A} \to \underline{\mathbf{mod}_{A^{\mathrm{op}}}}$ 是穩定範疇的等價. 非投射單

例子. 穩定 Hom 是賦值的餘核, 即以下正合

$$Y \otimes X^t \xrightarrow{\alpha} (X,Y) \to \underline{(X,Y)} \to 0; \quad \alpha : [y \otimes f] \mapsto [x \mapsto y \cdot f(x)]. \tag{15}$$

命题 (穩定等價大定理 II)**.** 對不可分解模 M 與 N. 有穩定等價

$$\tau : \underline{\mathbf{mod}_A} \to \overline{\mathbf{mod}_A} : \tau^{-1}. \tag{16}$$

1. $\tau M = 0$ 當且僅當 M 投射;

2. 若 M 不可約且非投射, 則 τM 不可約且非內射, 此時 $\tau^{-1}\tau M \simeq M$;

3. 作爲上一條的推論, $M \simeq M_0$ 當且僅當 $\tau M \simeq \tau M_0$;

4. $\tau^{-1}N = 0$ 當且僅當 N 內射;

5. 若 N 不可約且非內射, 則 $\tau^{-1}M$ 不可約且非投射, 此時 $\tau\tau^{-1}N \simeq N$;

6. 作爲上一條的推論, $N \simeq N_0$ 當且僅當 $\tau^{-1}N \simeq \tau^{-1}N_0$.

备注. τ 將模向投射方向推移, τ^{-1} 將模向內射方向推移. 示意圖如下:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & \xrightarrow{\tau^{-1}} & & \xrightarrow{\tau^{-1}} & & \xrightarrow{\tau^{-1}} & \\ 0 & & \text{投射} & & \bullet & & \text{內射} & & 0\,. \\ & \xleftarrow[\tau]{} & & \xleftarrow[\tau]{} & & \xleftarrow[\tau]{} & & & \end{array} \tag{17}$$

定理 (AR 引理). 有函子同構 $\mathrm{Ext}^1(M,N) \simeq D\underline{(\tau^{-1}N,M)} \simeq D\overline{(N,\tau M)}$. 特别地, 摘線?

1. 若 $p.\dim M \leq 1$, 則可以摘掉上劃綫, 得 $\mathrm{Ext}^1(M,N) \simeq D(N,\tau M)$;
2. 若 $i.\dim N \leq 1$, 則可以摘掉下劃綫, 得 $\mathrm{Ext}^1(M,N) \simeq D(\tau^{-1}N,M)$;
3. 若 $p.\dim M \leq 1$ 且 $i.\dim N \leq 1$, 則 $(\tau^{-1}N,M) \simeq (N,\tau M)$;
4. 若 $p.\dim M \leq 1$ 且 $i.\dim \tau N \leq 1$, 則 $(N,M) \simeq (\tau N,\tau M)$;
5. 若 $p.\dim \tau^{-1}M \leq 1$ 且 $i.\dim N \leq 1$, 則 $(\tau^{-1}N,\tau^{-1}M) \simeq (N,M)$.

定理 (AR 大定理). 回顧 1.4.4 中的正合列.

1. 若 M 是非投射的不可分解模, 則存在幾乎可列短正合列 $0 \to \tau M \to ? \to M \to 0$. 參考 $\mathrm{Ext}^1(M,\tau M) \simeq D\underline{\mathrm{End}(M)}$.
2. 若 N 是非内射的不可分解模, 則存在幾乎可裂短正合列 $0 \to N \to ? \to \tau^{-1}N \to 0$. 參考 $\mathrm{Ext}^1(\tau^{-1}N,N) \simeq D\overline{\mathrm{End}(N)}$.

1.5.1 函子角度

定义. $A \in \mathbf{alg}_k$, 默認

1. $\mathrm{Fun}^{\mathrm{op}}(A) := \mathrm{Funct}_k(\mathbf{mod}_A^{\mathrm{op}}, \mathbf{mod}_k)$ 是預層; $(-,M)$
2. $\mathrm{Fun}(A) := \mathrm{Funct}_k(\mathbf{mod}_A, \mathbf{mod}_k)$ 是餘預層; $(M,-)$

這些均是 k-範疇 (k-充實的 Abel 範疇).

命题 (單函子結構). 選定不可分解模 M, 相應的可表函子是函子範疇的不可分解投射對象.

1. $\mathrm{Fun}^{\mathrm{op}}(A)$ 的單函子恰形如 $S^M := (-,M)/\mathrm{Rad}(-,M)$; 均是投射蓋
2. $\mathrm{Fun}(A)$ 的單函子恰形如 $S_M := (M,-)/\mathrm{Rad}(M,-)$;
3. $S^M(M) = S_M(M)$ 是 $\mathrm{End}(M)$ 的剩餘域; 示性函子
4. 若 $X \ncong M$ 是不可分解的, 則 $S^M(X) = 0$ 且 $S_M(X) = 0$.

命题 (米田嵌入的伴隨). 米田引理表明, 函子範疇的 "(不可分解) 有限表現投射對象" 恰好是 "(不可分解) 可表對象"; 米田嵌入的右伴隨 (一向 $\mathrm{coker}(-,f) \mapsto \mathrm{coker}(f)$) 有何性質? 單 $\to$ 不可分解

1. f (極小) 左幾乎可裂, 當且僅當 $(-,f)$ 誘導了 (極小) 投射表現. 此時,
   (a) $s(f) \xrightarrow{f} t(f) \to \mathrm{coker}(f) \to 0$ 正合, 且 $\mathrm{coker}(f)$ 不可分解;
   (b) $(-,s(f)) \xrightarrow{(-,f)} (-,t(f)) \to S^{t(f)} \to 0$ 正合, 且 $\mathrm{coker}((-,f))$ 是單對象.
2. f (極小) 右幾乎可裂, 當且僅當 $(f,-)$ 誘導了 (極小) 投射表現. 此時,
   (a) $0 \to \ker(f) \to s(f) \xrightarrow{f} t(f)$ 正合, 且 $\ker(f)$ 不可分解;
   (b) $(t(f),-) \xrightarrow{(f,-)} (s(f),-) \to S_{s(f)} \to 0$ 正合, 且 $\ker((f,-))$ 是單對象.

1.6 一些 quiver 計算; Gabriel 定理

Abstract

介紹基本 Quiver 表示, 並從一些代數幾何視角 (將 “一個表示” 對應至代數群作用下的 “一個軌道”), 並證明 Gabriel 定理.

La preuve du théorème de Gabriel nécessite trois ingrédients:

1. Classical geometric representation theory (representation varieties)
2. Noncommutative, homological algebra (Ringel Lemma, “brick”)
3. Classification of graphs (due to Tits)

主要參考 [?] 與 [?] 等筆記.

1.6.1 箭圖表示的基本定理, Euler 二次型等

定义 (箭圖 (quiver))**.** 要件 (Q_0, Q_1, s, t), 記路代數 $A := kQ$, **默認左模**. 特別地, 有兩種 “有限”:

1. (有限型). $|Q_0| + |Q_1| < \infty$; 圖性質
2. (有限維). $\dim < \infty$, (等價地, 有限型且沒有環). 表示性質

备注. **默認箭圖是有限型的**: 對有限型箭圖, 冪等分解 $\sum e_i$ 方有意義. type finie

定理 (標準消解)**.** 有函子的短正合列

$$0 \to \sum_{\alpha\in Q_1} \underbrace{Ae_{t(\alpha)}}_{P(t(\alpha))} \otimes_k e_{s(\alpha)} X \to \sum_{i\in Q_0} \underbrace{Ae_i}_{P(i)} \otimes_k e_i X \to X \to 0. \tag{18}$$

“從邊到點” 的態射: 對 $r\otimes x \in P(t(\alpha)) \otimes e_{s(\alpha)} A$, 定義

$\otimes_k$ 實際是關於 “某單代數” 的張量

$$r\otimes x \mapsto (r\cdot\alpha)\otimes x - r\otimes(\alpha\cdot x). \tag{19}$$

例子 (分次代數視角)**.** kQ 無非單代數 $S := kQ_0$ 與雙模 $V := kQ_1$ 張成的分次代數. 以上

$$0 \to A\otimes_S V \otimes_S X \xrightarrow{[1|2|3]\ \mapsto\ ([12|3]-[1|23])} A\otimes_S X \xrightarrow{[1|2]\ \mapsto\ [12]} X \to 0 \tag{20}$$

定义 (維度向量)**.** 維度向量衡量了 Krull-Schmidt 範疇中不可分解對象的維度, 也就是 K_0 群中對應的元素. 例如 $\mathbf{dim}M = (\dim(e_a M))_{a\in Q_0}$. 合成列單模數

定义 (Euler 型 $(-,-)_Q$, 或 Tits 形式)**.** 受 $0 \to (X,Y) \to (A\otimes_S X, Y) \to (A\otimes_S V\otimes_S X, Y) \to \mathrm{Ext}^1(X,Y) \to 0$ 啟發, 定義 $\mathbf{dim}X$ 與 $\mathbf{dim}Y$ 的雙線性運算 (C 是邊的鄰接矩陣):

$$\dim\mathrm{Hom}(X,Y) - \dim\mathrm{Ext}^1(X,Y) = \underbrace{\sum_{i\in Q_0}(e_iX, e_iY)}_{\mathbf{dim}X\cdot\mathbf{dim}Y} - \underbrace{\sum_{\alpha\in Q_1}(e_{t(\alpha)}X, e_{s(\alpha)}Y)}_{\mathbf{dim}X\cdot C\cdot\mathbf{dim}Y}. \tag{21}$$

提煉出 $(-,-)_Q$ 定義式

$$(\mathbf{dim}X, \mathbf{dim}Y) := (\mathbf{dim}X)^T\cdot(I-C)\cdot\mathbf{dim}Y \tag{22}$$

從不可分解模的角度, $\mathrm{Hom}(-,-)$ 貢獻點; $\mathrm{Ext}^1(-,-)$ 貢獻邊.

备注. 此處**箭圖不帶關係**, Euler 型與 Tits 型姑且可以混同.

定义 (Euler 二次型)**.** 定義 $\langle -,-\rangle$ 是 $(-,-)_Q$ 的對稱化, 形如 “無向圖的 Cartan 矩陣”. 記 $q(X) = \langle X, X\rangle$

1.6.2 幾何視角

例子 (表示空間: 群作用, 軌道)**.** 表示論的目標: 描述所有的不可約表示. 今給定路代數 $A := kQ$, 描述等價類的方式是

- 先確定維數向量, 再確定模結構; 等價地, 用 **dim** 確定更粗的等價類
- 先給定 $S := kQ_0$ 模, 再擴張作 $A = kQ$ 模.

對維數向量 v, 表示的等價類形如 $\prod_{\alpha\in Q_1}(k^{v_{t(\alpha)}}, k^{t_{s(\alpha)}})/\sim$, 即, "一堆矩陣組" 的等價類.
等價類即群 $\prod_i \mathrm{Gl}_{v_i}(k)$-共軛作用的軌道, 例如 $(m)_{i\to j}$ 被作用爲 $(g)_{v_i\times v_i}\cdot(m)_{i\to j}\cdot(g)^{-1}_{v_j\times v_j}$. 廣群 "共軛"
爲將 "線性空間維度" 和 "概型維度" 搭配, 另需引入 Krull 維度, 其精髓在於軌道公式.

定义 (Krull 維度)**.** 選用 $\mathbb{A}^d := \mathbb{A}^d_k$ 上的 Zariski 拓撲. 稱 $X \subseteq \mathbb{A}^d$ 局部閉, 當且僅當 X 是 $\overline{X}$ 的開子集, 或等價地, 一個開集與一個閉集的交. locally closed
稱 X 不可約, 當且僅當非空開子集必稠密; 等價地, 不存在 $\boxed{\circ\ \circ}$. irreducible
最後定義局部閉集 $X \subseteq \mathbb{A}^d$ 的 Krull 維度: 內部不可約集組成的閉鏈的最大長度.

例子. 例如 $\mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(k[x,y])$ 中直線 $\mathbb{A}^1 \simeq \mathrm{Spec}(k[x])$ 的 Krull 維度是 1: $k \subsetneq k[x]$ 是長度爲 1 的極大鏈.

命題. 依照 Proposition I.7.1, [?] 等結論,

1. $\dim \mathbb{A}^d = d$, (約定) $\dim\emptyset = -\infty$;
2. $\dim(U\cup V) = \max(\dim U, \dim V)$;
3. $\dim(X\cap Y) \geq \dim X + \dim Y - d$;
4. $\dim U = \dim \overline{U}$. $\dim \mathrm{Aut} = \dim \mathrm{End}$

也可以先從拓撲空間的 Krull 維度入手. 概型的 Krull 維度就是拓撲空間的 Krull 維度.

定理 (軌道公式)**.** 假定 G 是連通的代數群概型, X 是 G-代數簇, 則

1. 所有 G-軌道 O_x 都是不可約的局部閉集; 軌道性質
2. 對任意 x, 穩定子群 $\mathrm{Stab}_G(x)$ 是閉子群; 穩定子群
3. 對任意 x, 有 $\dim G = \dim O_x + \dim \mathrm{Stab}_G(x)$; 維數公式
4. 對任意 x, $(\overline{O_x}\backslash O_x) = \bigcup_{\dim O_y < \dim O_x} O_y$. 主元

命題. 假定 dim 是 Krull 維度, $\dim_k$ 是線性空間維度, 則有連接維數的關鍵公式: 對任意 $\mathbf{dim}X = v$, 總有

$$\underbrace{\dim \mathrm{Rep}(v)}_{v^T\cdot Q_1\cdot v} = \underbrace{\dim O_X}_{v^T\cdot Q_1\cdot v - \dim \mathrm{End}(X)} + \dim_k \mathrm{Ext}^1(X,X) \tag{23}$$

例子 (自垂直對象)**.** 對給定的 $v = \mathbf{dim}X$, 是否存在特殊的對象: $\mathrm{Ext}^1(X,X) = 0$? 結合 Kac 定理

1. $\mathrm{Ext}^1(X,X) = 0$ 當且僅當 $\overline{O_X} = \mathrm{Rep}(v)$. 極大軌道
2. 對給定的 v, 作用 $\mathrm{Gl}(v) \to \mathrm{Rep}(v)$ 至多有一條極大軌道;

3. 對不可裂短正合列 $0 \to L \to M \to N \to 0$, 總有 $O_{L\oplus N} \subseteq O_M$;
4. 若極大軌道的對象 $X \simeq L \oplus N$, 則 $\operatorname{Ext}^1(L, N) = 0$.
5. 當且僅當 X 半單, $O_X = \overline{O_X}$.

1.6.3 圖的結論: 一些線性代數

定义 (圖的二次型)**.** 給定有限無向圖 (允許自環, 重邊) Γ, 記 q_Γ 是鄰接矩陣對應的二次型. 此時 $q_Q = q_{|Q|}$ 與 Euler 二次型吻合. 照常定義 q_Γ 正定, 半正定, 以及零空間 $N(q_\Gamma)$. 與 Quiver 定向無關

定理 (有限圖分類定理)**.** 給定連通圖 Γ, 以下分類 q_Γ (有限型, 仿射型, 其他).

1. (有限型, Dynkin 型, 即 q_Γ 正定) 也就是熟知的 $A_{\geq 1}$, $D_{\geq 3}$, $E_{6,7,8}$, n 是頂點數.
2. (仿射型, Euclidean 型, 即 q_Γ 半定但 $\dim\ker N(q_\Gamma) = 1$) 也就是熟知的 $\widetilde{A}_{\geq 0}$, $\widetilde{D}_{\geq 4}$, $\widetilde{E}_{6,7,8}$, 頂點數 $n+1$. 將張成 $\ker N(q_\Gamma)$ 的所有格點悉列諸下圖: extending vertex

$$
\begin{array}{ccc}
1 & \text{———} & 1 \\
| & & | \\
\vdots & \boxed{\widetilde{A}_n} & \vdots \\
| & & | \\
1 & \text{———} & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccccc}
1 & & & & & & & 1 \\
| & & & & & & & | \\
2 & — & 2 & — & \cdots & — & 2 & — & 2 \\
| & & & & & & & | \\
1 & & & & \boxed{\widetilde{D}_n} & & & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
1 & — & 2 & — & 3 & — & 2 & — & 1 \\
& & & & | & & & & \\
& & & & 2 & & \boxed{\widetilde{E}_6} & & \\
& & & & | & & & & \\
& & & & 1 & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & — & 2 & — & 3 & — & 4 & — & 3 & — & 2 & — & 1 \\
& & & & & & | & & & & & & \\
& & & & & & 2 & & \boxed{\widetilde{E}_7} & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccccc}
3 & & & & & & & & & & \\
| & & & & & & & & & & \\
6 & — & 5 & — & 4 & — & 3 & — & 2 & — & 1 \\
| & & & & & & & & & & \\
4 & & \boxed{\widetilde{E}_8} & & & & & & & & \\
| & & & & & & & & & & \\
2 & & & & & & & & & &
\end{array}
. \tag{24}
$$

3. (無限型) 其他類型.

定义 (根系)**.** 給定有限型或仿射型 Γ, 定義根系 $\Delta := \{v \in \mathbb{Z}^n \mid q_\Gamma(v) \leq 1\}$. 約定 $0 \notin \Delta$. 定義

1. (實根) 使得 $q_\Gamma(v) = 1$ 的根, 記作 $v \in \Delta^r$;
2. (虛根) 使得 $q_\Gamma(v) = 1$ 的根, 記作 $v \in \Delta^i$;
3. (正根) 各項爲正整數的根, 記作 $v \in \Delta_+$.

命題 (根系結構定理)**.** 仍選用有限型或仿射型 Γ,

1. Δ 關於對稱, Weyl 反射封閉;
2. $\Delta = \Delta_+ \sqcup \Delta_+$, 換言之, 沒有既正又負的根;
3. Γ 是有限型 $\iff$ Δ 是有限集 $\iff$ $\Delta^i = \emptyset$;
4. Γ 是仿射型 $\iff$ Δ 是無限集 $\iff$ $\Delta^i \simeq \mathbb{Z}$.

定理 (Gabriel)**.** 給定有限型 Γ, 有限維不可約表示一一對應 Δ_+.

1. 從不可約表示到 Δ_+, 對應方式 $X \mapsto \mathbf{dim}X$;

2. 從 Δ_+ 到不可約表示, 對應方式 $v \mapsto \mathrm{Rep}(v)$ 中極大軌道.

kQ 的不可約表示有限, 當且僅當 Γ 是有限型圖 (及其有限無交並).

备注. 對一般的有限箭圖, 可以類似地定義根系. Kac 定理解答了如下問題: 以 v 爲維度向量的不可約表示有多少?

定理 (Kac)**.** 當且僅當 $v \in \Delta_+$, 存在以 v 爲維度向量的不可約表示.

1. $v \in \Delta_+ \iff \mathrm{Rep}(v)$ 存在極大軌道 $\iff$ 存在 $\mathbf{dim}X = v$ 使得 $\mathrm{Ext}^1(X, X) = 0$.

2. 當且僅當 $v \in \Delta_+^r$, 以上不可約表示唯一;

3. 當且僅當 $v \in \Delta_+^i$, 以上不可約表示無窮.

备注. Ringel Hall 代數等?

1.7 總結: 有限生成模, 有限表現模, 投射模, 內射模, 平坦模等的結構

Abstract

總結 F.P. 模, 內射模, 平坦模, 投射模的等價定義 (判准).

1. (F.P.) 有限表現模的等價判據. $\mathrm{coker}(R^{n\times m})$; $(M, -)$ 保持濾過餘極限; $M \otimes -$ 保持積.
2. (Plat.) 平坦模的等價判據.
   a $M \otimes -$ 保單; $M \otimes -$ 保 F.G. 模之單; $M \otimes -$ 正合; $\mathrm{Tor}(M, -) = 0$;
   b $I \otimes M \simeq IM$; $I \otimes M \simeq IM$ 保 F.G. 理想之單;
   c $Rm = 0$ 蘊含 $RA = 0$ 且 $m = Am'$; $0 \to (A, M) \to M^n \to M^m$ 可補全作 ses $M^l \to M^n \to M^m$;
   d F.P. $\to M$ 定被 R^n 分解; 自由模的濾過餘極限
3. (特征模函子) $(-)^+$ 正合忠實; X 的平坦維度等於 X^+ 的內射維度.
4. (Inj.) 內射模的等價判據.
   a $(-, M)$ 正合, $\mathrm{Ext}^1(-, M) = 0$; $\mathrm{Ext}^1(\text{商環}, M) = 0$;
   b 提升單射; 僅提升單射 $I \hookrightarrow R$; 本性擴張平凡; $M \hookrightarrow ?$ 可裂;
   c $(R^{\oplus})^+$ 直和項; $\prod R^+$ 的直和項.
5. (Proj.) 投射模的等價判據.
   a $(M, -)$ 正合, $\mathrm{Ext}^1(M, -) = 0$;
   b 提升滿射; $? \twoheadrightarrow M$ 可裂;
   c $(R^{\oplus})^+$ 直和項; 存在 “投射基”;
   d 投射模是可數生成投射模的直和.

1.7.1 有限表現模的結構

定理. 記 I 濾過, J 有限, $F : I \times J \to \mathbf{Sets}$ 爲函子, 則典範態射 濾過餘極限和極限交換

$$\varinjlim_I \varprojlim_J F \to \varprojlim_J \varinjlim_I F \tag{25}$$

是同構.

Proof. §IX.2, [?] (GTM5).
極限 (積的子) 和濾過餘極限 (有限歸納之等價類) 是兩大邏輯要件. □

备注. 若存在函子 $U : \mathcal{C} \to \mathbf{Sets}$, 其忠實, 保持濾過餘極限和小極限, 且返一切同構, 則上述交換定理對 $F : I \times J \to \mathcal{C}$ 成立. 特例: 帶點集合, 環, 模等代數結構 (按 [?]).

定义 (緊對象)**.** 稱 K 是範疇 $\mathcal{C}$ 之緊對象, 當且僅當 $(K, -)$ 與濾過餘極限交換. 緊 = 兼容歸納

备注. 對 1.7.1 中的 $(U, \mathcal{C})$, 應用式 25 知緊對象對有限極限封閉. 對於緊對象組成的範疇, 見 [?] 及其關聯內容.

命題. 任意模是有限表現模的濾過餘極限.

Proof. 任意 X 適用 ses: $0 \to K \to R^{\oplus X} \to X \to 0$. 記濾過系統爲二元組 $\{(S, f)\}$, 其中 $S \subseteq X$ 是有限子集, $f : K_f \to R^{\oplus S}$, K_f 有限生成. 如此一來,

$$\varinjlim_{(S,f)} (\mathrm{coker}(f)) = X \tag{26}$$

□

定理 (A criterion for compact modules)**.** 以下條件等價. f.p. 模刻畫

1. X 是有限表現模, 即生成元與生成關係有限的模; f.p. 定義
2. $(X, -)$ 與濾過餘極限交換; Hom 刻畫
3. $X \otimes -$ 與任意積交換. ⊗ 刻畫

Proof. 順序 $1 \iff 2$, $1 \iff 3$.

1. $(1 \implies 2)$. 給定表現 $R^m \to R^n \to X \to 0$, 由濾過餘極限和 Hom 的左正合性得

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & (X, \varinjlim(-)) & \longrightarrow & (R^n, \varinjlim(-)) & \longrightarrow & (R^m, \varinjlim(-)) \\ & \downarrow & & \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq \\ 0 \longrightarrow & \varinjlim(X, -) & \longrightarrow & \varinjlim(R^n, -) & \longrightarrow & \varinjlim(R^m, -) \end{array} . \tag{27}$$

依照五引理, 得同構.

2. $(2 \implies 1)$. 將緊模 X 寫作有限表現模的濾過餘極限, 則

$$\mathrm{id}_X \in (X, X) = (X, \varinjlim K) \simeq \varinjlim (X, K). \tag{28}$$

因此, id_X 通過某一有限表現模分解. 這說明 X 是有限表現模的直和項.

3. $(1 \implies 3)$ 給定表現 $R^m \to R^n \to X \to 0$, 由 AB4* 和 $\otimes$ 的右正合性得

$$\begin{array}{ccccccc} R^m \otimes (\prod_i M_i) & \longrightarrow & R^n \otimes (\prod_i M_i) & \longrightarrow & X \otimes (\prod_i M_i) & \longrightarrow 0 \\ \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq & & \downarrow & \\ (\prod_i R^m \otimes M_i) & \longrightarrow & (\prod_i R^n \otimes M_i) & \longrightarrow & (\prod_i X \otimes M_i) & \longrightarrow 0 \end{array} . \tag{29}$$

依照五引理, 得同構.

4. $(3 \implies 1)$ 類似以上對 id_X 的操作, 考慮

$$\mathrm{id}_X \in X^X \simeq \prod_X (X \otimes R) \simeq X \otimes \prod_X R \ni \sum x_i \otimes f_i. \tag{30}$$

追從同構, 恆有 $x = \sum x_i \cdot f_i(x)$, 故 X 有限生成. 考慮 ses $0 \to K \to R^l \to X \to 0$, 得

$$\begin{tikzcd} ? \arrow[r] \arrow[d, two heads] & K \otimes \prod_K R \arrow[r] \arrow[d, dashed] & R^l \otimes \prod_K R \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & X \otimes \prod_K R \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \prod_K K \arrow[r] & \prod_K R^l \arrow[r] & \prod_K X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}. \tag{31}$$

由五引理, 虛線處爲滿, 從而 K 有限生成.

□

1.7.2 有限生成模的結構

1.7.3 內射模的結構

定理 (內射模的 Baer 判別)**.** M 是內射模, 當且僅當對任意理想的包含 $i : I \subseteq R$, 態射 Baer, 內射模

$$(i, M) : (R, M) \to (I, M), \quad f \mapsto f \circ i \tag{32}$$

是滿的. 換言之, 任意模同態 $I \to M$ 通過 i 分解.

Proof. 僅證 $\Leftarrow$. 玆檢驗 M 對任意單態射 $L \hookrightarrow N$ 之提升性, 不妨視 L 爲 N 的子模. 記部分 N-子模構成的集合 $\mathcal{S}$: 能提升哪些擴張?

$$\mathcal{S} := \{K \mid L \subseteq K \subseteq N \text{ 爲子模的包含鏈, 且任意 } L \to M \text{ 通過 } K \text{ 分解}\}. \tag{33}$$

顯然 $L \in \mathcal{S}$ 非空. 任取極大元 $Q \in \mathcal{S}$ (Zorn 引理), 只需證明 後繼歸納

- 若 $Q \neq N$, 則對存在 $(n \in N) \wedge (n \notin Q)$ 使得 $(\langle n \rangle + Q) \in \mathcal{S}$, 得矛盾.

實際上, 任意選定 n, 記理想 $I := \{r \mid n \cdot r \in Q\}$. 對任意 $\varphi : Q \to M$, 定義

$$(\langle n \rangle + Q) \to M, \quad (n \cdot r + q) \mapsto \alpha(r) + \varphi(q); \quad \text{其中,} \begin{tikzcd} I \arrow[r, hook] \arrow[d, "n\cdot"'] & R \arrow[d, dashed, "\alpha"] \\ Q \arrow[r, "\varphi"'] & M \end{tikzcd}. \tag{34}$$

這說明提升至 Q 的態射可進一步地提升至 $\langle n \rangle + Q$. □

以上證明使用最簡單的超限歸納, 對後繼序數的證明是關鍵, 對極限序數的證明由 Zorn 引理一筆帶過.

备注. Baer's criterion 的意圖非常簡單: 驗證內射模本需檢驗對 "所有單射" 之提升性, 現將 "所有單射" 簡化至 "所有形如 $I \subseteq R$" 的包含. 所有單 $\implies$ 特殊單

例子. 將 "全體理想" 換做 "全體有限生成的理想", 命題不正確. 提示: $R := \mathbb{R}[x_{\geq 0}]$, 構造略.

1.7.4 平坦模的結構

命題. 一般記號 A 環, I 理想, $\{M, N, L\}$ 左模, $\{X, Y, Z\}$ 右模. 以下關於 M 的表述等價. Baer, 平坦模

1. 對任意單射 $f : X \hookrightarrow Y$, 態射 $f \otimes \mathrm{id}_M : X \otimes M \to Y \otimes M$ 單.
2. 對任意有限生成模的單射 $f : X \hookrightarrow Y$, 態射 $f \otimes \mathrm{id}_M : X \otimes M \to Y \otimes M$ 單. 僅需看有限生成模
3. 對任意理想 $I \subseteq A$, 自然態射 $I \otimes M \to IM$ 是同構.
4. 對任意有限生成的理想 $I \subseteq A$, 自然態射 $I \otimes M \to IM$ 是同構.

Proof. 過程: $1 \iff 2$ 且 $3 \iff 4$, $3 \implies 2$, $1 \implies 4$. 強 $\implies$ 弱

1. $(1 \iff 2)$. 顯然 $1 \Rightarrow 2$, 下證明 $2 \Rightarrow 1$: 檢驗 $\sum x_i \otimes m_i$ 與 $\sum x_j \otimes m_j$ 在 $f \otimes \mathrm{id}_M$ 下的像相同與否, 僅需考慮 f 在有限生成模 $\langle \{x_i\} \cup \{x_j\} \rangle$ 上的限制, 遂得證. 同理, $3 \iff 4$.

2. $(3 \implies 2)$. 不妨設子模 $X \subseteq Y$ 通過添加一個生成元得到, 則存在理想 I 使得 $Y/X \cong A/I$. 任取提升 $\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads] \arrow[d, dashed, "\varphi"'] & A/I \arrow[d, "\simeq"] \\ Y \arrow[r, two heads] & Y/X \end{tikzcd}$, 得滿射 $(\varphi, \subseteq) : A \oplus X \to Y$, 進而補全滿態射的推出拉回方塊 理想 $\implies$ 模

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & I \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed] & I \arrow[d, dashed] & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, equal] & A \oplus X \arrow[r, "{(1,0)}"] \arrow[d, "{(\varphi,\subseteq)}"'] & A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\subseteq"'] & Y \arrow[r] \arrow[d] & A/I \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd} . \tag{35}$$

作用 $M \otimes -$, 可裂短正合列 R3 ses, 依歸納假設 C4 ses. 遂有蛇引理模型

$$\begin{tikzcd}
 & & ? \arrow[r, two heads] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \arrow[dddll, dotted] & \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes I \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed] & M \otimes I \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \otimes X \arrow[r] \arrow[d, equal] & M \oplus (M \otimes X) \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & M \otimes X \arrow[r] & M \otimes Y \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes (A/I) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd} . \tag{36}$$

因此 $M \otimes X \to M \otimes Y$ 是單態射.

3. $(1 \implies 4)$. 顯然 $R \otimes M \simeq M$, $IM \subseteq M$. 依假設, $I \otimes M$ 視同 $R \otimes M$ 的子模. 鑒於 模 $\implies$ 理想

   (a) $R \otimes M \to M, \sum r_i \otimes m_i \mapsto \sum r_i m_i$ 映 $I \otimes M$ 至 IM, 以及

   (b) $M \to R \otimes M, m \mapsto 1 \otimes m$ 映 IM 至 $I \otimes M$,

   因此 $R \otimes M \simeq M$ 誘導了子對象同構 $IM \simeq I \otimes M$.

$\square$

命题 (平坦模的計算性質 I). M 是平坦模, 當且僅當對任意矩陣式 $\mathbf{R}\cdot\overrightarrow{\mathbf{m}}=\vec{\mathbf{0}}$, 存在 $\mathbf{A}$ 使得 零化式平凡

$$\mathbf{R}\cdot\overrightarrow{\mathbf{m}}=\mathbf{R}\cdot\underbrace{(\mathbf{A}\cdot\overrightarrow{\mathbf{m}'})}_{=\mathbf{m}}=\underbrace{(\mathbf{R}\cdot\mathbf{A})}_{=\mathbf{O}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{m}'}=\vec{\mathbf{0}} \tag{37}$$

Proof. 若 M 平坦, 由 ses $0\to\ker(\mathbf{R}\cdot)\to R^m\to R^n\to 0$ 得 ses

$$0\to\ker(\mathbf{R}\cdot)\otimes M\to M^m\xrightarrow{\mathbf{R}\cdot}M^n\to 0. \tag{38}$$

由正合性, 任意 $\overrightarrow{\mathbf{m}}\in\ker(R\cdot)$ 總是形如 $\mathbf{A}\otimes\overrightarrow{\mathbf{m}'}$; 其中 $\mathbf{A}\in\ker(\mathbf{R}\cdot)$, 即 $\mathbf{R}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{O}$.
反之, 若任意矩陣式 $\mathbf{R}\cdot\overrightarrow{\mathbf{m}}=\vec{\mathbf{0}}$ 允許上述媒介 $\mathbf{A}$, 往證對有限生成理想 I 總有 $IM\simeq I\otimes M$ (同構繼承自 $M\simeq R\otimes M$). 顯然 $I\otimes M\twoheadrightarrow IM$, 下證難點 $I\otimes M\hookrightarrow IM$: 若 $\vec{\mathbf{a}}^T\cdot\overrightarrow{\mathbf{m}}=0$, 則存在 $\mathbf{A}$ 與 $\overrightarrow{\mathbf{m}'}$ 使得 $\vec{\mathbf{a}}^T\cdot\mathbf{A}=\vec{\mathbf{0}}^T$ 與 $\overrightarrow{\mathbf{m}}=\mathbf{A}\cdot\overrightarrow{\mathbf{m}'}$. 這意味著

$$\text{原輸入}=\sum a\otimes m=\sum(aA)\otimes m'=0. \tag{39}$$

從而單. □

$\mathbf{R}\cdot\overrightarrow{\mathbf{m}}$ 是 IM 的元素, 而二元組所在的等價類 $(\mathbf{R},\overrightarrow{\mathbf{m}})/\sim_{\mathbf{A}}$ 是 $I\otimes M$ 的元素. 平坦模的內蘊性質即 "$\sim_A$ 與 $\cdot$ 是相同的等價關係".

命题 (平坦模的計算性質 II). M 是平坦模, 當且僅當一切有限表現模出發的態射 $X\to M$ 通過某一有限自由模分解. Plat → (Libre) → F.P.

Proof. 假定 M 平坦, $R^m\xrightarrow{B\cdot}R^n\to X\to 0$ 正合. 態射 $\varphi: X\to M$ 滿足以下性質

1. φ 由 $\{x_i\mapsto m_i\}$ 決定, 其中 x_i 是生成元, 即, $e_i\in R^n$ 在 X 中的像.
2. 正合列 $0\to(X,M)\to M^n\to M^m$ 說明向量 $\varphi\sim(m_i)\in M^n$ 恰使 $B^T\cdot(m_i)=0$.

取媒介 A 使得 $B^T\cdot A^T=O$ 且 $A^T\cdot(m'_j)=m_i$. 此時 $(A\cdot): R^n\to R^l$ 即爲所求.
反之, 證明過程類似. □

以上給出 "séquence plat" 中 representable syzygy 的性質: 若 $0\to(X,M)\to M^n\to M^m$, 則必然能填充作

$$\begin{tikzcd} F^l \arrow[rr] \arrow[dr] & & F^n \arrow[r] & F^m \\ & (X,M) \arrow[ur, hook] & & \end{tikzcd}. \tag{40}$$

函子語言表述

定理 (Lazard 定理, 見 [?]). 平坦模恰是有限自由模的濾過餘極限.

Proof. 顯然 $R^n\otimes-$ 和濾過餘極限正合, 從而有限自由模的濾過餘極限是平坦模. 反之, 將平坦模寫作有限表現模的濾過餘極限, 將每一態射 $X\to M$ 通過有限自由模分解 (濾過子系統), 仔細驗證子系統共尾 (cofinal) 即可. □

备注. 同理, 平坦模恰是自由模 (resp. 投射模, 有限生成投射模) 的濾過餘極限.

1.8 特征模理論

定义 (特征模). 函子 $(-)^+ := (-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{\mathbb{Z}} : \mathbf{Mod}_R \to \mathbf{Mod}_{R^{\mathrm{op}}}$ 映 M 至特征模.

命题 (特征模函子的性質). $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 是內射餘生成子; 相應地, $(-)^+$ 是正合的忠實函子. 作爲推論:

1. $A = 0$ 當且僅當 $A^+ = 0$; 特征模更像線性泛函!
2. f 單射 (resp. 滿射) 當且僅當 f^+ 滿射 (resp. 單射);
3. θ 正合當且僅當 θ^+ 正合;
4. X 平坦當且僅當 X^+ 內射; Lambek
5. $(X \otimes^L Y)^+ \simeq R\mathrm{Hom}(X, Y^+)$;
6. X 的平坦維度等於 X^+ 的內射維度.

例子 (應用: 對偶商空間). 子模 $N \subseteq M$ 誘導了單射 $(M/N)^+ \to M^+$. 泛函 $f \in M^+$ 屬於該像, 當且僅當 $f|_N = 0$;

定理 (應用: 模範疇有足夠的多內射對象). 即任意對象存是某內射模的子模. Bare 定理

Proof. 考慮 $R^{\oplus M^+} \twoheadrightarrow M^+$, 得 $M \hookrightarrow M^{++} \hookrightarrow (R^{\oplus M^+})^+$. □

定理 (應用: 內射模結構定理). 內射 R-模形如 "自由 R^{op}-模之特征模" 的直和項.

Proof. $\Longrightarrow$ 由以上 $M \hookrightarrow (R^{\oplus M^+})^+$ 給出. 另一方向顯然. □

1.9 投射模的結構定理 (簡單的 transfinite dévissage)

定义 (α-濾過與分次化). 給定序數 α, 稱 M_α 是模 M 關於 α 的濾過, 當且僅當

1. $M_0 = 0$; 初始
2. $M_\gamma \subseteq M_{\gamma+1}$ 是子模; 後繼
3. 對極限序數 γ, 有 $M_\gamma := \bigcup_{\delta<\gamma} M_\delta$. 極限

例子 (超限歸納的一些例子).

命题 (簡答例子). 定義 M 關於濾過 M_α 的分次模爲 $\mathrm{Gr}(M,\alpha) := \bigoplus_{\gamma<\alpha} M_{\gamma+1}/M_\gamma$. 若對任意序數 $\gamma < \alpha$, M_γ 總是 $M_{\gamma+1}$ 的直和項, 則 $\mathrm{Gr}(M,\alpha) \simeq M$.

Proof. 爲證明上述對任意序數成立, 只需考慮初始, 後繼, 極限三類序數.

1. $M_0 = 0 = \mathrm{Gr}(M_0, 0)$, 顯然.
2. 若 $\mathrm{Gr}(M_\beta, \beta) \simeq M_\beta$, 則

$$\mathrm{Gr}(M_{\beta+1}, \beta+1) \simeq \mathrm{Gr}(M_\beta, \beta) \oplus \frac{M_{\beta+1}}{M_\beta} \simeq M_\beta \oplus \frac{M_{\beta+1}}{M_\beta} \simeq M_{\beta+1}. \tag{41}$$

3. 若命題對一切 $\gamma < \beta$ 成立, 則

$$\mathrm{Gr}(M_\beta, \beta) \simeq \bigcup_{\gamma<\beta} \mathrm{Gr}(M_\gamma, \gamma) \simeq \bigcup_{\gamma<\beta} M_\gamma \simeq M_\beta. \tag{42}$$

□

命題 (可數生成模的結構). 假定 $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ 是可數生成模的任意直和, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是可數個自同態. 則存在濾過 $\{M_\gamma\}_{\gamma\le\beta}$ 使得

1. $M_{\gamma+1} = M_\gamma \oplus \bigoplus(\text{countably many } M_i\text{'s})$. 新添可數
2. 任意 (γ, n), f_n 總是限制在 M_γ 上的自同態. 子-自同態

Proof. 依次構造 0, 後繼, 極限.

1. $M_0 = 0$. 略.
2. $(\beta \to \beta+1)$ 若 $M_{\le\beta}$ 構造成功, 且 $M_\beta \ne M$. 下構造 $M_{\beta+1}$. 任取 M_β 之外的可數生成直和項 M^0, 則 $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{im}(f_n(M^0))$ 可數生成, 因此是某一可數生成直和項 M^1 的子模. 類似地構造 M^k, 記 $M_{\beta+1} = \bigoplus_{k\ge0} M^k$ 即可.
3. $((<\beta) \to \beta)$ 無需構造, 僅需驗證自同態的歸納極限是自同態, 非常顯然.

□

备注. 約定 “可數生成” 表示至多可數生成, 不必是無限的.

命題 (有趣的例子: 雙點集問題; 問題 7.12, [?]; [?]). 是否存在 $\mathbb{R}^2$ 的子集 A, 其與任意直線恰交於兩點?

Proof. 用序數 α 標記 $\mathbb{R}^2$ 的全體直線 $\{\ell_\beta\}_{\beta<\alpha}$, 並對應地構造 $\{A_\beta\}$, 滿足

1. 對任意 $\beta < \alpha$, $|A_\beta| \le 2$;
2. 對任意 $\beta < \alpha$, $\bigcup_{\gamma\le\beta} A_\gamma$ 不存在共線的三點;
3. 對任意 $\beta < \alpha$, $\bigcup_{\gamma\le\beta} A_\gamma$ 與 ℓ_β 有且僅有兩個交點.

若能暢通無阻地進行後繼歸納和極限歸納, 則原命題爲真.

1. $(\beta = 0)$. 任取 ℓ_0 與 A_0 即可, 無較話頭.
2. $(\beta \to \beta+1)$. $\ell_{\beta+1}$ (新線) 與 $\bigcup_{\gamma\le\beta} A_\gamma$ (舊集) 的交點數量只能爲 $\{0, 1, 2\}$.
   (a) 若交點數爲 2, 則直接取 $A_{\beta+1} = \emptyset$.
   (b) 若交點數爲 1, 則需有 $|A_{\beta+1}| = 1$. 新的點既要落在落在 $\ell_{\beta+1}$ (available) 之中, 又要落在 $\bigcup_{\gamma\le\beta} A_\gamma$ 的 “兩點成線集” (non-available) 之外. 由於 |non-avali| 不超過 $|\beta|$ 的加法乘法式, 從而不超過 $\max\{\aleph_0, |\beta|\}$. 不妨設 $|\alpha|$ 是基數, 則 $|\beta| < |\alpha|$. 這說明新點有處可落.
   (c) 若交點數爲 0, 同理以上.

   基數定義爲序數的 $|-|$-等價類的極小元; 對無窮基數: $\lambda + \kappa = \max$, $\lambda \cdot \kappa = \max$.
3. $(\{<\beta\} \to \beta$, β 是極限序數) 同上, ℓ_β (新線) 與 $\bigcup_{\gamma<\beta} A_\gamma$ (全體舊集之並) 的交點數量只能爲 $\{0, 1, 2\}$.
   (a) 若交點數爲 2, 則 $A_\beta = \emptyset$.
   (b) 若交點數爲 0, 1, 參考以上對 “新點有處可落” 之證明.

□

命题 (投射模的結構 I)**.** 投射模是可數生成投射模的直和. 約定: 可數 = 至多可數. I. Kaplansky

Proof. 投射模 P 是自由模 M 的直和項, 即某一冪等自同態 e 的像. 對資料 $(M, \{\mathrm{id}, e\})$ 使用 1.9, 得 P 的可數直和濾過. □

命题 (投射模的結構 II)**.** P 是投射模, 當且僅當存在一組 $\{(e_i, f_i)\}_{i\in I} \subseteq P \times (P, R)$, 使得 對偶基

$$\forall x \in R \ (x = \sum_{i\in I} e_i \cdot f_i(x) \quad \text{爲有限和}). \tag{43}$$

Proof. 若有上述 "基", 則有態射

1. $R^{\oplus I} \to P, \quad r_i \mapsto e_i \cdot r_i$;
2. $P \to R^{\oplus I}, \quad p \mapsto (f_i(p))_{i\in I}$.

由於 $P \to R^{\oplus I} \to P, \quad p \mapsto e_i \cdot f_i(p)$ 是恆等, 得 P 是截面. 本質直和項
反之, 若 P 是投射模, 依照直和項 $P \to R^{\oplus I} \to P$ 直接構造即可. □

备注. 對投射模, 似乎沒有很好的 Baer 判別法. 見 [?].

1.9.1 Ext 與 Tor 的 Baer 和刻畫

Abstract

如何將群 Tor 中元素具體地取出來? 是否存在類似米田 Ext^n-群的構造?
先給出 Abel 群中 $\mathrm{Tor}(A, X)$ 的構造.

例子 (Abel 群範疇中的簡單構造)**.** $\mathrm{Tor}_A(A, B)$ 就是扭元構成的群, 其中生成元形如三元組

$$\{(a, n, b) \in A \times \mathbb{Z} \times B \quad | \quad (an = 0) \wedge (nb = 0)\}. \tag{44}$$

對以上元素張成的自由 Abel 群, 考慮如下生成關係: 左: 左群元素 中: 零化數乘 右: 右群元素

1. (生成關係 I) $(-, n, b)$ 與 $(a, n, -)$ 都是 $\mathbb{Z}$-線性映射, 即保持加法同態;
2. (生成關係 II-l) 若 (a, mn, b) 與 (am, n, b) 都是生成元, 則兩者等同;
3. (生成關係 II-r) 若 (a, mn, b) 與 (a, m, nb) 都是生成元, 則兩者等同.

例子 ($\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}}(-,-)$ 的雙函子性)**.** 加法結構, 零元等都是直接的. 下證明 $f : X \to Y$ 給出良定義的

$$f_* : \mathrm{Tor}(A, X) \to \mathrm{Tor}(A, Y), \quad (a, n, x) \mapsto (a, n, f(x)). \tag{45}$$

按步就班地檢驗泛性質: 映射 $G(A \times \mathbb{Z} \times X) \to \mathrm{Tor}(A, Y)$ 將三種生成關係零化, 則來源下降至商空間 $\mathrm{Tor}(A, X)$. 這由群同態的定義直接保證. 另一側同理. 驗證函子性

第一處的核

例子. 給定短正合列 $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ 與 $- \otimes X$, 則

$$\ker[f \otimes X : A \otimes X \to B \otimes Y] \subseteq A \otimes X. \tag{46}$$

基於張量秩的一些考量, 這一核由秩 1 的張量 $a \otimes x$ 生成.

- $a \otimes x$ 應滿足 $f(a) \otimes x = 0$. 由於 f 是單射, 故存在 $f(a) = b \cdot n$ 使得 $n \cdot x = 0$. 同時 $c := g(b)$ 被 n 零化.
- 三元組 (c, n, x) ($cn = 0$ 且 $nx = 0$) 的某一等價類決定了 $a \otimes x$. 形式地看, a 可取作任意 $f^{-1}(g^{-1}(c) \cdot n)$ 中元素, 實際上 $a \otimes x$ 與原像的選取無關. 驗證!

命題 (第一處連接態射). 給定 $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$, 對任意 X 總有長正合列

$$0 \to \mathrm{Tor}(A, X) \to \mathrm{Tor}(B, X) \to \mathrm{Tor}(C, X) \xrightarrow{\delta} A \otimes X \to B \otimes X \to C \otimes X \to 0. \tag{47}$$

特別地, $\delta : \{(c, n, x)\} \twoheadrightarrow \{f^{-1}(g^{-1}(c) \cdot n) \otimes x\} \hookrightarrow A \otimes X$.

證明!

定义 (生成對). 假定 U 是範疇 $\mathcal{A}$ 的生成元. 若存在反變函子 $K : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 與 $L : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ 使得存在生成元 $D = K(U)$ 與 $LK(U)L(D) = U$. $\mathrm{Hom}(U, -)$ 即 $\bullet \in (-)$

备注. 特例: $L, K = (-, R)$ 與 $U, D = R$.

定义 (生成對的 Tor-群). 一般的 Abel 範疇顯然沒有 Tor, 定義所謂 Tor 需要一些附加條件 (需要往模範疇處靠, 但不必像模範疇這般好).

待論證

假定 $(U = L(D) \in \mathcal{A}, D = K(U) \in \mathcal{B})$ 是預張量範疇對. 此時的 $\mathrm{Tor}_n : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathbf{BigAb}$ 定義如下. 選定大 Abel 群 $\mathrm{Tor}_n(G, C)$.

1. 生成元選作三元組 $(\mu, L_\bullet, \nu) = (G \xleftarrow{\mu} L_\bullet \mid DL_\bullet \xrightarrow{\nu} C)$. 其中,
   (a) $L^\bullet = [L_n \to \cdots \to L_0]$ 是有限生成的 U-復形, $\mu : L \to G$ 是鏈映射;
   (b) $D(L)^\bullet := [K(L_0) \to \cdots \to K(L_n)]$ 是對偶復形, $\nu : D(L) \to C$ 是鏈映射.
2. 等價關係: 對任意 $\alpha : P_\bullet \to L_\bullet$, 總有
$$(G \xleftarrow{\mu} L_\bullet \mid DL_\bullet \xrightarrow{\nu \circ D(\alpha)} C) \sim (G \xleftarrow{\mu \circ \alpha} P_\bullet \mid DP_\bullet \xrightarrow{\nu} C). \tag{48}$$
3. 驗證這是雙加法函子. 加法結構由如下 Baer 和給出
$$(\mu, L^\bullet, \nu) + (\lambda, K^\bullet, \iota) := ((\mu, \lambda), L^\bullet \oplus K^\bullet, (\nu, \iota)^T). \tag{49}$$

待補充

Proof. □

命題. 證明存在長正合列.

待補充

Proof. □

例子. 對模範疇, $\mathrm{Tor}_0 = \otimes$.

命題 (對稱定理). $\mathrm{Tor}_\bullet^{\mathcal{A}|\mathcal{B}}(-, |) \simeq \mathrm{Tor}_\bullet^{\mathcal{B}|\mathcal{A}}(|, -)$.

命題 (對消公式). 存在如下 “自然同態”. 待仔細刻畫

1. $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{B}}(-, X) \otimes \mathrm{Tor}^{\mathcal{A}|\mathcal{B}}_{n+k}(Y, -) \to \mathrm{Tor}^{\mathcal{A}|\mathcal{B}}_k(Y, X)$.
2. $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{B}}(X, -) \otimes \mathrm{Tor}^{\mathcal{B}|\mathcal{A}}_{n+k}(-, Y) \to \mathrm{Tor}^{\mathcal{B}|\mathcal{A}}_k(X, Y)$.
3. 嵌套公式?

廣義伴隨?

Abstract

給出 Ext 與 Tor 的 Baer 和構造. 前者的系統性描述見 [?] 之 Chapter VII, 後者見 [?] 之 Chapter five.

加入 satellite $\mathrm{Nat}(\mathrm{Ext}^n_A(X,-), Y\otimes_A -)\simeq \mathrm{Tor}^A_n(Y,X)$ 以串通之?

Ext-部分照抄個人筆記. 茲將提綱暨主要結論悉列如下:

1. 形式化定義雙函子 $\mathrm{Hom}(-,-)$ 的 "加群" 結構: $f+g := \nabla\circ(f\oplus g)\circ\Delta$; 真類亦可
2. 形式化定義雙函子 $\mathrm{Ext}^1(-,-)$ 的 "加群" 結構: $\theta+\tau = \nabla\circ(\theta\oplus\tau)\circ\Delta$; 擴張同構類
3. Ext^n 的雙函子性, Ext-乘法結構;
4. 連接態射 δ^0, $\delta^{\geq 1}$ 保持長正合列 (附: $\mathrm{Ext}^1=0$, $\mathrm{Ext}^2=0$ 的充要條件); ≥ 1 與 1 證明相同, 歸納
5. 小技巧: (3×3)-模型的一對逆元 (推論: Ext^2 中零元恰補全作推出拉回);
6. Ext-群的 zigzag 等價方式: 最多等價三次.
7. 假定局部小範疇, 足夠投射對象, 則以上與導出範疇相同.

例子 ($\mathrm{Ext}^0=\mathrm{Hom}$ 的双函子性)**.** 以下验证 $\mathrm{Hom}(-,-)$ 的双函子性 (从 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 至加群 (包括类) 范畴), 其包括两点: 一切 $\mathrm{Hom}(-,-)$ 是加群, 加法结构与来源, 去向的变换相容.

1. (定义 (B,A) 的加法结构) 定义对角变换 $\Delta_X : X \xrightarrow{\binom{1}{1}} X\oplus X$ 与余对角变换 $\nabla_X : X\oplus X \xrightarrow{(1\ 1)} X$. 既将其视作自然变换, 往后省略 Δ 与 ∇ 的角标. 态射 $f,g\in(B,A)$ 的加法定义如下 Δ: 分開 ∇ 合上

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f\oplus g"] & A \arrow[d, equal] \\ B\oplus B \arrow[u, "\nabla"] \arrow[r, dashed, "(f\quad g)"] \arrow[d, equal] & A \arrow[d, "\Delta"] \\ B\oplus B \arrow[r, "\begin{pmatrix} f & \\ & g\end{pmatrix}"] & A\oplus A \end{tikzcd} \quad . \tag{50}$$

以算式记之, $(f+g)=\nabla(f\oplus g)\Delta$. 此处, $(f\oplus g):=\begin{pmatrix} f & \\ & g\end{pmatrix}$.

2. 显然 0 是零元, f 的逆元是 $-f$.

3. 来源的变换 (拉回) $\beta^* : \mathrm{Hom}(B,A)\to\mathrm{Hom}(B',A)$, $\quad f\mapsto f\circ\beta$ 是良定义的群同态, 去向的变换 (推出) 亦然.

备注. 对 $\mathrm{Ext}^0=\mathrm{Hom}$ 而言, "推出" 与 "拉回" 是前向复合与后项复合; 对 $\mathrm{Ext}^{\geq 1}$ 而言, "推出" 与 "拉回" 由熟悉的 2×2 方块构造. 这两个名词可以统一解释作 Ext-群关于来源与去向的变换.

定义 (短正合列的等价关系)**.** 考虑拆解短正合列的同态为如下四行正合列:

$$\begin{tikzcd} {[E]} \arrow[ddd, "{(\alpha,\beta,\gamma)}"] & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PO}"] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ & 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ & 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d, equal] & E' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ {[E']} & 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{51}$$

依照五引理, 中间两行正合列同构. 这表明 (α,β,γ) 实际由 (α,γ) 决定 (同构的意义下). 从短正合列的同构类的等价关系下, 定义 $\alpha_*[E]=\gamma^*[E']$. 简单地, 记作 $\alpha E = E'\gamma$.

命题 (Ext^1 作为双函子)**.** 需要依次定义 $\mathrm{Ext}^1(B,A)$ 的加法结构, 并验证加法结构与来源, 去向的变换相容.

1. 给定短正合列 $E_i:[0\to B\to X_i\to A\to 0]$, 定义加法 $E_1+E_2=\nabla(E_1\oplus E_2)\Delta$ 如下:

$$\begin{tikzcd}
E_1\oplus E_2 & 0 \arrow[r] & B\oplus B \arrow[r] \arrow[d, "\nabla"'] \arrow[dr, phantom, "\text{推出}"] & X_1\oplus X_2 \arrow[r] \arrow[d] & A\oplus A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{拉回}"] & A\oplus A \arrow[r] & 0 \\
E_1+E_2 & 0 \arrow[r] & B \arrow[r] & Z \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[u, "\Delta"'] & 0
\end{tikzcd} \tag{52}$$

2. 零元即可裂短正合列, 置上图 $E_1:[0\to B\xrightarrow{i} C\xrightarrow{c} A\to 0]$ 与 $E_2:[0\to B\to B\oplus A\to A\to 0]$, 其和为

$$\begin{tikzcd}
E_1\oplus E_2 & 0 \arrow[r] & B\oplus B \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} i & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "(1\ 1)"'] \arrow[dr, phantom, "\text{推出}"] & C\oplus B\oplus A \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} c & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 1 & i & 0\\ 0 & 0 & 1\end{smallmatrix}\right)"] & A\oplus A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} i\\ 0\end{smallmatrix}\right)"'] \arrow[d, equal] & C\oplus A \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} c & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 1\\ c\end{smallmatrix}\right)"'] \arrow[dr, phantom, "\text{拉回}"] & A\oplus A \arrow[r] & 0 \\
E_1+E_2 & 0 \arrow[r] & B \arrow[r, "i"] & C \arrow[r, "c"'] & A \arrow[r] \arrow[u, "\left(\begin{smallmatrix} 1\\ 1\end{smallmatrix}\right)"'] & 0
\end{tikzcd}\ . \tag{53}$$

3. (加法的函子性) 只验证一侧, 另一侧同理.

   (a) $(\alpha_1\oplus\alpha_2)(E_1\oplus E_2)=\alpha_1E_1\oplus\alpha_2E_2$. 这由矩阵乘法直接给出.

   (b) $(\alpha_1+\alpha_2)E=\nabla(\alpha_1\oplus\alpha_2)\Delta E=\nabla(\alpha_1\oplus\alpha_2)(E\oplus E)\Delta=\nabla(\alpha_1E\oplus\alpha_2E)\Delta=\alpha_1E+\alpha_2E$.

   (c) $\alpha(E_1+E_2)=\alpha\nabla(E_1\oplus E_2)\Delta=\nabla(\alpha\oplus\alpha)(E_1\oplus E_2)\Delta=\nabla(\alpha E_1\oplus\alpha E_2)\Delta=\alpha E_1+\alpha E_2$.

   另需验证 $(\alpha E)\beta=\alpha(E\beta)$, 即, 推出与拉回交换. 实际上, 视 $(E\to E_\beta)\to\alpha(E\to E_\beta)$ 为态射范畴的推出即可. 图略.

4. (加法结合律) 依照定义,

$$(E_1+E_2)+E_3=\nabla(E_1\oplus E_2)\Delta+E_3=\nabla(\nabla(E_1\oplus E_2)\Delta\oplus E_3)\Delta=(\nabla(\nabla\oplus 1))(E_1\oplus E_2\oplus E_3)((\Delta\oplus 1)\Delta). \tag{54}$$

   此处 $\nabla(\nabla\oplus 1)=\nabla(1\oplus\nabla)$, Δ 同理.

5. (加法交换律) 依照 $E_1\oplus E_2\sim E_2\oplus E_1$ 即可. 记对换 $\tau=\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$, 上式即

$$\nabla(E_1\oplus E_2)\Delta=\nabla(\tau(E_1\oplus E_2))\Delta=\nabla((E_2\oplus E_1)\tau)\Delta=\nabla(E_2\oplus E_1)\Delta. \tag{55}$$

备注. 容易验证, $0\to A\xrightarrow{i} B\xrightarrow{c} X\to 0$ 的加法逆元是 $0\to A\xrightarrow{i} B\xrightarrow{-c} X\to 0$. 改变任意一处符号即可.

定义 (长正合列的连接态射)**.** 给定 $0\to A\to B\to C\to 0$, 定义连接态射 $\delta:(X,C)\to\mathrm{Ext}^1(X,A)$, $\quad f\mapsto Ef$ 为拉回

$$\begin{tikzcd}
Ef & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] & \bullet \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[dr, phantom, "\text{拉回}"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
E \arrow[u, dashed] & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}\ . \tag{56}$$

命题 (Ext-群的长正合列)**.** 给定短正合列 $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{c} C \to 0$, 则对任意 X 均有长正合列

$$0 \to (X,A) \xrightarrow{(X,i)} (X,B) \xrightarrow{(X,c)} (X,C) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^1(X,A) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^1(X,i)} \mathrm{Ext}^1(X,B) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^1(X,c)} \mathrm{Ext}^1(X,C) \to \cdots \tag{57}$$

Proof. 依次验证正合性即可.

1. ((X,i) 是单射) 这是单射的泛性质.

2. ($\mathrm{im}(X,i) = \ker(X,c)$) 这是核的泛性质.

3. ($\mathrm{im}(X,c) = \ker(\delta)$) 任取 $(f \circ c) \in \mathrm{im}(X,c)$, 则有交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] & Z \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & X \arrow[r] \arrow[d, "fc"] \arrow[dl, dashed, "f"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"'] & B \arrow[r, "c"'] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} . \tag{58}$$

对 $X = X$ 与 $f : X \to B$ 使用拉回的泛性质, 此时得 $Z \twoheadrightarrow X$ 的右逆. 反之, 若正合列沿 $g : X \to C$ 的拉回是可裂短正合列, 则记 $X \to Z \to B$ 合成为 f. 此时 $cf = g$.

4. ($\mathrm{im}(\delta) = \ker(\mathrm{Ext}^1(X,i))$) 任取正合列 $P \in \ker(\mathrm{Ext}^1(X,i))$, 考虑 $sl : Z \to B$ 在余核处的态射, 即得 $P = \delta(\widetilde{sl})$:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & B \arrow[r, shift left] & B \oplus X \arrow[r] \arrow[l, shift left, "s"] & X \arrow[r] & 0 \\
P & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[u, "i"] \arrow[d, equal] & Z \arrow[r] \arrow[u, "l"'] \arrow[d, dashed, "sl"] & X \arrow[r] \arrow[u, equal] \arrow[d, dashed, "\widetilde{sl}"] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"'] & B \arrow[r, "c"'] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} . \tag{59}$$

反之, 则可在左上构造 $Z \to B$, 因此推出是可裂单.

5. ($\mathrm{im}(\mathrm{Ext}^1(X,i)) = \ker(\mathrm{Ext}^1(X,c))$) 依照推出方块的复合律, $\subset$ 方向显然. 反之, 只需构造虚线处正合列

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, dashed] & B \arrow[r, "c"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & Z \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & W \arrow[r] \arrow[d] & C \oplus X \arrow[d] & \\
 & X \arrow[r, dashed, equal] \arrow[d, dashed] & X \arrow[r, equal] \arrow[d] & X \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd} . \tag{60}$$

依照 3×3 引理, 下图三行与右两列是短正合列, 从而左列是短正合列:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, dashed] & B \arrow[r, "c"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, dashed] & W \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed] & X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
\quad . \tag{61}
$$

□

例子 (3 × 3 表格, Ext^2-群的又一刻画)**.** 以下 3×3 蕴含三项 $\mathrm{Ext}^2(C_3, A_1)$ 中相同的元素:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d] & A_2 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & A_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & B_2 \arrow[r] \arrow[d] & B_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_1 \arrow[r] \arrow[d] & C_2 \arrow[r] \arrow[d] & C_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, hook] & B_3 \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & C_3 \arrow[d, equal] \\
A_1 \arrow[r, hook] & B_2 \arrow[r, "\binom{+}{+}"] & C_2 \oplus B_3 \arrow[r, two heads, "{(-,+)}"] & C_3 \\
A_1 \arrow[r, hook] \arrow[u, equal] & B_1 \arrow[r] \arrow[u, hook] & C_2 \arrow[r, two heads, "\boxed{-}"'] \arrow[u, hook] & C_3 \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}
\tag{62}
$$

因此 $A_1 \to A_2 \to B_3 \to C_3$ 与 $A_1 \to B_1 \to C_2 \to C_3$ 在 Ext^2 中是相反的元素. 特别地, $C_1 = 0$ 时以上四项正合列是 Ext^2 中的零元.

定义 (Ext^n 群)**.** 归纳地进行 $\mathrm{Ext}^m(Y,Z)\times \mathrm{Ext}^n(X,Y)\to \mathrm{Ext}^{m+n}(X,Z)$. 定义

$$[0\to Z\to P_1\to\cdots\to P_m\to Y\to 0] \quad \& \quad [0\to Y\to Q_1\to\cdots\to Q_n\to X\to 0] \tag{63}$$

$$\mapsto \quad [0\to Z\to P_1\to\cdots\to P_m\to Q_1\to\cdots\to Q_n\to X\to 0]. \tag{64}$$

备注. 在可复合的意义下, 今后记 Ext^n 中长正合列为 $E^nE^{n-1}\cdots E^2E^1$, 此处每一 $E_i\in \mathrm{Ext}^1$.

定义 (Ext^n-群的运算)**.** 对 Ext^n 中长正合列 $E = E^nE^{n-1}\cdots E^2E^1$, 定义 $\alpha E\beta := (\alpha E^n)E^{n-1}\cdots E^2(E^1\beta)$.

定义 (Ext^n 的等价关系)**.** $\mathrm{Ext}^n(B,A)$ 中的 "长度为 1 的等价关系" 描述作交换图

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & X_n \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & X_1 \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & Y_n \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Y_1 \arrow[r] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\quad . \tag{65}
$$

记以上第一条正合列为 $E_n\cdots E_1$, 其中 $E_k:[0\to\Omega_k\to X_k\to\Omega_{k-1}\to 0]$ 是短正合列, $\Omega_0=B$, $\Omega_n=A$. 记以上第二条正合列 $E_n'\cdots E_1'$, $\alpha_k:\Omega_k\to\Omega_k'$. 此时 $E_k'\alpha_{k-1}=\alpha_kE_k$:

$$
\begin{tikzcd}
E_k & 0 \arrow[r] & \Omega_k \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_k"] & X_k \arrow[r] \arrow[d] & \Omega_{k-1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{k-1}"] & 0 \\
E_k' & 0 \arrow[r] & \Omega_k' \arrow[r] & Y_k \arrow[r] & \Omega_{k-1}' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
. \tag{66}
$$

以上关系生成 Ext^n 的等价关系 (锯齿图). 对 Ext^1 而言, 锯齿图可以拉直 (五引理).

备注. 由定义, 若 $E\sim E'$, 则 $FEG\sim FE'G$, 从而米田积保持该等价关系.

命题. 下图表明 $F(\varphi E')\sim(F\varphi)E'$:

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^1(A,Y)\ni E & 0 \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[rr, dashed, bend right] & & B \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 & \mathrm{Ext}^1(X',A)\ni F \\
\mathrm{Ext}^1(A',Y)\ni E' & 0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & C' \arrow[dr] \arrow[rr, dashed, bend right] & A \arrow[ur] \arrow[d, "\varphi"] & B' \arrow[r] & X' \arrow[r] & 0 & \mathrm{Ext}^1(X',A')\ni F' \\
& & & & A' \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd}
. \tag{67}
$$

换言之, 态射乘法与正合列的米田积相容.

命题 (Ext^n 作为双函子)**.** 需要依次定义 $\mathrm{Ext}^1(B,A)$ 的加法结构, 并验证加法结构与来源, 去向的变换相容.

1. 给定 $E,E'\in\mathrm{Ext}^n(B,A)$, 定义 $E+E'=\nabla(E\oplus E')\Delta$.
2. 零对象即 $0\to A=A\to\cdots\to B=B\to 0$ 所在的等价类. 注: 这并不一定是可裂短正合列, 例如
$$0\to\mathbb{R}\to\mathbb{R}[x]/(x^2)\xrightarrow{\times x}\mathbb{R}[x]/(x^2)\to\mathbb{R}\to 0\quad(\mathrm{Mod}_{\mathbb{R}[x]}) \tag{68}$$
并非可裂短正合列.
3. (加法的函子性) 只验证一侧, 另一侧同理. (特别地, 长度为 0 的正合列即态射.)
   (a) $((F\oplus F')(E\oplus E')=FE\oplus F'E')$. 这由矩阵的乘法直接给出.
   (b) $((E+E')F\sim(EF+E'F))$ 在等价意义下, Δ 与结合律相容. 依照 $\Delta F_k=(F_k\oplus F_k)\Delta$ 逐级计算即可.
4. (加法结合律) 在 $\sim$ 意义下, 将 k 元和统一化作 $(1\cdots 1)(E_1\oplus\cdots\oplus E_k)(1\cdots 1)^T$ 即可.
5. (加法交换律) 在 $\sim$ 意义下, 依照 τ 与结合律相容, 逐级计算即可.

备注. $E_n\cdots E_1$ 的加法逆元是 $E_n\cdots(-E_k)\cdots E_1$. 简单而言, 改变长正合列任意奇数次符号即可.

命题 ($\mathrm{Ext}^2=0$ 的充要条件)**.** 给定正合列 $E:[0\to A\xrightarrow{i_X}X\xrightarrow{\pi_X}B\to 0]$, $F:[0\to B\xrightarrow{i_Y}Y\xrightarrow{\pi_Y}C\to 0]$, 以下条件等价.

1. EF 是 $\mathrm{Ext}^2(C,A)$ 中的零对象 ($EF\sim 0$);

2. 存在 $E \sim E'\alpha$ 使得 $\alpha F \sim 0$;

3. 存在 $E \sim E''\iota_Y$;

4. 存在 $F \sim \beta F'$ 使得 $E\beta \sim 0$;

5. 存在 $F \sim \pi_X F''$;

Proof. 证明顺序: $\left[\begin{tikzcd} 4 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & 2 \arrow[d, leftrightarrow, dashed] & & 2\wedge 3 & 1 \arrow[l] \\ 5 \arrow[r, leftrightarrow] & 3 \arrow[r, Rightarrow, shorten=1em, "" {name=U}] & {} & 2\vee 3 \arrow[u, leftrightarrow, dashed] \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}\right]$. 此处 $\wedge$ 是逻辑 “与”, $\vee$ 是逻辑 “或”.

1. $(2 \to 1.$ 同理地, $3 \to 1)$

$$\begin{tikzcd} E = E'\alpha & A \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, two heads] \arrow[d] & B \arrow[r, hook] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[r, two heads] \arrow[d] & C \arrow[d, equal] & F \\ E' & A \arrow[r, hook] & X' \arrow[r, two heads] & B' \arrow[r, hook] & B' \oplus C \arrow[r, two heads] & C & F' = \alpha F \\ & A \arrow[r, equal] \arrow[u, equal] & A \arrow[rr, "0"] \arrow[u] & & C \arrow[r, equal] \arrow[u] & C \arrow[u, equal] & \end{tikzcd} \cdot \tag{69}$$

2. $(2 \leftrightarrow 3.$ 同理地, $4 \leftrightarrow 5)$ 先看 $2 \to 3$. 若 $E = E'\alpha$ 使得 $\alpha F = 0$, 则存在分解 $\alpha = \varphi i_Y$. 取 $E'' := (E'\varphi)$. 再看 $3 \to 2$. 只需证明 $\iota_Y F = 0$. 依照 “拉回是可裂单” 等价于 “被拉回的态射存在分解”, 因此 $\iota_Y F$ 是可裂短正合列.

3. $(3 \leftrightarrow 5)$ 这都等价于 “$\star$ 是推出与拉回方块”:

$$\begin{tikzcd} & & F'' & F \\ E & A \arrow[r, hook, "i_X"] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, two heads, "\pi_X"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\star"] & B \arrow[d, "i_Y"] \\ E'' & A \arrow[r, hook] & W \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & Y \arrow[d, two heads, "\pi_Y"] \\ & & C \arrow[r, equal] & C \end{tikzcd} \tag{70}$$

4. $(1 \to (2 \vee 4) = (2 \wedge 4))$ 若 $EF \sim 0$, 则存在最小的 k 使得

$$EF \overset{\square}{=} (E_1\alpha_1)F \overset{\S}{\sim} E_1(\alpha_1 F) \overset{\dagger}{=} E_1(\beta_1 F_1) \overset{\star}{\sim} (E_1\beta_1)F_1 = (E_2\alpha_2)F_1 \sim \tag{71}$$

$$\cdots \sim E_k(\alpha_k F_{k-1}) \sim (E_k\beta_k)F_k \sim E_{k+1}(\alpha_{k+1}F_k) = E_{k+1}0. \tag{72}$$

依照数学归纳法, $1 \to (2 \vee 4) = (2 \wedge 4)$ 对 $k = 0$ 成立. 归纳步骤即命题: 若 $\square\S\dagger\star$ 中的等号后式满足 $(2 \wedge 4)$, 则前式亦然.

- $(\star)$ 若 $(E_1\beta_1)F_1$ 满足 “存在 $F_1 \sim \gamma F'$ 使得 $(E_1\beta_1)\gamma \sim 0$”, 则 $E_1(\beta_1 F_1)$ 满足 “$\beta_1 F_1 \sim \gamma\beta_1 F_1$, 使得 $E_1\gamma\beta_1 \sim 0$”.
- $(\dagger)$ 此处 $\alpha_1 F = \beta_1 F_1$ 是相同的对象, 故满足相同的命题.
- $(\S)$ 若 $E_1(\alpha_1 F)$ 满足 “存在 $E_1 \sim E'\delta$ 使得 $\delta\alpha_1 F \sim 0$”, 则 $(E_1\alpha)F$ 满足 “$E_1\alpha_1 \sim E_1\alpha_1\delta$, 使得 $\alpha_1\delta F \sim 0$”.

- ($\square$) 此处 $E\alpha_1 = E$ 是相同的对象, 故满足相同的命题.

$\square$

备注. 对 Ext^n 的论证是同样的: 记 $E \in \mathrm{Ext}^p(B,A)$ 与 $F \in \mathrm{Ext}^q(C,B)$, 则 $EF \sim 0$ 的充要条件为:

1. 存在 $E \sim E'\alpha$ 使得 $\alpha F \sim 0$; 或对偶地, 存在 $F \sim \beta F'$ 使得 $E\beta \sim 0$;

2. $E \sim E''\iota_Y$ (ι_Y 是正合列 F 的首个单态射); 或对偶地, 存在 $F \sim \pi_X F''$ 使得 $E\pi_X \sim 0$ (π_X 是正合列 E 的末个满态射).

命题 (Ext^n 的长正合列)**.** 给定短正合列 $S := 0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{c} C \to 0$, 则有长正合列

$$\cdots \xrightarrow{\delta^{n-1}} \mathrm{Ext}^n(X,A) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^n(X,i)} \mathrm{Ext}^n(X,B) \xrightarrow{\mathrm{Ext}^n(X,c)} \mathrm{Ext}^n(X,C) \xrightarrow{\delta^n} \mathrm{Ext}^{n+1}(X,A) \to \cdots. \tag{73}$$

Proof. 依次证明 $\mathrm{Ext}^n(X,A)$, $\mathrm{Ext}^n(X,B)$ 与 $\mathrm{Ext}^n(X,C)$ 处正合性. 以上一切 δ^k 无非左复合 S.

1. ($\mathrm{Ext}^n(X,A)$ 处正合) 任取 $SE \in \mathrm{im}(\delta^{n-1})$, 则自然有 $(iS)E = 0E \sim 0$. 反之, 若 $iE \sim 0$, 则写 E 作 $E_n E_{(n-1)\to 1}$. 此时存在 $E_{(n-1)\to 1} \sim \alpha F$ 使得 $iE_n\alpha \sim 0$. 依照前文对 δ^0 正合性的说明, 存在 $E_n\alpha \sim S\beta$. 因此 $E \sim S(\beta F) \in \mathrm{im}(\delta^{n-1})$.

2. ($\mathrm{Ext}^n(X,B)$ 处正合) 将第一问中的所有 (i,S) 换作 (c,i) 即可.

3. ($\mathrm{Ext}^n(X,C)$ 处正合) 将第一问中的所有 (i,S) 换作 (S,c) 即可.

$\square$

命题 (拉直零对象的锯齿)**.** 若 $E \sim 0$, 则存在 $E \overset{\sim}{\to} F \overset{\sim}{\leftarrow} \mathcal{O}$ (等价地, $E \overset{\sim}{\leftarrow} F \overset{\sim}{\to} \mathcal{O}$). 此处 $\overset{\sim}{\to}$ 与 $\overset{\sim}{\leftarrow}$ 指 "长度为 1 的等价",

$$\mathcal{O}: \quad 0 \to X = X \to 0 \to \cdots \to 0 \quad \oplus \quad 0 \to \cdots \to 0 \to Y = Y \to 0. \tag{74}$$

Proof. 只看 $E \overset{\sim}{\to} F \overset{\sim}{\leftarrow} \mathcal{O}$. 存在 $F \overset{\sim}{\to} \mathcal{O}$ 的充要条件是, F 最右端的满态射可裂. 此时取 $\alpha : E \to F$ 如下:

- 记 $E = E_n \cdots E_1$, 则存在 α_n 使得 $E_n = F_n\alpha_n$, 且 $\alpha_n E_{(n-1)\to 1} \sim 0$;

- 对 $\alpha_k E_{k-1} \cdots E_1 \sim 0$, 存在 $\alpha_k E_{k-1} = F_{k-1}\alpha_{k-1}$ 使得 $\alpha_{k-1}E_{k-2}\cdots E_1 \sim 0$;

- 最后 $\alpha_2 E_1 =: F_1$ 是可裂短正合列.

$\square$

备注. 下给出一例 "长度不为 1 的等价". 在 $\mathbb{R}[x]$-模范畴中取长为 2 的短正合列:

$$0 \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}[x]/(x^2) \xrightarrow{\times x} \mathbb{R}[x]/(x^2) \to \mathbb{R} \to 0 \quad (\mathrm{Mod}_{\mathbb{R}[x]}). \tag{75}$$

显然以上正合列不可裂. 依照 $\mathrm{Ext}^2 = 0$ 的充要条件, 以上 $\times x$ 处态射的满-单分解是推出与拉回方块

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}[x]/(x^2) \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] \arrow[dr, dashed, "\times x"] & \mathbb{R} \arrow[d, hook] \\
\mathbb{R}[x]/(x^3) \arrow[r, two heads] & \mathbb{R}[x]/(x^2)
\end{tikzcd}. \tag{76}$$

实际上, 由 $\mathbb{R}[x]$ 的整体维数是 1 知 $\mathrm{Ext}^2 = 0$.

命題. 若 $E \sim F$, 則存在 $E \xrightarrow{\sim} \bullet \xleftarrow{\sim} \bullet \xrightarrow{\sim} F$ (对称表述略).

Proof. 由于 $E + (-F) \sim 0$, 故存在 $0 \xrightarrow{\sim} K \xleftarrow{\sim} E \oplus (-F)$. 在右侧直和 $\oplus F$, 依照 $(E \oplus F) \oplus G = E \oplus (F \oplus G)$, 取 $(-F) \oplus F \xrightarrow{\sim} 0$.

$$F \xrightarrow{\sim} K \oplus F \xleftarrow{\sim} E \oplus (-F) \oplus F \xrightarrow{\sim} E \tag{77}$$

即为所求. □

备注. 假若范畴有足够投射对象 (内射对象), 维数移位给出更简短的刻画: $E \xleftarrow{\sim} \bullet \xrightarrow{\sim} F$ ($E \xrightarrow{\sim} \bullet \xleftarrow{\sim} F$).

1.10 譜序列簡介

Abstract

關於 Leray 早期工作, 層與譜序列嚆矢等參見 [2]. 較 suite spectrale 之稱呼, anneau spectral 之稱更能體現其環結構.

1.10.1 譜序列的定義, 構造 I, 以及收斂性: 濾過復形

Abstract

先建立一條邏輯閉環: 用 (A, d, F) 構造 E, 再證明其 E_∞ 收斂至 (A, d, F). 往後加入 "收斂至 (A, d, F) 的譜序列" 這一記號.

這是一條清晰的路, 既不涉及正合耦, 又不涉及雙複形.

定义 ((上) 同調譜序列)**.** 先明確定向: $(1, 0) = \rightarrow$ 是往右, $(0, 1) = \uparrow$ 是往上. 稱一組資料 $\{(E_r, d_r)\}$ 是同調譜序列, 若以下滿足.

1. 凡 E_r 均是 $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$-指標的對象, 凡 d_r 均是 $(r, 1-r)$ 朝向的態射, 滿足 $d_r^2 = 0$.

2. 凡 E_{r+1} 均是 E_r 在各分量取同調群所得, 即 $E_{r+1} = H(E_r)$.

备注. 箭頭朝向可以整體轉置. 稱上述同調的譜序列, 是以微分逐級傾斜. 假定 E_0 的支撐集在滿足某種有限性, 則存在穩定項 $E_r = E_\infty$.

例子 (譜序列的構造 I: 濾過複形 (微分分次模))**.** 給定微分分次模 $(A^\bullet, d)$ (也就是上鏈複形). 稱 $F^\bullet(-)$ 是 $A^\bullet$ 的濾過, 當且僅當存在形如以下的 $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$-規格的交換圖

↘ 向減小

↑ 向微分

$$\begin{tikzcd}
F^{p-1}A^{p+q} \arrow[rd, dotted, dash, "\supset" description] & F^pA^{p+q+1} \arrow[rd, dotted, dash, "\supset" description] & \\
F^{p-1}A^{p+q-1} \arrow[u] \arrow[rd, dotted, dash, "\supset" description] & F^pA^{p+q} \arrow[u] \arrow[rd, dotted, dash, "\supset" description] & F^{p+1}A^{p+q+1} \\
\boxed{\text{輸入}(A, F)} & F^pA^{p+q-1} \arrow[u] & F^{p+1}A^{p+q} \arrow[u]
\end{tikzcd} \tag{78}$$

此時, 定義 $E_0^{p,q} = \frac{F^pA^{p+q}}{F^{p+1}A^{p+q}}$, 相應的微分繼承自 d.

$\frac{s(\searrow)}{t(\searrow)}$

$$
\begin{tikzcd}
\frac{F^{p-1}A^{p+q}}{F^pA^{p+q}} & \frac{F^pA^{p+q+1}}{F^{p+1}A^{p+q+1}} & \\
\frac{F^{p-1}A^{p+q-1}}{F^pA^{p+q-1}} \arrow[u] & \frac{F^pA^{p+q}}{F^{p+1}A^{p+q}} \arrow[u] & \frac{F^{p+1}A^{p+q+1}}{F^{p+2}A^{p+q+1}} . \\
\boxed{E_0(A,F)} & \frac{F^pA^{p+q-1}}{F^{p+1}A^{p+q-1}} \arrow[u] & \frac{F^{p+1}A^{p+q}}{F^{p+2}A^{p+q}} \arrow[u]
\end{tikzcd}
\tag{79}
$$

計算譜序列第一頁, 得 $E_1^{p,q} = H^{p+q}(F^pA/F^{p+1}A)$. **算第二頁? 我們卡住了: 微分需要人工定義!**

定義 d_1?

- 嘗試計算 $\frac{F^pA^{p+q}}{F^{p+1}A^{p+q}}$ 處同調群如下, 若將 ker 與 im 都看做商集 $\frac{F^pA^{p+q}}{F^{p+1}A^{p+q}}$ 的子集, 則

$$
E_1^{p,q} = H_0^{p,q} = \frac{[F^pA^{p+q} \quad \cap \quad d^{-1}(F^{p+1}A^{p+q+1})] \quad \mathrm{mod} \quad F^{p+1}A^{p+q}}{[F^pA^{p+q} \quad \cap \quad d(F^pA^{p+q-1})] \quad \mathrm{mod} \quad F^{p+1}A^{p+q}} \tag{80}
$$

此處 mod 亦可改作 $+$. 括號也可以省略: 模恆等式表明 $(U^\sharp \cap V) + U^\flat = U^\sharp \cap (V + U^\flat)$.

將 $\boxed{F^pA^{p+q}}$ 處的濾過定位回複形, 得

$$
\begin{tikzcd}
F^{p-1}A^{p+q} \arrow[dr, dotted, no head, "\supset" description] & F^pA^{p+q+1} \arrow[dr, dotted, no head, "\supset" description] & \\
F^{p-1}A^{p+q-1} \arrow[u] \arrow[dr, dotted, no head, "\supset" description] & \boxed{F^pA^{p+q}} \arrow[u] \arrow[dr, dotted, no head, "\supset" description] & F^{p+1}A^{p+q+1} . \\
& F^pA^{p+q-1} \arrow[u] & F^{p+1}A^{p+q} \arrow[u]
\end{tikzcd}
\tag{81}
$$

我們希望在 (p,q)-坐標處給出一族 Z 與 B 的濾過, 最好是以 r-爲指標的. 最終效果如下

q 混在分次模的各分量中, 自行析出

1. (Z-部) $\underbrace{F^p \cap d^{-1}(F^{p+1})}_{Z_0^p} \supseteq \underbrace{F^p \cap (d^{-1}(F^{p+r+1})) + F^{p+1}}_{Z_r^p} \supseteq \underbrace{F^p \cap (\ker d) + F^{p+1}}_{Z_\infty^p}$;
2. (B-部) $\underbrace{F^p \cap (\mathrm{im}\ d) + F^{p+1}}_{B_\infty^p} \supseteq \underbrace{F^p \cap (d(F^{p-r})) + F^{p+1}}_{B_r^p} \supseteq \underbrace{F^p \cap (0) + F^{p+1}}_{B_0^p}$;
3. (H-群) $H_r = E_{r+1}$.

整合之, 得一條濾過鏈:

$$
F^p \cap d^{-1}(F^{p+1}) = \underbrace{Z_0^p \supseteq \cdots \supseteq Z_\infty^p}_{Z-\text{濾過}} = F^p \cap (\ker d) + F^{p+1} \supseteq F^p \cap (\mathrm{im}\ d) + F^{p+1} = \underbrace{B_\infty^p \supseteq \cdots \supseteq B_0^p}_{B-\text{濾過}} = F^{p+1} \tag{82}
$$

此時的微分如何選取? 先給出 $d_r : E_r \to E_{r+1}$ 的滿-單分解. 由 Zassenhaus 引理的函子性,

$$
\frac{Z_{r-1}^p}{Z_r^p} = \frac{F^p \cap (d^{-1}(F^{p+r})) + F^{p+1}}{F^p \cap (d^{-1}(F^{p+r+1})) + F^{p+1}} \tag{83}
$$

$$
\frac{A^\sharp \cap X^\sharp + A^\flat}{A^\sharp \cap X^\flat + A^\flat} \simeq \frac{d(F^p) \cap F^{p+r} + d(F^{p+1})}{d(F^p) \cap F^{p+r+1} + d(F^{p+1})} \tag{84}
$$

$$
\frac{X^\sharp \cap A^\sharp + X^\flat}{X^\sharp \cap A^\flat + X^\flat} \simeq \frac{F^{p+r} \cap d(F^p) + F^{p+r+1}}{F^{p+r} \cap d(F^{p+1}) + F^{p+r+1}} = \frac{B_r^{p+r}}{B_{r-1}^{p+r}} \tag{85}
$$

由以上, $E_r^p \to E_r^{p+r}$ 自然繼承自 d, 即

$B_{r-1} \subseteq Z_r$

$$E_r^p = H_{r-1}^p = \frac{Z_{r-1}^p}{B_{r-1}^p} \twoheadrightarrow \frac{Z_{r-1}^p}{Z_r^p} \simeq \frac{B_{r-1}^{p+r}}{B_r^{p+r}} \hookrightarrow \frac{Z_r^{p+r}}{B_r^{p+r}} = E_{r+1}^p. \tag{86}$$

容易看出, d_r 的朝向是右移 $(r, r-1)$.

例子 (收斂極限)**.** 對以上濾過復形計算 E_∞, 得 ($\simeq$ 使用 Zassenhaus)

$$E_\infty^p = \frac{F^p \cap (\ker d) + F^{p+1}}{F^p \cap (\mathrm{im}\ d) + F^{p+1}} \simeq \frac{(\ker d) \cap F^p + (\mathrm{im}\ d)}{(\ker d) \cap F^{p+1} + (\mathrm{im}\ d)}. \tag{87}$$

考慮極端情況 $F^0 = \mathrm{id}$ 與 $F^1 = 0$, 則 $E_\infty^p = \frac{\ker(d)}{\mathrm{im}\ d}$ 就是同調群. 一般地, $E_\infty^{\bullet;q}$ 給出 $H^q(A)$ 的濾過.

定义 (收斂)**.** 稱 (E, d) 收斂至複形 (微分分次模) A, 當且僅當**存在濾過** F 使得

$$E_\infty^{p;q} = \frac{F^p H^{p+q}(A)}{F^{p+1} H^{p+q}(A)} = \frac{(\ker d) \cap F^p + (\mathrm{im}\ d) \quad \text{at } (p+q)\text{-th degree}}{(\ker d) \cap F^{p+1} + (\mathrm{im}\ d) \quad \text{at } (p+q)\text{-th degree}}. \tag{88}$$

爲避免一些麻煩, 通常規定譜序列與複形濾過是有限型的.

定理. 依照構造, (A, d, F) 的譜序列收斂至 (A, d).

例子 (計算示例: 同調代數基本定理)**.** 給定濾過複形 $X \supseteq K \supseteq 0$, 譜序列收斂至 $E_2 = E_\infty$:

$$\begin{array}{ccccccc}
X^{p+1}/K^{p+1} & K^{p+2} & & H^{p+1}(X/K) \xrightarrow{\delta^{p+1}} H^{p+2}(K) & & \ker(\delta^{p+1}) & \mathrm{cok}(\delta^{p+1}) \\
\uparrow & \uparrow & & & & & \\
X^p/K^p & K^{p+1} & & H^p(X/K) \xrightarrow{\delta^p} H^{p+1}(K) & & \ker(\delta^p) & \mathrm{cok}(\delta^p) \\
\uparrow & \uparrow & & & & & \\
X^{p-1}/K^{p-1} & K^p & & H^{p-1}(X/K) \xrightarrow{\delta^{p-1}} H^p(K) & & \ker(\delta^{p-1}) & \mathrm{cok}(\delta^{p-1}) \\
& & & & & & \\
\boxed{E_0} & & & \boxed{E_1} & & \boxed{E_2} = = = & \boxed{E_\infty}
\end{array}. \tag{89}$$

收斂終點即 X 的分次同調群, $\searrow$ 向分別是商與子, 即 $H^p(X)/\mathrm{cok}(\delta^{p-1}) \simeq \ker(\delta^p)$. 此時得到連接態射組成的長正合列

$$\cdots \to H^{p-1}(X/K) \to H^p(K) \to [\mathrm{coker}(\delta^{p-1})] \to H^p(X) \to [\ker(\delta^p)] \to H^p(X/K) \to H^{p+1}(K) \to \cdots. \tag{90}$$

备注. 一個特殊技巧: 算至 E_2 時, 即可預判所有 $(1, -1)$-朝向的箭頭至多有兩處支撐, 從而將全複形的同調群直接嵌入即可.

$$\begin{tikzcd}
H^{p+1}(X/K) \arrow[r, "\delta^{p+1}"] & H^{p+2}(K) \\
H^p(X/K) \arrow[r, "\delta^p"] & H^{p+1}(K) \arrow[ul, "H^{p+1}(X)"'] \\
H^{p-1}(X/K) \arrow[r, "\delta^{p-1}"] & H^p(K) \arrow[ul, "H^p(X)"'] \\
\boxed{E_2} &
\end{tikzcd}. \tag{91}$$

例子 (乘法結構)**.** 依照定義, 譜序列 (E_r, d_r) 是一族滿足特殊條件的分次模. 依照動機

拓撲學: 譜序列是拿來乘的

- A_∞-代數從 H 還原原始信息, 揭示了同調群間 (且唯一的) 乘法結構. 關於 $A-\infty$-代數的介紹見 [?].

稱 (E,d,μ,ε) 是譜序列的一個乘法結構, 當且僅當 (假定 $d_0\ \uparrow$): $\varepsilon(p,q)$ 是符號

1. (初始設定) $(E_0,d,\mu_0,\varepsilon)$ 是分次代數;
2. (誘導結果) 依照 $H=\frac{Z}{B}=\frac{\text{子分次代數}}{\text{分次雙邊理想}}$, 所有 $(E_r,d_r,\mu_r,\varepsilon)$ 都是分次代數, d_r 的次數爲 $(r,1-r)$;
3. (相容條件) 分次模同構 $H^{p,q}(E_r)\to E^{p;q}_{r+1}$ 建立了分次代數同構.

特別地, 我們希望初始設定 (E_0,d_0) 能夠誘導譜序列的乘法結構.

定理 (帶乘法結構的 1 濾過復形收斂定理)**.** 假定 (A,d,μ) 是濾過分次代數 $|d|=1$, 則收斂定理中的譜序列帶有乘法結構

1. [?] 構造譜序列的帶有自然的乘法結構 (E,d,μ,ε), 其中 μ_r 由商關係誘導, $\varepsilon(p,q)=p+q$.
2. 收斂終點 $E_\infty p,q\simeq(F^pH^{p+q})/(F^{p+1}H^{p+q})$ 是分次模的同構, 同時也是分次代數的同構.

Proof. 取代表元進行驗證即可. 關鍵使用了諸 B_r 的雙邊理想性. □

1.10.2 譜序列的構造 II: 雙複形

定义 (雙複形)**.** 稱 (A,d) 是雙復形, 若 A 是 $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$-分次模, $d=\{d_\to,d_\uparrow\}$ 滿足 $\mathrm{Tot}(X) = \mathrm{Tot}(X^T)$

$$d_\to:A^{p,q}\to A^{p+1,q},d_\uparrow:A^{p,q}\to A^{p,q+1},\quad d_\uparrow\circ d_\uparrow=d_\to\circ d_\to=0,d_\to\circ d_\uparrow=d_\uparrow\circ d_\to. \tag{92}$$

有時 (時常) 規定 $I:=\to$, $II:=\uparrow$.

备注. 特別注釋: 有些定義要求中間方塊交換, 微分時不給出 (±1)-分次.

例子 (動機: double counting)**.** 願景: 先取橫向微分的同調群, 縱向的譜序列收斂至 $\mathrm{Tot}(X)$; 若先取縱向微分, 橫向譜序列亦收斂至 $\mathrm{Tot}(X)$.
先假定 X 支撐有限. 顯然

$$\left(\frac{F^p_\to\mathrm{Tot}(X)}{F^{p+1}_\to\mathrm{Tot}(X)}\right)^{p+q}\simeq X^{p+q}\simeq\left(\frac{F^q_\uparrow\mathrm{Tot}(X)}{F^{q+1}_\uparrow\mathrm{Tot}(X)}\right)^{p+q}. \tag{93}$$

從而 ${}_\to E_1^{p,q}=H^{p,q}(\mathrm{Tot}(X),F_\to)$ 與 ${}_\uparrow E_1^{p,q}=H^{p,q}(\mathrm{Tot}(X),F_\uparrow)$ 都是收斂至 $\mathrm{Tot}(X)$ 的.

定理. 以上 ${}_\to E$ 與 ${}_\uparrow E$ 有更好的性質: 在雙復形微分的自然誘導下,

1. ${}_\to E_2$ 恰是 $H_\to(X)$ 的同調群, 換言之, ${}_\to E_2^{p,q}=H\left(H_\uparrow^{p,q-1}(X)\to H_\uparrow^{p,q}(X)\to H_\uparrow^{p,q+1}(X)\right)$;
2. ${}_\uparrow E_2$ 恰是 $H_\uparrow(X)$ 的同調群, 換言之, ${}_\uparrow E_2^{p,q}=H\left(H_\to^{p-1,q}(X)\to H_\to^{p,q}(X)\to H_\to^{p+1,q}(X)\right)$.

Proof. 追圖即可. □

备注. 這告訴我們, 存在兩個收斂至 $\mathrm{Tot}(X)$ 的譜序列, 第二頁分別是雙複形的 "橫向同調群的縱向同調群" 與 "縱向同調群的橫向同調群".

例子 (強形式蛇引理)**.** 給定正合列的同態 $f : X \to Y$, 則範性質確定的典範態射 $\ker(f)[-1] \to \mathrm{cok}(f)[1]$ 是擬同構.

Proof. 考慮縱向同調群, 計算橫向譜序列得

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\boxed{X_\uparrow} & Y^{n-2} & Y^{n-1} & Y^n & Y^{n+1} & Y^{n+2} \\
 & X^{n-2} \arrow[u, "f^{n-2}"] & X^{n-1} \arrow[u, "f^{n-1}"] & X^n \arrow[u, "f^n"] & X^{n+1} \arrow[u, "f^{n+1}"] & X^{n+2} \arrow[u, "f^{n+2}"] \\
\boxed{H_\uparrow(X)} \arrow[d, equal] & \ker(f^{n-2}) \arrow[r] & \ker(f^{n-1}) \arrow[r] & \ker(f^n) \arrow[r] & \ker(f^{n+1}) \arrow[r] & \ker(f^{n+2}) \\
\boxed{{}_\to E_1} & \mathrm{cok}(f^{n-2}) \arrow[r] & \mathrm{cok}(f^{n-1}) \arrow[r] & \mathrm{cok}(f^n) \arrow[r] & \mathrm{cok}(f^{n+1}) \arrow[r] & \mathrm{cok}(f^{n+2}) \\
\boxed{H_\to(H_\uparrow(X))} & H^{n-2}(\ker) \arrow[dr, "\varepsilon^{n-1}"] & H^{n-1}(\ker) \arrow[dr, "\varepsilon^n"] & H^n(\ker) \arrow[dr, "\varepsilon^{n+1}"] & H^{n+1}(\ker) \arrow[dr] & H^{n+2}(\ker) \\
\boxed{{}_\to E_2} & H^{n-2}(\mathrm{cok}) & H^{n-1}(\mathrm{cok}) & H^n(\mathrm{cok}) & H^{n+1}(\mathrm{cok}) & H^{n+2}(\mathrm{cok})
\end{tikzcd} \tag{94}$$

${}_\to E_3 = {}_\to E_\infty$, 因此 $0 \to \mathrm{cok}(\varepsilon^{n-1}) \to ? \to \ker(\varepsilon^n) \to 0$ 是 $H(\mathrm{Tot}) = 0$ 的濾過. 故 ε 是同構. □

定理 (复形态射基本定理)**.** 若 $f^\bullet : Y^\bullet \to X^\bullet$ 是双边无界的复形的同态, 则存在复形 (可取作全复形) E 使得下图是正合列的交换图

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
H^{k-2}(X^\bullet) \arrow[r] & H^{k-1}(E^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^{k-1}(Y^\bullet) \arrow[r] & H^{k-1}(X^\bullet) \arrow[r] & H^k(E^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^k(Y^\bullet) \\
H^{k-1}(\ker(f^\bullet)) \arrow[r] & H^{k-1}(E^\bullet) \arrow[r] & H^{k-2}(\mathrm{cok}(f^\bullet)) \arrow[r] & H^k(\ker(f^\bullet)) \arrow[r] & H^k(E^\bullet) \arrow[r] & H^{k-1}(\mathrm{cok}(f^\bullet))
\end{tikzcd} \tag{95}$$

Proof. 视 $2 \times n$ 方块为全复形 $E^\bullet$, 依次计算 $E^\bullet$ 各阶同调群的横向与纵向滤过即可. □

必須強調有界!

例子 (收斂性定理的 "反例")**.** 假定雙復形或濾過復形是 $(\to, \uparrow)$ 朝向的. 若對任意 s, 復形在一切 $\{(p,q) \mid p+q=s\}$ 僅有限項非零, 則譜序列在有限步後必然穩定. 常見的例子是 "二/四象限-型譜序列". 特別地,

逐點收斂即可, 不必一致收斂

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, equal] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 & & \\
 & 0 \arrow[u] \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[u, equal] \arrow[r, equal] & \mathbb{Z} \arrow[u] \arrow[r] & 0 & \\
 & & 0 \arrow[u] \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[u, equal] \arrow[r, equal] & \mathbb{Z} \arrow[u] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{96}$$

中無界的復形各行列正合, 故譜序列收斂至 0; 但全復形的是微分爲 0 的非零復形, 從而非正合.

1.10.3 應用: AR 序列

定理 (Auslander defeat)**.** 選定好一些的代數 (例如有限維代數), 則任意短正合列 $0 \to K \to X \to Y \to 0$, 則有長正合列

$$0 \to (-, K) \to (-, X) \to (-, Y) \to \mathrm{Tr}(-) \otimes K \to \mathrm{Tr}(-) \otimes X \to \mathrm{Tr}(-) \otimes Y \to 0. \tag{97}$$

Proof. 取 $0 \to \nu(M) \to \nu(P_0) \to \nu(P_1) \to \mathrm{Tr}(M) \to 0$, 使用蛇引理. □

定理 (穩定 Hom). 對賦值 $Y \otimes X^t \to (X, Y), \quad y \otimes f \mapsto [x \mapsto y \cdot f(x)]$, 有正合列

$$0 \to \operatorname{Tor}_2(\operatorname{Tr}(X), Y) \to Y \otimes X^t \to (X, Y) \to \operatorname{Tor}_1(\operatorname{Tr}(X), Y) \to 0. \tag{98}$$

特別地, $\operatorname{Tor}_1(\operatorname{Tr}(M), N) = \underline{\operatorname{Hom}(M, N)}$.

Proof. 對 M 取平坦分解 (投射分解) $F^{-1} \to F^0 \to M \to 0$, 類似取 $Q \to N$. 此時

$$\begin{array}{c}
\begin{tikzcd}
\cdots & (F^{-1})^t \otimes Q^{-2} & (F^{-1})^t \otimes Q^{-1} & (F^{-1})^t \otimes Q^{0} & \\
\cdots \arrow[u] & (F^{0})^t \otimes Q^{-2} \arrow[u] & (F^{0})^t \otimes Q^{-1} \arrow[u] & (F^{0})^t \otimes Q^{0} \arrow[u] & \boxed{E_0}
\end{tikzcd} \\
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \operatorname{Tr}(M) \otimes Q^{-2} \arrow[r] & \operatorname{Tr}(M) \otimes Q^{-1} \arrow[r] & \operatorname{Tr}(M) \otimes Q^{0} & \\
\cdots \arrow[r] & M^t \otimes Q^{-2} \arrow[r] & M^t \otimes Q^{-1} \arrow[r] & M^t \otimes Q^{0} & \boxed{E_1}
\end{tikzcd} \\
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[drr] & \operatorname{Tor}_2(\operatorname{Tr}(M), N) & \operatorname{Tor}_1(\operatorname{Tr}(M), N) \arrow[dr] & \operatorname{Tr}(M) \otimes N & \\
\cdots & \operatorname{Tor}_2(M^t, N) & \operatorname{Tor}_1(M^t, N) & M^t \otimes N & \boxed{E_2}
\end{tikzcd}
\end{array}. \tag{99}$$

E_2 收斂至全復形的同調群; 或是將 E_0 箭頭該做橫向, 得 $E_1 = \begin{array}{c} (F^{-1})^t \otimes N \\ \uparrow \\ (F^0)^t \otimes N \end{array}$, 相應地,

1. E_2 上項 $\operatorname{cok}[(F^0)^t \to (F^{-1})^t] \otimes N = \operatorname{Tr}(M) \otimes N$;
2. E_2 下項 $\ker[(F^0, N) \to (F^{-1}, N)] = (M, N)$.

雙復形的全同調群 $[\operatorname{Tr}(M) \otimes N \quad \operatorname{Tor}_1(\operatorname{Tr}(M), N) \quad \cdots \quad]$. "配上" E_2 的濾過, 得到

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[drr] & \operatorname{Tor}_2(\operatorname{Tr}(M), N) \arrow[drr] & \operatorname{Tor}_1(\operatorname{Tr}(M), N) \arrow[dr] & \operatorname{Tr}(M) \otimes N \arrow[dr] & & \\
\cdots \arrow[u, dashed, "H_3"] & \operatorname{Tor}_2(M^t, N) \arrow[u, dashed, "H_2"] & \operatorname{Tor}_1(M^t, N) \arrow[u, dashed, "H_1"] & M^t \otimes N \arrow[u, dashed, "H_0"] & 0 & 0
\end{tikzcd}. \tag{100}$$

H_0 處顯然. H_1 對應四項長正合列

最後說明 $\underline{(M, N)} \simeq \operatorname{Tor}_1(\operatorname{Tr}(M), N)$. 取投射蓋 $p : Q^0 \to N$, 穩定 Hom 即 $\operatorname{coker}(M, p)$. 穩定 Hom

$$\begin{tikzcd}
& M^t \otimes P \arrow[d, two heads] \arrow[dr] & 0 & \\
\vdots \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & M^t \otimes N \arrow[r] \arrow[d] & (M, N) \arrow[r] \arrow[dr] & \operatorname{cok}(p) \arrow[ul, dashed] \\
& 0 \arrow[rr, dashed] & & \underline{(M, N)} \arrow[u, dashed]
\end{tikzcd} \tag{101}$$

對上述符合態射使用小-蛇引理, 得同構 $\underline{(M, N)} \simeq \operatorname{cok}(p)$. $\square$

定理 (穩定 Tensor ?). 有典範四項正合列

$$0 \to \operatorname{Ext}^1(\operatorname{Tr}(M), N) \to N \otimes M \to (M^t, N) \to \operatorname{Ext}^2(\operatorname{Tr}(M), N) \to 0. \tag{102}$$

依照 $M \simeq (M^t)^t$, 得正合列的同構

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Tor}_2(\operatorname{Tr}(M), N) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & N \otimes M^t \arrow[r] \arrow[d, equal] & (M, N) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \operatorname{Tor}_1(\operatorname{Tr}(M), N) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ext}^1(\operatorname{Tr}(M^t), N) \arrow[r] & N \otimes M^t \arrow[r] & (M, N) \arrow[r] & \operatorname{Ext}^2(\operatorname{Tr}(M^t), N) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}. \tag{103}$$

1.10.4 應用：超同調代數

备注. 同調代數的一個重要構造是對象的投射消解與內射餘消解, 如果將對象換上組合性質 (通過 $\mathcal{A} \to C(\mathcal{A})$), 能否繼續建立相應的投射分解?

定理 (Eilenburg-Cartan 消解, 超-投射分解/內射分解)**.** 給定復形 $X^\bullet$ (坐標 $(0, \bullet)$), 則存在投射復形的消解

$$[\cdots \to P^{-1,\bullet} \to P^{0,\bullet} \to X^\bullet \to 0] \quad =: \quad [P \to X \to 0]. \tag{104}$$

特別地, 若 P 關於 $\searrow\nwarrow$ 方向有限, 則 $\mathrm{Tot}(P) \to X$ 是擬同構.

Proof. 對復形 $X^{p-1} \to X^p \to X^{p+1}$ 之中項提出 $0 \to \ker(d^p) \to X^p \to \mathrm{im}(d^p) \to 0$, 轉化得 $0 \to \mathrm{im}(d^{p-1}) \to \ker(d^p) \to H^p(X) \to 0$. 更清晰地, 有下圖

$$\begin{tikzcd}
X^{p-1} \arrow[rr, two heads, dotted] \arrow[dr, two heads, dotted] & & \mathrm{im}(d^{p-1}) \arrow[rr, hook, dotted] \arrow[dr, hook] & & X^p \arrow[rr, two heads, dotted] \arrow[dr, two heads, dotted] & & \mathrm{im}(d^p) \arrow[rr, hook, dotted] \arrow[dr, hook] & & X^{p+1} \\
& \mathrm{cok}(d^{p-2}) \arrow[ur, two heads] & & \ker(d^p) \arrow[ur, hook, dotted] \arrow[dr, two heads] & & \mathrm{cok}(d^{p-1}) \arrow[ur, two heads] & & \ker(d^{p+1}) \arrow[ur, hook, dotted] \arrow[dr, two heads] & \\
H^{p-1}(X) \arrow[ur, hook] & & & & H^p(X) \arrow[ur, hook] & & & & H^{p+1}(X)
\end{tikzcd} \tag{105}$$

先對 H 與 im 進行投射分解, 使用馬蹄引理構造 ker 或 cok 的投射分解, 最後再使用一次馬蹄引理構造 X 的投射分解即可. **構造出的 $I^{p,\bullet}$ 甚至都是可裂的!** 超可裂消解

雙復形 P 所有橫行在 $p \neq 0$ 時正合, $p = 0$ 處的同調群恰好是 X. 假若該雙復形在 $\searrow\nwarrow$ 方向有限, 由譜序列收斂性定理知 $H(X) = \uparrow E_2 \Rightarrow H(\mathrm{Tot}(P))$, 因此 $\mathrm{Tot}(P) \to X$ 誘導了擬同構. □

定义 (超-導出函子)**.** 對左正合函子 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 考察 i-次右導出, 實際上是復合函子

$$[R^i F] = [\mathcal{A} \hookrightarrow D(\mathcal{A}) \xrightarrow{RF} D(\mathcal{B}) \xrightarrow{H^i(-)} \mathcal{B}]. \tag{106}$$

將第一處 $\hookrightarrow$ 捨去, 可定義 $R^i F : D(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}$. 右正合的左導出亦然.

例子 (Kunneth 譜序列)**.** 給定上有界復形 C 與可裂超投射分解 $P \to C$. 此時, $R^i F(C) = R^i F(\mathrm{Tot}(P))$. 可以計算以下譜序列 可裂!

$$\begin{tikzcd}
F(I^{-1,p+1}) & F(I^{0,p+1}) & F(H^{-1,p+1}(I)) \arrow[r] & F(H^{0,p-1}(I)) & R^1F(H^{p+1}(C)) \arrow[drr] & F(H^{p+1}(C)) & \\
F(I^{-1,p}) \arrow[u] & F(I^{0,p}) \arrow[u] & F(H^{-1,p}(I)) \arrow[r] & F(H^{0,p}(I)) & R^1F(H^p(C)) \arrow[drr] & F(H^p(C)) & 0 \\
F(I^{-1,p-1}) \arrow[u] & F(I^{0,p-1}) \arrow[u] & F(H^{-1,p-1}(I)) \arrow[r] & F(H^{0,p-1}(I)) & R^1F(H^{p-1}(C)) & F(H^{p-1}(C)) & 0 \\
\boxed{E_0} & & \boxed{E_1} & & \boxed{E_2} & &
\end{tikzcd} . \tag{107}$$

特別地, E_1 使用了消解的可裂性, 即 $FH = HF$. 綜上, $R^q F(H^p(C))$ 給出 $R^{p+q}F(C)$ 的濾過 p 位置反了, 今後再改吧

定理 (Kunneth 譜序列定理)**.** 選用此處 ([3]) 版本. 稱 X 是正 (負) 的復形, 當且僅當 X 的非零像僅能落在 $\mathbb{Z}_{>0}$ ($\mathbb{Z}_{<0}$) 分支.

1. 記 A 與 C 均是負的復形, 且 A 或 C 一者平坦, 則有譜序列 第一象限

$$E_2^{p,q} = \coprod_{s+t=q} \mathrm{Tor}_p(H^s(A), H^t(C)) \Rightarrow H^{p+q}(\mathrm{Tot}(A \otimes C)); \tag{108}$$

2. 記 A 是負復形, C 是正復形, 假定 A 投射或 C 內射, 則有第三象限譜序列

$$E_2^{p,q} = \coprod_{s+t=q} \operatorname{Ext}^p(H^{-s}(A), H^t(C)) \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{H}(A,C)). \tag{109}$$

Proof. 對第一問, 不妨假設 C 平坦, 此時 $C \otimes -$ 是復形至復形的函子. 記 $F \to A$ 是平坦分解 (投射分解), 對雙復形 $\coprod_{i+j=p}(F^{q,i} \otimes C^j)$ 計算譜序列得

$$\begin{array}{ccccccc}
\coprod_{i+j=p-1}(A^i \otimes H^j(C)) & & \coprod_{i+j=p}(A^i \otimes H^j(C)) & & \coprod_{i+j=p+1}(A^i \otimes H^j(C)) & & \boxed{E_2} \\
\coprod_{i+j=p-1} \operatorname{Tor}_1(A^i, H^j(C)) & & \coprod_{i+j=p} \operatorname{Tor}_1(A^i, H^j(C)) & & \coprod_{i+j=p+1} \operatorname{Tor}_1(A^i, H^j(C)) & & \Uparrow \\
\coprod_{i+j=p-1}(F^{0,i} \otimes H^j(C)) & & \coprod_{i+j=p}(F^{0,i} \otimes H^j(C)) & & \coprod_{i+j=p+1}(F^{0,i} \otimes H^j(C)) & & \boxed{E_1} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\coprod_{i+j=p-1}(F^{-1,i} \otimes H^j(C)) & & \coprod_{i+j=p}(F^{-1,i} \otimes H^j(C)) & & \coprod_{i+j=p+1}(F^{-1,i} \otimes H^j(C)) & & \Uparrow \\
\coprod_{i+j=p-1}(F^{0,i} \otimes C^j) & \longrightarrow & \coprod_{i+j=p}(F^{0,i} \otimes C^j) & \longrightarrow & \coprod_{i+j=p+1}(F^{0,i} \otimes C^j) & & \boxed{E_0} \\
\coprod_{i+j=p-1}(F^{-1,i} \otimes C^j) & \longrightarrow & \coprod_{i+j=p}(F^{-1,i} \otimes C^j) & \longrightarrow & \coprod_{i+j=p+1}(F^{-1,i} \otimes C^j) & &
\end{array}.$$

$$\begin{array}{cccccc}
\boxed{E_2} & H^{p-1}(A \otimes C) & & H^p(A \otimes C) & & H^{p+1}(A \otimes C) \\
\Uparrow & & & & & \\
\boxed{E_1} & \coprod_{i+j=p-1}(A^i \otimes C^j) & \longrightarrow & \coprod_{i+j=p}(A^i \otimes C^j) & \longrightarrow & \coprod_{i+j=p+1}(A^i \otimes C^j) \\
\Uparrow & & & & & \\
\boxed{E_0} & \coprod_{i+j=p-1}(F^{0,i} \otimes C^j) & & \coprod_{i+j=p}(F^{0,i} \otimes C^j) & & \coprod_{i+j=p+1}(F^{0,i} \otimes C^j) \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & \coprod_{i+j=p-1}(F^{-1,i} \otimes C^j) & & \coprod_{i+j=p}(F^{-1,i} \otimes C^j) & & \coprod_{i+j=p+1}(F^{-1,i} \otimes C^j)
\end{array} \tag{110}$$

略去第二問的圖表, 證明框架如下.

1. 若 A 投射, 取 C 的投射分解 $C \to I$. 計算 $\coprod_{i+j=p} \mathcal{H}(A^{-i}, I^{q,j})$ 的兩向的譜序列, 得

$$\coprod_{i+j=p} \operatorname{Ext}^q(H^{-i}(A), H^j(C)) \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{H}(A,C)). \tag{111}$$

2. 若 C 內射, 取 A 的投射分解 $P \to A$. 計算 $\coprod_{i+j=p} \mathcal{H}(P^{-q,-i}, C^j)$ 的兩向的譜序列, 得

$$\coprod_{i+j=p} \operatorname{Ext}^q(H^{-i}(A), H^j(C)) \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{H}(A,C)). \tag{112}$$

□

备注. Kunneth 譜序列處在是第一或第三象限, 從而滿足有界性. 一般地, 若規定整體維度有限, 則相應的譜序列的支撐在一個長條內, 從而也滿足一些收斂性定理.

例子 (Kunneth 公式)**.** 若 Kunneth 譜序列中的 “高階導出函子” 均消失, 則全復形同調群之濾過會無比簡單.

1. 若 $\operatorname{Tor}_{\geq 2}(H(A), -) = 0$ 或 $\operatorname{Tor}_{\geq 2}(-, H(C)) = 0$, 則

$$0 \to \coprod_{i+j=p} (H^i(A) \otimes H^j(C)) \to H^p(A \otimes C) \to \coprod_{i+j=p+1} \operatorname{Tor}_1(H^i(A) \otimes H^j(C)) \to 0 \tag{113}$$

2. 若 $\mathrm{Ext}^{\geq 2}(H^{-i}(A),-)=0$ 或 $\mathrm{Ext}^{\geq 2}(-,H^{-i}(C))=0$, 則

$$0\to\coprod_{i+j=p+1}\mathrm{Ext}^1(H^{-i}(A),H^j(C))\to H^p(A\otimes C)\to\coprod_{i+j=p}\mathrm{Hom}(H^{-i}(A)\otimes H^j(C))\to 0 \tag{114}$$

若 X 與 $\mathrm{im}(d)$ 均是投射/內射/平坦對象, 則 $\mathrm{Ext}^{\geq 2}(H,-)/\mathrm{Ext}^{\geq 2}(-,H)/\mathrm{Tor}_{\geq 2}(H,-)$ 消失. 何時可裂?

1.10.5 合成函子的譜序列

定理 (Grothendieck 譜序列)**.** 假定 $\mathcal{A}\xrightarrow{F}\mathcal{B}\xrightarrow{G}\mathcal{C}$ 是 Abel 範疇間的左正合函子. 假定

1. $\mathcal{A}$ 有足夠投射對象, 即任意 $X\in A$ 存在投射分解;
2. 對投射對象 $P\in\mathcal{A}$, 像 $F(P)$ 關於右導出 $R^{\geq 1}G$ 消失.

此時存在收斂的譜序列:

$$E_2^{p,q}:=R^pG(R^qF(X))\Rightarrow(R^{p+q}(G\circ F))(X). \tag{115}$$

Proof. 記 X 的投射分解 $Q\to X$ (x-負半軸), 繼而依馬蹄引理取 $F(Q)$ 的投射分解, 得行可裂雙復形 P. 示意圖如下:

$$\begin{tikzcd}
FQ^{-2} \arrow[r] & FQ^{-1} \arrow[r] & FQ^0 \arrow[r, dotted] & FX \\
P^{-2,0} \arrow[r] \arrow[u, dotted] & P^{-1,0} \arrow[r] \arrow[u, dotted] & P^{0,0} \arrow[r, dotted] \arrow[u, dotted] & P^{1,0} \arrow[u, dotted] \\
P^{-2,-1} \arrow[r] \arrow[u] & P^{-1,-1} \arrow[r] \arrow[u] & P^{0,-1} \arrow[r, dotted] \arrow[u] & P^{1,-1} \arrow[u] \\
P^{-2,-2} \arrow[r] \arrow[u] & P^{-1,-2} \arrow[r] \arrow[u] & P^{0,-2} \arrow[r, dotted] \arrow[u] & P^{1,-2} \arrow[u]
\end{tikzcd}. \tag{116}$$

繼而取 $G(P)$ 的雙向譜序列.

1. $(\rightarrow)$ 得 E_2 如下:

$$\begin{tikzcd}
 & GFQ^{-2} \arrow[r] & GFQ^{-1} \arrow[r] & GFQ^0 \arrow[r, dotted] & GFX \\
 & G(P^{-2,0}) \arrow[r] & G(P^{-1,0}) \arrow[r] & G(P^{0,0}) \arrow[r, dotted] & G(P^{1,0}) \\
 & G(P^{-2,-1}) \arrow[r] & G(P^{-1,-1}) \arrow[r] & G(P^{0,-1}) \arrow[r, dotted] & G(P^{1,-1}) \\
\boxed{E_0} & G(P^{-2,-2}) \arrow[r] & G(P^{-1,-2}) \arrow[r] & G(P^{0,-2}) \arrow[r, dotted] & G(P^{1,-2}) \\
 & G(R^2FX) & G(R^1FX) & GFX & GFX \\
 & G(H_{\rightarrow}^{-2,0}) \arrow[u] & G(H_{\rightarrow}^{-1,0}) \arrow[u] & G(H_{\rightarrow}^{0,0}) \arrow[u] \arrow[r, dotted, no head] & G(P^{1,0}) \arrow[u] \\
 & G(H_{\rightarrow}^{-2,-1}) \arrow[u] & G(H_{\rightarrow}^{-1,-1}) \arrow[u] & G(H_{\rightarrow}^{0,-1}) \arrow[u] \arrow[r, dotted, no head] & G(P^{1,-1}) \arrow[u] \\
\boxed{E_1} & G(H_{\rightarrow}^{-2,-2}) \arrow[u] & G(H_{\rightarrow}^{-1,-2}) \arrow[u] & G(H_{\rightarrow}^{0,-2}) \arrow[u] \arrow[r, dotted, no head] & G(P^{1,-2}) \arrow[u] \\
 & G(R^2FX) & G(R^1FX) & G(FX) & 0 \\
 & (R^1G)(R^2FX) & (R^1G)(R^1FX) & (R^1G)(FX) & 0 \\
\boxed{E_2} & (R^2G)(R^2FX) & (R^2G)(R^1FX) \arrow[uul] & (R^2G)(FX) \arrow[uul] & 0 \arrow[uul]
\end{tikzcd}. \tag{117}$$

$E_0\Rightarrow E_1$ 是由于 P 橫向可裂. $E_1\Rightarrow E_2$ 是由於 $H^{p,\bullet}\to G(R^pFX)$ 是投射分解, 詳細而言

(a) 所有 $H^{p,q}$ 均是 P 的直和項, 從而是投射對象;

(b) 若干列投射分解 $[P \uparrow Q]$ 取上同調所得的 $[H_{\rightarrow}(P) \uparrow H_{\rightarrow}(Q)]$ 仍是若干列投射分解. 不用證明!

CE-分解自帶!

此時 E_2 確實是圖中所述, $E_2^{p,q} = R^{-q}G(R^{-p}FX)$.

2. ($\uparrow$) E_2 的計算比較簡單:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & GFQ^{-2} & GFQ^{-1} & GFQ^{0} & GFX \\
 & G(P^{-2,0}) \arrow[u, dotted] & G(P^{-1,0}) \arrow[u, dotted] & G(P^{0,0}) \arrow[u, dotted] & G(P^{1,0}) \arrow[u, dotted] \\
 & G(P^{-2,-1}) \arrow[u] & G(P^{-1,-1}) \arrow[u] & G(P^{0,-1}) \arrow[u] & G(P^{1,-1}) \arrow[u] \\
\boxed{E_0} & G(P^{-2,-2}) \arrow[u] & G(P^{-1,-2}) \arrow[u] & G(P^{0,-2}) \arrow[u] & G(P^{1,-2}) \arrow[u] . \\
 & GFQ^{2} \arrow[r] & GFQ^{1} \arrow[r] & GFQ^{0} \arrow[r, dotted] & GFX \\
\boxed{E_1} & (R^1G)FQ^2 \arrow[r] & (R^1G)FQ^1 \arrow[r] & (R^1G)FQ^0 & \text{消失} \\
\boxed{E_2} & R^2(GF)X & R^1(GF)X & (GF)X &
\end{tikzcd} \tag{118}$$

此處依照假定, $(R^{\geq}G)(FQ^0)$ 消失. $E_2 = E_\infty$ 穩定.

□

备注. 若觀察 Hom 與 $\otimes$-函子, 則 "奇怪的假定" 是很自然的.

例子 (前幾項). 考慮下圖:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 0 & G(R^2FX) & (R^1G)(R^2FX) & (R^2G)(R^2FX) & \\
0 & 0 \arrow[dr, dashed, "GFX"] & G(R^1FX) \arrow[dr, dashed, "R^1(GF)X"] & (R^1G)(R^1FX) \arrow[ull] \arrow[dr, dashed, "R^2(GF)X"] & (R^2G)(R^1FX) \arrow[ull] & (R^3G)(R^1FX) \arrow[ull] . \\
 & & G(FX) \arrow[ull] & (R^1G)(FX) \arrow[ull] & (R^2G)(FX) \arrow[ull] & (R^3G)(FX) \arrow[ull]
\end{tikzcd} \tag{119}$$

此時有五項正合列

$$R^2(GF)X \to (R^2G)(FX) \to G(R^1FX) \to R^1(GF)X \to (R^1G)(FX) \to 0. \tag{120}$$

1. 若進一步要求 $R^{\geq 2}FX = 0$, 則可以進一步左接 "三週期" 長正合列

$$\cdots \to (R^kG)(R^1FX) \to R^{k+1}(GF)X \to (R^{k+1}G)(FX) \to \cdots \tag{121}$$

簡單地寫作 $(GF)^2 \to G^2F \to GF^1 \to (GF)^1 \to G^1F \to 0$. 縱有界

2. 若進一步要求 $R^{\geq 2}G = 0$, 則有短正合列 (復合函子求導法則) 橫有界

$$0 \to GF^{k+1} \to (GF)^{k+1} \to G^1F^k \to 0. \tag{122}$$

备注. 類似地, 左導出函子適合 $0\to F^1R\to (FR)^1\to FR^1\to F^2R\to (FR)^2$

例子 (函子符合求導: 雙模結構)**.** 假定 M 是 (A,B)-雙模, N 是 (B,C)-雙模, 則有右正合函子

$$\mathbf{mod}_A \xrightarrow{-\otimes M} \mathbf{mod}_B \xrightarrow{-\otimes N} \mathbf{mod}_C. \tag{123}$$

此時 $\mathrm{Tor}_B^{-q}(\mathrm{Tor}_A^{-p}(-,M),N)\Rightarrow \mathrm{Tor}_A^{p+q}(-,M\otimes N)$. 左導出的前五項

$$0\to \mathrm{Tor}_A^1(-,M)\otimes_B N\to \mathrm{Tor}_A^1(-,M\otimes_B N)\to \mathrm{Tor}_B^1(-\otimes_A M,N)\to \tag{124}$$

$$\to \mathrm{Tor}_A^2(-,M)\otimes_B N\to \mathrm{Tor}_A^2(-,M\otimes_B N). \tag{125}$$

此時有一些特例可探索.

1. M 作爲 A-模, 其平坦維數 ≤ 1. 此時有三週期長正合列 (略).
2. 若 $M=B$, 其左 A-模結構由環同態 $A\to B$ 實現, 則又有一些可玩的 (例如整體維數 ≤ 1, 或更直接的). faithful flat?
3. 依照拓撲學習慣, 時常引入 PID 環. 此時得各種萬有係數定理.

另有 $(X,-)\&(Y,-)$, 以及 $(-,X)\&(-\otimes Y)$ 兩種推廣.

例子. 群的 MacLane 四項正合列. 補充?

例子 (Grothendieck 譜序列的自然性)**.** 譜序列 (分次復形定義) 誘導的態射是自然的. 如何刻畫 Grothendieck 譜序列的前五項是一個問題. 例如, 給定內射分解誘導的

$$0\to (R^1G)FX\to R^1(GF)X\to G(R^1F)X\to (R^2G)FX\to R^2(GF)X. \tag{126}$$

1. 態射 $(R^pG)FX\to R^p(GF)X$ 由投射分解誘導的復形態射 $F[X\to I]\Rightarrow[FX\to J]$ 給出:

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, dotted] \arrow[d, equal] & FI^0 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & FI^1 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \cdots \arrow[r] & FI^p \arrow[d, dashed] & FI^\bullet \arrow[d, dashed, "\theta"'] & GFI^\bullet \arrow[d, "G(\theta)"] & H^p(GFI^\bullet) \arrow[d, "H^p(G(\theta))"] \\ FX \arrow[r, dotted] & J^0 \arrow[r] & J^1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & J^p & J^\bullet & GJ^\bullet & H^p(GJ^\bullet) \end{tikzcd}. \tag{127}$$

此處 $H^p(G(\theta)):(R^pG)FX\to R^p(GF)X$.

2. 態射 $R^p(GF)\to G(R^pF)$ 由 Kan 延拓的泛性質給出:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "R^\bullet F"'] \arrow[drr, dotted] & \mathcal{B} \arrow[r, "G"] \arrow[d] & \mathcal{C} \arrow[d] \\ & D\mathcal{B} \arrow[r, "DG"'] & D\mathcal{C} \end{tikzcd}. \tag{128}$$

特別地, 自然變換 $\alpha\circ(GF)^\bullet\Rightarrow DG\circ(R^\bullet F)$ 給出 $H^p(\alpha_X):(GF)^pX\to G(F^pX)$.

3. 態射 $G(R^1F)X\to(R^2G)(FX)$ 由內射分解 $FI^\bullet\to J^\bullet$ 作用 G 後給出. 特別地,

$$\begin{tikzcd} & & GH^1(FI^\bullet) \arrow[r, equal] & G(R^1F)X \arrow[dd, dashed, "H^1(\sigma)"] \\ & GFX \arrow[r] \arrow[d] & GFI^0 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\sigma^0"] & GFI^1 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\sigma^1"] & GFI^2 \\ GFX \arrow[r] & GJ^0 \arrow[r] & GJ^1 \arrow[r] & GJ^2 \arrow[r] & GJ^3 \\ & & H^2(GJ^\bullet) \arrow[r, equal] & (R^2G)(FX) \end{tikzcd}. \tag{129}$$

1.10.6 譜序列的構造 III: “纖維化塔”(正合耦) 直接誘導譜序列

Abstract

Given a tower of fibrations of homotopy types, its degreewise homotopy groups naturally form an exact couple. The induced spectral sequence is the spectral sequence of the tower. 觀點來自 [?].

主要是爲了 Adams 濾過系統服務. 暫時不大常用.

例子 (正合耦)**.** 給定短正合列 $0 \to X \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Y \to 0$, 則有 “基本定理” 導出的長正合列.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[drr] & H^{n-1}(X) \arrow[drrr] & & H^n(X) \arrow[drrr] & & H^{n+1}(X) \arrow[drr] & & & & H(X) \arrow[dr, "g"] & \\
& & H^{n-2}(Y) \arrow[dl] & & H^{n-1}(Y) \arrow[dl] & & H^n(Y) \arrow[dl] & \cdots & & & H(Y) \arrow[dl, "\delta"] \\
& H^{n-1}(X) \arrow[uu] & & H^n(X) \arrow[uu] & & H^{n+1}(X) \arrow[uu] & & & & H(X) \arrow[uu, "f"] &
\end{tikzcd} . \tag{130}$$

如果用 “微分分次模” 一筆帶過, 則得到一個 3-circle 態射鏈.

定义. 給定給定 (分次) 模 (D, E) 與態射 (i, j, k). 稱 (D, E, i, j, k) 是正合耦, 當且僅當

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "i"] & & D \arrow[dl, "j"] \\
& E \arrow[ul, "k"] &
\end{tikzcd}, \tag{131}$$

其中三處 $\mathrm{im} = \ker$. 用 D 濾過 E

例子 (導出正合耦)**.** 大正合耦 (D, E, i, j, k) 給出外微分 $(j \circ k) : E \to E$. 此時導出外側小正合耦:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{im}(i) \arrow[rrrr, "d \mapsto i(d)"] \arrow[dr] & & & & \mathrm{im}(i) \arrow[dl] \arrow[ddll, "i(d) \mapsto j(d)"] \\
& D \arrow[rr, "i"] \arrow[ul] & & D \arrow[dl, "j"] \arrow[ur] & \\
& & E \arrow[ul, "k"] & & \\
& & H(E, k \circ j) \arrow[uull, "e \mapsto k(e)"] & &
\end{tikzcd} . \tag{132}$$

1. (良定義) 對象 $D' = \mathrm{im}(i)$, $E' = H((j \circ k) : E \to E)$, 態射 k' 良定義, 因爲 $k : (j \circ k)(e) \mapsto 0$, 態射 j' 良定義, 因為 $j|_{\mathrm{im}(i)} = 0$.
2. (左 D' 處正合性) 核 $\mathrm{im}(i) \cap \ker(i)$, 像 $k(\ker(k \circ j)) = \ker(j) \cap \mathrm{im}(k) = \mathrm{im}(i) \cap \ker(i)$.
3. (右 D' 處正合性) 核 $\{i(d) \mid j(d) \in \mathrm{im}(j \circ k)\} = \frac{\{x \mid j(x) \in \mathrm{im}(j \circ k)\}}{\ker(i)} \simeq \frac{j^{-1}(\mathrm{im}(j \circ k))}{\ker(i)} = \frac{\mathrm{im}(k) + \ker(j)}{\ker(i)}$ (第一同構定理), 繼而 $\frac{\mathrm{im}(k) + \ker(j)}{\ker(i)} = \frac{\ker(i) + \mathrm{im}(i)}{\ker(i)} \simeq i(\mathrm{im}(i))$ (第一同構定理). 故核等於像.
4. (E 處正合性) 核 $\frac{\ker(k) \cap \ker(j \circ k)}{\mathrm{im}(j \circ k)} \simeq \frac{\ker(k)}{\mathrm{im}(j \circ k)} = \frac{\mathrm{im}(j)}{\mathrm{im}(j \circ k)}$, 像 $\mathrm{im}(j') = \frac{\mathrm{im}(j)}{\mathrm{im}(j \circ k)}$.

定义 (n-次導出)**.** 給定正合耦 $\mathcal{E} = (D, E, i, j, k)$, 記 $()^1 = ()'$. 歸納地給出 $\mathcal{E}^n$. 稱正合耦是冪零的, 若 $i : D \to D$ 冪零.

定理 (正合耦誘導譜序列)**.** 給定微分分次雙模 (D, E), 若存在正合耦 (D, E, i, j, k), 其態射次數分別是

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "i(-1,1)"] & & D \arrow[dl, "j(0,0)"] \\
& E \arrow[ul, "k(1,0)"] &
\end{tikzcd}, \tag{133}$$

則 $(E,(j\circ k))$ 是譜序列.

$$\begin{tikzcd}
D^{p,q+1} \arrow[rr] \arrow[dr, "j"'] & & D^{p+1,q+1} \arrow[rr] \arrow[dr, "j"'] & & D^{p+2,q+1} \\
& E^{p,q+1} \arrow[ur, "k"'] & & E^{p+1,q+1} \arrow[ur, "k"'] & \\
D^{p,q} \arrow[uu] \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & D^{p+1,q} \arrow[uu] \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "j"'] \arrow[uull, dashed, bend left] & & D^{p+2,q} \arrow[uu] \arrow[uull, dashed, bend left] \\
& E^{p,q} \arrow[ur, "k"'] & & E^{p+1,q+1} \arrow[ur, "k"'] &
\end{tikzcd} . \tag{134}$$

沿 ↑ 方向投影, 大致得
$$\begin{tikzcd}
D^{p,\bullet} \arrow[dr, "j"'] & & D^{p+1,\bullet} \arrow[ll, dashed, "i"'] \arrow[dr, "j"'] & & D^{p+2,\bullet} \arrow[ll, dashed, "i"'] \\
& E^{p,\bullet} \arrow[ur, "k"'] & & E^{p+1,\bullet} \arrow[ur, "k"'] &
\end{tikzcd} .$$

Proof. 暫時從略, 看著容易接受. □

定义 (有足夠的投射類的三角範疇)**.** 這是相對同調代數 ([?]) 的三角範疇版本. 稱 $(\mathcal{T},\mathcal{P},\mathcal{N})$ 是有足夠投射對象的三角範疇, 當且僅當

1. (資料) $\mathcal{T}$ 是三角範疇, $\mathcal{P}$ 是對象類, $\mathcal{N}$ 是態射類;
2. (三角封閉) $\mathcal{T}$ 與 $\mathcal{P}$ 關於三角雙向平移 $[\pm]$-封閉;
3. (垂直關係) 關於 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-,-)$, 恰有 $\mathcal{P}^{\perp}=\mathcal{N}$ 與 $\mathcal{P}={}^{\perp}\mathcal{N}$;
   - $\mathcal{P}$-消失態射恰是 $\mathcal{N}$; $\mathcal{N}$-投射對象恰是 $\mathcal{P}$.
4. (足夠投射) 任意 X 可嵌入好三角 $P\to X\xrightarrow{i}Y$, 其中 $P\in\mathcal{P}$ 且 $i\in\mathcal{N}$.

备注. 以上條件可以適當減弱. 同時, 以下三者彼此確定 ([?])

1. 有足夠投射對象的 $(\mathcal{P},\mathcal{N})$-垂直對, 垂直條件是 $(P,i)=0$;
2. 有足夠投射對象的 $(\mathcal{P},\mathcal{E})$-垂直對, 垂直條件是 (P,e) 爲滿態射;
3. 有足夠投射對象的 $(\mathcal{P},\mathcal{C})$-垂直對, 垂直條件是 $(P,C^{\bullet})=[\bullet\to\bullet\to\bullet]$ 在中間項正合.

命題 (一些封閉性條件)**.** $\mathcal{N}$ 是範疇的雙邊理想, 關於極限封閉; $\mathcal{E}$ 關於 "滿態射性二推三", 形變收縮核, 極限封閉; $\mathcal{P}$ 關於餘極限, 直和項 (形變收縮核) 封閉. 證明見筆記

例子 (如何構造 $(\mathcal{P},\mathcal{N})$-對?)**.** 一種方法: 選用 J.P. May 公理體系 ([?]) 下的幺半三角範疇, 找到不必滿足結合律的乘法對象 M, 則有誘導的內射對. 改用餘乘對象, 則有投射對. 單位 spec $\mathbb{S}$ 給出 Phantom 態射

命題 ($(\mathcal{P},\mathcal{N})$-對的 Bool 運算)**.** 給定一組 $(\mathcal{P}_\alpha,\mathcal{N}_\alpha)$, 則 $(\mathrm{Sum}(\coprod_\alpha\mathcal{P}_\alpha),\bigcap_\alpha\mathcal{N}_\alpha)$ 也是 $(\mathcal{P},\mathcal{N})$-對. 直接驗證

命題 ($(\mathcal{P},\mathcal{N})$-對的三角運算)**.** 給定一族 $(\mathcal{P}_i,\mathcal{N}_i)$, 則 $(\mathcal{P}_1\star\mathcal{P}_2,\mathcal{N}_2\circ\mathcal{N}_1)$ 的新的 $(\mathcal{P}_1\star\mathcal{P}_2)$ 對. 其中, 對象類的運算定義作

$$\mathcal{X}\star\mathcal{Y}:=\{A\mid\exists X\in\mathcal{X}\ \exists Y\in\mathcal{Y}\ \exists[X\to A\to Y]=:\Delta\ (\Delta\text{ 是好三角})\}. \tag{135}$$

Proof. 細節從略. 主要原理是八面體公理

$$\begin{tikzcd}
P_2[-1] \arrow[r] \arrow[d, equal] & A[-1] \arrow[r, "{f_2[-1]}"] \arrow[d] & B[-1] \arrow[r] \arrow[d] & P_2 \arrow[d, equal] \\
P_2[-1] \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d] & ? \arrow[r] \arrow[d] & P_2 \\
& X \arrow[r, equal] \arrow[d, "f_1"'] & X \arrow[d, "f_2 \circ f_1"] & \\
& A \arrow[r, "f_2"'] & B &
\end{tikzcd}. \tag{136}$$

□

备注. 結合律 $(\mathcal{X} \star \mathcal{Y}) \star \mathcal{Z} = \mathcal{X} \star (\mathcal{Y} \star \mathcal{Z})$ 也是八面體公理的推論.

定义 (三角的 Adams 投射分解)**.** 給定對象 $X = X^0$, 則有 “投射覆蓋” 的好三角 $P^0 \to X^0 \to X^{-1}$. 繼而考慮 $P^{-1} \to X^{-1} \to X^{-2}$ 等等, 最終得

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
X^0 \arrow[rr] & & X^{-1} \arrow[rr] \arrow[dl, "+"'] & & X^{-2} \arrow[rr] \arrow[dl, "+"'] & & X^{-3} \arrow[r] \arrow[dl, "+"'] & \cdots \\
& P^0 \arrow[ul] & & P^{-1} \arrow[ul] & & P^{-2} \arrow[ul] & &
\end{tikzcd}. \tag{137}$$

特別地, 每一好三角在 $(P, -)$ 分裂做一族短正合列 ($P^\bullet$-對邊斷開), 因此有 $(P, -)$-相對投射分解

$$\cdots \to P^{-2}[-2] \to P^{-1}[-1] \to P^0 \to X \to 0. \tag{138}$$

命题 (Adams 分解的逆命題)**.** 若 X 存在 $\mathcal{P}$-相對投射分解, 即

1. 一族態射鏈 $\theta : \mathcal{P} \to X \to 0$, 不必正合;
2. 對任意 $P \in \mathcal{P}$, (P, θ) 是長正合列.

此時存在 Adams 投射分解系統.

Proof. 考慮長 $\mathcal{P}$-正合列 $\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to X \to 0$.

1. 取好三角 $P(X) \to X \xrightarrow{f} Y$. 由滿態射 $(P(X), P_0) \twoheadrightarrow (P(X), X)$ 得提升 $P_0 \to X$

$$\begin{tikzcd}
P(X) \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\
P(X) \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
& X^{-1} \arrow[r, equal] & X^{-1}
\end{tikzcd}. \tag{139}$$

   上圖 (八面體公理的局部) 給出 $P_0 \to X^0 \xrightarrow{\in \mathcal{N}} X^{-1}$.

2. 繼而證明 $P(X^{-1}) \to X^{-1}$ 通過 $P_1[1]$ 分解. 實際上, X^{-1} 是正合列的 $\mathcal{P}$-相對 syzygy. 因此, 後繼歸納與初始設定的證明步驟相同.

□

定理. Adams-投射分解系統和 $\mathcal{P}$-相對投射分解互相轉換. $\mathcal{P}$-相對投射分解的復形同態延拓至 Adams 投射分解系統. 態射範疇!

例子 (Adams 濾過)**.** 相對 syzygy X^{-n}, 上同調函子 H 的導出, 有用時再補上吧

2 Tilting theory

2.1 Torsion Pair

Abstract

爲研究複雜環 A, 有時可以尋找一類斜置模 T_A, 使得 $\mathrm{End}(T_A)$ 是較爲簡單的代數, 同時 $\mathbf{mod}_A$ 與 $\mathbf{mod}_B$ 等價. 關於 Tilting 早期工作的文章見手冊 [?], 及其對應的網站. [?] 使用 tilting 理論清晰地解釋一個導出等價問題 (Theorem 5), 十分有趣.

本節介紹基本概念 torsion pair 和 tilting module. 解釋 tilting module 如何創造 torsion pair, 最後目標是 Brenner-Butler 定理 ([?]).

2.1.1 扭對的基本性質, 結構, 以及等價定義

定义 (扭對)**.** 稱 $(\mathcal{F},\mathcal{T})$ 是扭對, 當且僅當 $\mathcal{T}\perp_{\mathrm{Hom}}\mathcal{F}$, 且 $\mathcal{T}^{\perp\perp}=\mathcal{T}$, $\mathcal{F}^{\perp\perp}=\mathcal{F}$. Hom 垂直, 正交閉集

1. $\mathcal{F}$ 稱作無扭類 (torsion-free class); 類似自由群
2. $\mathcal{T}$ 稱作扭類 (torsion class). 類似扭群

备注. 給定對象類 $\mathcal{X}$, 則 $(\mathcal{X}^{\perp}, {}^{\perp}(\mathcal{X}^{\perp}))$ 與 $(({}^{\perp}\mathcal{X})^{\perp}, {}^{\perp}\mathcal{X})$ 是擾對; 給定 A 的擾對 $(\mathcal{F},\mathcal{T})$, 則有 DA 的擾對 $(D\mathcal{T}, D\mathcal{F})$.

备注. 順序選用 $(\mathcal{F},\mathcal{T})$. 爲了符合 $\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{T})$ 與 $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{F},\mathcal{T})$ 等順序.

定理 (扭對結構: radical 函子 t)**.** 稱 t 是冪等根函子, 當且僅當 t 是 id 的子函子, 且 Rad ∘ Top = 0

$$t:\quad [0\to tM\to M\to M/tM\to 0]\quad\Longrightarrow\quad [0\to tM=tM\to 0\to 0]. \tag{140}$$

此時, 以下關於對象類 $\mathcal{T}$ 的論斷等價:

1. 存在擾對 $(\mathcal{F},\mathcal{T})$, 換言之, $({}^{\perp}\mathcal{T})^{\perp}=\mathcal{T}$;
2. $\mathcal{T}$ 對餘極限 (商 + 餘積), 以及擴張封閉; “扭模”
3. 存在冪等根函子 t 使得 $t|_{\mathcal{T}}=\mathrm{id}$.

類似地, 以下關於對象類 $\mathcal{F}$ 的論斷等價:

1. 存在擾對 $(\mathcal{F},\mathcal{T})$, 換言之, ${}^{\perp}(\mathcal{F}^{\perp})=\mathcal{F}$;
2. $\mathcal{F}$ 對極限 (子 + 積), 以及擴張封閉; “無扭模”
3. 存在冪等根函子 t 使得 $t|_{\mathcal{F}}=0$.

备注. 冪等根函子建立如下映像:

$$[0\to tM\to M\to M/tM\to 0]\Longleftrightarrow[0\to T\to M\to F\to 0]. \tag{141}$$

對 **ab** 等簡單範疇而言, 以上正合列可裂, 從而對象類就是 $\mathcal{T}\oplus\mathcal{F}$.

定理 (可裂扭對的結構)**.** 以下是可裂扭對 (有时记作 $\mathcal{F}\vee\mathcal{T}$) 的等價表述:

1. 對象類就是 $\mathcal{T}\oplus\mathcal{F}$, 即所有 M 分解作 $T\in\mathcal{T}$ 與 $F\in\mathcal{F}$ 的直和;
2. $\mathcal{F}\perp_{\mathrm{Ext}^1}\mathcal{T}$, 即所有 $0\to T\to M\to F\to 0$ 可裂, 且垂直閉;
3. $\mathcal{F}$ 關於 τ 封閉, 此處 τ 往 “投射方向” 走;
4. $\mathcal{T}$ 關於 τ^{-1} 封閉, 此處 τ^{-1} 往 “內射方向” 走,

2.1.2 (預備定義) 斜置模生成扭對

定义 (預備記號: Gen)**.** 給定對象 T. 稱 $M \in \mathrm{Gen}(T)$, 當且僅當以下等價條件成立.

1. 存在 $d \geq 0$ 使得有滿射 $T^d \twoheadrightarrow M$; 像可達
2. $(T, M) \otimes_{\mathrm{End}(T)} T \to M, \ \sum f \otimes x \mapsto \sum f(x)$ 是滿射.

這一記號爲創造 $\mathcal{T}$ 服務. $\approx \mathcal{T}$

定义 (預備記號: Cogen)**.** 給定對象 T. 稱 $M \in \mathrm{Cogen}(T)$, 當且僅當以下等價條件成立.

1. 存在 $d \geq 0$ 使得有單射 $M \hookrightarrow T^d$. ; 泛函可分
2. $M \to ((M, T), T)_{\mathrm{End}(T)}, \ m \mapsto [g \mapsto g(m)]$ 是單射.

這一記號爲創造 $\mathcal{F}$ 服務. $\approx \mathcal{F}$

定义. 我們關心正則模本身 $A \in \mathrm{Gen}(?)$, $A \in \mathrm{Cogen}(?)$. 稱 M 是忠實的, 若以下等價命題成立: 忠實模

1. $A \hookrightarrow \mathrm{End}(M)$ 是單射; 右乘不同的 $a \in A$ 給出不同的態射; $\mathrm{Ann}_A(M)$ 是零理想; 環性質
2. $A \in \mathrm{Cogen}(M)$; $DA \in \mathrm{Gen}(DM)$. 生成模性質

定义 ((預備定義) 偏斜置模)**.** 稱 T 是偏斜置 (partial tilting) A-模, 若以下兩點同時成立:

1. $p.\dim T \leq 1$; 類似投射模
2. $\mathrm{Ext}^1(T, T) = 0$. 相對投射, 相對內射

2.1.3 (偏) 斜置模生成扭對

Abstract

核心定理: 偏斜置模誘導扭對 $(\mathcal{F}, \mathcal{T})$; 左模對稱地誘導扭對 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$; $\mathcal{F} \simeq \mathcal{X}$ 與 $\mathcal{T} \simeq \mathcal{Y}$.

定理 (偏斜置模生成扭對)**.** 給定偏斜置模 T, 則

1. $\mathrm{Ext}^1(T, \mathrm{Gen}(T)) = 0$;
2. $\mathrm{Gen}(T)$ 是擾對的 $\mathcal{T}$-部分;
   - 注: $M \in \mathcal{T}$ 當且僅當 $(T, M) \otimes_{\mathrm{End}(T)} T \to M, \ \sum f \otimes x \mapsto \sum f(x)$ 是雙射.
3. $\mathrm{Cogen}(\tau T)$ 是擾對的 $\mathcal{F}$ 部分.

$(\mathcal{F}, \mathcal{T}) = (\mathrm{Cogen}(\tau T), \mathrm{Gen}(T))$.

定义 (斜置模)**.** 稱偏斜置模 T 是斜置的, 當且僅當 $\mathrm{Add}(T) = \mathrm{Add}(A)$. 等價地,

1. $A \in \mathrm{Cogen}(T)$, 換言之, T 是忠實模;
2. 任何 $M \in (T)^{\perp,1}$ 通過 T 有限表現, 即下一條;
3. $\mathrm{Gen}(T) = (T)^{\perp,1}$; $\mathrm{Ext}^1(T, -)$

4. $\operatorname{Cogen}(T) = (\tau T)^{\perp,0}$. $\operatorname{Hom}(\tau T, -)$

备注. "偏斜置" 包含了結構與性質, 扔掉 "偏" 無非篩選 (取全子範疇).

定理 (斜置模誘導扭對)**.** 對斜置模 T, 其作爲偏斜置模誘導了扭對.

$$\mathcal{T} = \operatorname{Gen}(T) = (T)^{\perp,1}, \ \mathcal{F} = \operatorname{Cogen}(\tau T) = (T)^{\perp,0}. \tag{142}$$

命題 (T 的左模結構, BB 定理)**.** 取斜置模 T, 記 $B := \operatorname{End}(T)$. 此時 T 是 (B, A) 雙模.

1. T 作爲左 B-模, 也是斜置的; $A \to \operatorname{End}_B(T)^{\mathrm{op}}, \quad a \mapsto [(-) \cdot a]$ 是代數同構. 雙側斜置

2. 依照 T 的雙側斜置結構, 得四類對象:

   (a) (A-扭元類) $\mathcal{T} := \operatorname{Gen}(T) = \ker \operatorname{Ext}^1_A(T, -)$,

   (b) (A-無扭元類) $\mathcal{F} := \operatorname{Cogen}(\tau T) = \operatorname{Hom}_A(T, -)$,

   (c) (B-扭元類) $\mathcal{X} := D\mathcal{F}({}_B T) = \ker \operatorname{Hom}_B(-, DT) = \ker(- \otimes_B T)$,

   (d) (B-無扭元類) $\mathcal{Y} := D\mathcal{T}({}_B T) = \ker \operatorname{Ext}_B(-, DT) = \ker \operatorname{Tor}^B_1(-, T)$.

3. (BB) 對應關係 $\mathcal{F} \leftrightarrow \mathcal{X}$, $\mathcal{T} \leftrightarrow \mathcal{Y}$ 導出的核, 用零次函子鏈接, 反之亦然

$$\begin{array}{c} \ker \operatorname{Ext}^1_A(T,-) = \operatorname{Gen}(T) = \mathcal{T} \underset{\operatorname{Hom}_A(T,-)}{\overset{(-\otimes_B T)}{\leftrightarrows}} \mathcal{Y} = \ker \operatorname{Ext}_B(-, DT) = \ker \operatorname{Tor}^B_1(-, T) \\ \mathbf{mod}_A \qquad\qquad\qquad\qquad \mathbf{mod}_B \\ \ker \operatorname{Hom}_A(T,-) = \operatorname{Cogen}(\tau T) = \mathcal{F} \underset{\operatorname{Ext}^1_A(T,-)}{\overset{\operatorname{Tor}^B_1(-,T)}{\leftrightarrows}} \mathcal{X} = \ker \operatorname{Hom}_B(-, DT) = \ker(- \otimes_B T) \end{array} . \tag{143}$$

4. 假定 M 是 A 模, 且 X 是 B 模, 則有同構 T 類似投射

   (a) $(T, M) \otimes T \simeq M, \ \sum f \otimes t \mapsto \sum f(t)$, 以及

   (b) $X \simeq (T, X \otimes_B T), \ m \mapsto [t \mapsto m \otimes t]$.

5. 作爲推論, 得混合係數公式: 來源 $\neq$ 去向, 結果爲 0

   (a) $\operatorname{Tor}^B_1(\operatorname{Hom}_A(T, M), T) = 0$,

   (b) $\operatorname{Ext}^1_A(T, M) \otimes_B T = 0$,

   (c) $\operatorname{Hom}_A(T, X) \otimes_B T = 0$,

   (d) $\operatorname{Ext}^1_A(T, X \otimes_B T) = 0$.

   所謂 "混合", 一處 $\otimes$ 一處 Hom, 一處導出一處原是也. 結果均是 0.

6. 存在類似 "拓撲六函子" 的兩條正合列, 以刻畫兩個範疇中的冪等根函子:

   (a) $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$, $\mathbf{mod}_A$ 中的扭對:

$$0 \to \underbrace{(T, M)_A \otimes_B T}_{\mathbf{mod}_A \to \mathcal{Y} \to \mathcal{T}} \to M \to \underbrace{\operatorname{Tor}^B_1(\operatorname{Ext}^1_A(T, M), T)}_{\mathbf{mod}_A \to \mathcal{X} \to \mathcal{F}} \to 0; \tag{144}$$

   (b) $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\mathbf{mod}_B$ 中的扭對:

$$0 \to \underbrace{\operatorname{Ext}^1_A(T, \operatorname{Tor}^B_1(X, T))}_{\mathbf{mod}_B \to \mathcal{F} \to \mathcal{X}} \to X \to \underbrace{\operatorname{Hom}_A(T, X \otimes_B T)}_{\mathbf{mod}_B \to \mathcal{T} \to \mathcal{Y}} \to 0 \tag{145}$$

2.2 Some spectral sequence

Abstract

原始的斜置模 T 滿足

1. T 的 $\mathbf{mod}(A)$-投射維度 ≤ 1;
2. A 的 $\mathbf{mod}(T)$-內射維度 ≤ 1;
3. $\mathrm{Ext}^1(T,T) = 0$.

有限維度的斜置模將以上 1 換做了 $< \infty$. 有什麼用?

以上推廣由宮下洋一 (Yōichi Miyashita) 在 [?] 中首次提及.

- 宮下在寫完此篇引用 400+ 的文章後杳然無蹤, 數學族譜網找不到宮下與其老師 [?] 的任何消息, 大抵是功成名就後淡出了學術舞台.

本節先概括宮下的系列工作, 之後使用 B-B 的譜序列算法 (第四章, [?]) 將結論串通一遍.

1. 定義投射維度有限的斜置模;
2. 相對投射 (內射) 消解的對偶, 恰好是左模的相對投射 (內射) 消解;
3. 給出四個相同的 “消解維度”, 以及相應的斜置函子;
4. (重點) 原始斜置理論的 “四函子” 很簡單, 復合求導公式的所有二階導數均為 0 (因爲 $p.\dim T \leq 1$), 將投射維數提升後, 更好的精細來自譜序列.

重要問題: 傳統的斜置模蘊含扭對, 投射維數有限的斜置模如何變化?

2.2.1 投射維度有限的斜置模 (斜置模的推廣)

定义 ((餘) 消解)**.** 稱上鏈複形 $X^\bullet$ 是對象 A 的消解, 若 $X = X^{\leq 0}$, 且 $H^0(X) = A$. 餘消解類似. 投射分解的推廣

定义 (投射維度有限的斜置模)**.** 稱 $T \in \mathbf{mod}_A$ 是投射維度有限的斜置模, 當且僅當以下三點成立.

1. T 具有有限長度的 $\mathbf{add}(A)$-消解; $\mathbf{proj}(A)$
2. A 具有有限長度的 $\mathbf{add}(T)$-餘消解;
3. 對任意 $n \geq 1$, 總有 $\mathrm{Ext}^n(T,T) = 0$.

备注. 若 T 有二項 $\mathbf{add}(A)$-消解, 且 A 有二項 $\mathbf{add}(T)$-餘消解, 則 T 是通常的斜置模.

例子. bf往後使用斜置模簡稱 “投射維度有限的斜置模”. 仿照斜置模的一般研究方式, 我們希望 T 的左 $\mathrm{End}(T)$ (B)-模也是斜置的. 更進一步地, 能否直接從 $\mathbf{mod}_A$ 的消解直接給出 $\mathbf{mod}_B$ 的消解?

定义 (T-對偶)**.** 記 $h_T : \mathbf{mod}_A \to {}_B\mathbf{mod}$ 與 $h_T : {}_B\mathbf{mod} \to \mathbf{mod}_A$ 是 T-對偶函子. 必要時強調左右模:

1. $((-)_A, {}_BT_A)_A : \mathbf{mod}_A \to \mathbf{mod}_{B^{\mathrm{op}}}$;
2. $({}_B(-), {}_BT_A)_{B^{\mathrm{op}}} : \mathbf{mod}_{B^{\mathrm{op}}} \to \mathbf{mod}_A$.

定理 (T-對偶模消解定理)**.** 給定斜置模 T. 假定

- $\mathbf{mod}_A$-範疇中, $P^\bullet$ 是 T 的有限 $\mathbf{add}(A)$-消解, $T^\bullet$ 是 A 的有限 $\mathbf{add}(T)$-餘消解.

此時

- ${}_B\mathbf{mod}$-範疇中 $h_T(T^\bullet)$ 是 T 的有限 $\mathbf{add}(B)$-消解, $h_T(P^\bullet)$ 是 B 的有限 $\mathbf{add}(T)$-余消解.

同時, ${}_BT$ 是斜置左模. 也可以從 ${}_BT$ 推到 T_A: 只需發現 $h_T \circ h_T$ 建立了 $\mathbf{add}(A \oplus T)$ 的同構.

Proof. 依次證明對象類的對應, 對偶消解成立, ${}_BT$ 是斜置左模, 以及二次對偶同構.

1. 直接地, $h_T : \mathbf{add}(A) \to \mathbf{add}(T)$, $h_T : \mathbf{add}(T) \to \mathbf{add}(B)$, 以及 $h_T : \mathbf{add}$. 檢驗對象類

2. 先說明 $(T^\bullet, T) \Rightarrow T$ 是有限 $\mathbf{add}(B)$ 消解. 對象已說明, 只需檢驗正合性.

$$\begin{tikzcd}
& \Omega^2 \arrow[dl, hook'] & & \Omega^1 \arrow[dl, hook'] & & \Omega^0 \arrow[dl, hook'] \arrow[dr, equal] & & & \\
T^3 & & T^2 \arrow[ll] \arrow[ul, two heads] & & T^1 \arrow[ll] \arrow[ul, two heads] & & T^0 \arrow[ll] \arrow[r, equal] & A & \mathbf{add}(A) \arrow[d, "h_T"] \\
(T^3,T) \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & (T^2,T) \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & (T^1,T) \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & (T^0,T) \arrow[r, phantom, "="] & T & \mathbf{add}(T) \\
& (\Omega^2,T) \arrow[ur, hook] & & (\Omega^1,T) \arrow[ur, hook] & & (\Omega^0,T) \arrow[ur, equal] & & &
\end{tikzcd} \quad . \tag{146}$$

爲了由上正合列推得下者, 只需證明 $[0 \to (\Omega^{k+1}, T) \to (T^{k+1}, T) \to (\Omega^k, T) \to 0]$ 是正合列, 也就是 $\mathrm{Ext}^1(\Omega^{k+1}, T) = 0$. 依照 $\mathrm{Ext}^{\geq 1}(T, T) = 0$, 必然有

$$\mathrm{Ext}^1(\Omega^{k+1}, T) = \mathrm{Ext}^2(\Omega^{k+2}, T) = \cdots = 0. \tag{147}$$

> 對有限長度正合列 $C^\bullet$, 若 $\mathrm{Ext}^{\geq 1}(C^\bullet, M) = 0$, 則 $\mathrm{Hom}(C^\bullet, M)$ 正合.

臨時關鍵引理

3. 再說明 $B \Rightarrow (P^\bullet, T)$ 是有限 $\mathbf{add}(T)$-餘消解. 顯然 $\mathrm{Ext}^{\geq 1}(A, T) = 0$ 恆成立. 由臨時關鍵引理, $(P^\bullet, T)$ 正合.

4. 先說明 ${}_BT$ 的 (≥ 1)-自垂直性. 由上, $h_T(T^\bullet)$ 是 ${}_BT$ 的有限投射分解. 相應地, 導出群 $\mathrm{Ext}^{\geq 1}({}_BT, {}_BT)$ 由複形 $({}_B(h_T(T^\bullet)), {}_BT)$ 決定. 由於 $T^{\geq 1}$ 以 $\mathbf{add}(T)$ 爲分量, 故

$$({}_B(h_T(T^\bullet)), {}_BT) \simeq [\underbrace{\cdots \to T^2 \to T^1}_{\text{正合}} \to B = \mathrm{End}_A(T) \to 0]. \tag{148}$$

從而 $\mathrm{Ext}^{\geq 1}({}_BT, {}_BT) = 0$.

5. 二次對偶建立了 $A \simeq \mathrm{End}_A(T) = B$, 因爲 $T^\bullet$ 是兩者共同的有限消解. 此時 $h_T \circ h_T$ 是限制在 $\mathbf{add}(X \oplus T)$ 上的同構. $A \simeq B$

□

备注. 若以四要件 $(A, T, P^\bullet, T^\bullet)$ 描述斜置模, 則 $(B^{\mathrm{op}}, T, h_T(T^\bullet), h_T(P^\bullet))$ 也是斜置模.

命題. 來自章節 2.2, [?]. T_A 與 ${}_BT$ 投射維度相同.

Proof. 思路是說明, 所有極小 (餘) 消解 $\ell(P^\bullet) \geq \ell(T^\bullet) = \ell(h_T(T^\bullet)) \geq \ell(h_T(P^\bullet)) = \ell(P^\bullet)$, 從而不等號取等. 故而只需證明如下問題:

- 若有足夠投射對象的 Abel 範疇存在 $p.\dim T =: d < \infty$, 且 $\mathrm{Ext}^{\geq 1}(T,T) = 0$, 若另有 X 存在有限 $\mathbf{add}(T)$-餘消解, 則 X 的餘消解維度 $\leq d$.

取 X 的 $\mathbf{add}(T)$-餘消解, 由 $\mathrm{Ext}^{\geq 1}(T,T) = 0$ 得維數位移 $\mathrm{Ext}^{i+1}(T,\Omega^k) = \mathrm{Ext}^{i}(T,\Omega^{k+1})$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & \Omega^0 \arrow[dr] & & \Omega^1 \arrow[dr] & & \Omega^2 \arrow[dr] & & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[ur] \arrow[rr] & & T^1 \arrow[ur] \arrow[rr] & & T^2 \arrow[ur] \arrow[rr] & & T^3 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd} . \tag{149}$$

如果極小餘消解維度 $l > d$ (至多 $T^l \neq 0$), 則 $\mathrm{Ext}^1(T,\Omega^{l-1}) = \mathrm{Ext}^{l-1}(T,\Omega^1) = 0$. 此時 $\Omega^{l-1} \hookrightarrow T^l$ 可裂, 與極小餘消解矛盾. □

定理. 取以上四种斜置模的極小 (餘) 消解, 記作 $(A,T,P^\bullet,T^\bullet)$ 與 $(B^{\mathrm{op}},T,h_T(T^\bullet),h_T(P^\bullet))$. 此時, 四條鏈長度相同. 四鏈等長

2.2.2 譜序列的應用

记号. 此節記號: T 是斜置右 A-模, 从而也是斜置左 $B = \mathrm{End}_A(T)$-模. 定义函子

1. (右正合, 左伴随, 左导出) $G(-) := - \otimes_B T : \mathbf{mod}_B \to \mathbf{mod}_A$; $L_{-n}G$
2. (左正合, 右伴随, 右导出) $F(-) := (T,-)_A : \mathbf{mod}_A \to \mathbf{mod}_B$. R^nF

特别地, 取上述四种消解, 则 $L_{<-n}G$ 与 $R^{>n}F$ 消失.

备注. 为了统一双复形朝向, 记左导出 $L_p =: L_{-p}$.

定理 (LR-型 Grothendieck 谱序列)**.** 存在函子的谱序列使得对任意 $M \in \mathbf{mod}_A$,

$$E_2 = L_{-p}G \circ R^qF(M) \Rightarrow H^{p+q}(M). \tag{150}$$

Proof. 取 M 的内射分解 $M \to I$, 並將 $G(-) \simeq (-) \otimes_B T$ 的分解選作 $(-) \otimes_B (T^\bullet, T)$. 依照 $T^\bullet$ 是 A 的 T-餘消解

$$(T',X)_A \otimes_B (Y,T')_A \simeq (X,Y)_A \quad T' \in \mathbf{add}T. \tag{151}$$

此時有兩個同構的雙複形

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] GFM \arrow[r] & GFI^0 \arrow[r] & GFI^1 \arrow[r] & GFI^2 & \\ FM \otimes (T^0,T) \arrow[u] \arrow[r, dotted] & FI^0 \otimes (T^0,T) \arrow[u, dotted] \arrow[r] & FI^1 \otimes (T^0,T) \arrow[u, dotted] \arrow[r] & FI^2 \otimes (T^0,T) \arrow[u, dotted] & \\ FM \otimes (T^1,T) \arrow[u] \arrow[r, dotted] & FI^0 \otimes (T^1,T) \arrow[u] \arrow[r] & FI^1 \otimes (T^1,T) \arrow[u] \arrow[r] & FI^2 \otimes (T^1,T) \arrow[u] & \\ FM \otimes (T^2,T) \arrow[u] \arrow[r, dotted] & FI^0 \otimes (T^2,T) \arrow[u] \arrow[r] & FI^1 \otimes (T^2,T) \arrow[u] \arrow[r] & FI^2 \otimes (T^2,T) \arrow[u] & \boxed{E_0} \arrow[ddd, Rightarrow, "\simeq"] \\ & (T^0,I^0) \arrow[r] & (T^0,I^1) \arrow[r] & (T^0,I^2) & \\ & (T^1,I^0) \arrow[u] \arrow[r] & (T^1,I^1) \arrow[u] \arrow[r] & (T^1,I^2) \arrow[u] & \\ & (T^2,I^0) \arrow[u] \arrow[r] & (T^2,I^1) \arrow[u] \arrow[r] & (T^2,I^2) \arrow[u] & \boxed{E_0'} \end{tikzcd} . \tag{152}$$

繼而計算雙向的譜序列.

1. 先保留 $\uparrow$. 由 $(-,I^p)$ 是正合函子, 得譜序列

$$\begin{tikzcd}
GFM \arrow[r] & GFI^0 \arrow[r] & GFI^1 \arrow[r] & GFI^2 \\
FM\otimes(T^0,T) \arrow[u] & (T^0,I^0) & (T^0,I^1) & (T^0,I^2) \\
FM\otimes(T^1,T) \arrow[u] & (T^1,I^0) \arrow[u] & (T^1,I^1) \arrow[u] & (T^1,I^2) \arrow[u] \\
FM\otimes(T^2,T) \arrow[u] & (T^2,I^0) \arrow[u] & (T^2,I^1) \arrow[u] & (T^2,I^2) \arrow[u] & \boxed{E_0}
\end{tikzcd} . \qquad (153)$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & (H^0(T),I^0) \longrightarrow & (H^0(T),I^1) \longrightarrow & (H^0(T),I^2) & \\
\text{消失!} & (H^1(T),I^0) \longrightarrow & (H^1(T),I^1) \longrightarrow & (H^1(T),I^2) & \boxed{E_1} \\
 & (A,M) & 0 & 0 & \boxed{E_2}
\end{array}$$

從 E_0 至 E_1: 內射模給出的 $(-,I)$ 是正合函子, 從而與同調群交換. 而 $H^\bullet(T)=A$, $H^\bullet(I)=M$, 故 $\boxed{E_2}$ 只留下 M 一項. 從而全復形的濾過上同調是 $H^0=M$ 與 $H^{\neq}0=0$.

2. 繼而計算 $\rightarrow$. 由 (T^p,T) 是投射 B-模, 得 $\otimes(T^p,T)$ 是正合函子. 此時有

$$\begin{tikzcd}
GFM \arrow[r] & GFI^0 \arrow[r] & GFI^1 \arrow[r] & GFI^2 \\
FM\otimes(T^0,T) \arrow[r, dotted] & FI^0\otimes(T^0,T) \arrow[r] & FI^1\otimes(T^0,T) \arrow[r] & FI^2\otimes(T^0,T) \\
FM\otimes(T^1,T) \arrow[r, dotted] & FI^0\otimes(T^1,T) \arrow[r] & FI^1\otimes(T^1,T) \arrow[r] & FI^2\otimes(T^1,T) \\
FM\otimes(T^2,T) \arrow[r, dotted] & FI^0\otimes(T^2,T) \arrow[r] & FI^1\otimes(T^2,T) \arrow[r] & FI^2\otimes(T^2,T) & \boxed{E_0}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
FM\otimes T & R^1FM\otimes T & R^2FM\otimes T \\
FM\otimes(T^0,T) & (R^1FM)\otimes(T^0,T) & (R^2FM)\otimes(T^0,T) \\
FM\otimes(T^1,T) \arrow[u] & (R^1FM)\otimes(T^1,T) \arrow[u] & (R^2FM)\otimes(T^1,T) \arrow[u] \\
FM\otimes(T^2,T) \arrow[u] & (R^1FM)\otimes(T^2,T) \arrow[u] & (R^2FM)\otimes(T^2,T) \arrow[u] & \boxed{E_1}
\end{tikzcd} .$$

$$\begin{tikzcd}
GFM & G(R^1F)M & G(R^2F)M \\
(L_{-1}G)FM & (L_{-1}G)(R^1F)M & (L_{-1})G(R^2F)M \\
(L_{-2}G)FM & (L_{-2}G)(R^1F)M \arrow[uul] & (L_{-2}G)(R^2F)M \arrow[uul] & \boxed{E_2}
\end{tikzcd} \qquad (154)$$

以上證明了存在譜序列 $\mathrm{Tor}^B_{-q}(T,\mathrm{Ext}^p_A(T,-))\Rightarrow \delta_{p+q,0}\cdot \mathrm{id}$. $\square$

备注. 一些粗淺的視角: 右上角處

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr, dotted, "0"] & \\
G(R^{n-1}F)M \arrow[dr, dotted, "0"] & G(R^nF)M \\
(L_{-1}G)(R^{n-1}F)M \arrow[dr, dotted, "0"] & (L_{-1})G(R^nF)M \arrow[uul] \\
(L_{-2}G)(R^{n-1}F)M & (L_{-2}G)(R^nF)M \arrow[uul, "\simeq"] \\
(L_{-3}G)(R^{n-1}F)M & (L_{-3}G)(R^nF)M \arrow[uul, "\varepsilon"]
\end{tikzcd}
\quad . \tag{155}
$$

得到以下兩則結果 (假定 $n > 3$):

1. $\operatorname{Ext}_A^n(T, M) \otimes_B T = 0 = \operatorname{Tor}_1^B(\operatorname{Ext}_A^n(T, M), T)$;
2. $\operatorname{Tor}_2^B(\operatorname{Ext}_A^n(T, M), T) \simeq \operatorname{Ext}^{n-1}(T, M) \otimes T$;
3. $(L_{-3}G)(R^nF)M \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} (L_{-1}G)(R^{n-1}F)M \to H^{n-2} = 0$ 給出滿射 ε.

命题 (RL-型 Grothendieck 譜序列)**.** 對 $\mathbf{mod}_B \to \mathbf{mod}_A \to \mathbf{mod}_B$ 型的函子, 有收斂

$$\operatorname{Ext}_A^p(T, \operatorname{Tor}_{-q}^B(-, T)) \Rightarrow \delta_{p+q,0} \cdot \mathrm{id}. \tag{156}$$

Proof. 證明略. 對 $X \otimes_B (P, T)_A \simeq (P, X \otimes_B T)_A$ 計算譜序列即可. $\square$

例子 (特例: $n = 1$, 通常的斜置理論)**.** 混合係數公式來自譜序列:

$$
\begin{tikzcd}
0 & \\
0 \arrow[dr, dotted, "0"] & \\
GFM \arrow[dr, dotted, "M"] & G(R^1F)M \arrow[uul] \\
(L_{-1}G)FM \arrow[dr, dotted, "0"] & (L_{-1}G)(R^1F)M \arrow[uul] \\
& 0 \arrow[uul] \\
& 0 \arrow[uul]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[ddr] & \\
0 \arrow[ddr] & \\
FGN \arrow[ddr] & F(L_{-1}G)N \arrow[ul, dotted] \\
(R^1F)GN \arrow[ddr] & (R^1F)(L_{-1}G)N \arrow[ul, dotted, "N"'] \\
& 0 \arrow[ul, dotted] \\
& 0
\end{tikzcd}
\quad . \tag{157}
$$

例子 (特例: $n = 2$)**.** 此時 $E_3 = E_\infty$. 特別地, 計算譜序列

$$
\begin{tikzcd}
 & GFM & G(R^1F)M & \boxed{G(R^2F)M} & \\
 & \boxed{(L_{-1}G)FM} & \boxed{(L_{-1}G)(R^1F)M} & \boxed{(L_{-1})G(R^2F)M} & \\
\boxed{E_2} & \boxed{(L_{-2}G)FM} & (L_{-2}G)(R^1F)M \arrow[luu, "b"'] & (L_{-2}G)(R^2F)M \arrow[luu, "a"'] & \\
 & \operatorname{cok} b & \operatorname{cok} a & \boxed{G(R^2F)M} & \\
 & \boxed{(L_{-1}G)FM} & \boxed{(L_{-1}G)(R^1F)M} & \boxed{(L_{-1})G(R^2F)M} & . \\
\boxed{E_3} \arrow[d, equal] & \boxed{(L_{-2}G)FM} & \ker b & \ker a & \\
\boxed{E_\infty} & \operatorname{cok} b \arrow[r, hook] & ? \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & \boxed{(L_{-1}G)(R^1F)M} & \\
E_\infty^0 & (L_{-2}G)(R^1F)M \arrow[u, two heads] & M \arrow[d, two heads] & & \\
 & GFM \arrow[u, hook] & \ker a \arrow[r, hook] & (L_{-2}G)(R^2F)M \arrow[r, two heads] & G(R^1F)M
\end{tikzcd}
\tag{158}
$$

特別地, 以下三者等價:

1. $GFM \to (L_{-2}G)(R^1F)M$ 是滿射;
   - $(T, M) \otimes T \to \operatorname{Tor}_2(\operatorname{Ext}^1(T, M), T)$
2. $GFM \to (L_{-2}G)(R^1F)M$ 是同構;
3. $0 \to (L_{-1}G)(R^1F)M \to M \to (L_{-2}G)(R^2F) \to G(R^1F)M \to 0$ 是四項正合列.

對偶命題略. 映射構造?

定义 (導出垂直)**.** 原始版本的斜置理論中, $(\mathcal{F}, \mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{Y})$ 通過四個函子的 ker 定義. 今推廣

1. $K^p(A) := \bigcap_{0 \le k \le n}^{k \ne p} \operatorname{Ext}_A^k(T, -)$;
2. $K_p(B) := \bigcap_{0 \le k \le n}^{k \ne p} \operatorname{Tor}_k^B(-, T)$.

定理. 存在全子範疇間的互逆函子 $R^tF : K^t(A) \simeq K_t(B) : L_{-t}G$.

Proof. 對 $M \in K^p(A)$, 由譜序列的濾過知 $E_2^{p,q} = (L_{-p}G)(R^qF)M$ 僅在 t-列非零, 這也蘊含 $E_2 = E_\infty$. 此時

$$(L_{-\bullet}G)(R^tF)(M) = [0 \mid \cdots \mid 0 \mid M \mid 0 \mid \cdots \mid 0]. \tag{159}$$

這說明 $(R^tF)(M) \in K_p(B)$. 逆函子等顯然. □

例子 (王憲鍾序列)**.** 王憲鍾序列是一類特殊的譜序列: E_2 中僅有兩行非零. 這說明, 可以對某一 $E_2 = E_r$ 使用 “小技巧”, 從而導出長正合列.
記 $K^{i,j}(A) = \bigcap_{0 \le k \le n}^{k \ne i,j} \operatorname{Ext}_A^k(T, -)$, 則 E_2 中僅有兩縱列非零. 計算得 $i < j$

1. 存在五項正合列

$$0 \to (L_{-j+1}G)(R^jF)M \to (L_{-i}G)(R^iF)M \to M \tag{160}$$
$$\to (L_{-j}G)(R^jF)M \to (L_{-i-1}G)(R^iF)M \to 0 \tag{161}$$

2. $(L_{p-j+1}G)(R^jF)M \simeq (L_{p-i}G)(R^iF)M$ 對 $p \neq 0, -1$ 成立.

3. $(L_{-([0,n-(j-i)])}G)(R^iF)M$ 與 $(L_{-([(j-i),n])}G)(R^jF)M$ 或非零; 其餘 $(L_{-p}G)(R^qF)$ 必爲 0.

备注. 王憲鍾的生平參考 [?].

例子 ($(i,j) = (0,n)$)**.** 此時有函子圖

$$\begin{tikzcd}
K_0(B) \arrow[rr, shift right, "-\otimes T"'] \arrow[rr, phantom, "\cong"] & & K^0(A) \arrow[ll, shift right, "{(T,-)}"'] \\
K^{0,n}(A) \arrow[u, "{(T,-)}"] \arrow[d, "{\mathrm{Ext}^n(T,-)}"'] \arrow[rr, leftrightarrow, "???"] & & K_{0,n}(B) \arrow[u, "-\otimes T"'] \arrow[d, "{\mathrm{Tor}_n(-,T)}"] \\
K_n(B) \arrow[rr, shift right, "{\mathrm{Tor}_n(-,T)}"'] \arrow[rr, phantom, "\cong"] & & K^n(A) \arrow[ll, shift right, "{\mathrm{Ext}^n(T,-)}"']
\end{tikzcd} \tag{162}$$

$K^{0,n}(A)$ 與 $K_{0,n}(B)$ 有何聯繫?

例子 ($j - i = \Delta$)**.** 此時有函子圖

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \\
 & K^{i-1,j-1}(A) \arrow[u, leftrightarrow, "???"] \arrow[dl, bend right, "{\mathrm{Ext}^{j-1}(T,-)}"'] \arrow[dr, bend left, "{\mathrm{Ext}^{i-1}(T,-)}"] \arrow[d, leftrightarrow, "???"] & \\
K_{[\Delta,n]}(B) & K^{i,j}(A) \arrow[l, "{\mathrm{Ext}^j(T,-)}"'] \arrow[r, "{\mathrm{Ext}^i(T,-)}"] \arrow[d, leftrightarrow, "???"] & K_{[0,n-\Delta]}(B) \\
 & K^{i+1,j+1}(A) \arrow[ul, bend left, "{\mathrm{Ext}^{j+1}(T,-)}"] \arrow[ur, bend right, "{\mathrm{Ext}^{i+1}(T,-)}"'] \arrow[d, leftrightarrow, "???"] & \\
 & \vdots &
\end{tikzcd} \tag{163}$$

此時諸 $K^{i-s,j-s}$ 有何聯繫?

例子 (Happel 定理)**.** 对双模 ${}_BT_A$, 若

1. $B \simeq \mathrm{End}_A(T,T)$, 此處的題設

2. T 有有限的 $\mathbf{add}(A)$-消解,

3. A 有有限的 $\mathbf{add}(T)$-餘消解,

4. $\mathrm{Ext}_A^{\geq 1}(T,T) = 0$.

回憶兩則經典定理.

1. (習題 5.10, [?]) 給定 Abel 範疇 $\mathcal{A}$. 若對象 $X \in \mathcal{A}$ 滿足 $\mathrm{Ext}^{\geq 1}(X, X) = 0$, 則典範函子 $K^b(\mathbf{add}(M)) \to D^b\mathcal{A}$ 是全忠實的. 見筆記, 歸納長度即可
2. (習題 5.4.1, [?]) 假定 Abel 範疇有無限餘積和足夠投射對象, 則 $D^b\mathcal{A} = D^b(\mathcal{P}(\mathcal{A}))$ 當且僅當 $\mathcal{A}$ 的整體維數有限, 亦當且僅當 $\mathcal{A}$ 中任意對象的投射維數有限.

此時, $K^b(\mathbf{add}(T)) \to D^b(\mathbf{mod}_A) = D^b(A)$ 是範疇等價. $(T, -)$ 與 $- \otimes T$ 給出了導出等價

$$\begin{tikzcd} T \arrow[d, shift right, "(T,-)_A"'] \arrow[d, phantom, "\cong"] \\ (T,T) \arrow[u, shift right, "-\otimes_B T"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K^b(\mathbf{add}(T)) \arrow[r, leftrightarrow, "\simeq"] \arrow[d, leftrightarrow, "\simeq"] & D^b(A) \arrow[d, leftrightarrow, dashed, "\simeq"] \\ K^b(\mathbf{add}(B)) \arrow[r, leftrightarrow, "\simeq"'] & D^b(B) \end{tikzcd} . \tag{164}$$

3 First Section

This document is an example of BibTeX using in bibliography management. Three items are cited: *The LaTeX Companion* book [4], the Einstein journal paper [5], and the Donald Knuth's website [6]. The LaTeX related items are [4, 6].

4 Terminologies (?)

此處是部分中英文詞彙對照.

English	中文	出處	補註
cat	小範疇記號	1.1	例如 $\mathbf{mod}_A$ 是有限表現 A-模範疇.
Cat	大範疇記號	1.1	例如 $\mathbf{Mod}_A$ 是一般的 A-模範疇.
Radical	根	1.1, 1.2	符號 Rad, 也就是 Jacobson radical.
Top	頂	1.1, 1.2	符號 Top, 極大半單商 ([7] 稱之 cosocle).
Superfluous	盈餘	1.2	加上等於沒加, 類似中山引理.
Cosuperfluous	餘盈餘	1.2	盈餘的對偶. 使用 “本性擴張” 表述更便捷.
Socle	基座	???	符號 Soc, 極大半單子.
Bottom	底	???	符號 Bot, 存粹爲了對偶表述而定義之.
Tilting Module	斜置模	2.1.2	慣用符號 T
Cogenerator	餘生成元	1.8	X 是餘生成子, 當且僅當 $(-, X)$ 忠實.
Charactor module	特征模	1.8	M 的特征模即 $(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.
Admissible Ideal	容許理想	1.3	增速可控, $J^2 \subseteq I \subseteq J^k$.
Dual	對偶	1.2	反變函子 $D(-) := (-, k)_A$.
Transpose	轉置	1.2	反變函子 $(-)^t := (-, A)_A$.
Nakayama functor	中山函子	1.2	$\nu(X) = D \circ (X^t) = X \otimes DA$.
AR Transpose	AR 轉置	1.4.3	$\mathrm{Tr}(\mathrm{coker}(f)) = \mathrm{coker}(f^t)$. 穩定等價!
Quiver	箭圖	1.6.1	要件 (Q_0, Q_1, s, t).
Torsion pair	扭對	2.1.1	$(\mathcal{F}, \mathcal{T})$, 其中 $(T, F) = 0$ 垂直閉.
Resolution	消解 (解消)	2.2.1	投射分解的推廣.
Coresolution	餘消解 (餘解消)	2.2.1	內射分解的推廣.

References

[1] I. Assem, D. Simson, and A. Skowroński. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras: Techniques of representation theory*. Elements of the Representation Theory of Associative Algebras. Cambridge University Press, 2006.

[2] Haynes Miller. Leray in Oflag XVIIA: the origins of sheaf theory, sheaf cohomology, and spectral sequences. Number 84, pages 17–34. 2000. Jean Leray (1906–1998).

[3] J.J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra*. Universitext. Springer New York, 2008.

[4] Michel Goossens, Frank Mittelbach, and Alexander Samarin. *The LaTeX Companion*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1993.

[5] Albert Einstein. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. (German) [On the electrodynamics of moving bodies]. *Annalen der Physik*, 322(10):891–921, 1905.

[6] Donald Knuth. Knuth: Computers and typesetting.

[7] Tom Braden, Anthony Licata, Christopher Phan, Nicholas Proudfoot, and Ben Webster. Localization algebras and deformations of koszul algebras. *Selecta Mathematica*, 17(3):533–572, April 2011.