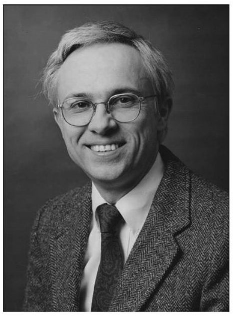
模型结构介绍

张继平 (北京大学)
章璞 (上海交通大学)

2023 年 3 月 13 日

范畴上的(闭)模型结构和(闭)模型范畴，是 D. Quillen 在 [Q1] 中引入的 (也参见 [Q2]). 有限群的表示范畴,有限维 Hopf 代数的模范畴,自入射代数的模范畴, 环上 Gorenstein 投射模范畴, 加法范畴的复形范畴,微分分次代数范畴,拓扑空间范畴, 都有自然的(闭)模型结构.模型范畴中的思想方法概括、发展、并影响了某些数学领域中的思想方法.例如, V. Voevodsky 获 Fields 奖的工作 [Voe]. 现在，模型结构在诸如表示论、高阶 K-理论、同伦论、代数拓扑、理论计算机科学中的同伦类型论中，都有重要的应用，也成为前沿的研究对象.



Daniel Gray Quillen (1940-2011) 1964 年以偏微分方程方面的工作获哈佛大学博士学位. 不久,受 D. Kan 的影响, 他研究代数拓扑和代数学. 1967 年他引入模型范畴并以此研究同伦论；1971年他用有限群模表示论证明拓扑学中的 Adams 猜想；1972 年他建立高阶 K-理论，其中引入正合范畴； 1976年他证明 Serre 猜想: 主理想整环上的 n 元多项式环上的有限生成投射模都是自由模 (A. A. Suslin 也独立地得到这一结果). 1978年他获 Fields 奖.

文献 [Q1]清晰简洁,是这一理论很好很快的入门书. [H1] 和 [Hir] 是这方面的专著.文献 [H3] 是有帮助的综述性文章.

这个讲义的初稿基于我们 2010 年关于余挠对和正合范畴的笔记手稿.此次由于系列讲座的推动, 添加 Quillen 模型结构方面的内容. 在这个短课中，我们将介绍(闭)模型结构的基本概念和性质，说明模型结构与闭模型结构之间的关系. 证明 Abel 范畴上相容的闭模型结构与 Hovey 三元组之间一一对应的著名定理; 从一对遗传、完备、相容的余挠对构造 Hovey 三元组. 介绍正合范畴及其基本性质；给出 Frobenius 范畴上的自然的(闭)模型结构. 我们也将从

Abel 范畴上的余挠对出发，在适当的条件下，得到其复形范畴上的两个余挠对, 进而得到复形范畴上的一个 Hovey 三元组， 从而得到复形范畴上的一个相容的闭模型结构. 时间所限，我们未涉及重要的同伦理论.附录中可以查到需要反复用到的拉回和推出方面的主要结论.

感谢周远扬教授邀请我们做这方面的系列讲座.感谢李志伟教授的讨论并帮忙校对; 感谢高楠教授指出打印错误.崔健和荣石帮忙打印和校对了部分内容.

目录

§1　模型结构

本节我们将介绍模型结构的概念和初步性质.

§1.1　Model structures

定义 1.1 ([Q1]) *A model structure* on a category $\mathcal{M}$ is a triple $(\mathrm{Cofib}(\mathcal{M}),\ \mathrm{Fib}(\mathcal{M}),\ \mathrm{Weq}(\mathcal{M}))$ of classes of morphisms, where the morphisms in the three classes are called cofibrations (usually denoted by $\hookrightarrow$), fibrations (usually denoted by $\twoheadrightarrow$), and weak equivalences, respectively, satisfying the following conditions (M1) - (M5):

(M1) (提升性) Given a commutative square

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, hook, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "b"] \arrow[ur, dotted, "s"] & Y \end{tikzcd}$$

where $i \in \mathrm{Cofib}(\mathcal{M})$ and $p \in \mathrm{Fib}(\mathcal{M})$, if either $i \in \mathrm{Weq}(\mathcal{M})$ or $p \in \mathrm{Weq}(\mathcal{M})$, then there exists a dotted arrow $s : B \longrightarrow X$ such that $a = si,\ \ b = ps$.

(M2) (分解性) Any morphism $f : X \longrightarrow Y$ has the following two factorizations.

(i) $f = pi$, where $i \in \mathrm{Cofib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M}),\ \ p \in \mathrm{Fib}(\mathcal{M})$;

(ii) $f = p'i'$, where $i' \in \mathrm{Cofib}(\mathcal{M}),\ \ p' \in \mathrm{Fib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M})$.

(M3) Both $\mathrm{Fib}(\mathcal{M})$ and $\mathrm{Cofib}(\mathcal{M})$ are closed under compositions. Isomorphisms are both fibrations and cofibrations.

Fibrations are closed under pullback, i.e., given a pullback square

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, dotted] \arrow[d, dotted, "p'"'] & \bullet \arrow[d, "p"] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

with $p \in \mathrm{Fib}(\mathcal{M})$, then $p' \in \mathrm{Fib}(\mathcal{M})$.

Cofibrations are closed under pushout, i.e., given a pushout square

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "i"] \arrow[d] & \bullet \arrow[d, dotted] \\ \bullet \arrow[r, dotted, "i'"] & \bullet \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

with $i \in \mathrm{Cofib}(\mathcal{M})$, then $i' \in \mathrm{Cofib}(\mathcal{M})$.

(M4) For any pullback square as (1.1), if $p \in \mathrm{Fib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M})$, then $p' \in \mathrm{Weq}(\mathcal{M})$.

For any pushout square as (1.2), if $i \in \mathrm{Cofib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M})$, then $i' \in \mathrm{Weq}(\mathcal{M})$.

(M5) Let $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ be morphisms in $\mathcal{M}$. If two of the three morphisms $f,\ g,\ gf$ are weak equivalences, then so is the third. (这通常称为弱等价的“二推三”性质. 特别地, 弱等价的合成还是弱等价.)

Any isomorphism is a weak equivalence.

将 $\mathrm{Cofib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M})$ 中的态射称为 平凡余纤维；将 $\mathrm{Fib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M})$ 中的态射称为 平凡纤维.

模型结构的定义并不假定拉回和推出的存在性；而只是说, 如果 (平凡) 纤维的拉回存在则拉回后得到的态射仍是(平凡)纤维；如果 (平凡) 余纤维的推出存在则推出后得到的态射仍是(平凡)余纤维.

定义 1.2 (1) 设 I 和 $\mathcal{A}$ 是任意范畴, $F: I \to \mathcal{A}$是函子. 则 F 的余极限定义为 $\mathcal{A}$ 中的一个对象 $\varinjlim F$, 连同 $\mathcal{A}$中的态射$f_i : Fi \to \varinjlim F$, $\forall i \in I$, 使得对于 I 中的任意态射 $\lambda : i \to j$有

$$f_j F\lambda = f_i;$$

并且$(\varinjlim F, f_i)$ 具有如下泛性质：如果还有 (Y, g_i), 其中$g_i : Fi \to Y (i \in I)$ 是$\mathcal{A}$中态射, 使得对于I中的任意态射$\lambda : i \to j$也有$g_j F\lambda = g_i$, 则存在唯一的态射$g : \varinjlim F \to Y$使得$g f_i = g_i, \forall i \in I$. 我们也将$F$的余极限记为$(\varinjlim F, f_i)$. 图示如下

$$\begin{tikzcd}
Fi \arrow[rr, "F\lambda"] \arrow[dr, "f_i"] \arrow[ddr, bend right, "g_i"'] & & Fj \arrow[dl, "f_j"'] \arrow[ddl, bend left, "g_j"] \\
& \varinjlim F \arrow[d, dashed, "g"'] & \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

(1') 设 I 和 $\mathcal{A}$ 是任意范畴, $F : I \to \mathcal{A}$是函子. 则 F 的极限定义为 $\mathcal{A}$ 中的一个对象$\varprojlim F$, 连同$\mathcal{A}$中的态射$f_i : \varprojlim F \to Fi$, $\forall i \in I$, 使得对于I中的任意态射$\lambda : i \to j$有

$$(F\lambda) f_i = f_j;$$

并且$(\varprojlim F, f_i)$具有如下泛性质：如果还有(Y, g_i), 其中$g_i : Y \to Fi (i \in I)$是$\mathcal{A}$中态射, 使得对于 I 中的任意态射$\lambda : i \to j$ 也有 $(F\lambda) g_i = g_j$, 则存在唯一的态射 $g : Y \to \varprojlim F$使

得$f_i g = g_i, \forall i \in I$. 我们也将 F 的极限记为$(\varprojlim F, f_i)$. 图示如下

$$
\begin{tikzcd}
& Y \arrow[d, dashed, "g"] \arrow[ddl, bend right, "g_i"'] \arrow[ddr, bend left, "g_j"] & \\
& \varprojlim F \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\
Fi \arrow[rr, "F\lambda"] & & Fj
\end{tikzcd}
$$

(2) 范畴 $\mathcal{A}$ 称为余完备的, 如果对于任意小范畴 I和任意函子 $F : I \to \mathcal{A}$, 余极限 $\varinjlim F$ 总存在.

进一步, 范畴 $\mathcal{A}$ 称为有有限余极限的, 或有限余完备的, 如果对于任意有限范畴 I (即对象集和每个态射集均是有限的)和任意函子 $F : I \to \mathcal{A}$, 余极限 $\varinjlim F$ 均存在.

(2') 范畴 $\mathcal{A}$ 称为完备的, 如果对于任意小范畴 I 和任意函子$F : I \to \mathcal{A}$, 极限 $\varprojlim F$ 总存在.

进一步, 范畴 $\mathcal{A}$ 称为有有限极限的, 或有限完备的, 如果对于任意有限范畴 I (即对象集和每个态射集均是有限的) 和任意函子 $F : I \to \mathcal{A}$, 极限 $\varprojlim F$ 均存在.

定义 1.3 ([Q1]) A category $\mathcal{M}$ endowed with a model structure is called a *model category*, if

(M0) $\mathcal{M}$ is closed under finite projective and inductive limits.

模型范畴 $\mathcal{M}$ 中的条件 (M0) 保证了在 $\mathcal{M}$ 中, 初对象 (initial object) $\emptyset$、终对象 (terminal object, or, final object) $\star$、核 (kernel)、余核 (cokernel)、有限个对象的余积 (coproduct)、有限个对象的积 (product)、拉回 (pullback)、推出 (pushout), 都是存在的.

为方便起见, 以下在本讲义中, 总假定所考虑的范畴有零对象 0. 从而, 初对象 $\emptyset$ 和终对象 $\star$ 均存在, 且 $\emptyset = 0 = \star$.

§1.2 Terminologies

(1) Let $\mathcal{M}$ be a category.

(i) Let f and g be morphisms in $\mathcal{M}$. The morphism f is said to be a *retract,* 缩回 of g, if there exists two morphisms $\varphi : f \longrightarrow g$ and $\psi : g \longrightarrow f$ in the morphism category $\mathrm{Mor}(\mathcal{M})$, such that $\psi\varphi = \mathrm{Id}_f$. That is, there exists the following commutative diagram

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"'] \\
Y \arrow[r, "\varphi_2"] & Y' \arrow[r, "\psi_2"] & Y
\end{tikzcd}
$$

such that $\psi_1\varphi_1 = \mathrm{Id}_X, \quad \psi_2\varphi_2 = \mathrm{Id}_Y$.

(ii) Let i and p be morphisms of $\mathcal{M}$. We say that i has *the left lifting property* (LLP) with respect to p, and p has *the right lifting property* (RLP) with respect to i, provided that for any commutative square

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "b"] \arrow[ur, dotted, "s"] & Y \end{tikzcd}$$

there exists a morphism $s : B \longrightarrow X$ such that $a = si, \quad b = ps$.

For a class R of morphisms, denote by $l(R)$ the class of morphisms which have the LLP (left lifting property) with respect to every morphism in R.

For a class L of morphisms, denote by $r(L)$ the class of morphisms which have the RLP (right lifting property) with respect to every morphism in L.

(2) Let $(\mathrm{Cofib}(\mathcal{M}),\ \mathrm{Fib}(\mathcal{M}),\ \mathrm{Weq}(\mathcal{M}))$ be a model structure on category $\mathcal{M}$. Then

(i) 提升性 (M1) 可以重新表述成

$$\mathrm{Cofib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M}) \subseteq l(\mathrm{Fib}(\mathcal{M})); \qquad \mathrm{Cofib}(\mathcal{M}) \subseteq l(\mathrm{Fib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M}));$$

$$\mathrm{Fib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M}) \subseteq r(\mathrm{Cofib}(\mathcal{M})); \qquad \mathrm{Fib}(\mathcal{M}) \subseteq r(\mathrm{Cofib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M})).$$

(ii) An object X is called *a cofibrant object,* 余纤维对象, if $0 \longrightarrow X$ is a cofibration.
用 $\mathcal{M}_c$ 或 $\mathcal{C}$ 表示所有余纤维对象作成的类.

An object Y is called *a fibrant object,* 纤维对象, if $Y \longrightarrow 0$ is a fibration.
用 $\mathcal{M}_f$ 或 $\mathcal{F}$ 表示所有纤维对象作成的类.

An object W is called *a trivial object,* 平凡对象, if $0 \longrightarrow W$ is a weak equivalence. 由弱等价的“二推三”性质即知：W 是平凡对象当且仅当 $W \longrightarrow 0$ 是弱等价.
用 $\mathcal{M}_t$ 或 $\mathcal{W}$ 表示所有平凡对象作成的类.

于是, 得到三个对象类, 或三个全子范畴: $\mathcal{C}$， $\mathcal{F}$, $\mathcal{W}$.

习题 设 $(\mathrm{Cofib}(\mathcal{M}),\ \mathrm{Fib}(\mathcal{M}),\ \mathrm{Weq}(\mathcal{M}))$ 是范畴 $\mathcal{M}$ 上的一个模型结构, A 和 B 是两个平凡对象. 则任意态射 $f : A \longrightarrow B$ 都是弱等价.

§1.3 弱等价的分解

引理 1.4 *在一个模型结构中, 弱等价恰是平凡余纤维与平凡纤维的合成, 即*

$$\mathrm{Weq}(\mathcal{M}) = (\mathrm{Fib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M})) \cdot (\mathrm{Cofib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M})).$$

证明　由弱等价的合成还是弱等价 (参见 (M5)) 即知

$$(\mathrm{Fib}(\mathcal{M})\cap\mathrm{Weq}(\mathcal{M}))\cdot(\mathrm{Cofib}(\mathcal{M})\cap\mathrm{Weq}(\mathcal{M}))\subseteq\mathrm{Weq}(\mathcal{M}).$$

反之, 设 $w\in\mathrm{Weq}(\mathcal{M})$. 由 (M2) 知有分解 $w=pi$, 其中 $i\in\mathrm{Cofib}(\mathcal{M})\cap\mathrm{Weq}(\mathcal{M})$, $p\in\mathrm{Fib}(\mathcal{M})$. 再由 (M5) (即，弱等价的“二推三”性质)知 $p\in\mathrm{Weq}(\mathcal{M})$, 故 $p\in\mathrm{Fib}(\mathcal{M})\cap\mathrm{Weq}(\mathcal{M})$. 于是

$$\mathrm{Weq}(\mathcal{M})\subseteq(\mathrm{Fib}(\mathcal{M})\cap\mathrm{Weq}(\mathcal{M}))\cdot(\mathrm{Cofib}(\mathcal{M})\cap\mathrm{Weq}(\mathcal{M})). \qquad \square$$

§1.4　态射分解的函子性

事实 1.5 设范畴 $\mathcal{M}$ 有三个态射类, 记为 $\mathrm{Cofib}(\mathcal{M})$, $\mathrm{Fib}(\mathcal{M})$, $\mathrm{Weq}(\mathcal{M})$， 满足 (M1) 和 (M2). 则 (M2) 中的分解具有函子性, 即, 若有交换图

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & \bullet \arrow[d, "\psi"] \\
\bullet \arrow[r, "g"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

则

(1) 若 $f=pi$, $g=p'i'$, 其中 $p,\,p'\in\mathrm{Fib}(\mathcal{M})$, $i,\,i'\in\mathrm{Cofib}(\mathcal{M})\cap\mathrm{Weq}(\mathcal{M})$, 则存在 s 使得 $si=i'\varphi, p's=\psi p$.

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"] \arrow[dd, "\varphi"'] & & \bullet \arrow[dd, "\psi"] \\
& \bullet \arrow[ur, "p"'] \arrow[dd, dotted, "s"] & \\
\bullet \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "i'"] & & \bullet \\
& \bullet \arrow[ur, "p'"'] &
\end{tikzcd}$$

(2) 若 $f=qj$, $g=q'j'$, 其中 $q,\,q'\in\mathrm{Fib}(\mathcal{M})\cap\mathrm{Weq}(\mathcal{M})$, $j,\,j'\in\mathrm{Cofib}(\mathcal{M})$, 则存在 t 使得 $tj=j'\varphi$, $q't=\psi q$.

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "j"] \arrow[dd, "\varphi"'] & & \bullet \arrow[dd, "\psi"] \\
& \bullet \arrow[ur, "q"'] \arrow[dd, dotted, "t"] & \\
\bullet \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "j'"] & & \bullet \\
& \bullet \arrow[ur, "q'"'] &
\end{tikzcd}$$

证明 只证 (2). 结论 (1) 的证明完全类似. 考虑交换图:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "j'\varphi"] \arrow[d, "j"'] & \bullet \arrow[d, "q'"] \\ \bullet \arrow[r, "\psi q"'] \arrow[ur, dotted, "t"] & \bullet \end{tikzcd}$$

由于 $j \in \mathrm{Cofib}(\mathcal{M})$, $q' \in \mathrm{Fib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M})$, 故由 (M1) 知存在 t 使得 $tj = j'\varphi, \ \ q't = \psi q$. □

§2 闭模型结构

Quillen 也引入闭模型结构, 它优于模型结构: 其中三个态射类中的任意一个态射类由其余两个态射类唯一确定. 本节我们将介绍闭模型结构的概念、基本性质. 特别地，我们要说明闭模型结构是模型结构,并给出一个模型结构是闭的充分必要条件.

§2.1 闭模型结构

定义 2.1 ([Q2], p.233) *A closed model structure* on a category $\mathcal{M}$ is a triple (Cofib($\mathcal{M}$), Fib($\mathcal{M}$), Weq($\mathcal{M}$)) of classes of morphisms, where the morphisms in the three classes are respectively called cofibrations (usually denoted by $\hookrightarrow$), fibrations (usually denoted by $\twoheadrightarrow$), and weak equivalences, satisfying the following conditions (CM1) - (CM4):

(CM1) (弱等价的"二推三"性质) Let $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ be morphisms in $\mathcal{M}$. If two of the morphisms f, g, gf are weak equivalences, then so is the third. 特别地, 弱等价的合成还是弱等价.

(CM2) (三个态射类均对 retract 封闭) If f is a retract of g, and g is a cofibration (fibration, weak equivalence), then so is f.

(CM3)=(M1) (提升性) Given a commutative square

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, hook, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "b"] \arrow[ur, dotted, "s"] & Y \end{tikzcd}$$

where $i \in \mathrm{Cofib}(\mathcal{M})$ and $p \in \mathrm{Fib}(\mathcal{M})$, if either $i \in \mathrm{Weq}(\mathcal{M})$ or $p \in \mathrm{Weq}(\mathcal{M})$, then there exists a morphism $s : B \longrightarrow X$ such that $a = si$, $b = ps$.

(CM4)=(M2) (分解性) Any morphism $f : X \longrightarrow Y$ has two factorizations:

(i) $f = pi$, where $i \in \mathrm{Cofib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M})$, $p \in \mathrm{Fib}(\mathcal{M})$;

(ii) $f = p'i'$, where $i' \in \mathrm{Cofib}(\mathcal{M})$, $p' \in \mathrm{Fib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M})$.

定义 2.2 ([Q2]) A category $\mathcal{M}$ endowed with a closed model structure is called *a closed model category*, if

(CM0)=(M0) $\mathcal{M}$ is closed under finite projective and inductive limits.

请注意, 现在不少文献中的模型结构(范畴)就是指闭模型结构(范畴).

§2.2 例子

这个理论的一个特点：每一个例子就是一条重要定理. 因此, 立即给出(闭)模型范畴的例子是困难的. 知道 Frobenius 范畴有自然的模型结构以后，会得到很多例子.

按惯例, 我们先指出一些例子, 但除 (1) 以外, 它们但是证明很长且困难的定理.

(1) 易知：如果 (Cofib($\mathcal{M}$), Fib($\mathcal{M}$), Weq($\mathcal{M}$)) 是范畴 $\mathcal{M}$ 上的(闭)模型结构 (相应地，范畴), 则 (Fib($\mathcal{M}$), Cofib($\mathcal{M}$), Weq($\mathcal{M}$)) 是反范畴 $\mathcal{M}^{\mathrm{op}}$ 上的(闭)模型结构 (相应地，范畴).

(2) 设 $\mathcal{A}$ 是有足够多投射对象的 Abel 范畴. 则 $\mathcal{A}$ 上的下有界复形范畴 $\mathcal{C}^+(\mathcal{A})$ 是闭模型范畴, 其中的余纤维是复形的单态射且其余核是投射对象的复形，纤维是复形的满态射，弱等价是复形的拟同构, 即诱导出上同调对象之间同构的复形态射. 参见 [Q1, Chapter I, § 1]. 这在 [H1, Theorem 2.3.11] 中被推广至无界复形范畴上. 也参见例 9.15.

(3) 加法范畴 $\mathcal{A}$ 上的复形短正合列 $0 \longrightarrow X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} Z^\bullet \longrightarrow 0$ 称为链可裂短正合列, 如果 $0 \longrightarrow X^n \xrightarrow{f^n} Y^n \xrightarrow{g^n} Z^n \longrightarrow 0$ 是可裂短正合列, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$, 即存在同构 $\gamma: X^n \oplus Z^n \longrightarrow Y^n$ 使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X^n \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, equal] & X^n \oplus Z^n \arrow[r, "(0,1)"] \arrow[d, "\gamma"] & Z^n \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & X^n \arrow[r, "f^n"] & Y^n \arrow[r, "g^n"] & Z^n \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

其等价描述参见 引理 7.8. 此时链映射 $f^\bullet$ 称为链可裂单射, 链映射 $g^\bullet$ 称为链可裂满射. 注意在链可裂短正合列中, 作为复形, $Y^\bullet$ 未必同构于 $X^\bullet \oplus Z^\bullet$.

加法范畴 $\mathcal{A}$ 的复形范畴 $\mathcal{C}^b(\mathcal{A})$, $\mathcal{C}^+(\mathcal{A})$, $\mathcal{C}^-(\mathcal{A})$, $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, 都是闭模型范畴, 其中
余纤维是链可裂单射，纤维是链可裂满射, 弱等价是同伦等价 (即同伦范畴中的同构).

这与 (2) 中的模型结构是不同的. 也参见命题 8.9.

(4) 设 R 是环, 存在非自由模的投射模. 则下有界复形范畴 $\mathcal{C}^+(R\text{-Mod})$ 是模型范畴但非闭模型范畴, 其中的余纤维是复形的单态射且其余核是自由 R-模的复形，纤维是复形的满态射，弱等价是复形的拟同构. 参见 [Q1, Chapter I, § 5].

(5) 拓扑空间和连续映射作成的范畴是闭模型范畴, 其中的弱等价是弱同伦等价，纤维是 Serre 纤维，余纤维是对所有平凡纤维 (即 Serre 纤维且弱同伦等价)有左提升性质的连续映射. 参见 [Q1, Chapter II, § 3, Theorem 1].

(6) 微分分次代数范畴是闭模型范畴, 其中的弱等价是拟同构, 纤维是 dg 代数的满同态，余纤维是对所有平凡纤维有左提升性质的 dg 代数同态. 参见 [GM, V.3, Theorem].

§2.3 基本性质

在本小节中, 若无特殊声明, 总假设 (Cofib($\mathcal{M}$), Fib($\mathcal{M}$), Weq($\mathcal{M}$)) 是范畴 $\mathcal{M}$ 上的一个闭模型结构,不再每次陈述. 我们将看到, 闭模型结构最重要的性质是三个态射类 Cofib($\mathcal{M}$), Fib($\mathcal{M}$), Weq($\mathcal{M}$) 中的任意两个态射类唯一地确定第三个态射类. 这是 “闭” 的含义.

比较模型结构和闭模型结构的定义, 立即看出: 范畴 $\mathcal{M}$ 上的模型结构 (Cofib($\mathcal{M}$), Fib($\mathcal{M}$), Weq($\mathcal{M}$)) 是闭模型结构当且仅当它满足 (CM2), 即三个态射类 Cofib($\mathcal{M}$), Fib($\mathcal{M}$), Weq($\mathcal{M}$) 均对 retract 封闭.

然而, 要说明闭模型结构是模型结构,还需要若干准备, 主要是验证 (M3) 和 (M4).

命题 2.3 One has

(1) $\mathrm{Cofib}(\mathcal{M}) = l(\mathrm{Fib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M}))$, i.e., cofibrations are precisely those morphisms which have LLP (the left lifting property) with respect to all trivial fibrations.

(2) $\mathrm{Cofib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M}) = l(\mathrm{Fib}(\mathcal{M}))$, i.e., trivial cofibrations are precisely those morphisms which have LLP with respect to all fibrations.

(3) $\mathrm{Fib}(\mathcal{M}) = r(\mathrm{Cofib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M}))$, i.e., fibrations are precisely those morphisms which have RLP (the right lifting property) with respect to all trivial cofibrations.

(4) $\mathrm{Fib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M}) = r(\mathrm{Cofib}(\mathcal{M}))$, i.e., trivial cofibrations are precisely those morphisms which have RLP with respect to all cofibrations.

(5) $\mathrm{Weq}(\mathcal{M}) = r(\mathrm{Cofib}(\mathcal{M})) \cdot l(\mathrm{Fib}(\mathcal{M}))$.

证明 (1) The axiom (CM3) shows that $\mathrm{Cofib}(\mathcal{M}) \subseteq l(\mathrm{Fib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M}))$.

Conversely, for an arbitrary morphism $f \in l(\mathrm{Fib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M}))$, by (CM4) one has a factorization $f = p'i'$, where $i' \in \mathrm{Cofib}(\mathcal{M})$ and $p' \in \mathrm{Fib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M})$. So one gets a commutative square

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "f=p'i'"'] & \bullet \arrow[d, "p'"] \\ \bullet \arrow[r, equal] \arrow[ur, dotted, "x"] & \bullet \end{tikzcd}$$

By the assumption $f \in l(\mathrm{Fib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M}))$, f has LLP with respect to p', i.e., there exists a morphism x such that the two triangles commutes. Since $p'x = \mathrm{Id}$, it follows that f is a retract of i', as the following commutative diagram shows

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"'] & \bullet \arrow[r, equal] \arrow[d, "i'"'] & \bullet \arrow[d, "f"'] \\ \bullet \arrow[r, "x"] & \bullet \arrow[r, "p'"] & \bullet \end{tikzcd}$$

Since i' is a cofibration, it follows from (CM2) that f is a cofibration, i.e., $f \in \mathrm{Cofib}(\mathcal{M})$. This proves $\mathrm{Cofib}(\mathcal{M}) = l(\mathrm{Fib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M}))$.

(2) The axiom (CM3) shows that $\mathrm{Cofib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M}) \subseteq l(\mathrm{Fib}(\mathcal{M}))$.

Conversely, for an arbitrary morphism $f \in l(\mathrm{Fib}(\mathcal{M}))$, by (CM4) one has a factorization $f = pi$, where $i \in \mathrm{Cofib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M})$ and $p \in \mathrm{Fib}(\mathcal{M})$. So one gets a commutative square

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f=pi"'] & \bullet \arrow[d, "p"] \\ \bullet \arrow[r, equal] \arrow[ur, dotted, "x"] & \bullet \end{tikzcd}$$

By the assumption $f \in l(\mathrm{Fib}(\mathcal{M}))$, f has LLP with respect to p, i.e., there exists a morphism x such that the two triangles commutes. So f is a retract of i, as the following commutative diagram shows.

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"'] & \bullet \arrow[r, equal] \arrow[d, "i"'] & \bullet \arrow[d, "f"'] \\
\bullet \arrow[r, "x"] & \bullet \arrow[r, "p"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

Since i is a trivial cofibration, it follows from (CM2) that f is a trivial cofibration, i.e., $f \in \mathrm{Cofib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M})$. This shows $\mathrm{Cofib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M}) = l(\mathrm{Fib}(\mathcal{M}))$.

结论 (3) 和 (4) 的证明是类似的, 留作习题.

(5) 由引理 1.4的证明即知 $\mathrm{Weq}(\mathcal{M}) = (\mathrm{Fib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M})) \cdot (\mathrm{Cofib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M}))$. 再由 (2) 和 (4) 即得. □

引理 2.4 One has

(1) The classes $\mathrm{Fib}(\mathcal{M})$ and $\mathrm{Fib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M})$ are closed under compositions.

(2) The class $\mathrm{Fib}(\mathcal{M})$ is closed under pullback.

(3) The class $\mathrm{Fib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M})$ is closed under pullback.

(1′) The classes $\mathrm{Cofib}(\mathcal{M})$ and $\mathrm{Cofib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M})$ are closed under compositions.

(2′) The class $\mathrm{Cofib}(\mathcal{M})$ is closed under pushout.

(3′) The class $\mathrm{Cofib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M})$ is closed under pushout.

证明 只证 (1), (2), (3). 其余结论留作习题.

(1) 设 $\bullet \xrightarrow{p} \bullet \xrightarrow{p'} \bullet$ 是 $\mathcal{M}$ 中(两个可合成)的态射, 其中 p 和 p' 均是纤维. 要证 $p'p$ 也是纤维. 由命题 2.3(3)知, 只要证明 $p'p$ 对任意平凡余纤维 i 有右提升性质. 为此, 假设有 态射 a 和 b 满足 $bi = (p'p)a$. 则 $bi = p'(pa)$. 参见下图. 因为 p 是纤维, 由提升性即知存在态射 x 使得 $pa = xi$, $b = p'x$.

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[d, "p"] \\
A \arrow[ur, "a"] \arrow[r, "pa"] \arrow[d, "i"'] & \bullet \arrow[d, "p'"] \\
B \arrow[uur, dotted, "x'"'] \arrow[ur, dotted, "x"'] \arrow[r, "b"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

因为 p' 是纤维，再对交换方块 $pa = xi$ 使用提升性即知存在态射 x' 使得 $a = x'i$, $x = px'$. 从而 $a = x'i$, $b = p'x = (p'p)x'$. 这就证明了 $p'p$ 对任意平凡余纤维有右提升性质, 从而由命题 2.3(3)知 $p'p \in r(\mathrm{Cofib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M})) = \mathrm{Fib}(\mathcal{M})$.

如果 p 和 p' 还都是弱等价, 则 $p'p$ 也是弱等价 (参见 (CM1)), 故 $p'p \in \mathrm{Fib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M})$.

(2) Let

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "a"] \arrow[d, dotted, "f"'] & \bullet \arrow[d, "p"] \\
\bullet \arrow[r, "b"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

be a pullback square, and p a fibration. We want to prove that f is also a fibration. Again by Proposition 2.3(3), it suffices to prove that $f \in r(\mathrm{Cofib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M}))$. Assume that we have a commutative square

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "s"] \arrow[d, "i"'] & \bullet \arrow[d, "f"] \\
\bullet \arrow[r, "t"] \arrow[ur, dotted, "x"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

with $i \in \mathrm{Cofib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M})$, we want to find a morphism x such that $xi = s$ and $fx = t$. Since $p \in \mathrm{Fib}(\mathcal{M}) = r(\mathrm{Cofib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M}))$, there exists a morphism y such that $yi = as$ and $py = bt$, as the following commutative diagram shows.

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "s"] \arrow[d, "i"'] & \bullet \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"] & \bullet \arrow[d, "p"] \\
\bullet \arrow[r, "t"'] \arrow[urr, dotted, "y"] & \bullet \arrow[r, "b"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

Since $py = bt$, by the universal property of pullback, there exists a unique morphism x such that $fx = t$ and $ax = y$, as the following commutative diagram shows:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[dr, dotted, "x"] \arrow[drr, bend left, "y"] \arrow[ddr, bend right, "t"'] & & \\
& \bullet \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"'] & \bullet \arrow[d, "p"] \\
& \bullet \arrow[r, "b"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

Consider the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[dr, dotted, "s" above, "xi"' below] \arrow[drr, bend left, "as"] \arrow[ddr, bend right, "ti"'] & & \\
& \bullet \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"'] & \bullet \arrow[d, "p"] \\
& \bullet \arrow[r, "b"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

with $bti = pyi = pas$. Since

$$\begin{cases} as = as, \\ fs = ti, \end{cases} \qquad \begin{cases} axi = yi = as, \\ fxi = ti. \end{cases}$$

By the universal property of a pullback, we have $s = xi$. Hence $xi = s$ and $fx = t$. This completes the proof.

结论 (3) 与 (2)的证明类似. 留作习题. $\square$

引理 2.5 Isomorphisms are in $\mathrm{Cofib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Fib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M})$.

证明 以下证明的工具是使用命题 2.3. Let f be an isomorphism. From the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"'] & \bullet \arrow[d, "p \in \mathrm{Fib}(\mathcal{M})"] \\
\bullet \arrow[r, "b"] \arrow[ur, dotted, "af^{-1}"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

we know that $f \in l(\mathrm{Fib}(\mathcal{M})) = \mathrm{Cofib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M})$.

From the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\mathrm{Cofib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M}) \ni i"'] & \bullet \arrow[d, "f"] \\
\bullet \arrow[r, "b"] \arrow[ur, dotted, "f^{-1}b"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

we know that $f \in r(\mathrm{Cofib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M})) = \mathrm{Fib}(\mathcal{M})$.

Thus $f \in \mathrm{Cofib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Fib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M})$. $\square$

§2.4 模型结构与闭模型结构的关系

对范畴 $\mathcal{M}$ 上的模型结构 $(\mathrm{Cofib}(\mathcal{M}), \mathrm{Fib}(\mathcal{M}), \mathrm{Weq}(\mathcal{M}))$, 方便起见, 将如下三个条件合起来称为公理 (M6):

(a) $\mathrm{Cofib}(\mathcal{M}) = l(\mathrm{Fib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M}))$, 即, 余纤维恰好是对所有的平凡纤维都具有左提升性质的态射.

(b) $\mathrm{Fib}(\mathcal{M}) = r(\mathrm{Cofib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M}))$, 即, 纤维恰好是对所有的平凡余纤维都具有右提升性质的态射.

(c) $\mathrm{Weq}(\mathcal{M}) = r(\mathrm{Cofib}(\mathcal{M})) \cdot l(\mathrm{Fib}(\mathcal{M}))$.

特别地, 公理 (M6) 成立显示三个态射类 $\mathrm{Cofib}(\mathcal{M})$, $\mathrm{Fib}(\mathcal{M})$, $\mathrm{Weq}(\mathcal{M})$ 中任意一个态射类由其余两个态射类唯一确定.

将上述 (a), (b) 以及如下两个条件 (d) 和 (e) 合起来称为公理 (M7):

(d) $\mathrm{Cofib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M}) = l(\mathrm{Fib}(\mathcal{M}))$, 即, 平凡余纤维恰好是对所有的纤维都具有左提升性质的态射.

(e) $\mathrm{Fib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M}) = r(\mathrm{Cofib}(\mathcal{M}))$, 即, 平凡纤维恰好是对所有的余纤维都具有右提升性质的态射.

引理 2.6 设 (Cofib($\mathcal{M}$), Fib($\mathcal{M}$), Weq($\mathcal{M}$)) 是范畴 $\mathcal{M}$ 上的模型结构,且满足公理 (M7). 则

(1) 余纤维和平凡余纤维均对 retract 封闭.

(1′) 纤维和平凡纤维均对 retract 封闭.

证明 只证 (1), 结论 (1′) 的证明类似, 留作习题. 设态射 f 是余纤维 g 的一个 retract, 即，有交换图

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"'] \\ Y \arrow[r, "\varphi_2"] & Y' \arrow[r, "\psi_2"] & Y \end{tikzcd}$$

其中 $\psi_1\varphi_1 = \mathrm{Id}_X$, $\psi_2\varphi_2 = \mathrm{Id}_Y$. 要证 f 也是余纤维. 由性质 (a), 只要证 $f \in l(\mathrm{Fib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M}))$. 设有交换方块 $bf = pa$, 其中 $p \in \mathrm{Fib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M})$. 参见下图.则得到如下交换图

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, "p"'] \\ Y \arrow[r, "\varphi_2"] & Y' \arrow[r, "\psi_2"] \arrow[urr, dotted, "s"] & Y \arrow[r, "b"] & B \end{tikzcd}$$

特别地,有交换长方块 $(b\psi_2)g = p(a\psi_1)$. 因为 g 是余纤维, 由提升性即得 s 使得 $sg = a\psi_1$, $ps = b\psi_2$. 于是有 $s' = s\varphi_2 : Y \longrightarrow A$ 满足

$$s'f = s\varphi_2 f = sg\varphi_1 = a\psi_1\varphi_1 = a, \quad ps' = ps\varphi_2 = b\psi_2\varphi_2 = b.$$

因此 $f \in l(\mathrm{Fib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M})) = \mathrm{Cofib}(\mathcal{M})$, 即，$f$ 是余纤维.

若 g 还是平凡余纤维, 则利用性质 (d) 类似地可证 f 也是平凡余纤维. □

为了方便于以后(指后面的定理 5.13)的应用, 下述引理中的条件看上去似乎比较复杂, 但这些条件要比模型范畴的要求弱.

引理 2.7 设范畴 $\mathcal{M}$ 有态射类 Cofib($\mathcal{M}$),Fib($\mathcal{M}$),Weq($\mathcal{M}$), 满足提升性 (M1), 分解性 (M2) 和弱等价 (指 Weq($\mathcal{M}$) 中的态射) 的“二推三”性质. 若 $\mathcal{M}$ 满足下列条件之一, 则弱等价对缩回封闭.

(1) 设平凡纤维 (即 $\mathrm{Fib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M})$ 中的态射)的拉回存在，且平凡纤维对拉回封闭, 且平凡余纤维 (即 $\mathrm{Cofib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M})$ 中的态射) 对缩回封闭.

(2) 设平凡余纤维的推出存在，且平凡余纤维对推出封闭, 且平凡纤维对缩回封闭.

证明 设 $\mathcal{M}$ 满足上述条件 (1). 设态射 f 是弱等价 g 的一个缩回. 要证 f 也是弱等价. 由假设, 有交换图

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"'] \\ Y \arrow[r, "\varphi_2"] & Y' \arrow[r, "\psi_2"] & Y \end{tikzcd}$$

其中 $\psi_1\varphi_1 = \mathrm{Id}_X$, $\psi_2\varphi_2 = \mathrm{Id}_Y$. 根据 (M2), f 有如下分解 $f = pi$,

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & Y \\
& Z \arrow[ur, "p"'] &
\end{tikzcd}$$

其中 i 是余纤维, p 是平凡纤维. 由弱等价对合成封闭的题设, 只要证明 i 是平凡余纤维. 为此, 考虑平凡纤维 $p : Z \longrightarrow Y$ 和 $\psi_2 : Y' \longrightarrow Y$ 的拉回方块 (由题设，这总存在). 由平凡纤维对拉回封闭的题设, 得到平凡纤维 q 与态射 ψ 使得 $\psi_2 q = p\psi$. 由 $\psi_2\varphi_2 p = p$, 知存在唯一的态射 $\varphi : Z \longrightarrow Z'$, 使得 $q\varphi = \varphi_2 p$, $\psi\varphi = \mathrm{Id}_Z$. 即有如下的交换图:

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dotted, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "="] \arrow[ddr, bend right, "\varphi_2 p"'] & & \\
& Z' \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "q"'] & Z \arrow[d, "p"] \\
& Y' \arrow[r, "\psi_2"] & Y
\end{tikzcd}$$

又由 $\psi_2 g = f\psi_1 = pi\psi_1$, 知存在唯一的态射 j 使得 $qj = g$, $\psi j = i\psi_1$. 即有如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[dr, dotted, "j"] \arrow[drr, bend left, "i\psi_1"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& Z' \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "q"'] & Z \arrow[d, "p"] \\
& Y' \arrow[r, "\psi_2"] & Y
\end{tikzcd}$$

由 $qj = g$ 以及 g 和 q 均是弱等价知 j 是弱等价 (弱等价的“二推三”性质).

又由 $\psi_2\varphi_2 f = f = pi$, 知存在唯一的态射 $r : X \longrightarrow Z'$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dotted, "r"] \arrow[drr, bend left, "i"] \arrow[ddr, bend right, "\varphi_2 f"'] & & \\
& Z' \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "q"'] & Z \arrow[d, "p"] \\
& Y' \arrow[r, "\psi_2"] & Y
\end{tikzcd}$$

注意到态射 $\varphi i : X \longrightarrow Z'$ 和态射 $j\varphi_1 : X \longrightarrow Z'$ 均满足 r 的性质, 即

$$\begin{cases} q\varphi i = \varphi_2 pi = \varphi_2 f, \\ \psi\varphi i = i; \end{cases} \qquad \begin{cases} qj\varphi_1 = g\varphi_1 = \varphi_2 f, \\ \psi j\varphi_1 = i\psi_1\varphi_1 = i. \end{cases}$$

由 r 的唯一性知 $\varphi i = j\varphi_1$. 于是即有如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "i"'] & X' \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "j"'] & X \arrow[d, "i"] \\
Z \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p"'] & Z' \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "q"'] & Z \arrow[d, "p"] \\
Y \arrow[r, "\varphi_2"] & Y' \arrow[r, "\psi_2"] & Y
\end{tikzcd}$$

其中 $\psi\varphi = \mathrm{Id}_Z$. 于是 i 是 j 的缩回. 我们希望能证明 j 是平凡余纤维, 但目前不知道 j 是否是余纤维, 必须作进一步的考虑.

将 j 分解成 $j = p'j'$, 其中 j' 是余纤维, p' 是平凡纤维, 即

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "j'"'] & & Z' \\
& H \arrow[ur, "p'"'] &
\end{tikzcd}$$

因为 j 和 p' 均是弱等价, 故 j' 也是弱等价, 从而 j' 是平凡余纤维.

由 $p'j'\varphi_1 = j\varphi_1 = \varphi i$, 即下图中的方块交换

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "j'\varphi_1"] \arrow[d, "i"'] & H \arrow[d, "p'"] \\
Z \arrow[r, "\varphi"] \arrow[ur, dotted, "\varphi'"] & Z'
\end{tikzcd}$$

因为 p' 是平凡纤维, i 是余纤维, 由 (M1) 知存在 $\varphi' : Z \longrightarrow H$ 使得 $\varphi' i = j'\varphi_1, \quad p'\varphi' = \varphi$. 于是有如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "i"'] & X' \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "j'"'] & X \arrow[d, "i"] \\
Z \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "p"'] & H \arrow[r, "\psi p'"] \arrow[d, "qp'"'] & Z \arrow[d, "p"] \\
Y \arrow[r, "\varphi_2"] & Y' \arrow[r, "\psi_2"] & Y
\end{tikzcd}$$

其中 $\psi p'\varphi' = \psi\varphi = \mathrm{Id}_Z$. 于是 i 是平凡余纤维 j' 的缩回. 因此, 由平凡余纤维对缩回封闭的题设知 i 是平凡余纤维. $\square$

下述定理给出了模型结构与闭模型结构的关系 (其中 (2) 中 (i) 与 (ii) 的等价性在 [Q1] 中是用同伦范畴的理论得到的,这里是与李志伟讨论直接得到的; 而 (iii) 在 [Q1] 中并未提及).

定理 2.8 (D. Quillen, 1967) (1) *闭模型结构是模型结构. 从而, 闭模型范畴是模型范畴.*

(2) *设 $(\mathrm{Cofib}(\mathcal{M}), \mathrm{Fib}(\mathcal{M}), \mathrm{Weq}(\mathcal{M}))$ 是范畴 $\mathcal{M}$ 上的模型结构. 如果平凡纤维的拉回存在, 或者平凡余纤维的推出存在, 则下述等价*

(i) 它是闭模型结构;

(ii) 它满足公理 (M6);

(iii) 它满足公理 (M7).

(3) 设 $\mathcal{M}$ 是模型范畴. 则下述等价

(i) 它是闭模型范畴;

(ii) 它满足公理 (M6);

(iii) 它满足公理 (M7).

证明 注意到 (3) 是 (2) 的直接推论.

(1) 模型结构中的公理 (M1) 就是闭模型结构中的公理 (CM3); (M2) 就是 (CM4).

模型结构中的公理 (M3) 由引理 2.4 和引理 2.5 即得; (M4) 就是引理 2.4(3) 和 (3'); (M5) 由 (CM1) 和引理 2.5 即得. 从而, 闭模型结构是模型结构.

(2) (i) $\Longrightarrow$ (ii): 由命题2.3 即得.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): 先证 (d): $\mathrm{Cofib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M}) = l(\mathrm{Fib}(\mathcal{M}))$. 事实上, 模型结构中的提升性就给出 $\mathrm{Cofib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M}) \subseteq l(\mathrm{Fib}(\mathcal{M}))$. 反之, 由定义知

$$l(\mathrm{Fib}(\mathcal{M})) \subseteq l(\mathrm{Fib}(\mathcal{M}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{M})) \stackrel{(a)}{=} \mathrm{Cofib}(\mathcal{M}).$$

剩下只要证 $l(\mathrm{Fib}(\mathcal{M})) \subseteq \mathrm{Weq}(\mathcal{M})$. 设 $i \in l(\mathrm{Fib}(\mathcal{M}))$. 将 $i : X \longrightarrow Y$ 写成 $i = \mathrm{Id}_Y i$, 显然 $\mathrm{Id}_Y \in r(\mathrm{Cofib}(\mathcal{M}))$. 故由 (c): $\mathrm{Weq}(\mathcal{M}) = r(\mathrm{Cofib}(\mathcal{M})) \cdot l(\mathrm{Fib}(\mathcal{M}))$ 即知 $i \in \mathrm{Weq}(\mathcal{M})$.

类似地可证 (e). 留作习题.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): 只要证明 (CM2), 即三个态射类 $\mathrm{Cofib}(\mathcal{M})$, $\mathrm{Fib}(\mathcal{M})$, $\mathrm{Weq}(\mathcal{M})$ 均对缩回封闭.进一步, 由引理 2.6 只要证弱等价对缩回封闭, 而这由引理 2.7即得. $\square$

§3　范畴的局部化：分式范畴

范畴的局部化是范畴论，乃至整个数学中，最重要、最基本的构造之一.它可视为整环的商域、分式环、分式模的一般化.

问题的提出. 给定范畴 $\mathcal{C}$ 的一个态射类 S, $\mathcal{C}$ 关于 S 的局部化是一个范畴,在其中 S 中的态射变成同构,并且对此具有泛性质. 详细地说, $\mathcal{C}$ 关于 S 的局部化是指范畴 $S^{-1}\mathcal{C}$, 也常记为 $\mathcal{C}(S^{-1})$, 连同函子 $F:\mathcal{C}\longrightarrow S^{-1}\mathcal{C}$, 使得 $F(s)$ $(\forall\ s\in S)$ 均是同构; 并且, 若有函子 $G:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{B}$ 使得对于任意 $G(s)$ $(\forall\ s\in S)$ 均是同构,则存在唯一的函子 (在严格意义下) $H:S^{-1}\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{B}$ 满足 $G=HF$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & & S^{-1}\mathcal{C} \arrow[dl, "H"] \\
& \mathcal{B} &
\end{tikzcd}$$

本章研究范畴的局部化. 特别地, $S^{-1}\mathcal{C}$ 总存在且唯一 (在范畴同构的意义下). Gabriel-Zisman [GZ] 通过路范畴关于一个等价关系理想的商, 得到了范畴局部化的存在性. 但是，这样构造的局部化, 其结构难以看清. 因此，无论是 Abel 范畴和三角范畴的局部化, 还是导出范畴, 模型结构的 Quillen 同伦范畴，等等，但凡有可能, 都要研究其内在结构.

当 S 是加法范畴 $\mathcal{C}$ 的一个 (右，左) 乘法系时, $\mathcal{C}$ 关于 S 的局部化 $S^{-1}\mathcal{C}$ 拥有 (右，左) 分式构造， 通常称为分式范畴, 它仍然是加法范畴, 且局部化函子是加法函子.这方面内容出自 B. Iversen [I].

当 S 是三角范畴 $\mathcal{C}$ 的相容 (饱和) (右，左)乘法系时，$S^{-1}\mathcal{C}$ 也有自然的三角结构且局部化函子是三角函子. 这部分内容参见 J. L. Verdier [Ver]. 也参见 [Z] 第三章. 本章要讨论当 S 是 Abel 范畴 $\mathcal{C}$ 的(饱和) (右，左)乘法系时，$S^{-1}\mathcal{C}$ 也是自然的 Abel 范畴且局部化函子是正合函子.我们也要证明由 Abel 范畴中 (对象的) Serre 类可产生乘法系.

本章的内容是基本的、重要的和熟知的.大部分内容出自 Gabriel-Zisman 的经典著作 [GZ], 和 B. Iversen 的名著 [I]. 当 S 是加法范畴 $\mathcal{C}$ 的一个 (右，左) 乘法系时, [GZ] 并未给出局部化范畴 $S^{-1}\mathcal{C}$ 的 (右，左) 分式构造的细节 (只有一个结论性说明)；以后的著作，包括 N. Popescu 的书 [P], 也未谈及 $S^{-1}\mathcal{C}$ 的 (右，左) 分式构造；这部分内容是在 [I] 中给出的. 参见 [Z] 第三章. 而当 S 是 Abel 范畴 $\mathcal{C}$ 的(右，左)乘法系时，利用(右，左) 分式构造证明 $S^{-1}\mathcal{C}$ 是 Abel 范畴 (即定理 3.24 的证法) 似乎是新的：[GZ] 和 [I] 均未提到.

§3.1　范畴关于等价关系理想的商范畴

范畴的局部化的存在性, 需要范畴关于等价关系理想的商范畴. 而后者本身，也是有用的工具. 例如，复形的同伦范畴就是这样得到的.

定义 3.1　范畴 $\mathcal{C}$ 的一个*等价关系理想* $\sim$ 是指定义在 $\mathcal{C}$ 的所有的态射作成的类上的一个等价关系, 且这个等价关系具有理想性，即 $\sim$ 满足

同一性: 若 $f\sim g$, 则存在对象 X 和 Y 使得 $f,g\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$;

自反性: 对于任意态射 f 有 $f \sim f$;

对称性: 若 $f \sim g$, 则 $g \sim f$;

传递性: 若 $f \sim g$ 且 $g \sim h$, 则 $f \sim h$;

理想性： 若 $f \sim g$, 则 $hf \sim hg$, $fh' \sim gh'$ (如果可合成的话).

设 $\sim$ 是范畴 $\mathcal{C}$ 的一个等价关系理想. 则对于任意对象 X 和 Y, $\sim$ 给出集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ 上的一个等价关系 $\sim_{X,Y}$. 令 $\mathcal{C}(X,Y)/\sim$ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ 关于等价关系 $\sim_{X,Y}$ 的等价类的集合. 设 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$. 用 $[f]$ 表示 f 所在的等价类. 于是 $[f] \in \mathcal{C}(X,Y)/\sim$.

直接验证下述事实.

定义-引理 3.2 设 $\sim$ 是范畴 $\mathcal{C}$ 的一个等价关系理想. 则 $\mathcal{C}/\sim$ 是范畴, 其对象是 $\mathcal{C}$ 的对象; 态射集 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\sim}(X,Y)$ 就是 $\mathcal{C}(X,Y)/\sim$, 即 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ 关于等价关系 $\sim_{X,Y}$ 的等价类的集合; $\mathcal{C}$ 中态射的合成诱导出映射

$$\mathcal{C}(X,Y)/\sim \times \mathcal{C}(Y,Z)/\sim \longrightarrow \mathcal{C}(X,Z)/\sim.$$

并且有函子

$$\pi: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}/\sim, \quad X \mapsto X, \quad f \mapsto [f].$$

称 $\mathcal{C}/\sim$ 是范畴 $\mathcal{C}$ 关于等价关系理想 $\sim$ 的商范畴.

预加法范畴 $\mathcal{C}$ 的一个等价关系理想称为是加法的等价关系理想，如果

$$f \sim g \ \text{ 且 } \ f' \sim g' \ \text{ 能推出 } \ f - f' \sim g - g'.$$

显然 $\{f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \mid f \sim 0\}$ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ 的子群.

引理 3.3 设 $\sim$ 是预加法范畴 $\mathcal{C}$ 的加法等价关系理想. 则 $\mathcal{C}/\sim$ 是加法范畴, 态射集 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}/\sim}(X,Y)$ 就是商群

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)/\{f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \mid f \sim 0\}.$$

典范函子 $\pi: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}/\sim, \quad X \mapsto X, \quad f \mapsto [f]$, 是加法函子.

例 3.4 设 $C(\mathcal{A})$ 是加法范畴 $\mathcal{A}$ 上的复形范畴. 设 $f: X \longrightarrow Y$ 和 $g: X \longrightarrow Y$ 是链映射. 称 f 与 g 同伦, 记为 $f \sim g$, 如果存在 $\mathcal{A}$ 中一组态射 $s^n: X^n \longrightarrow Y^{n-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, 使得 $f^n = d_Y^{n-1}s^n + s^{n+1}d_X^n$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$. 图示如下:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[d] \arrow[dl, "s^n"'] & X^{n+1} \arrow[r, "d_X^{n+1}"] \arrow[d] \arrow[dl, "s^{n+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^{n-1} \arrow[r, "d_Y^{n-1}"] & Y^n \arrow[r] & Y^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

即 $f^n - g^n = d_Y^{n-1}s^n + s^{n+1}d_X^n$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.此时也记为 $f \overset{s}{\sim} g$, 并称 $s = (s^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 是链映射 f 到链映射 g 的一个同伦.

链映射的同伦关系 $\sim$ 是范畴 $C(\mathcal{A})$ 中的一个等价关系理想, $C(\mathcal{A})$ 关于同伦关系 $\sim$ 的商范畴就是通常的同伦范畴 $K(\mathcal{A})$. 即 $K(\mathcal{A})$的对象是 $\mathcal{A}$ 上的复形; 态射集 $\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X,Y)$ 就是商群 $\mathrm{Hom}_{C(\mathcal{A})}(X,Y)/\mathrm{Htp}(X,Y)$, 其中

$$\mathrm{Htp}(X,Y) := \{f \mid f : X \longrightarrow Y \text{ 为链映射, 且 } f \sim 0\}.$$

§3.2 局部化范畴的存在性

箭图的路范畴. 给定一个箭图 $Q = (Q_0, Q_1, s, e)$ (未必是有限箭图), 其中 $s, e : Q_1 \longrightarrow Q_0$ 分别是起点映射和终点映射，即若 $\alpha : x \longrightarrow y$ 是箭向, 则 $s(\alpha) = x$, $e(\alpha) = y$. 回顾 Q 的**路范畴** $\mathrm{Path}Q$ 的对象是 Q 的顶点; 对于 Q 的两个顶点 x, y, 态射集 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Path}Q}(x,y)$ 就是 Q 的从 x 到 y 的全部的有限长度的道路 $\alpha_n \cdots \alpha_2\alpha_1$:

$$x \xrightarrow{\alpha_1}\xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} y, \quad \text{其中} \quad \alpha_i \in Q, \quad e(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1}), \quad 1 \le i \le n-1, \ n \ge 1$$

作成的集合;并且**补充规定：** 对于 Q 的每个顶点 x, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Path}Q}(x,x)$ 还包含恒等态射 1_x (相应于顶点 x, 即长度为零的道路).

箭图 $Q(\mathcal{A}, S)$. 设 S 是范畴 $\mathcal{A}$ 的一个态射类. 考虑相应的箭图 $Q(\mathcal{A}, S)$: 其顶点就是 $\mathcal{A}$ 的对象，其箭向类就是 $\mathrm{Mor}(\mathcal{A}) \overset{\bullet}{\bigcup} S$, 其中 $\overset{\bullet}{\bigcup}$ 表示无交之并. 详细地说, 对于箭图 $Q(\mathcal{A}, S)$ 的两个顶点 x, y (即 $\mathcal{A}$ 的两个对象), 箭图 $Q(\mathcal{A}, S)$ 中从 x 到 y 的箭向集就是

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x,y) \overset{\bullet}{\bigcup} S(y,x)$$

其中 $S(y,x) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(y,x) \cap S$. 于是, 对于 S 中的态射 $s : x \longrightarrow y$, 箭图 $Q(\mathcal{A}, S)$ 中就有 y 到 x 的箭向 (**倒过来是关键!**)

路范畴 $\mathrm{Path}Q(\mathcal{A}, S)$. 设 S 是范畴 $\mathcal{A}$ 的一个态射类. 根据定义，路范畴 $\mathrm{Path}Q(\mathcal{A}, S)$ 的对象就是范畴 $\mathcal{A}$ 的对象; 而对于 $\mathcal{A}$ 的两个对象 x, y, 态射集 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Path}Q(\mathcal{A},S)}(x,y)$ 就是 $\mathrm{Path}Q(\mathcal{A}, S)$ 的从 x 到 y 的全部的有限长度的道路作成的集合 (连同上述**补充规定**)：这是相对复杂的, 它绝对不是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x,y)$, 当然也绝对不是 $S(y,x)$.

定理 3.5 (GZ, 1.1) 对范畴 $\mathcal{A}$ 的任一态射类 S, 存在唯一的 (在范畴同构的意义下) 局部化 $S^{-1}\mathcal{A}$. 即, 有函子 $F : \mathcal{A} \longrightarrow S^{-1}\mathcal{A}$, 使得 $F(s)$ $(\forall\ s \in S)$ 均是同构; 并且有如下泛性质: 若有函子 $G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ 使得 $G(s)$ $(\forall\ s \in S)$ 均是同构,则存在唯一的函子 $H : S^{-1}\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ 满足 $G = HF$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & & S^{-1}\mathcal{A} \arrow[dl, "H"] \\ & \mathcal{B} & \end{tikzcd}$$

证明 (**局部化范畴的构造.**) 考虑通常的嵌入映射

$$\mathrm{in}_1 : \mathrm{Mor}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{Mor}(\mathcal{A}) \overset{\bullet}{\bigcup} S, \qquad \mathrm{in}_2 : S \longrightarrow \mathrm{Mor}(\mathcal{A}) \overset{\bullet}{\bigcup} S.$$

考虑路范畴 Path T 的如下关系生成的等价关系理想, 其中 $T=Q(\mathcal{A},S)$:

(1) 如果态射的合成 $v\circ u$ 在 $\mathcal{A}$ 中有定义，则

$$(\mathrm{in}_1 v)\circ(\mathrm{in}_1 u)=\mathrm{in}_1(v\circ u)$$

其中左边第一个合成 $\circ$ 是指箭向的连接.

(2) 对于 $\mathcal{A}$ 的任意对象 a,

$$\mathrm{in}_1(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}a)=\mathrm{Id}_{\mathrm{Path}T}a$$

(3) 对于 S 中的态射 $\sigma : a\longrightarrow b$, 有

$$\mathrm{in}_2\sigma\circ\mathrm{in}_1\sigma=\mathrm{Id}_{\mathrm{Path}T}a,\quad \mathrm{in}_1\sigma\circ\mathrm{in}_2\sigma=\mathrm{Id}_{\mathrm{Path}T}b.$$

令 $S^{-1}\mathcal{A}$ 是路范畴 Path $Q(\mathcal{A},S)$ 关于上述等价关系理想的商范畴. 令函子 $F:\mathcal{A}\longrightarrow S^{-1}\mathcal{A}$ 在对象上是恒等; 对于 $\mathcal{A}$ 中的态射 f，令

$$F(f)=\pi\circ\sigma\circ\mathrm{in}_1 f,$$

其中

$$\begin{aligned}&\mathrm{in}_1:\mathrm{Mor}(\mathcal{A})\longrightarrow\mathrm{Mor}(\mathcal{A})\dot{\bigcup}S\\&\sigma:\mathrm{Mor}(\mathcal{A})\dot{\bigcup}S\longrightarrow\mathrm{MorPath}Q(\mathcal{A},S)\\&\pi:\mathrm{MorPath}Q(\mathcal{A},S)\longrightarrow\mathrm{Mor}S^{-1}\mathcal{A}.\end{aligned}$$

对于态射 $s:a\longrightarrow b$, $s\in S$, 按定义 $F(s)=s\in\mathrm{Hom}_{S^{-1}\mathcal{A}}(a,b)$. 根据构造，范畴 $S^{-1}\mathcal{A}$ 还有一个态射 $s':b\longrightarrow a$, 它是由 s 诱导的, 满足

$$s's=\mathrm{Id}_a,\quad ss'=\mathrm{Id}_b.$$

即 $F(s)$ 是 $S^{-1}\mathcal{A}$ 中的同构.

设有函子 $G:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ 使得 $G(s)$ $(\forall\ s\in S)$ 均是同构. 定义函子 $H:S^{-1}\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$，其中 H 在对象 a 上的作用就是 $G(a)$. 为了定义 $H:\mathrm{Mor}S^{-1}\mathcal{A}\longrightarrow\mathrm{Mor}\mathcal{B}$, 首先定义 $H:\mathrm{MorPath}Q(\mathcal{A},S)\longrightarrow\mathrm{Mor}\mathcal{B}$; 进一步，只要定义 $H:\mathrm{Mor}\mathcal{A}\dot{\bigcup}S\longrightarrow\mathrm{Mor}\mathcal{B}$. 这已经很清楚了：

如果 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a,b)$, 则定义 $H(f)=G(f)$.

如果 $s\in S$, $s:a\longrightarrow b$, 则由题设 $G(s):G(a)\longrightarrow G(b)$ 是 $\mathcal{B}$ 中的同构. 因此有 $\mathcal{B}$ 中的同构 $G(s)^{-1}:G(b)\longrightarrow G(a)$. 定义 $H(s)=G(s)^{-1}$.

这样就得到函子 $H:\mathrm{Path}Q(\mathcal{A},S)\longrightarrow\mathcal{B}$. 这个函子满足上述所有关系，因此 它诱导出函子 $H:\mathrm{Mor}S^{-1}\mathcal{A}\longrightarrow\mathrm{Mor}\mathcal{B}$, 根据构造, 满足 $G=HF$.

例 3.6 设 $\mathcal{A}$ 是如下范畴: 有 a, b, c 三个对象，态射集为

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}(a,a)=1_a,\ \mathrm{Hom}(b,b)=1,\ \mathrm{Hom}(c,c)=1,\ \mathrm{Hom}(a,b)=\alpha,\ \mathrm{Hom}(b,c)=\beta,\\&\mathrm{Hom}(a,c)=\beta\circ\alpha,\quad \text{其它态射集是空集}.\end{aligned}$$

取 $S=\{1_a,\ 1_b,\ 1_c,\ \alpha\}$. 则箭图 $Q(\mathcal{A},S)$ 为

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[loop above] \arrow[loop below] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[rr, bend right=50, "\beta\circ\alpha"'] & b \arrow[l, dotted, shift left=1, "\alpha'"] \arrow[loop above] \arrow[loop below] \arrow[r, "\beta"] & c \arrow[loop above] \arrow[loop below]
\end{tikzcd}$$

其中对于 $\alpha\in S$, 箭图 $Q(\mathcal{A},S)$ 中相应的 b 到 a 的箭向记为 α'. 将顶点 a 处 两个 loop 分别记为 $c_1,\ c_1'$, 它们分别相应于态射 $1_a\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a,a)$ 和 $1_a\in S$. 类似地， 顶点 b 处 两个 loop 分别记为 $c_2,\ c_2'$; 顶点 c 处 两个 loop 分别记为 $c_3,\ c_3'$.

而路范畴 $\mathrm{Path}Q(\mathcal{A},S)$ 中非空的态射集都是无限集. 例如，

$$\beta\circ\alpha,\quad \beta\alpha,\quad (\beta\circ\alpha)\alpha'\alpha$$

就是路范畴 $\mathrm{Path}Q(\mathcal{A},S)$ 中从 a 到 c 的 3 个不同的态射， 其中 $\beta\circ\alpha$ 指 $\mathcal{A}$ 中 a 到 c 的唯一的态射, 作为 路范畴 $\mathrm{Path}Q(\mathcal{A},S)$ 中从 a 到 c 的态射, 它是箭图 $Q(\mathcal{A},S)$ 的箭向; 而 $\beta\alpha$ 作为 路范畴 $\mathrm{Path}Q(\mathcal{A},S)$ 中从 a 到 c 的态射, 是指箭图 $Q(\mathcal{A},S)$ 的长为 2 的道路. 两者是不同的: $\beta\circ\alpha\neq\beta\alpha$.

以下将 $\mathrm{Id}_{\mathrm{Path}T}a$ 简记为 1_a. 则上述路范畴 $\mathrm{Path}\,T$ 的等价关系理想是由如下关系生成的, 其中 $T=Q(\mathcal{A},S)$:

$$\alpha\circ c_1=\alpha,\quad c_2\circ\alpha=\alpha,\quad \beta\circ c_2=\beta,\quad c_3\circ\beta=\beta,\quad \beta\circ\alpha=\beta\alpha.$$

$$c_1=\mathrm{Id}_a,\quad c_2=\mathrm{Id}_b,\quad c_3=\mathrm{Id}_c,$$

$$c_1\circ c_1'=\mathrm{Id}_a=c_1'\circ c_1,\quad c_2\circ c_2'=\mathrm{Id}_b=c_2'\circ c_2,\quad c_3\circ c_3'=\mathrm{Id}_c=c_3'\circ c_3,$$

$$\alpha'\circ\alpha=\mathrm{Id}_a,\quad \alpha\circ\alpha'=\mathrm{Id}_b.$$

§3.3 乘法系

定义 3.7 设 $\mathcal{K}$ 是范畴, S 是 $\mathcal{K}$ 的一些态射作成的类.为了便于显示, 将 S 中的态射用双箭向 $\Longrightarrow$ 表示.

(1) 称 S 是 $\mathcal{K}$ 的一个**右乘法系**, 如果 S 满足下述条件 (MS), (RMS1), (RMS2):

(MS) S 对于态射的合成是封闭的; 并且 $\mathrm{Id}_X\in S,\ \forall\ X\ \in\mathcal{K}$;

(RMS1) $\mathcal{K}$ 中每个态射图

$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[d, Rightarrow, "s"] \\ \cdot \arrow[r] & \cdot \end{tikzcd}$$

其中 $s \in S$, 均可补足成交换图

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow, "t"'] & \cdot \arrow[d, Rightarrow, "s"] \\ \cdot \arrow[r] & \cdot \end{tikzcd}$$

其中 $t \in S$.

(RMS2) 对于 $\mathcal{K}$ 中的每个交换图

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[d, bend right, "f"'] \arrow[d, bend left, "g"] \\ \cdot \arrow[d, Rightarrow, "s"] \\ \cdot \end{tikzcd}$$

即 $sf = sg$, 其中 $s \in S$, 均存在 $t \in S$ 使得下图交换

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[d, Rightarrow, "t"] \\ \cdot \arrow[d, bend right, "f"'] \arrow[d, bend left, "g"] \\ \cdot \end{tikzcd}$$

即 $ft = gt$.

(2) 对偶地, 称 S 为 $\mathcal{K}$ 的一个**左乘法系**, 如果 S 满足上述条件 (MS) 以及下述条件 (LMS1), (LMS2):

(LMS1) $\mathcal{K}$ 中每个态射图

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, Rightarrow, "s"] \arrow[d] & \cdot \\ \cdot & \end{tikzcd}$$

其中 $s \in S$, 均可补足成交换图

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, Rightarrow, "s"] \arrow[d] & \cdot \arrow[d] \\ \cdot \arrow[r, Rightarrow, "t"] & \cdot \end{tikzcd}$$

其中 $t \in S$.

(LMS2) 对于 $\mathcal{K}$ 中每个交换图

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[d, Rightarrow, "s"] \\
\cdot \arrow[d, bend right, "f"'] \arrow[d, bend left, "g"] \\
\cdot
\end{tikzcd}$$

即 $fs = gs$, 其中 $s \in S$, 均存在 $t \in S$, 使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[d, bend right, "f"'] \arrow[d, bend left, "g"] \\
\cdot \arrow[d, Rightarrow, "t"] \\
\cdot
\end{tikzcd}$$

即 $tf = tg$.

(3) 称 S 是 $\mathcal{K}$ 的一个**乘法系**, 如果 S 既是 $\mathcal{K}$ 的一个右乘法系, 又是 $\mathcal{K}$ 的一个左乘法系.

(4) 一个 (右，左) 乘法系 S 称为**饱和**的, 如果由 $fh \in S$ 和 $kf \in S$ 可以推出 $f \in S$.

注意到(左、右)乘法系的定义中的条件事实上来自做分式环的条件.

例 3.8 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴，$K^*(\mathcal{A})$ 是同伦范畴, 其中 $* \in \{空, b, -, +\}$. 令 Q_* 是 $K^*(\mathcal{A})$ 中全部拟同构作成的类. 则 Q_* 是 $K^*(\mathcal{A})$ 的饱和乘法系. 参见 [Z, 命题5.1.1].

§3.4 从右乘法系构造右分式范畴

给定加法范畴 $\mathcal{K}$ 及其一个右乘法系 S. 设 $X, Y \in \mathcal{K}$. 范畴 $\mathcal{K}$ 中从 X 到 Y 的一个*右分式* (b, s) 定义为态射图

$$X \cdot \overset{s}{\Longleftarrow} \cdot \xrightarrow{b} \cdot Y,$$

其中 $s \in S$. 右分式在文献中又称为*右屋顶* (right roof). 两个从 X 到 Y 的右分式 (a, r) 和 (b, s) 称为是 *等价的右分式*, 记为 $(a, r) \sim (b, s)$, 如果存在如下的交换图

$$\begin{tikzcd}
 & \cdot \arrow[dl, Rightarrow, "r"'] \arrow[dr, "a"] & \\
X\cdot & \cdot \arrow[l, Rightarrow, "u"'] \arrow[r, "u'"] \arrow[u, "i"'] \arrow[d, "h"] & \cdot Y \\
 & \cdot \arrow[ul, Rightarrow, "s"] \arrow[ur, "b"'] &
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

其中 $u \in S$.

引理 3.9 关系 $\sim$ 是 X 到 Y 的所有右分式作成的类上的等价关系.

证明 我们只验证关系 $\sim$ 是传递的. 设 $(a,r)\sim(b,s)$, $(b,s)\sim(c,t)$. 要证 $(a,r)\sim(c,t)$. 设有交换图 (3.1) 和以下交换图

$$\begin{tikzcd}
 & \cdot \arrow[dl, Rightarrow, "s"'] \arrow[dr, "b"] & \\
X & \cdot \arrow[l, Rightarrow, "v"] \arrow[r, "v'"] \arrow[u, "k"'] \arrow[d, "j"] & Y \\
 & \cdot \arrow[ul, Rightarrow, "t"] \arrow[ur, "c"'] &
\end{tikzcd}$$

由 (RMS1) 知存在 $\mathcal{K}$ 中的态射 x, y, 其中 $x\in S$,使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
 & \cdot \arrow[dl, Rightarrow, "x"'] \arrow[dr, "y"] & \\
\cdot \arrow[dr, Rightarrow, "u"'] & & \cdot \arrow[dl, Rightarrow, "v"] \\
 & \cdot &
\end{tikzcd}$$

从而有交换图

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[d, bend right, "hx"'] \arrow[d, bend left, "ky"] \\
\cdot \arrow[d, Rightarrow, "s"] \\
\cdot
\end{tikzcd}$$

于是由 (RMS2)知存在 $w\in S$ 使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[d, Rightarrow, "w"] \\
\cdot \arrow[d, bend right, "hx"'] \arrow[d, bend left, "ky"] \\
\cdot
\end{tikzcd}$$

最终有交换图

$$\begin{tikzcd}
 & \cdot \arrow[dl, Rightarrow, "r"'] \arrow[dr, "a"] & \\
X & \cdot \arrow[l, Rightarrow, "uxw", "vyw"'] \arrow[r, "u'xw", "v'yw"'] \arrow[u, "ixw"'] \arrow[d, "jyw"] & Y \\
 & \cdot \arrow[ul, Rightarrow, "t"] \arrow[ur, "c"'] &
\end{tikzcd}$$

其中 $u'xw=bhxw=bkyw=v'yw$. 容易检验上图是交换图. 即 $(a,r)\sim(c,t)$. ■

记 (b,s)，其中 $s\in S$, 所在的等价类为 b/s，即

$$b/s=\{(a,r)\mid(a,r)\sim(b,s)\}.$$

设 a/r 是 X 到 Y 的一个右分式等价类, b/s 是 Y 到 Z 的一个右分式等价类.则有交换图

$$\begin{tikzcd}
 & & \cdot \arrow[dl, Rightarrow, "t"'] \arrow[dr, "c"] & & \\
 & \cdot \arrow[dl, Rightarrow, "r"'] \arrow[dr, "a"] & & \cdot \arrow[dl, Rightarrow, "s"'] \arrow[dr, "b"] & \\
X\cdot & & Y\cdot & & \cdot Z
\end{tikzcd}$$

其中中间的方块由 (RMS1) 保证.定义合成 $b/s\circ a/r:=bc/rt$. 要说明这个定义是合理的, 需要证明以下三件事.

1. 若还有交换图

$$\begin{tikzcd}
 & \cdot \arrow[dl, Rightarrow, "t'"'] \arrow[dr, "c'"] & \\
\cdot \arrow[dr, "a"'] & & \cdot \arrow[dl, Rightarrow, "s"] \\
 & \cdot &
\end{tikzcd}$$

则 $bc'/rt'=bc/rt$.

2. 若 $a/r=a'/r'$, 则 $b/s\circ a/r=b/s\circ a'/r'$.

3. 若 $b/s=b'/s'$, 则 $b/s\circ a/r=b'/s'\circ a/r$.

首先说明 1. 取 $\tilde{t}$ 和 $\tilde{t'}$ 使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "\tilde{t'}"] \arrow[d, Rightarrow, "\tilde{t}"'] & \cdot \arrow[d, Rightarrow, "t"] \\
\cdot \arrow[r, Rightarrow, "t'"] & \cdot
\end{tikzcd}$$

则有交换图

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[d, bend right=60, "c'\tilde{t}"'] \arrow[d, bend left=60, "c\tilde{t'}"] \\
\cdot \arrow[d, Rightarrow, "s"] \\
\cdot
\end{tikzcd}$$

故由 (RMS2) 知存在 $w \in S$ 使得

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[d, Rightarrow, "w"] \\
\cdot \arrow[d, bend right, "c'\tilde{t}"'] \arrow[d, bend left, "c\tilde{t'}"] \\
\cdot
\end{tikzcd}$$

交换,从而有交换图

$$\begin{tikzcd}
 & \cdot \arrow[dl, Rightarrow, "rt"'] \arrow[dr, "bc"] & \\
\cdot & \cdot \arrow[l, Rightarrow, "rt\tilde{t'}w"'] \arrow[u, "\tilde{t'}w"'] \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{t}w"] & \cdot \\
 & \cdot \arrow[ul, Rightarrow, "rt'"] \arrow[ur, "bc'"'] &
\end{tikzcd}$$

即为所证.

现在来证 2. 设有交换图

$$\begin{tikzcd}
 & \cdot \arrow[dl, Rightarrow, "r"'] \arrow[dr, "a"] & \\
X\cdot & \cdot \arrow[l, Rightarrow, "u"'] \arrow[u, "i"'] \arrow[r, "v"] \arrow[d, "j"] & \cdot Y \\
 & \cdot \arrow[ul, Rightarrow, "r'"] \arrow[ur, "a'"'] &
\end{tikzcd}$$

和交换图

$$\begin{tikzcd}
 & & \cdot \arrow[dl, Rightarrow, "t"'] \arrow[dr, "c"] & & \\
 & \cdot \arrow[dl, Rightarrow, "r"'] \arrow[dr, "a"'] & & \cdot \arrow[dl, Rightarrow, "s"'] \arrow[dr, "b"] & \\
X\cdot & & Y\cdot & & \cdot Z
\end{tikzcd}
\quad \text{和} \quad
\begin{tikzcd}
 & & \cdot \arrow[dl, Rightarrow, "t'"'] \arrow[dr, "c'"] & & \\
 & \cdot \arrow[dl, Rightarrow, "r'"'] \arrow[dr, "a'"'] & & \cdot \arrow[dl, Rightarrow, "s"'] \arrow[dr, "b"] & \\
X\cdot & & Y\cdot & & \cdot Z
\end{tikzcd}$$

选取交换图

$$\begin{tikzcd}
\cdot & \cdot \arrow[l, Rightarrow, "t"'] \\
\cdot \arrow[u, "i"] & \cdot \arrow[l, Rightarrow, "k_1"'] \arrow[u, "i'"']
\end{tikzcd}
\quad \text{和} \quad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[d, "j"'] & \cdot \arrow[l, Rightarrow, "k_2"'] \arrow[d, "j'"] \\
\cdot & \cdot \arrow[l, Rightarrow, "t'"']
\end{tikzcd}$$

再取交换图

$$\begin{tikzcd}
& \cdot \arrow[dl, Rightarrow, "k_1"'] & \\
\cdot & & \cdot \arrow[ul, "w"'] \arrow[dl, Rightarrow, "x"] \\
& \cdot \arrow[ul, Rightarrow, "k_2"] &
\end{tikzcd}$$

因为

$$sci'w = ati'w = aik_1w = aik_2x$$

和

$$sc'j'x = a't'j'x = a'jk_2x = vk_2x = aik_2x,$$

我们有交换图

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[d, bend right, "ci'w"'] \arrow[d, bend left, "c'j'x"] \\
\cdot \arrow[d, Rightarrow, "s"] \\
\cdot
\end{tikzcd}$$

从而由 (RMS2) 知存在$w' \in S$ 使得 $ci'ww' = c'j'xw'$.于是得到交换图

$$\begin{tikzcd}
& \cdot \arrow[dl, Rightarrow, "rt"'] \arrow[dr, "bc"] & \\
X\cdot & \cdot \arrow[l, Rightarrow, "uk_1ww'"'] \arrow[r] \arrow[u, "i'ww'"'] \arrow[d, "j'xw'"] & \cdot Z \\
& \cdot \arrow[ul, Rightarrow, "r't'"] \arrow[ur, "bc'"'] &
\end{tikzcd}$$

类似地可证明上述结论 3 和右分式等价类合成的结合律.留作习题.

定义-引理 3.10 设 S 是加法范畴 $\mathcal{K}$ 的一个右乘法系.右分式范畴 $S^{-1}\mathcal{K}$ 的对象就是 $\mathcal{K}$ 中对象; $S^{-1}\mathcal{K}$ 中对象 X 到对象 Y 的态射集 $\mathrm{Hom}_{S^{-1}\mathcal{K}}(X,Y)$ 是 X 到 Y 的右分式的所有等价类的集合. 则 $S^{-1}\mathcal{K}$ 作成一个范畴; $\mathrm{Hom}_{S^{-1}\mathcal{K}}(X,X)$ 中的恒等态射为 $\mathrm{Id}_X/\mathrm{Id}_X = s/s$, 其中$s\colon Y \longrightarrow X$ 是 S 中的任意态射.

注记 3.11 范畴的定义要求 X 到 Y 的态射全体是集合, 而上述 X 到 Y 的右分式的所有等价类的全体可能是类而非集合. 为避免这个困难,当然可假设 S 是个集合而非类. 但在实际应用中 S 可能是类而非集合. 为简化讨论, 本书约定：凡遇此种情况均假定：X 到 Y 的右分式的所有等价类的全体是集合. **以后不再每次声明.** 我们强调这一假定不会带来任何问题, 大多数文献也是这样处理的,甚至默认这点. 另一方面, 关于上述假定成立的条件, 可从 A. Neeman [N] 中找到.

对于 $S^{-1}\mathcal{K}$ 中两个从 X 到 Y的态射 a/r 和 b/s, 总存在 公分母 $t\in S$使得

$$a/r=a'/t,\quad b/s=b'/t.$$

事实上, 由 (RMS1)有交换图

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "s'"] \arrow[d, Rightarrow, "r'"'] & \cdot \arrow[d, Rightarrow, "r"] \\
\cdot \arrow[r, Rightarrow, "s"] & \cdot X
\end{tikzcd}$$

令$t=rs'=sr'$, $a'=as'$, $b'=br'$ 即可.

定义 $a/r+b/s:=a'+b'/t$. 要说明这是定义合理的,只要证明下面的引理.

引理 3.12 设 $(a,t)\sim(a',t')$, $(b,t)\sim(b',t')$.则 $(a+b,t)\sim(a'+b',t')$.

证明 设有交换图

$$\begin{tikzcd}
& \cdot \arrow[dl, Rightarrow, "t"'] \arrow[dr, "a"] & \\
X\cdot & \cdot \arrow[l, Rightarrow, "u"'] \arrow[u, "i"] \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "j"] & \cdot Y \\
& \cdot \arrow[ul, Rightarrow, "t'"] \arrow[ur, "a'"'] &
\end{tikzcd}$$

和交换图

$$\begin{tikzcd}
& \cdot \arrow[dl, Rightarrow, "t"'] \arrow[dr, "b"] & \\
X\cdot & \cdot \arrow[l, Rightarrow, "v"'] \arrow[u, "k"] \arrow[r, "k'"] \arrow[d, "h"] & \cdot Y \\
& \cdot \arrow[ul, Rightarrow, "t'"] \arrow[ur, "b'"'] &
\end{tikzcd}$$

由(RMS1)知存在交换图

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "v'"] \arrow[d, Rightarrow, "u'"'] & \cdot \arrow[d, Rightarrow, "u"] \\
\cdot \arrow[r, Rightarrow, "v"] & \cdot
\end{tikzcd}$$

从而下图

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[d, bend right, "iv'"'] \arrow[d, bend left, "ku'"] \\
\cdot \arrow[d, Rightarrow, "t"] \\
\cdot
\end{tikzcd}$$

交换：$tiv' = uv'$, $tku' = vu'$.再由 (RMS2) 知存在 $w \in S$ 使得 $iv'w = ku'w$. 从而有交换图

$$
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[d, bend right, "jv'w"'] \arrow[d, bend left, "hu'w"] \\
\cdot \arrow[d, Rightarrow, "t'"] \\
\cdot
\end{tikzcd}
$$

即 $t'jv'w = uv'w$, $t'hu'w = vu'w$.再由 (RMS2) 知存在 $w' \in S$ 使得

$$jv'ww' = hu'ww'.$$

于是有交换图

$$
\begin{tikzcd}
 & \cdot \arrow[dl, Rightarrow, "t"'] \arrow[dr, "a+b"] & \\
X\cdot & \cdot \arrow[l, Rightarrow, "uv'ww'"'] \arrow[u, "iv'ww'"'] \arrow[d, "jv'ww'"] \arrow[r] & \cdot Y \\
 & \cdot \arrow[ul, Rightarrow, "t'"] \arrow[ur, "a'+b'"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
(a+b)(iv'ww') &= aiv'ww' + biv'ww' \\
&= i'v'ww' + bku'ww' \\
&= i'v'ww' + k'u'ww' \\
&= i'v'ww' + b'hu'ww' \\
&= a'jv'ww' + b'jv'ww' \\
&= (a'+b')jv'ww',
\end{aligned}
$$

即$(a+b,t) \sim (a'+b',t')$. ■

我们有下述事实 (证明留作习题)：

事实 3.13 (i) 对于右分式的加法, $\mathrm{Hom}_{S^{-1}\mathcal{K}}(X,Y)$ 作成一个 Abel 群, 其中零元为 $0/t = 0/s$, 这里 $t: Z \longrightarrow X$ 和 $s: Z' \longrightarrow X$ 是 S 中的任意态射.

设 $\alpha = a/s \in \mathrm{Hom}_{S^{-1}\mathcal{K}}(X,Y)$, 其中 $s \in S$. 则 α 是零态射当且仅当存在 t 使得 $st \in S$ 且 at 是 $\mathcal{K}$ 中的零态射.

(ii) 在可以合成的情况下, 有如下运算律

$$
\begin{aligned}
b/s \circ (a/r + a'/r) = b/s \circ a/r + b/s \circ a'/r \\
(a/r + a'/r) \circ b/s = a/r \circ b/s + a'/r \circ b/s.
\end{aligned}
$$

(iii) 在可以合成的情况下, 有如下运算律

$ac/sc = a/s,\ \forall\, s \in S,\ c \in S;\quad a/1 \circ 1/s = a/s;$ 但 $1/s \circ a/1$ 无意义; $\quad a/\mathrm{Id} \circ b/\mathrm{Id} = ab/\mathrm{Id}.$

(iv) $S^{-1}\mathcal{K}$ 中两个对象 X 和 Y 的直和就是它们在 $\mathcal{K}$ 中的直和 $X \oplus Y$.

事实上, 我们有 $S^{-1}\mathcal{K}$ 中的态射序列 $X \xrightarrow{\sigma_1} X \oplus Y \xrightarrow{p_2} Y$, 其中

$$\sigma_1 = \tbinom{1}{0}/\mathrm{Id}_X, \qquad p_2 = (0,\ 1)/\mathrm{Id}_{X\oplus Y};$$

又有

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}/\mathrm{Id}_Y : Y \longrightarrow X \oplus Y, \quad p_1 = (1,\ 0)/\mathrm{Id}_{X\oplus Y} : X \oplus Y \longrightarrow X,$$

满足

$$p_1\sigma_1 = \mathrm{Id}_X/\mathrm{Id}_X, \quad p_2\sigma_2 = \mathrm{Id}_Y/\mathrm{Id}_Y, \quad p_2\sigma_1 = 0, \quad p_1\sigma_2 = 0, \quad \sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 = \mathrm{Id}_{X\oplus Y}/\mathrm{Id}_{X\oplus Y}.$$

这就意味着 X 和 Y 在 $S^{-1}\mathcal{K}$ 中的直和就是它们在 $\mathcal{K}$ 中的直和 $X \oplus Y$.

(v) 设 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Y)$ 且 $f \in S$. 则态射 $f/\mathrm{Id}_X \in \mathrm{Hom}_{S^{-1}\mathcal{K}}(X, Y)$ 是 $S^{-1}\mathcal{K}$ 中的同构, 其逆为 $\mathrm{Id}_X/f \in \mathrm{Hom}_{S^{-1}\mathcal{K}}(Y, X)$.

(vi) 对象 X 同构于 $S^{-1}\mathcal{K}$ 中的零对象当且仅当存在对象 Z 使得 $0 : Z \longrightarrow X$ 属于 S.

综上所述我们有

引理 3.14 设 S 是加法范畴 $\mathcal{K}$ 的右乘法系. 则右分式范畴 $S^{-1}\mathcal{K}$ 作成一个加法范畴.

定义局部化函子 $F : \mathcal{K} \longrightarrow S^{-1}\mathcal{K}$如下: F 将任意对象保持不动; 对于 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(X, Y)$, 定义 $F(f) = f/\mathrm{Id}_X \in \mathrm{Hom}_{S^{-1}\mathcal{K}}(X, Y)$, 即右分式

$$X \cdot \overset{\mathrm{Id}}{\Longleftarrow} X \xrightarrow{f} Y,$$

的等价类. 由定义 $F(f + g) = F(f) + F(g)$, 故 F 是加法函子.注意到 $S^{-1}\mathcal{K}$ 中两个对象的直和就是这两个对象在 $\mathcal{K}$ 中的直和在局部化函子下的像.

命题 3.15 设 S 是加法范畴 $\mathcal{K}$ 的一个右乘法系.则局部化函子 $F : \mathcal{K} \longrightarrow S^{-1}\mathcal{K}$ 是加法函子, 它将 S 中态射变成 $S^{-1}\mathcal{K}$ 中的同构, 并且对此有泛性质: 如果加法函子 $H : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{C}$ 将 S 中态射变成 $\mathcal{C}$ 中的同构, 则存在唯一的加法函子 $G : S^{-1}\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{C}$ 使得 $H = GF$, 即下图交换

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K} \arrow[rr, "H"] \arrow[dr, "F"'] & & \mathcal{C} \\ & S^{-1}\mathcal{K} \arrow[ur, "G"'] & \end{tikzcd}$$

证. 第一个结论参见上述事实 (v).

对于 $a/s \in \mathrm{Hom}_{S^{-1}\mathcal{K}}(X, Y)$, 定义 $G(a/s) = H(a)H(s)^{-1}$. 直接验证这是定义合理的,且使得上图交换. 注意到能使得上图交换的 G 满足 $G(f/\mathrm{Id}) = H(f)$, 从而 G 是唯一的: $G(a/s) = G(a/\mathrm{Id})G(\mathrm{Id}/s) = H(a)G(s/\mathrm{Id})^{-1} = H(a)H(s)^{-1}$. ■

§3.5　从左乘法系构造左分式范畴

对偶地, 从左乘法系也可以构造左分式范畴. 本小节我们说明: 如果 S 是乘法系 (即，S 既是右乘法系也是左乘法系), 则 S 的右分式范畴与 S 的 左分式范畴是同构的. 右分式范畴与左分式范畴这两个构造的过程是对偶的; 我们同时需要这两个构造.

设 S 是加法范畴 $\mathcal{K}$ 的一个左乘法系, $X, Y \in \mathcal{K}$. 从 X 到 Y 的一个*左分式* (s, b) 定义为态射图

$$X\cdot \xrightarrow{\ b\ } \cdot \xLeftarrow{\ s\ } \cdot Y,$$

其中 $s \in S$. 左分式在文献中又称为*左屋顶* (left roof). 两个从 X 到 Y 的左分式 (s, b) 和 (r, a) 称为是*等价的左分式*,记为 $(s, b) \sim_l (r, a)$, 如果存在交换图

$$\begin{tikzcd}
& \cdot \arrow[d] & \\
X\cdot \arrow[ur, "b"] \arrow[r] \arrow[dr, "a"'] & \cdot & \cdot Y \arrow[ul, Rightarrow, "s"'] \arrow[l, Rightarrow, "t"'] \arrow[dl, Rightarrow, "r"] \\
& \cdot \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

其中$t \in S$. 类似于引理 3.9 可证这是一个等价关系. 将 (s, b) 所在的等价类记为 $s\backslash b$.则 $s\backslash b = r\backslash a \Longleftrightarrow (s, b) \sim_l (r, a)$. 设 $r\backslash a$ 是 X 到 Y 的一个左分式等价类, $s\backslash b$ 是 Y 到 Z 的一个左分式等价类. 定义其合成为

$$s\backslash b \circ r\backslash a = ts\backslash ca,$$

其中 t 由下面交换图给出

$$\begin{tikzcd}
& & \cdot & & \\
& \cdot \arrow[ur, "c"] & & \cdot \arrow[ul, Rightarrow, "t"'] & \\
X \arrow[ur, "a"] & & Y \arrow[ul, Rightarrow, "r"'] \arrow[ur, "b"] & & Z \arrow[ul, Rightarrow, "s"']
\end{tikzcd}$$

与右分式的情形相对偶, 可以证明这个定义是合理的,并且此合成具有结合律.类似于右分式的情形, 也可定义两个左分式等价类的加法.

定义左分式范畴 $LS^{-1}\mathcal{K}$ 如下: 其对象就是 $\mathcal{K}$中对象; $LS^{-1}\mathcal{K}$ 中对象 X 到对象 Y 的态射集 $\mathrm{Hom}_{LS^{-1}\mathcal{K}}(X, Y)$ 是 X 到 Y 的左分式的所有等价类的集合. 范畴 $\mathrm{Hom}_{LS^{-1}\mathcal{K}}(X, X)$ 中的恒等态射为 $\mathrm{Id}_X\backslash\mathrm{Id}_X = s\backslash s$, 其中 $s: X \longrightarrow Y$ 是 S 中的任意态射.与右分式的情形相对偶,可以证明 $LS^{-1}\mathcal{K}$ 是一个加法范畴, 其对象 X 同构于 $LS^{-1}\mathcal{K}$ 中的零对象当且仅当存在对象 Z 使得 $0 : X \longrightarrow Z$ 属于 S. 设 $\alpha = s\backslash a \in \mathrm{Hom}_{LS^{-1}\mathcal{K}}(X, Y)$, 其中 $s \in S$. 则 α 是零态射当且仅当存在 $t' \in S$ 使得 $t's \in S$ 且 $t'a$ 是 $\mathcal{K}$ 中的零态射.

设 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(X,Y)$ 且 $f \in S$. 则态射 $\mathrm{Id}_Y \backslash f \in \mathrm{Hom}_{LS^{-1}\mathcal{K}}(X,Y)$ 是 $LS^{-1}\mathcal{K}$ 中的同构, 其逆为 $f \backslash \mathrm{Id}_Y \in \mathrm{Hom}_{LS^{-1}\mathcal{K}}(Y,X)$.

定义局部化函子 $F' : \mathcal{K} \longrightarrow LS^{-1}\mathcal{K}$ 如下: F' 将任意对象保持不动; 对于$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(X,Y)$, 定义 $F'(f) = \mathrm{Id}_Y \backslash f \in \mathrm{Hom}_{LS^{-1}\mathcal{K}}(X,Y)$. 则 F' 也是加法函子. 类似于命题 3.15 我们有

命题 3.16 设 S 是加法范畴 $\mathcal{K}$ 的一个左乘法系.则局部化函子 $F' : \mathcal{K} \longrightarrow LS^{-1}\mathcal{K}$ 是加法函子, 它将 S 中态射变成 $LS^{-1}\mathcal{K}$ 中的同构, 并且对此有泛性质: 如果加法函子 $H : \mathcal{K} \longrightarrow L$ 将 $\mathcal{K}$ 的乘法系 S 中态射变成 L 的同构, 则存在唯一的加法函子 $G : LS^{-1}\mathcal{K} \longrightarrow L$ 使得 $H = GF'$.

定理 3.17 设 S 是加法范畴 $\mathcal{K}$ 的一个乘法系.则存在唯一的范畴同构 $\eta: \ S^{-1}\mathcal{K} \longrightarrow LS^{-1}\mathcal{K}$, 使得 $F' = \eta F$, 即 η 将任意对象保持不动, 并且对于 $\mathcal{K}$中任一态射 $f: \ X \longrightarrow Y$ 有 $\eta(f/\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_Y \backslash f$; 而且 η 将 $S^{-1}\mathcal{K}$ 中态射 $a/s \in \mathrm{Hom}_{S^{-1}\mathcal{K}}(X,Y)$ 映为 $\eta(a/s) = t \backslash b$, 其中 $t \in S$ 和 b 是 $\mathcal{K}$ 中态射, 使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, Rightarrow, "s"'] \arrow[dr, "a"] & \\
X \arrow[dr, "b"'] & & Y \arrow[dl, Rightarrow, "t"] \\
 & \cdot &
\end{tikzcd}$$

证明 根据命题 3.15 和命题 3.16 中的泛性质, 我们即知存在唯一的范畴同构 $\eta: \ S^{-1}\mathcal{K} \longrightarrow LS^{-1}\mathcal{K}$, 使得 $F' = \eta F$. 即 η 将任意对象保持不动, 并且对于 $\mathcal{K}$ 中任一态射 $f: \ X \longrightarrow Y$ 有 $\eta(f/\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_Y \backslash f$, 并且有

$$\begin{aligned}
\eta(a/s) &= \eta(a/\mathrm{Id}_Z \circ \mathrm{Id}_Z/s) = \eta(a/\mathrm{Id}_Z) \circ \eta(\mathrm{Id}_Z/s) \\
&= \eta(a/\mathrm{Id}_Z) \circ \eta(s/\mathrm{Id}_Z)^{-1} = (\mathrm{Id}_Y \backslash a) \circ (\mathrm{Id}_X \backslash s)^{-1} \\
&= (\mathrm{Id}_Y \backslash a) \circ (s \backslash \mathrm{Id}_X) = t \backslash b
\end{aligned}$$

最后一步由 $LS^{-1}\mathcal{K}$ 中态射合成的定义得到. ∎

命题 3.17 的证明避免了验证 "$\eta(a/s) = t \backslash b$ 是定义合理的".换言之, 这个困难被泛性质和验证 "$LS^{-1}\mathcal{K}$ 中态射的合成是定义合理的" 所遇到的困难克服了.

命题 3.18 设 S 是加法范畴 $\mathcal{K}$ 的一个饱和乘法系, $F : \mathcal{K} \longrightarrow S^{-1}\mathcal{K}$ 是局部化函子, $f : X \longrightarrow Y$. 则 $F(f) = f/\mathrm{Id}_X$ 是 $S^{-1}\mathcal{K}$ 中的同构当且仅当 $f \in S$; 等价地, $\mathrm{Id}_Y \backslash f \in \mathrm{Hom}_{LS^{-1}\mathcal{K}}(X,Y)$ 是 $LS^{-1}\mathcal{K}$ 中的同构当且仅当 $f \in S$.

证明 只要证"仅当"部分.设 f/Id_X 的逆为 h/s.则 $f/\mathrm{Id}_X \circ h/s = \mathrm{Id}_Y$. 而

$$
\begin{tikzcd}
& & \cdot \arrow[dl, Rightarrow, "\mathrm{Id}"'] \arrow[dr, "h"] & & \\
& \cdot \arrow[dl, Rightarrow, "s"'] \arrow[dr, "h"] & & X \arrow[dl, Rightarrow, "\mathrm{Id}_X"'] \arrow[dr, "f"] & \\
Y & & X & & Y
\end{tikzcd}
$$

即 $f/\mathrm{Id}_X \circ h/s = fh/s$. 再由 $fh/s = \mathrm{Id}_Y$ 知 存在 i 使得 $fhi \in S$. 由命题 3.17 以及 $h/s \circ f/\mathrm{Id}_X = \mathrm{Id}_X$ 知 $\eta(h/s) \circ \eta(f/\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_X$, 即 $\eta(h/s) \circ \mathrm{Id}_Y \backslash f = \mathrm{Id}_X$. 设 $\eta(h/s) = r \backslash a$.下述交换图表明

$$r \backslash a \circ \mathrm{Id}_Y \backslash f = r \backslash af.$$

$$
\begin{tikzcd}
& & \cdot & & \\
& \cdot \arrow[ur, "a"] & & \cdot \arrow[ul, Rightarrow, "1"'] & \\
X \arrow[ur, "f"] & & Y \arrow[ul, Rightarrow, "1"'] \arrow[ur, "a"] & & X \arrow[ul, Rightarrow, "r"']
\end{tikzcd}
$$

而 $r \backslash af = \mathrm{Id}_X$ 表明存在 j 使得 $jaf \in S$. 由于 S 是饱和乘法系知 $f \in S$. ■

推论 3.19 设 S 是加法范畴 $\mathcal{K}$ 的饱和乘法系, a/s 是 $S^{-1}\mathcal{K}$ 中的态射, $t \backslash b$ 是 $LS^{-1}\mathcal{K}$ 中的态射, 其中 $s \in S$, $t \in S$. 则 a/s 是 $S^{-1}\mathcal{K}$ 中的同构当且仅当 $a \in S$; $t \backslash b$ 是 $LS^{-1}\mathcal{K}$ 中的同构当且仅当 $b \in S$.

证明 因为 $a/s = a/1 \circ 1/s$, 且 $1/s$ 是同构,故 a/s 是 $S^{-1}\mathcal{K}$ 中的同构当且仅当 $a/1$ 是 $S^{-1}\mathcal{K}$ 中的同构; 再由 命题 3.18 即知这当且仅当 $a \in S$.

同理, 因为 $t \backslash b = t \backslash 1 \circ 1 \backslash b$,且 $t \backslash 1$ 是同构,故 $t \backslash b$ 是 $LS^{-1}\mathcal{K}$ 中的同构当且仅当 $1 \backslash b$ 是 $LS^{-1}\mathcal{K}$ 中的同构; 再由命题 3.18 即知这当且仅当 $b \in S$. ■

重要注记 3.20 当 S 是乘法系时, 以后我们将 $S^{-1}\mathcal{K}$ 和 $LS^{-1}\mathcal{K}$ 等同, 均记为 $S^{-1}\mathcal{K}$, 统称为商范畴. 也就是说, 当我们谈论商范畴 $S^{-1}\mathcal{K}$时, 其态射既可采用右分式的等价类, 也可采用左分式的等价类. 这会带来方便, 有时甚至是必须的 (指采用另一种会比较困难).

分式范畴中的单态射和满态射 设 S 是加法范畴 $\mathcal{K}$ 的一个右乘法系. 在右分式范畴 $S^{-1}\mathcal{K}$ 中, 每个右分式态射 a/s 均可分解成 $a/s = a/1_{X'} \circ 1_{X'}/s$, 其中 $1_{X'}/s$ 是可逆态射

$$
\begin{tikzcd}
& & X' \arrow[dl, Rightarrow, "1_{X'}"'] \arrow[dr, "1_{X'}"] & & \\
& X' \arrow[dl, Rightarrow, "s"'] \arrow[dr, "1_{X'}"] & & X' \arrow[dl, Rightarrow, "1_{X'}"'] \arrow[dr, "a"] & \\
X & & X' & & Y
\end{tikzcd}
$$

需注意的是, 这种分解中可逆态射无法位于左边.

同理, 对于左分式范畴有类似的结论. 设 S 是一个左乘法系. 在左分式范畴 $LS^{-1}\mathcal{A}$ 中, 每个左分式 $s\backslash a$ 均可分解成 $s\backslash a = s\backslash 1 \circ 1\backslash a$, 其中可逆态射位于左边,无法位于右边.

右分式 $b/s = 0$ 当且仅当 $b/1 = 0$, 当且仅当存在 β 使得 $s\beta \in S$ 且 $b\beta = 0$, 当且仅当存在 $\alpha \in S$ 使得 $b\alpha = 0$.

$$\begin{aligned}
\text{右分式 } b/s \text{ 单} \iff b/1 \text{ 单} &\iff \text{由 } b/1 \circ a/r = 0 \text{ 可推出 } a/r = 0 \\
&\iff \text{由 } (b \circ a)/1 = 0 \text{ 可推出 } a/1 = 0 \\
&\iff \text{由 } ba\alpha = 0 \text{ 其中 } \alpha \in S \text{ 可推出存在 } \alpha' \in S \text{ 使得 } a\alpha' = 0.
\end{aligned}$$

由此得到下述引理中的结论 (i).

引理 3.21 (i) 设 S 是加法范畴 $\mathcal{K}$ 的一个右乘法系. 如果 b 单, 则右分式态射 b/s 单 (反过来似乎得不到明确的结论).

(i') 设 S 是加法范畴 $\mathcal{K}$ 的一个左乘法系. 如果 b 满, 则左分式态射 $s\backslash b$ 满 (反过来似乎得不到明确的结论).

(ii) 设 S 是加法范畴 $\mathcal{K}$ 的一个乘法系. 如果 b 满, 则右分式态射 b/s 满 (反过来似乎得不到明确的结论).

(ii') 设 S 是加法范畴 $\mathcal{K}$ 的一个乘法系. 如果 b 单, 则左分式态射 $s\backslash b$ 单 (反过来似乎得不到明确的结论).

证. (i') 与 (i) 的证明相对偶.

(ii) 考虑范畴同构 $\eta: S^{-1}\mathcal{K} \longrightarrow LS^{-1}\mathcal{K}$, 其中 $\eta(b/1) = 1\backslash b$. 如果 b 满,则由 (i') 知 $1\backslash b$ 满. 从而 $b/1$ 满. 因为 $1/s$ 是同构, 故 $b/s = b/1 \circ 1/s$ 满.

(ii') 与 (ii) 的证明相对偶. ■

注记 3.22 对于引理 3.21(ii)，这里给出的证明，还需要用到左分式. 只假设 S 是右乘法系, 引理 3.21(ii)是否仍然成立,我不清楚. 这也是下面定理 3.24 中要求 S 是乘法系的原因.

引理 3.23 (i) 设 S 是一个右乘法系. 如果加法范畴 $\mathcal{K}$ 有核, 则右分式范畴 $S^{-1}\mathcal{K}$ 也有核.详细地说, 如果 $\sigma : K \longrightarrow X$ 是 $b : X \longrightarrow Y$ 的核, 则 $\sigma/1_K : K \longrightarrow X$ 是 $b/1_X : X \longrightarrow Y$ 在 $S^{-1}\mathcal{K}$ 中的核.

(i') 设 S 是一个左乘法系. 如果加法范畴 $\mathcal{K}$ 有余核, 则左分式范畴 $LS^{-1}\mathcal{K}$ 也有余核.详细地说, 如果 $\pi : Y \longrightarrow C$ 是 $b : X \longrightarrow Y$ 的余核, 则 $1_C\backslash\pi : Y \longrightarrow C$ 是 $1_Y\backslash b : X \longrightarrow Y$ 在 $LS^{-1}\mathcal{K}$ 中的余核.

(ii) 设 S 是一个乘法系. 如果加法范畴 $\mathcal{K}$ 有余核, 则右分式范畴 $S^{-1}\mathcal{K}$ 中也有余核.详细地说, 如果 $\pi : Y \longrightarrow C$ 是 $b : X \longrightarrow Y$ 的余核, 则 $\pi/1 : Y \longrightarrow C$ 是 $b/1_Y : X \longrightarrow Y$ 在 $S^{-1}\mathcal{K}$ 中的余核.

(ii') 设 S 是一个乘法系. 如果加法范畴 $\mathcal{K}$ 有核, 则左分式范畴 $LS^{-1}\mathcal{K}$ 中也有核.详细地说, 如果 $\sigma : K \longrightarrow X$ 是 $b : X \longrightarrow Y$ 的核, 则 $1_X/\sigma : K \longrightarrow X$ 是 $1_Y/b : X \longrightarrow Y$ 在 $LS^{-1}\mathcal{K}$ 中的核.

证. 只证 (i) 和 (ii), (i') 和 (ii') 对偶地可证.

首先, 因为 σ 是单态射，由引理 3.21(i) 知 $\sigma/1_K$ 是 $S^{-1}\mathcal{K}$ 中的单态射.

其次, $b/1_X \circ \sigma/1_K = b\sigma/1_K = 0$, 参见下图

$$\begin{tikzcd}
 & & K \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, "\sigma"] & & \\
 & K \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, "\sigma"] & & X \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, "b"] & \\
K & & X & & Y
\end{tikzcd}$$

设 $b/1_X \circ t/1_L = bt/1 = 0$, 参见下图

$$\begin{tikzcd}
 & & L \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, "t"] & & \\
 & L \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, "t"] & & X \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, "b"] & \\
L & & X & & Y
\end{tikzcd}$$

要证 $t/1_L : L \longrightarrow X$ 通过 $\sigma/1_K : K \xrightarrow{\sigma} X$ 分解. 由 $bt/1_L = 0$ 知存在 $\alpha \in S$ 使得 $bt\alpha = 0$. 因为 $\sigma : K \longrightarrow X$ 是 b 的核，故存在态射 w 使得 $t\alpha = \sigma w$, 参见下图:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[rr, "t\alpha"] \arrow[dr, "w"'] & & X \arrow[r, "b"] & Y \\
 & K \arrow[ur, "\sigma"'] & &
\end{tikzcd}$$

注意到 $\sigma w/\alpha = w/\alpha \circ \sigma/1_K$, 即

$$\begin{tikzcd}
 & & W \arrow[dl, equal] \arrow[dr, "w"] & & \\
 & W \arrow[dl, Rightarrow, "\alpha"'] \arrow[dr, "w"] & & K \arrow[dl, equal] \arrow[dr, "\sigma"] & \\
L & & K & & X
\end{tikzcd}$$

最后说明 $t/1_L = \sigma w/\alpha$ 如下:

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[dr, "t"] & \\
L \arrow[ur, equal] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & W \arrow[u, "\alpha"'] \arrow[r, "\sigma w"] \arrow[d, equal] & X \\
 & W \arrow[ur, "\sigma w"'] &
\end{tikzcd}$$

因为 $t\alpha = \sigma w$, 这就说明了 $\mathrm{Ker}(b/1_X) = \sigma/1_K$.

(ii) 注意到范畴同构 $\eta:\ S^{-1}\mathcal{K} \longrightarrow LS^{-1}\mathcal{K}$, 其中 $\eta(b/1_X) = 1_Y\backslash b$, 当然保持余核. 再由 (i') 即得到. ■

§3.6 Abel 范畴的局部化

定理 3.24 ([GZ, p.18, Proposition 3.6]) 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, S 是 $\mathcal{A}$ 的乘法系. 则局部化 $S^{-1}\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, 且局部化函子 $F:\mathcal{A} \longrightarrow S^{-1}\mathcal{A}$, $b \mapsto b/1$, 是正合函子.

证明 由引理 3.23 知 $\Sigma^{-1}\mathcal{A}$ 有核有余核.

要证 $S^{-1}\mathcal{K}$ 中态射 $b/s: X \longrightarrow Y$ 的余像 $\mathrm{Coim}(b/s)$ 到 $\mathrm{Im}(b/s)$ 的典范态射是同构.参见下图

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\, b/s \arrow[r, hook] & X \arrow[rrr, "b/s"] \arrow[dr] & & & Y \arrow[r, two heads] & \mathrm{Coker}\, b/s \\
 & & \mathrm{Coim} b/s \arrow[r, dotted, "\mathrm{can}"] & \mathrm{Im}\, b/s \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd}$$

由引理 3.23 知 $\mathrm{Ker}\, b/s = \mathrm{Ker}\, b/1$， $\mathrm{Coker}\, b/s = \mathrm{Coker}\, b/1$, 并且有下图

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\, b \arrow[r, hook, "k/1"] & X \arrow[rrr, "b/1"] \arrow[dr, "e/1"'] & & & Y \arrow[r, two heads, "c/1"] & \mathrm{Coker}\, b \\
 & & \mathrm{Coker}\, k \arrow[r, dotted, "\mathrm{can}/1"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ker}\, c \arrow[ur, hook, "m/1"'] \arrow[d, equal] & & \\
 & & \mathrm{Coim}(b) & \mathrm{Im}(b) & &
\end{tikzcd}$$

其中在 $\mathcal{A}$ 中相应的图为

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\, b \arrow[r, hook, "k"] & X \arrow[rrr, "b"] \arrow[dr, "e"'] & & & Y \arrow[r, two heads, "c"] & \mathrm{Coker}\, b \\
 & & \mathrm{Coker}\, k \arrow[r, dotted, "\mathrm{can}"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ker}\, c \arrow[ur, hook, "m"'] \arrow[d, equal] & & \\
 & & \mathrm{Coim}(b) & \mathrm{Im}(b) & &
\end{tikzcd}$$

由此可知 $can/1$ 是同构. 因此 $S^{-1}\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴.

由引理 3.23 即知局部化函子 $F:\mathcal{A}\longrightarrow S^{-1}\mathcal{A}$ 是正合函子. ■

§3.7 Serre 子范畴

定义 3.25 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的满子范畴. 如果 $\mathcal{B}$ 对于子对象、商对象、和扩张都封闭 (换言之, 对于 $\mathcal{A}$ 中任意短正合列 $0\longrightarrow X\longrightarrow Y\longrightarrow Z\longrightarrow 0$, 如果 $Y\in\mathcal{B}$ 当且仅当 $X\in\mathcal{B}$ 并且 $Z\in\mathcal{B}$), 则称 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的 Serre 子范畴 (又称为 Serre 类, Serre class).

例 3.26 设 A 是域上的代数. 则有限维模作成的类, Noether 模作成的类, Artin 模作成的类, 都是 A-Mod 的 Serre 类.

注记 3.27 这一概念最早由 J. P. Serre 1953 年在 [Serre] 中提出; P. Gabriel 和 M. Zisman 1967年在其经典文献 [GZ, p. 15] 中称其为厚 (thick) 子范畴; N. Popescu 1973 年在书 [P, p.165] 中称其为稠密 (dense) 子范畴; C. Faith 1973 年在书 [Faith] 中称其为 Serre 类; 之后, 更多的人, 例如 W. Geigle 和 H. Lenzing [GL] 称其为 Serre 子范畴或 Serre 类.

Serre 类的要求强于短正合列中的"二推三"性质.

定理 3.28 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的 Serre 子范畴. 令

$$\Sigma=\Sigma(\mathcal{B}):=\{f\in\mathcal{A}\mid \operatorname{Ker}f\in\mathcal{B},\ \operatorname{Coker}f\in\mathcal{B}\}.$$

则 Σ 是 $\mathcal{A}$ 的乘法系; 并且, 相应的局部化 $\Sigma^{-1}\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, $F:\mathcal{A}\longrightarrow\Sigma^{-1}\mathcal{A}$ 是正合函子, 且 $\mathcal{B}=\operatorname{Ker}F$.

证明 我们按照定义 3.7 逐条验证 Σ 是 $\mathcal{A}$ 的乘法系.

对于 $X\in\mathcal{A}$, $\mathrm{Id}_X\in\Sigma$: 事实上, $\operatorname{Ker}\mathrm{Id}_X=0\in\mathcal{B}$, $\operatorname{Coker}\mathrm{Id}_X=0\in\mathcal{B}$.

设 $f:X\longrightarrow Y$, $g:Y\longrightarrow Z$, $f\in\Sigma$, $g\in\Sigma$. 要证 $gf\in\Sigma$. 由题设有 $\operatorname{Ker}f\in\mathcal{B}$, $\operatorname{Coker}f\in\mathcal{B}$, $\operatorname{Ker}g\in\mathcal{B}$, $\operatorname{Coker}g\in\mathcal{B}$. 由 $\operatorname{Ker}g\in\mathcal{B}$ 知 $\operatorname{Im}f\cap\operatorname{Ker}g\in\mathcal{B}$. 再由 $\operatorname{Ker}f\in\mathcal{B}$ 以及 $\mathcal{A}$ 中正合列

$$0\longrightarrow\operatorname{Ker}f\longrightarrow\operatorname{Ker}(gf)\longrightarrow\operatorname{Im}f\cap\operatorname{Ker}g\longrightarrow 0$$

知 $\operatorname{Ker}(gf)\in\mathcal{B}$. 由正合列的交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Im}f\cap\operatorname{Ker}g \arrow[r, hook] \arrow[d] & \operatorname{Im}f \arrow[r, two heads, "\widetilde{g}|"] \arrow[d, hook] & \operatorname{Im}(gf) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}g \arrow[r, hook] & Y \arrow[r, two heads, "\widetilde{g}"] & \operatorname{Im}g \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

以及蛇引理得到正合列

$$0\longrightarrow\operatorname{Ker}g/\operatorname{Im}f\cap\operatorname{Ker}g\longrightarrow\operatorname{Coker}f\longrightarrow\operatorname{Im}g/\operatorname{Im}(gf)\longrightarrow 0.$$

因 $\operatorname{Coker} f \in \mathcal{B}$, 故 $\operatorname{Im} g / \operatorname{Im}(gf) \in \mathcal{B}$. 再由正合列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im} g / \operatorname{Im}(gf) \longrightarrow \operatorname{Coker}(gf) \longrightarrow \operatorname{Coker} g \longrightarrow 0$$

知 $\operatorname{Coker}(gf) \in \mathcal{B}$. 于是 $gf \in \Sigma$.

设有 $\mathcal{A}$ 中的态射图

$$\begin{tikzcd} & \cdot \arrow[d, Rightarrow, "s"] \\ \cdot \arrow[r] & \cdot \end{tikzcd}$$

其中 $s \in \Sigma$, 即 $\operatorname{Ker} s \in \mathcal{B}$, $\operatorname{Coker} s \in \mathcal{B}$. 考虑拉回方块

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow, "t"'] & \cdot \arrow[d, Rightarrow, "s"] \\ \cdot \arrow[r] & \cdot \end{tikzcd}$$

则 $\operatorname{Ker} t \cong \operatorname{Ker} s \in \mathcal{B}$; $\operatorname{Coker} t$ 是 $\operatorname{Coker} s \in \mathcal{B}$ 的子对象, 故 $\operatorname{Coker} t \in \mathcal{B}$. 从而 $t \in \Sigma$.

利用推出, 对偶地可以证明 $\mathcal{A}$ 中每个态射图

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, Rightarrow, "s"] \arrow[d] & \cdot \\ \cdot & \end{tikzcd}$$

其中 $s \in \Sigma$, 均可补足成交换图

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, Rightarrow, "s"] \arrow[d] & \cdot \arrow[d] \\ \cdot \arrow[r, Rightarrow, "t"] & \cdot \end{tikzcd}$$

其中 $t \in \Sigma$.

设有 $\mathcal{A}$ 中交换图

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, bend right, "f"'] \arrow[d, bend left, "g"] \\ \cdot \arrow[d, Rightarrow, "s"] \\ \cdot \end{tikzcd}$$

即 $sf = sg$, 其中 $s \in \Sigma$, 即 $\operatorname{Ker} s \in \mathcal{B}$, $\operatorname{Coker} s \in \mathcal{B}$. 则 $s(f-g) = 0$，故 $\operatorname{Im}(f-g) \subseteq \operatorname{Ker} s$. 从而 $\operatorname{Im}(f-g) \in \mathcal{B}$. 由正合列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}(f-g) \xrightarrow{t} X \xrightarrow{\widetilde{f-g}} \operatorname{Im}(f-g) \longrightarrow 0$$

知 $\operatorname{Ker} t = 0 \in \mathcal{B}$, $\operatorname{Coker} t = \operatorname{Im}(f-g) \in \mathcal{B}$. 故 $t \in \Sigma$，使得下图交换

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[d, Rightarrow, "t"] \\ X \arrow[d, bend right, "f"'] \arrow[d, bend left, "g"] \\ \cdot \end{tikzcd}$$

即 $ft = gt$.

对偶地,设有 $\mathcal{A}$ 中的交换图

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[d, Rightarrow, "s"] \\ Y \arrow[d, bend right, "f"'] \arrow[d, bend left, "g"] \\ Z \end{tikzcd}$$

其中 $s \in \Sigma$, 即 $\operatorname{Ker} s \in \mathcal{B}$, $\operatorname{Coker} s \in \mathcal{B}$. 则 $fs = gs$. 于是 $\operatorname{Im} s \subseteq \operatorname{Ker}(f-g)$. 由正合列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}(f-g)/\operatorname{Im} s \longrightarrow Y/\operatorname{Im} s = \operatorname{Coker} s \longrightarrow Y/\operatorname{Ker}(f-g) = \operatorname{Im}(f-g) \longrightarrow 0$$

知 $\operatorname{Im}(f-g) \in \mathcal{B}$. 由正合列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im}(f-g) \xrightarrow{\sigma} Z \xrightarrow{t} \operatorname{Coker}(f-g) = Z/\operatorname{Im}(f-g) \longrightarrow 0$$

知 $\operatorname{Ker} t = \operatorname{Im}(f-g) \in \mathcal{B}$, $\operatorname{Coker} t = 0 \in \mathcal{B}$. 故 $t \in \Sigma$, 且下图交换

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[d, bend right, "f"'] \arrow[d, bend left, "g"] \\ Z \arrow[d, Rightarrow, "t"] \\ \cdot \end{tikzcd}$$

综上所述, $\Sigma = \Sigma(B)$ 是 $\mathcal{A}$ 的一个乘法系. 从而相应的局部化 $\Sigma^{-1}\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, $F : \mathcal{A} \longrightarrow \Sigma^{-1}\mathcal{A}$ 是正合函子.

我们断言 $\mathcal{B} = \operatorname{Ker} F$. 事实上, 如果 $Z \in \mathcal{B}$, 则根据定义 $0 : 0 \longrightarrow Z$ 就在 Σ 中，因此 $F(0) : 0 \longrightarrow FZ$ 就是同构，故 $FZ = 0$, $Z \in \operatorname{Ker} F$. 即 $\mathcal{B} \subseteq \operatorname{Ker} F$. 反之, 如果 $FZ = 0$, 则

$F(\mathrm{Id}_Z)=0$，即在 $\Sigma^{-1}\mathcal{A}$ 中有 $\mathrm{Id}_Z/\mathrm{Id}_Z=0$. 有右分式的定义知有交换图

$$
\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, Rightarrow, "1"'] \arrow[dr, "1"] & \\
Z & W \arrow[l, Rightarrow, "0"'] \arrow[u, "0"'] \arrow[r, "0"] \arrow[d, "j"] & \cdot Z \\
 & Z \arrow[ul, Rightarrow, "1"] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}
$$

于是 $0:W\longrightarrow Z$ 在 Σ 中, 由定义 $Z=\mathrm{Coker}0\in B$. 即 $\mathrm{Ker}F\subseteq\mathcal{B}$. 故 $\mathcal{B}=\mathrm{Ker}F$. ■

§4 Quillen 的同伦范畴

本节总假设范畴 $\mathcal{C}$ 有零对象 0, 有有限余积 (又称为直和, 记为 $\oplus$)和有限积 (记为 $\times$), 有拉回和推出, 有模型结构 ($\mathrm{Cofib}(\mathcal{C})$, $\mathrm{Fib}(\mathcal{C})$, $\mathrm{Weq}(\mathcal{C})$).以后不再每次重复这些假设. 特别地，**有零对象的模型范畴满足所有这些条件**.

设 S 是 $\mathcal{C}$ 的态射的一个子类.上一章我们已系统研究范畴 $\mathcal{C}$ 关于 S 的局部化: 它是范畴 $S^{-1}\mathcal{C}$, 也经常记为 $\mathcal{C}(S^{-1})$, 连同函子 $\gamma:\mathcal{C}\longrightarrow S^{-1}\mathcal{C}$, 使得对于任意 $s\in S$, $\gamma(s)$ 均是同构，且有如下泛性质: 若有函子 $F:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{B}$ 使得对于任意 $s\in S$, $F(s)$ 均是同构,则存在唯一的函子 $\theta: S^{-1}\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{B}$ 满足 $F=\theta\gamma$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dr, "F"'] & & S^{-1}\mathcal{C} \arrow[dl, "\theta"] \\ & \mathcal{B} & \end{tikzcd}$$

定义 4.1 设范畴 $\mathcal{C}$ 有零对象 0, 有有限余积和有限积, 有拉回和推出, 有模型结构. 定义 $\mathcal{C}$ 的同伦范畴, 记为 $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$ 或 $\mathrm{Ho}\mathcal{C}$, 就是 $\mathcal{C}$ 关于弱等价 $\mathrm{Weq}(\mathcal{C})$ 的局部化 $\mathrm{Weq}(\mathcal{C})^{-1}\mathcal{C}$. 典范函子记为 $\gamma:\mathcal{C}\longrightarrow\mathrm{Ho}\mathcal{C}$.

本节引入同伦关系理想, 内在地刻画同伦范畴 $\mathrm{Ho}\mathcal{C}$. 这是 D. Quillen 的工作.

§4.1 左同伦与右同伦

定义-引理 4.2 设 $f,\ g\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$. 则下述等价

(i) 存在交换图

$$\begin{tikzcd} A\oplus A \arrow[r, "{(f,g)}"] \arrow[d, "{(1,1)}"'] \arrow[dr, "{(\partial_0,\partial_1)}"] & B \\ A & \widetilde{A} \arrow[l, "\sigma"] \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

其中 σ 是弱等价.

(ii) 存在交换图

$$\begin{tikzcd} A\oplus A \arrow[r, "{(f,g)}"] \arrow[d, "{(1,1)}"'] \arrow[dr, "{(\partial_0,\partial_1)}"] & B \\ A & \widetilde{A} \arrow[l, "\sigma"] \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

其中 σ 是弱等价且 (∂_0,∂_1) 是余纤维.

如果 f 和 g 满足上述等价条件, 则称 f 左同伦于 g, 记为 $f\overset{l}{\sim}g$. 当 (∂_0,∂_1) 是余纤维时, 称 $h:\widetilde{A}\longrightarrow B$ 是 f 到 g 的一个左同伦.

证明 只要证 (i) $\Longrightarrow$ (ii). 设有交换图

$$\begin{tikzcd}
A\oplus A \arrow[r, "{(f,g)}"] \arrow[d, "{(1,1)}"'] \arrow[dr, "{(\partial_0,\partial_1)}"] & B \\
A & \widetilde{A} \arrow[l, "\sigma"'] \arrow[u, "H"']
\end{tikzcd}$$

其中 σ 是弱等价. 根据公理 (M 2) 将 $(\partial_0,\ \partial_1)$ 分解成 $A\oplus A \xrightarrow{(\partial_0',\ \partial_1')} A' \xrightarrow{\rho} \widetilde{A}$, 其中 $(\partial_0',\ \partial_1')$ 是余纤维而 ρ 是平凡纤维. 由公理 (M 5) 知 $\sigma' = \sigma\rho : A' \longrightarrow \widetilde{A}$ 也是弱等价. 于是得到交换图

$$\begin{tikzcd}
A\oplus A \arrow[r, "{(f,g)}"] \arrow[d, "{(1,1)}"'] \arrow[dr, "{(\partial_0',\ \partial_1')}"] & B \\
A & A' \arrow[l, "\sigma'"'] \arrow[u, "h=H\rho"']
\end{tikzcd}$$

其中 σ' 是弱等价且 $(\partial_0',\partial_1')$ 是余纤维. $\square$

对偶地, 我们有

定义-引理 4.3 设 $f,\ g\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$. 则下述等价

(i) 存在交换图

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{B} \arrow[dr, "{\binom{d_0}{d_1}}"] & B \arrow[l, "s"'] \arrow[d, "{\binom{1}{1}}"] \\
A \arrow[u, "k"] \arrow[r, "{\binom{f}{g}}"] & B\times B
\end{tikzcd}$$

其中 s 是弱等价.

(ii) 存在交换图

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{B} \arrow[dr, "{\binom{d_0}{d_1}}"] & B \arrow[l, "s"'] \arrow[d, "{\binom{1}{1}}"] \\
A \arrow[u, "k"] \arrow[r, "{\binom{f}{g}}"] & B\times B
\end{tikzcd}$$

其中 s 是弱等价且 $\binom{d_0}{d_1}$ 是纤维.

如果 f 和 g 满足上述等价条件, 则称 f 右同伦于 g, 记为 $f \overset{r}{\sim} g$. 此时称 $k: A\longrightarrow \widetilde{B}$ 是 f 到 g 的一个右同伦.

注. 显然, $f \overset{l}{\sim} f$; $f \overset{l}{\sim} g$ 当且仅当 $g \overset{l}{\sim} f$; $f \overset{r}{\sim} f$; $f \overset{r}{\sim} g$ 当且仅当 $g \overset{r}{\sim} f$.

§4.2 柱对象和路对象

设 A 是 $\mathcal{C}$ 的对象. 根据公理 (M 2), 态射 $(1,1): A\oplus A\longrightarrow A$ 有分解

$$A\oplus A \overset{(\partial_0,\partial_1)}{\longrightarrow} \widetilde{A} \overset{\sigma}{\longrightarrow} A$$

其中 (∂_0, ∂_1) 是余纤维, σ 是弱等价 (并且是纤维). 这就给出 A 的一个柱对象.

设 B 是 $\mathcal{C}$ 的对象. 根据公理 (M 2), 态射 $\binom{1}{1}: B \longrightarrow B \oplus B$ 有分解

$$B \xrightarrow{s} \widetilde{B} \xrightarrow{\binom{d_0}{d_1}} B \times B$$

其中 s 是弱等价 (并且是余纤维), $\binom{d_0}{d_1}$ 是纤维. 这就给出 B 的一个路对象.

定义 4.4 设有对象 $A,\ B \in \mathcal{A}$.

(1) 对象 A 的 柱 (cylinder) 对象是指 $\mathcal{C}$ 中的对象 $\widetilde{A}$, 使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
A \oplus A \arrow[d, "{(1,1)}"'] \arrow[dr, "{(\partial_0,\partial_1)}"] & \\
A & \widetilde{A} \arrow[l, "\sigma"']
\end{tikzcd}$$

其中 (∂_0, ∂_1) 是余纤维, σ 是弱等价. 方便起见, 也称 $(\widetilde{A}, \partial_0,\ \partial_1)$ 是 A 的一个柱对象.

(1′) 对象 B 的路 (path) 对象是指 $\mathcal{C}$ 中的对象 $\widetilde{B}$, 使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{B} \arrow[dr, "\binom{d_0}{d_1}"'] & B \arrow[l, "s"'] \arrow[d, "\binom{1}{1}"] \\
& B \times B
\end{tikzcd}$$

并且 $\binom{d_0}{d_1}$ 是纤维, s 是弱等价. 方便起见, 也称 $(\widetilde{B}, d_0,\ d_1)$ 是 B 的一个路对象.

引理 4.5 (1) 设 A 是余纤维对象, $(\widetilde{A},\ \partial_0,\ \partial_1)$ 是 A 的一个柱对象. 则 $\partial_0,\ \partial_1$ 是平凡余纤维.

(1)' 设 B 是纤维对象, $(\widetilde{B},\ d_0,\ d_1)$ 是 B 的一个路对象. 则 $d_0,\ d_1$ 是平凡纤维.

证明 (1) 考虑推出方块

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "\binom{1}{0}"] \arrow[ddr, bend left, "\partial_0"] & \\
A \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[drr, bend right, "\partial_1"'] & A \oplus A \arrow[dr, dashed, "{(\partial_0,\partial_1)}"] & \\
& & \widetilde{A}
\end{tikzcd}$$

因 A 是一个余纤维对象, 由公理 (M 3) 知 $\binom{1}{0}: A \to A \oplus A$ 也是余纤维,于是 $\partial_0 = (\partial_0,\ \partial_1)\binom{1}{0}$ 也是余纤维.由交换图

$$\begin{tikzcd}
A \oplus A \arrow[d, "{(1,1)}"'] \arrow[dr, "{(\partial_0,\partial_1)}"] & \\
A & \widetilde{A} \arrow[l, "\sigma"']
\end{tikzcd}$$

知 $\sigma\partial_0 = \mathrm{Id}_A$. 由公理 (M 5)知 ∂_0 也是弱等价,从而 ∂_0 是平凡余纤维.

同理, ∂_1 也是平凡余纤维.

$(1')$ 考虑拉回方块

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{B} \arrow[dr, dashed, "\binom{d_0}{d_1}"] \arrow[drr, bend left, "d_0"] \arrow[ddr, bend right, "d_1"'] & & \\
& B \times B \arrow[r, "{(1,0)}"] \arrow[d, "{(0,1)}"] & B \arrow[d] \\
& B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

对偶地可证. □

推论 4.6 (1) (左同伦的提升) 设 A 是余纤维对象, $p : X \longrightarrow Y$ 是纤维, $\alpha : A \longrightarrow X$, $h : \widetilde{A} \longrightarrow Y$ 是满足 $h\partial_0 = p\alpha$ 的左同伦. 则存在左同伦 $H : \widetilde{A} \longrightarrow X$ 满足 $H\partial_0 = \alpha$, $pH = h$.

(1)' (右同伦的扩张) 设 B 是纤维对象, $p : X \longrightarrow Y$ 是余纤维, $\beta : Y \longrightarrow B$, $k : X \longrightarrow \widetilde{B}$ 是满足 $d_0 k = \beta p$ 的右同伦.则存在右同伦 $K : Y \longrightarrow \widetilde{B}$ 满足 $d_0 K = \beta$, $Kp = k$.

证明 (1) 由题设有交换图

$$\begin{tikzcd}
A \oplus A \arrow[r, "{(p\alpha, h\partial_1)}"] \arrow[d, "{(1,1)}"'] \arrow[dr, "{(\partial_0, \partial_1)}"] & Y \\
A & \widetilde{A} \arrow[l, "\sigma"] \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

其中 σ 是弱等价且 (∂_0, ∂_1) 是余纤维. 由引理 4.5(1) 知 ∂_0 是平凡余纤维,故存在 $H : \widetilde{A} \to X$ 使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\partial_0"'] & X \arrow[d, "p"] \\
\widetilde{A} \arrow[r, "h"] \arrow[ur, dashed, "H"] & Y
\end{tikzcd}$$

从而有交换图

$$\begin{tikzcd}
A \oplus A \arrow[r, "{(\alpha, H\partial_1)}"] \arrow[d, "{(1,1)}"'] \arrow[dr, "{(\partial_0, \partial_1)}"] & X \\
A & \widetilde{A} \arrow[l, "\sigma"] \arrow[u, "H"']
\end{tikzcd}$$

$(1')$ 由题设有交换图

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{B} \arrow[dr, "\binom{d_0}{d_1}"] & B \arrow[l, "s"'] \arrow[d, "\binom{1}{1}"] \\
X \arrow[u, "k"] \arrow[r, "\binom{\beta p}{d_1 k}"] & B \times B
\end{tikzcd}$$

其中 s 是弱等价且 $\binom{d_0}{d_1}$ 是纤维. 由引理 4.5(1)' 知 d_0 是平凡纤维,故存在 $K: Y\to \widetilde{B}$ 使得下图交换

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "k"] \arrow[d, "p"'] & \widetilde{B} \arrow[d, "d_0"] \\ Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[ur, dashed, "K"] & B \end{tikzcd}$$

从而有交换图

$$\begin{tikzcd} \widetilde{B} \arrow[dr, "\binom{d_0}{d_1}"] & B \arrow[l, "s"'] \arrow[d, "\binom{1}{1}"] \\ Y \arrow[u, "K"] \arrow[r, "\binom{\beta}{d_1K}"] & B\times B \end{tikzcd}$$

□

为了研究左同伦 (相应地, 右同伦)关系, 我们需要“两个柱对象的推出” (相应地, “两个路对象的拉回”).

引理 4.7 (1) 设 A 是余纤维对象且 A_1, A_2 是 A 的柱对象,即有交换图

$$\begin{tikzcd} A\oplus A \arrow[d, "(1,1)"'] \arrow[dr, "(\partial_0,\partial_1)"] & \\ A & A_1 \arrow[l, "\sigma_1"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A\oplus A \arrow[d, "(1,1)"'] \arrow[dr, "(\partial_0',\partial_1')"] & \\ A & A_2 \arrow[l, "\sigma_2"'] \end{tikzcd}$$

其中 (∂_0,∂_1) 和 $(\partial_0',\partial_1')$ 是余纤维, σ_1 和 σ_2 是弱等价. 考虑推出方块

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\partial_0'"] \arrow[d, "\partial_1"'] & A_2 \arrow[d, "in_2"] \\ A_1 \arrow[r, "in_1"] & A' \end{tikzcd}$$

则 A' 也是 A 的柱对象,即有交换图

$$\begin{tikzcd} A\oplus A \arrow[d, "(1,1)"'] \arrow[dr, "(in_1\partial_0,in_2\partial_1')"] & \\ A & A' \arrow[l, "\sigma'"'] \end{tikzcd}$$

其中 $(in_1\partial_0,\ in_2\partial_1')$ 是余纤维, σ' 是弱等价.

$(1)'$ 设 B 是纤维对象且 B_1, B_2 是 B 的两个路对象, 即有交换图

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[dr, "\binom{d_0}{d_1}"'] & B \arrow[l, "s_1"'] \arrow[d, "\binom{1}{1}"] \\ & B\times B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B_2 \arrow[dr, "\binom{d_0'}{d_1'}"'] & B \arrow[l, "s_2"'] \arrow[d, "\binom{1}{1}"] \\ & B\times B \end{tikzcd}$$

其中 $\binom{d_0}{d_1}$ 和 $\binom{d_0'}{d_1'}$ 是纤维, s_1 和 s_2 是弱等价. 考虑拉回方块

$$\begin{tikzcd}
B' \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & B_1 \arrow[d, "d_1"] \\
B_2 \arrow[r, "d_0'"] & B
\end{tikzcd}$$

则 B' 也是 B 的路对象,即有交换图

$$\begin{tikzcd}
B' \arrow[dr, "\binom{d_0 p_1}{d_1' p_2}"'] & B \arrow[l, "s'"'] \arrow[d, "\binom{1}{1}"] \\
& B \times B
\end{tikzcd}$$

其中 $\binom{d_0 p_1}{d_1' p_2}$ 是纤维, s' 是弱等价.

证明 (1) 因为 $\sigma_1\partial_1 = \mathrm{Id}_A = \sigma_2\partial_0'$, 由推出的泛性质知存在唯一的态射 $\sigma' : A' \to A$ 使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\partial_0'"] \arrow[d, "\partial_1"'] & A_2 \arrow[d, "in_2"] \arrow[ddr, bend left, "\sigma_2"] & \\
A_1 \arrow[r, "in_1"] \arrow[drr, bend right, "\sigma_1"'] & A' \arrow[dr, dashed, "\sigma'"] & \\
& & A
\end{tikzcd}$$

由引理 4.5 知 ∂_0' 是平凡余纤维,故由公理 (M 4) 知 in_1 是弱等价.又因为 $\sigma' in_1 = \sigma_1$,故 σ' 也是弱等价,且满足

$$\sigma' in_1 \partial_0 = \sigma_1\partial_0 = \mathrm{Id}_A, \qquad \sigma' in_2 \partial_1' = \sigma_2\partial_1' = \mathrm{Id}_A\,.$$

容易验证 (留给读者) 下图是推出

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, "\partial_0"'] & A \oplus A \arrow[d, "\begin{pmatrix} \partial_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}"] \\
A_1 \arrow[r, "\binom{1}{0}"] & A_1 \oplus A
\end{tikzcd}$$

因为 ∂_0 是余纤维,故 $\begin{pmatrix} \partial_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 也是余纤维.

下图也是推出 (验证留给读者)

$$\begin{tikzcd}
A \oplus A \arrow[r, "\begin{pmatrix} \partial_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "{(\partial_0', \partial_1')}"'] & A_1 \oplus A \arrow[d, "{(in_1, in_2\partial_1')}"] \\
A_2 \arrow[r, "in_2"] & A'
\end{tikzcd}$$

因为 $(\partial_0', \partial_1')$ 是余纤维,故 $(in_1, in_2\partial_1')$ 也是余纤维.从而

$$(in_1\partial_0, in_2\partial_1') = (in_1, in_2\partial_1')\left(\begin{smallmatrix}\partial_0 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$$

是余纤维.

$(1')$ 由拉回的泛性质知存在唯一的 $s' : B \longrightarrow B'$ 使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, dashed, "s'"] \arrow[drr, bend left, "s_1"] \arrow[ddr, bend right, "s_2"'] & & \\
& B' \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & B_1 \arrow[d, "d_1"] \\
& B_2 \arrow[r, "d_0'"] & B
\end{tikzcd}$$

由引理 4.5 (1)' 知 d_1 是平凡纤维. 由公理 (M 4) 知 p_2 是弱等价. 因为 $s_2 = p_2 s'$, 故 s' 也是弱等价,且满足

$$d_0 p_1 s' = d_0 s_1 = \mathrm{Id}_B, \qquad d_1' p_2 s' = d_1' s_2 = \mathrm{Id}_B\,.$$

下图是拉回 (验证留给读者)

$$\begin{tikzcd}
B_1 \times B \arrow[r, "{(1,0)}"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}d_0 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)"'] & B_1 \arrow[d, "d_0"] \\
B \times B \arrow[r, "{(1,0)}"] & B
\end{tikzcd}$$

因 d_0 是纤维,故 $\left(\begin{smallmatrix}d_0 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ 是纤维.

下图也是拉回 (验证留给读者)

$$\begin{tikzcd}
B' \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}p_1\\ d_1'p_2\end{smallmatrix}\right)"'] & B_2 \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}d_0'\\ d_1'\end{smallmatrix}\right)"] \\
B_1 \times B \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}d_1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)"] & B \times B
\end{tikzcd}$$

因 $\left(\begin{smallmatrix}d_0'\\ d_1'\end{smallmatrix}\right)$ 是纤维,故 $\left(\begin{smallmatrix}p_1\\ d_1'p_2\end{smallmatrix}\right)$ 是纤维. 于是

$$\begin{pmatrix}d_0p_1\\ d_1'p_2\end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix}d_0 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix}p_1\\ d_1'p_2\end{pmatrix}$$

是纤维. □

§4.3 由右 (相应地, 左)同伦关系诱导的商范畴

设范畴 $\mathcal{C}$ 有零对象 0, 有有限余积和有限积, 有拉回和推出, 有模型结构. 设 A, B 是范畴 $\mathcal{C}$ 的对象. 一般地, $\stackrel{r}{\sim}$ 不是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ 上的等价关系. 因此, 考虑 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ 上的由 $\stackrel{r}{\sim}$ **生成的**等价关系. 令 $\pi^r(A,B)$ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ 关于由 $\stackrel{r}{\sim}$ 生成的等价关系的等价类的集合.

同理, $\stackrel{l}{\sim}$ 不是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ 上的等价关系. 考虑 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ 上的由 $\stackrel{l}{\sim}$ **生成的**等价关系. 令 $\pi^l(A,B)$ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ 关于由 $\stackrel{l}{\sim}$ 生成的等价关系的等价类的集合.

引理 4.8 (1) 设 A 是余纤维对象. 则 $\stackrel{l}{\sim}$ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ 上的等价关系.

(1)' 设 B 是纤维对象. 则 $\stackrel{r}{\sim}$ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ 上的等价关系.

证明 (1) 自反性由下图即得.

$$\begin{tikzcd}
A\oplus A \arrow[r, "{(f,f)}"] \arrow[d, "{(1,1)}"'] \arrow[dr, "{(1,1)}"] & B \\
A & A \arrow[l, "1"] \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

由交换图

$$\begin{tikzcd}
A\oplus A \arrow[r, "{(f,g)}"] \arrow[d, "{(1,1)}"'] \arrow[dr, "{(\partial_0,\partial_1)}"] & B \\
A & \widetilde{A} \arrow[l, "\sigma"] \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

即得交换图

$$\begin{tikzcd}
A\oplus A \arrow[r, "{(g,f)}"] \arrow[d, "{(1,1)}"'] \arrow[dr, "{(\partial_1,\partial_0)}"] & B \\
A & \widetilde{A} \arrow[l, "\sigma"] \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

即 $\stackrel{l}{\sim}$ 有对称性.

下面说明传递性. 设 $f_0 \stackrel{l}{\sim} f_1$, $f_1 \stackrel{l}{\sim} f_2$. 则存在 A 的柱对象 A_0, A_1 使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
A\oplus A \arrow[r, "{(f_0,f_1)}"] \arrow[d, "{(1,1)}"'] \arrow[dr, "{(\partial_0,\partial_1)}"] & B \\
A & A_0 \arrow[l, "\sigma_0"] \arrow[u, "h_0"']
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
A\oplus A \arrow[r, "{(f_1,f_2)}"] \arrow[d, "{(1,1)}"'] \arrow[dr, "{(\partial_0',\partial_1')}"] & B \\
A & A_1 \arrow[l, "\sigma_1"] \arrow[u, "h_1"']
\end{tikzcd}$$

考虑推出

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "\partial_0'"'] & A_0 \arrow[d, "in_1"] \arrow[ddr, bend left, "h_0"] & \\
A_1 \arrow[r, "in_2"] \arrow[drr, bend right, "h_1"] & A_2 \arrow[dr, dashed, "h_2"] & \\
& & B
\end{tikzcd}$$

由引理4.7 (1) 知 A_2 也是 A 的柱对象且有交换图

$$\begin{tikzcd}
A\oplus A \arrow[r, "{(f_0,f_2)}"] \arrow[d, "{(1,1)}"'] \arrow[dr, "{(in_1\partial_0,in_2\partial_1')}"] & B \\
A & A_2 \arrow[l, "\sigma_2"] \arrow[u, "h_2"']
\end{tikzcd}$$

即 $f_0 \overset{l}{\sim} f_2$.

(1′) 只说明传递性. 设 $f_0 \overset{r}{\sim} f_1, f_1 \overset{r}{\sim} f_2$.则存在 B 的路对象 B_0, B_1 使得下图交换

$$\begin{tikzcd} B_0 \arrow[dr, "\binom{d_0}{d_1}"] & B \arrow[l, "s_0"'] \arrow[d, "\binom{1}{1}"] \\ A \arrow[u, "k_0"] \arrow[r, "\binom{f_0}{f_1}"] & B \times B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B_1 \arrow[dr, "\binom{d_0'}{d_1'}"] & B \arrow[l, "s_1"'] \arrow[d, "\binom{1}{1}"] \\ A \arrow[u, "k_1"] \arrow[r, "\binom{f_1}{f_2}"] & B \times B \end{tikzcd}$$

考虑拉回

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, dashed, "k_2"] \arrow[drr, bend left, "k_0"] \arrow[ddr, bend right, "k_1"'] & & \\ & B_2 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & B_0 \arrow[d, "d_1"] \\ & B_1 \arrow[r, "d_0'"] & B \end{tikzcd}$$

由引理4.7(1)’ 知 B_2 也是 B 的路对象且有交换图

$$\begin{tikzcd} B_2 \arrow[dr, "\binom{d_0 p_1}{d_1' p_2}"] & B \arrow[l, "s'"'] \arrow[d, "\binom{1}{1}"] \\ A \arrow[u, "k_2"] \arrow[r, "\binom{f_0}{f_2}"] & B \times B \end{tikzcd}$$

即 $f_0 \overset{r}{\sim} f_2$. □

引理 4.9 (1) 设 A 是余纤维对象, $f,\ g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$. 则

(i) $f \overset{l}{\sim} g \Longrightarrow f \overset{r}{\sim} g$.

(ii) 若 $f \overset{r}{\sim} g$,则存在从 f 到 g 的右同伦 $k : A \longrightarrow \widetilde{B}$ 使得 $s : B \longrightarrow \widetilde{B}$ 是平凡余纤维.即, 有交换图

$$\begin{tikzcd} \widetilde{B} \arrow[dr, "\binom{d_0}{d_1}"] & B \arrow[l, "s"'] \arrow[d, "\binom{1}{1}"] \\ A \arrow[u, "k"] \arrow[r, "\binom{f}{g}"] & B \times B \end{tikzcd}$$

(iii) 若 $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$, 则 $f \overset{r}{\sim} g \Longrightarrow uf \overset{r}{\sim} ug$.

(iv) 若 $u, v \in \mathrm{Hom}(B, C)$, $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ 且 $u \overset{r}{\sim} v$, 则 $uf \overset{r}{\sim} vf$ (这里不需要 “A 是余纤维对象”的假设).

(1)’ 设 B 是纤维对象, $f,\ g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$. 则

(i) $f \overset{r}{\sim} g \Longrightarrow f \overset{l}{\sim} g$.

(ii) 若 $f \overset{l}{\sim} g$,则存在从 f 到 g 的左同伦 $h : \widetilde{A} \longrightarrow B$ 使得 $\sigma : \widetilde{A} \longrightarrow A$ 是平凡纤维.即, 有交换图

$$\begin{tikzcd} A \oplus A \arrow[r, "{(f,g)}"] \arrow[d, "{(1,1)}"'] \arrow[dr, "{(\partial_0,\partial_1)}"] & B \\ A & \widetilde{A} \arrow[l, "\sigma"] \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

(iii) 若 $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$, 则 $f \overset{l}{\sim} g \Longrightarrow fu \overset{l}{\sim} gu$.

(iv) 若 $u, v \in \mathrm{Hom}(A, B)$, $f \in \mathrm{Hom}(B, C)$ 且 $u \overset{l}{\sim} v$, 则 $fu \overset{l}{\sim} fv$ (这里不需要 "B 是余纤维对象"的假设).

证明 (1) (i) 由引理 4.2 知存在从 f 到 g 的左同伦 $h : \widetilde{A} \longrightarrow B$. 参见下图

$$\begin{tikzcd} A \oplus A \arrow[r, "{(f,g)}"] \arrow[d, "{(1,1)}"'] \arrow[dr, "{(\partial_0,\partial_1)}"] & B \\ A & \widetilde{A} \arrow[l, "\sigma"] \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

其中 (∂_0, ∂_1) 是余纤维, σ 是弱等价. 根据公理 (M 2) 知存在交换图

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\binom{1}{1}"] \arrow[dr, "s"'] & & B \times B \\ & \widetilde{B} \arrow[ur, "\binom{d_0}{d_1}"'] & \end{tikzcd}$$

其中 $s : B \to \widetilde{B}$ 是弱等价, $\binom{d_0}{d_1} : \widetilde{B} \longrightarrow B \times B$ 是纤维. 即有 B 的路对象 $\widetilde{B}$. 由引理 4.5(1) 知 ∂_0 是平凡余纤维. 由公理 (M 1) 知存在 $K : \widetilde{A} \longrightarrow \widetilde{B}$ 使下图交换

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "sf"] \arrow[d, "\partial_0"'] & \widetilde{B} \arrow[d, "\binom{d_0}{d_1}"] \\ \widetilde{A} \arrow[r, "{(f\sigma,h)}"'] \arrow[ur, dashed, "K"] & B \times B \end{tikzcd}$$

令 $k = K\partial_1 : A \longrightarrow \widetilde{B}$. 则有交换图

$$\begin{tikzcd} \widetilde{B} \arrow[dr, "\binom{d_0}{d_1}"] & B \arrow[l, "s"'] \arrow[d, "\binom{1}{1}"] \\ A \arrow[u, "k"] \arrow[r, "\binom{f}{g}"] & B \times B \end{tikzcd}$$

即 $f \overset{r}{\sim} g$.

(ii) 由 $f \overset{r}{\sim} g$ 及引理 4.5(1)' 知存在交换图

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[dr, "\binom{d_0'}{d_1'}"] & B \arrow[l, "s'"'] \arrow[d, "\binom{1}{1}"] \\ A \arrow[u, "k'"] \arrow[r, "\binom{f}{g}"] & B \times B \end{tikzcd}$$

其中 s' 是弱等价, $\binom{d_0'}{d_1'}$ 是纤维.由公理 (M 2) 将 s' 分解成 $B \xrightarrow{s} \widetilde{B} \xrightarrow{\rho} B_1$, 其中 s 是平凡余纤维, ρ 是纤维. 由公理 (M 5) 知 ρ 也是弱等价. 令 $\binom{d_0}{d_1} = \binom{d_0'}{d_1'}\rho : \widetilde{B} \longrightarrow B \times B$. 由公理 (M 3) 知 $\binom{d_0}{d_1}$ 也是纤维, 故 $\widetilde{B}$ 是 B 的一个路对象. 由公理 (M 1) 知存在态射 $k : A \longrightarrow \widetilde{B}$ 使下图交换

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{B} \arrow[d, "\rho"] \\
A \arrow[r, "k'"'] \arrow[ur, dashed, "k"] & B_1
\end{tikzcd}
$$

从而有交换图

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{B} \arrow[dr, "\binom{d_0'}{d_1'}\rho"] & B \arrow[l, "s"'] \arrow[d, "\binom{1}{1}"] \\
A \arrow[u, "k"] \arrow[r, "\binom{f}{g}"] & B \times B
\end{tikzcd}
$$

满足所需条件.

(iii) 由结论 (ii) 可取到交换图

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{B} \arrow[dr, "\binom{d_0}{d_1}"] & B \arrow[l, "s"'] \arrow[d, "\binom{1}{1}"] \\
A \arrow[u, "k"] \arrow[r, "\binom{f}{g}"] & B \times B
\end{tikzcd}
$$

其中 s 是平凡余纤维.由公理 (M 2) 知存在 C 的路对象 $\widetilde{C}$, 其中 $s' : C \longrightarrow \widetilde{C}$ 是弱等价, $\binom{d_0'}{d_1'} : \widetilde{C} \longrightarrow C \times C$ 是纤维且 $\binom{d_0'}{d_1'}s' = \binom{1}{1}$. 因为 s 是平凡余纤维, 由公理 (M 1) 知存在 $\varphi : \widetilde{B} \longrightarrow \widetilde{C}$ 使得下图交换

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "s'u"] \arrow[d, "s"'] & \widetilde{C} \arrow[d, "\binom{d_0'}{d_1'}"] \\
\widetilde{B} \arrow[r, "\binom{ud_0}{ud_1}"] \arrow[ur, dashed, "\varphi"] & C \times C
\end{tikzcd}
$$

从而有交换图

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{C} \arrow[dr, "\binom{d_0'}{d_1'}"] & C \arrow[l, "s'"'] \arrow[d, "\binom{1}{1}"] \\
A \arrow[u, "\varphi k"] \arrow[r, "\binom{uf}{ug}"] & C \times C
\end{tikzcd}
$$

即 $uf \overset{r}{\sim} ug$.

(iv) 直接由定义即知.

$(1')$(i) 由引理 4.3 知存在从 f 到 g 的右同伦 $k : A \to \widetilde{B}$:

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{B} \arrow[dr, "\binom{d_0}{d_1}"] & B \arrow[l, "s"'] \arrow[d, "\binom{1}{1}"] \\
A \arrow[u, "k"] \arrow[r, "\binom{f}{g}"] & B \times B
\end{tikzcd}
$$

其中 $\binom{d_0}{d_1}$ 是纤维, s 是弱等价.根据公理 (M 2) 知存在交换图

$$\begin{tikzcd} A\oplus A \arrow[rr, "{(1,1)}"] \arrow[dr, "{(\partial_0,\partial_1)}"'] & & A \\ & \widetilde{A} \arrow[ur, "\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

其中 (∂_0,∂_1) 是余纤维, σ 是弱等价. 由引理 4.5 (1)' 知 d_0 是平凡纤维. 由公理 (M 1) 知存在态射 H 使下图交换

$$\begin{tikzcd} A\oplus A \arrow[r, "{(sf,k)}"] \arrow[d, "{(\partial_0,\partial_1)}"'] & \widetilde{B} \arrow[d, "d_0"] \\ \widetilde{A} \arrow[r, "f\sigma"'] \arrow[ur, dashed, "H"] & B \end{tikzcd}$$

令 $h=d_1H$. 则有交换图

$$\begin{tikzcd} A\oplus A \arrow[r, "{(f,g)}"] \arrow[d, "{(1,1)}"'] \arrow[dr, "{(\partial_0,\partial_1)}"] & B \\ A & \widetilde{A} \arrow[l, "\sigma"] \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

即 $f\overset{l}{\sim}g$.

(ii) 由 $f\overset{l}{\sim}g$ 及引理 4.5 (1) 知存在如下交换图

$$\begin{tikzcd} A\oplus A \arrow[r, "{(f,g)}"] \arrow[d, "{(1,1)}"'] \arrow[dr, "{(\partial_0',\partial_1')}"] & B \\ A & A_1 \arrow[l, "\sigma'"] \arrow[u, "h'"'] \end{tikzcd}$$

其中 σ' 是弱等价, $(\partial_0',\partial_1')$ 是余纤维. 由公理 (M 2) 将 σ' 分解成 $A_1\xrightarrow{\varphi}\widetilde{A}\xrightarrow{\sigma}A$, 其中 φ 是余纤维而 σ 是平凡纤维. 由公理 (M 5) 知 φ 也是弱等价. 令 $(\partial_0,\partial_1)=\varphi(\partial_0',\partial_1'):A\oplus A\longrightarrow\widetilde{A}$. 由公理 (M 3) 知 (∂_0,∂_1) 也是余纤维. 由公理 (M 1) 知存在 $h:\widetilde{A}\longrightarrow B$ 使得下图交换

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \arrow[d] \\ \widetilde{A} \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "h"] & 0 \end{tikzcd}$$

从而存在交换图

$$\begin{tikzcd} A\oplus A \arrow[r, "{(f,g)}"] \arrow[d, "{(1,1)}"'] \arrow[dr, "{(\partial_0,\partial_1)}"] & B \\ A & \widetilde{A} \arrow[l, "\sigma"] \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

其中 σ 是平凡纤维.

(iii) 由上述 (ii) 可取到交换图

$$\begin{tikzcd}
A \oplus A \arrow[r, "{(f,g)}"] \arrow[d, "{(1,1)}"'] \arrow[dr, "{(\partial_0,\partial_1)}"] & B \\
A & \widetilde{A} \arrow[l, "\sigma"] \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

其中 σ 是平凡纤维, (∂_0, ∂_1) 也是余纤维. 根据公理 (M 2) 知存在 Z 的柱对象 $\widetilde{Z}$, 其中 $\sigma' : \widetilde{Z} \longrightarrow Z$ 是弱等价, $(\partial_0', \partial_1') : Z \oplus Z \longrightarrow \widetilde{Z}$ 是余纤维且 $\sigma'(\partial_0', \partial_1') = (1, 1)$. 于是由公理 (M 1) 知存在 $\rho : \widetilde{Z} \longrightarrow \widetilde{A}$ 使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
Z \oplus Z \arrow[r, "{(\partial_0 u,\partial_1 u)}"] \arrow[d, "{(\partial_0',\partial_1')}"'] & \widehat{A} \arrow[d, "\sigma"] \\
\widetilde{Z} \arrow[ur, dashed, "\rho"] \arrow[r, "u\sigma'"] & A
\end{tikzcd}$$

从而存在交换图

$$\begin{tikzcd}
Z \oplus Z \arrow[r, "{(fu,gu)}"] \arrow[d, "{(1,1)}"'] \arrow[dr, "{(\partial_0',\partial_1')}"] & B \\
Z & \widetilde{Z} \arrow[l, "\sigma'"] \arrow[u, "h\rho"']
\end{tikzcd}$$

即 $fu \overset{l}{\sim} gu$.

(iv) 直接由定义即知. □

当 A 是余纤维对象且 B 是纤维对象时,由引理 4.8 和引理 4.9 知 $\overset{l}{\sim}$ 和 $\overset{r}{\sim}$ 相同且已经是等价关系. 记这个关系为 $\sim$, 称之为同伦关系并记相应的等价类集合为 $\pi(A, B)$.

令 $\mathcal{C}_c$, $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_{cf}$ 分别是由 $\mathcal{C}$ 中余纤维对象, 纤维对象, 余纤维对象且纤维对象作成的 $\mathcal{C}$ 的满子范畴.

(显然, $\mathcal{C}_c$, $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_{cf}$ 均有零对象, $\mathcal{C}_c$ 有有限余积, $\mathcal{C}_f$ 有有限积, $\mathcal{C}_{cf}$ 有有限余积和有限积.)

引理 4.9(1)(iii) 和 (iv) 意味着由右同伦关系 $\overset{r}{\sim}$ 生成的等价关系是 $\mathcal{C}_c$ 的一个等价关系理想. 因此, 根据引理 3.2，得到 $\mathcal{C}_c$ 的关于右同伦关系的商范畴 $\mathcal{C}_c/\overset{r}{\sim}$. 按照 D. Quillen 的记法, 用 $\pi\mathcal{C}_c$ 来记这个范畴：其对象就是 $\mathcal{C}$ 中的余纤维对象, 其态射集就是 $\pi^r(A, B)$, 即 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ 关于由 $\overset{r}{\sim}$ 生成的等价关系的等价类的集合. 典范函子记为 $\pi : \mathcal{C}_c \longrightarrow \pi\mathcal{C}_c$.

提请注意, 由左同伦生成的等价关系 $\overset{l}{\sim}$ **不是** $\mathcal{C}_c$ 的一个等价关系理想: 因为一般地, 它不具有理想性 (引理 4.9(1)'(iii) 要求 B 是纤维对象). 因此无法谈论商范畴 $\mathcal{C}_c/\overset{l}{\sim}$.

同理, 引理 4.9(1)'(iii) 和 (iv) 意味着由左同伦关系 $\overset{l}{\sim}$ 生成的等价关系是 $\mathcal{C}_f$ 的一个等价关系理想. 根据引理 3.2 得到 $\mathcal{C}_f$ 的关于左同伦关系的商范畴 $\mathcal{C}_f/\overset{l}{\sim}$. 按 Quillen 的记法, 用 $\pi\mathcal{C}_f$ 记这个范畴：其对象就是 $\mathcal{C}$ 中的纤维对象, 其态射集就是 $\pi^l(A, B)$, 即 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ 关于由 $\overset{l}{\sim}$ 生成的等价关系的等价类的集合. 典范函子记为 $\pi : \mathcal{C}_f \longrightarrow \pi\mathcal{C}_f$.

提请注意, 由右同伦生成的等价关系 $\overset{r}{\sim}$ **不是** $\mathcal{C}_f$ 的一个等价关系理想: 因为一般地, 它不具有理想性 (引理 4.9(1)(iii) 要求 A 是余纤维对象). 因此无法谈论商范畴 $\mathcal{C}_f/\overset{r}{\sim}$.

最后, 对于范畴 $\mathcal{C}_{cf}$, 关系 $\overset{l}{\sim}$ 与关系 $\overset{r}{\sim}$ 重合, 记为 $\sim$. 它是 $\mathcal{C}_{cf}$ 的一个等价关系理想. 相应的商范畴记为 $\pi\mathcal{C}_{cf}$: 其对象就是 $\mathcal{C}$ 中的余纤维且纤维对象, 其态射集就是 $\pi(A,B)$, 即 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ 关于等价关系 $\sim$ 的等价类的集合. 典范函子记为 $\pi : \mathcal{C}_{cf} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_{cf}$.

引理 4.10 (1) 设函子 $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$ 将弱等价变成 $\mathcal{B}$ 中的同构, 且 $f \overset{l}{\sim} g$ 或 $f \overset{r}{\sim} g$. 则 $F(f) = F(g)$.

(2) 设函子 $F : \mathcal{C}_c \longrightarrow \mathcal{B}$ 将 $\mathcal{C}_c$ 中的弱等价变成 $\mathcal{B}$ 中的同构, $f, g \in \mathrm{Hom}(A,B)$, $A, B \in \mathcal{C}_c$ 且 $f \overset{r}{\sim} g$. 则 $F(f) = F(g)$.

(2)$'$ 设函子 $F : \mathcal{C}_f \longrightarrow \mathcal{B}$ 将 $\mathcal{C}_f$ 中的弱等价变成 $\mathcal{B}$ 中的同构, $f, g \in \mathrm{Hom}(A,B)$, $A, B \in \mathcal{C}_f$ 且 $f \overset{l}{\sim} g$. 则 $F(f) = F(g)$.

证明 (1) 设有交换图

$$\begin{tikzcd}
A \oplus A \arrow[r, "{(f,g)}"] \arrow[d, "{(1,1)}"'] \arrow[dr, "{(\partial_0,\partial_1)}"] & B \\
A & \widetilde{A} \arrow[l, "\sigma"] \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

其中 σ 是弱等价, (∂_0, ∂_1) 是余纤维. 于是 $F(\sigma)$ 是同构.由 $F(\sigma)F(\partial_0) = F(\sigma)F(\partial_1) = \mathrm{Id}_{F(A)}$ 知 $F(\partial_0) = F(\partial_1)$,故 $F(f) = F(h)F(\partial_0) = F(h)F(\partial_1) = F(g)$.

如果 $f \overset{r}{\sim} g$，同理可证 $F(f) = F(g)$.

(2) 由引理 4.9(1)(ii) 知有交换图

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{B} \arrow[dr, "\binom{d_0}{d_1}"] & B \arrow[l, "s"'] \arrow[d, "\binom{1}{1}"] \\
A \arrow[u, "k"] \arrow[r, "\binom{f}{g}"] & B \times B
\end{tikzcd}$$

其中 s 是平凡余纤维. 因 $B \in \mathcal{C}_c$ 且 s 是弱等价, 故 $\widetilde{B} \in \mathcal{C}_c$, 从而 $F(s)$ 是同构.由 $F(s)F(d_0) = F(s)F(d_1) = \mathrm{Id}_{F(B)}$ 知 $F(d_0) = F(d_1)$,故 $F(f) = F(k)F(d_0) = F(k)F(d_1) = F(g)$.

(2)$'$ 对偶地可证. $\square$

§4.4 主定理

设范畴 $\mathcal{C}$ 有零对象 0, 有有限余积和有限积, 有拉回和推出, 有模型结构. 回顾 $\mathcal{C}$ 的同伦范畴 $\mathrm{Ho}\mathcal{C}$, 就是 $\mathcal{C}$ 关于弱等价 $\mathrm{Weq}(\mathcal{C})$ 的局部化 $\mathrm{Weq}(\mathcal{C})^{-1}\mathcal{C}$. 典范函子记为 $\gamma : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ho}\mathcal{C}$.

类似地, 用 $\mathrm{Ho}\mathcal{C}_c$ 表示 $\mathcal{C}_c$ 关于 $\mathcal{C}_c$ 中的弱等价 $\mathrm{Weq}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{C}_c$ 的局部化 $(\mathrm{Weq}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{C}_c)^{-1}\mathcal{C}_c$. 典范函子记为 $\gamma_c : \mathcal{C}_c \longrightarrow \mathrm{Ho}\mathcal{C}_c$. 由引理 4.10(2) 知函子 $\gamma_c : \mathcal{C}_c \longrightarrow \mathrm{Ho}\mathcal{C}_c$ 诱导出函子 $\overline{\gamma_c} : \pi\mathcal{C}_c \longrightarrow \mathrm{Ho}\mathcal{C}_c$.

对偶地, 用 $\mathrm{Ho}\mathcal{C}_f$ 表示 $\mathcal{C}_f$ 关于 $\mathcal{C}_f$ 中的弱等价 $\mathrm{Weq}(\mathcal{C})\cap\mathcal{C}_f$ 的局部化 $(\mathrm{Weq}(\mathcal{C})\cap\mathcal{C}_f)^{-1}\mathcal{C}_f$. 典范函子记为 $\gamma_f : \mathcal{C}_f \longrightarrow \mathrm{Ho}\mathcal{C}_f$. 由引理 4.10 (2)' 知函子 $\gamma_f : \mathcal{C}_f \longrightarrow \mathrm{Ho}\mathcal{C}_f$ 诱导出函子 $\overline{\gamma_f} : \pi\mathcal{C}_f \longrightarrow \mathrm{Ho}\mathcal{C}_f$.

嵌入 $\mathcal{C}_{cf} \hookrightarrow \mathcal{C}$ 与函子 $\gamma : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ho}\mathcal{C}$ 的合成得到函子 $\mathcal{C}_{cf} \longrightarrow \mathrm{Ho}\mathcal{C}$. 由引理 4.10(1) 知这个函子诱导出函子 $\overline{\gamma} : \pi\mathcal{C}_{cf} \longrightarrow \mathrm{Ho}\mathcal{C}$.

定理 4.11 设范畴 $\mathcal{C}$ 有零对象 0, 有有限余积和有限积, 有拉回和推出, 有模型结构. 则有范畴等价

$$\overline{\gamma} : \pi\mathcal{C}_{cf} \cong \mathrm{Ho}\mathcal{C},$$

且有交换图:

$$\begin{tikzcd}
\pi\mathcal{C}_c \arrow[r, "\overline{\gamma_c}"] & \mathrm{Ho}\mathcal{C}_c \arrow[d, "\cong"] \\
\pi\mathcal{C}_{cf} \arrow[u, hook] \arrow[d, hook] \arrow[r, "\overline{\gamma}", "\cong"'] & \mathrm{Ho}\mathcal{C} \\
\pi\mathcal{C}_f \arrow[r, "\overline{\gamma_f}"] & \mathrm{Ho}\mathcal{C}_f \arrow[u, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

而且, 合成 $\mathrm{Ho}\mathcal{C}_c \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ho}\mathcal{C} \xrightarrow{(\overline{\gamma})^{-1}} \pi\mathcal{C}_{cf} \hookrightarrow \pi\mathcal{C}_c$ 是 $\overline{\gamma_c}$ 的右伴随, 即有自然双射

$$\mathrm{Hom}_{\pi\mathcal{C}_{cf}}(RX, RY) \cong \mathrm{Hom}_{\pi\mathcal{C}_c}(X, RY), \quad \forall\ X, Y \in \mathcal{C}_c.$$

合成 $\mathrm{Ho}\mathcal{C}_f \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ho}\mathcal{C} \xrightarrow{(\overline{\gamma})^{-1}} \pi\mathcal{C}_{cf} \hookrightarrow \pi\mathcal{C}_f$ 是 $\overline{\gamma_f}$ 的左伴随, 即有自然双射

$$\mathrm{Hom}_{\pi\mathcal{C}_{cf}}(QX, QY) \cong \mathrm{Hom}_{\pi\mathcal{C}_f}(QX, Y), \quad \forall\ X, Y \in \mathcal{C}_f.$$

引理 4.12 (1) 设 A 是余纤维对象且 $p : X \longrightarrow Y$ 是平凡纤维. 则 p 诱导双射 $p_* : \pi^l(A, X) \xrightarrow{\cong} \pi^l(A, Y)$.

(1)$'$ 设 B 是纤维对象且 $p : X \longrightarrow Y$ 是平凡余纤维.则 p 诱导双射 $p^* : \pi^r(Y, B) \xrightarrow{\cong} \pi^r(X, B)$.

(2) 典范函子 $\pi : \mathcal{C}_{cf} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_{cf}$ 将 $\mathcal{C}_{cf}$ 中的平凡纤维变成 $\pi\mathcal{C}_{cf}$ 中的同构.

(2)$'$ 典范函子 $\pi : \mathcal{C}_{cf} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_{cf}$ 将 $\mathcal{C}_{cf}$ 中的平凡余纤维变成 $\pi\mathcal{C}_{cf}$ 中的同构.

(3) 典范函子 $\pi : \mathcal{C}_{cf} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_{cf}$ 将 $\mathcal{C}_{cf}$ 中的弱等价变成 $\pi\mathcal{C}_{cf}$ 中的同构.

证明 (1) 由定义知 $f \overset{l}{\sim} g \Longrightarrow pf \overset{l}{\sim} pg$,从而映射 p_* 是良定的.对于任意态射 $g : A \longrightarrow Y$, 由公理 (M 1) 知存在 $f : A \longrightarrow X$ 使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "p"] \\
A \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

即 p_* 是满射. 设 $f,g\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,X)$ 且 $pf\overset{l}{\sim}pg$. 由引理 4.2 知存在交换图

$$\begin{tikzcd}
A\oplus A \arrow[r, "{(pf,pg)}"] \arrow[d, "{(1,1)}"'] \arrow[dr, "{(\partial_0,\partial_1)}"] & Y \\
A & \widetilde{A} \arrow[l, "\sigma"'] \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

其中 (∂_0,∂_1) 是余纤维, σ 是弱等价.从而由公理 (M 1) 知存在 $H:\widetilde{A}\to X$ 使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
A\oplus A \arrow[r, "{(f,g)}"] \arrow[d, "{(\partial_0,\partial_1)}"'] & X \arrow[d, "p"] \\
\widetilde{A} \arrow[ur, dashed, "H"] \arrow[r, "h"] & Y
\end{tikzcd}$$

于是有交换图:

$$\begin{tikzcd}
A\oplus A \arrow[r, "{(f,g)}"] \arrow[d, "{(1,1)}"'] \arrow[dr, "{(\partial_0,\partial_1)}"] & X \\
A & \widetilde{A} \arrow[l, "\sigma"'] \arrow[u, "H"']
\end{tikzcd}$$

故 $f\overset{l}{\sim}g$, 即 p_* 是单射.

$(1')$ 由定义知 $f\overset{r}{\sim}g\Longrightarrow fp\overset{r}{\sim}gp$,从而 p^* 是良定的. 对任意态射 $g:X\longrightarrow B$, 由公理 (M 1) 知存在 $f:Y\longrightarrow B$ 使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"'] & B \arrow[d] \\
Y \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

即 p^* 是满射. 设 $f,g\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,B)$ 且 $fp\overset{r}{\sim}gp$. 由引理 4.3 知有交换图

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{B} \arrow[dr, "{\left(\begin{smallmatrix} d_0\\ d_1\end{smallmatrix}\right)}"] & B \arrow[l, "s"'] \arrow[d, "{\left(\begin{smallmatrix} 1\\ 1\end{smallmatrix}\right)}"] \\
X \arrow[u, "k"] \arrow[r, "{\left(\begin{smallmatrix} fp\\ gp\end{smallmatrix}\right)}"] & B\times B
\end{tikzcd}$$

其中 $\left(\begin{smallmatrix} d_0\\ d_1\end{smallmatrix}\right)$ 是纤维, s 是弱等价. 由公理 (M 1) 知存在 $K:Y\longrightarrow \widetilde{B}$ 使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "k"] \arrow[d, "p"'] & \widetilde{B} \arrow[d, "{\left(\begin{smallmatrix} d_0\\ d_1\end{smallmatrix}\right)}"] \\
Y \arrow[ur, dashed, "K"] \arrow[r, "{\left(\begin{smallmatrix} f\\ g\end{smallmatrix}\right)}"] & B\times B
\end{tikzcd}$$

于是有交换图

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{B} \arrow[dr, "{\left(\begin{smallmatrix} d_0\\ d_1\end{smallmatrix}\right)}"] & B \arrow[l, "s"'] \arrow[d, "{\left(\begin{smallmatrix} 1\\ 1\end{smallmatrix}\right)}"] \\
Y \arrow[u, "K"] \arrow[r, "{\left(\begin{smallmatrix} f\\ g\end{smallmatrix}\right)}"] & B\times B
\end{tikzcd}$$

故 $f \overset{r}{\sim} g$, 即 p^* 是单射.

(2) 设 $f : X \longrightarrow Y$ 是 $\mathcal{C}_{cf}$ 中的平凡纤维 (即 f 是平凡纤维且 $X, Y \in \mathcal{C}_{cf}$). 由 (1) 即知 f 诱导了双射 $f_* : \pi(Y, X) \longrightarrow \pi(Y, Y)$. 从而存在态射 $g : Y \longrightarrow X$ 使得 $fg \sim \mathrm{Id}_Y$.

又 f 也诱导了双射 $f_* : \pi(X, X) \longrightarrow \pi(X, Y)$. 于是 $f(gf) \sim (fg)f \sim f \sim f\,\mathrm{Id}_X$. 因此 $gf \sim \mathrm{Id}_X$, 即 f 是 $\pi\mathcal{C}_{cf}$ 中的同构.

(2)’ 对偶地可证.

(3) 范畴 $\mathcal{C}_{cf}$ 中的弱等价 $f : X \longrightarrow Y$ (即 f 是弱等价且 $X, Y \in \mathcal{C}_{cf}$) 均可分解成 $X \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} Y$，即 $f = hg$，其中 g 是平凡余纤维, h 是平凡纤维. 因 X 是余纤维对象且 g 是余纤维, 故 Z 是余纤维对象. 同理, Z 是纤维对象.即 g 和 h 分别是 $\mathcal{C}_{cf}$ 中的平凡余纤维和平凡纤维. 再由 (2) 和 (2)’ 即得. □

主定理的证明.

第 1 步：构造函子 $\overline{Q} : \mathcal{C} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_c$ 和函子 $\overline{R} : \mathcal{C} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_f$. 对于 $\mathcal{C}$ 的任意对象 X, 将 $0 \longrightarrow X$ 和 $X \longrightarrow 0$ 分别分解成合成

$$0 \longrightarrow QX \xrightarrow{p_X} X, \qquad X \xrightarrow{i_X} RX \longrightarrow 0$$

其中 QX 是余纤维对象，p_X 是平凡纤维, i_X 是平凡余纤维， RX 是纤维对象. 对每个 $X \in \mathcal{C}$, 取定对象 $QX \in \mathcal{C}_c$ 和 $RX \in \mathcal{C}_f$. 若 X 是余纤维对象, 则取 $QX = X$, $p_X = \mathrm{Id}_X$; 若 X 是纤维对象， 则取 $RX = X$, $i_X = \mathrm{Id}_X$. 对于任意态射 $g : X \longrightarrow Y$, 由 公理 (M 1) 知存在 $Qg : QX \longrightarrow QY$ 使下图交换

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & QY \arrow[d, "p_Y"] \\ QX \arrow[r, "g \circ p_X"'] \arrow[ur, dashed, "Qg"] & Y \end{tikzcd}$$

这样的态射 Qg 可能不唯一. 但引理 4.12(1) 确保它在左同伦意义下唯一.从而

$$Q\,\mathrm{Id}_X \overset{l}{\sim} \mathrm{Id}_{QX}, \qquad Q(gf) \overset{l}{\sim} Q(g)Q(f).$$

由引理 4.9(1)(i) 知

$$Q\,\mathrm{Id}_X \overset{r}{\sim} \mathrm{Id}_{QX}, \qquad Q(gf) \overset{r}{\sim} Q(g)Q(f).$$

于是由 $X \mapsto QX$, $g \mapsto \overline{Qg}$ 给出函子 $\overline{Q} : \mathcal{C} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_c$, 其中 $\overline{Qg}$ 表示 Qg 所在的等价类 (关于由 $\overset{r}{\sim}$ 生成的等价关系).

类似地,得到函子 $\overline{R} : \mathcal{C} \longrightarrow \pi\mathcal{C}_f$, $X \mapsto RX$, $g \mapsto \overline{Rg}$, 其中 $\overline{Rg}$ 表示 Rg 所在的等价类 (关于由 $\overset{l}{\sim}$ 生成的等价关系). 参见下图

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_Y \circ g"] \arrow[d, "i_X"'] & RY \arrow[d] \\ RX \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "Rg"] & 0 \end{tikzcd}$$

第 2 步: 构造函子 $\overline{R}'\circ\overline{Q}:\mathcal{C}\longrightarrow\pi\mathcal{C}_{cf}:\ X\mapsto RQX,\ f\mapsto\overline{RQf}$.

函子 $\overline{R}:\mathcal{C}\longrightarrow\pi\mathcal{C}_f$ 在 $\mathcal{C}_c$ 上的限制给出函子 $\mathcal{C}_c\longrightarrow\pi\mathcal{C}_f$, 仍记为 $\overline{R}$. 如果 X 是余纤维对象, 则 $0\longrightarrow X$ 与 $i_X:X\longrightarrow RX$ 均是余纤维, 从而 RX 是余纤维对象; 而 RX 又是纤维对象, 故 $RX\in\mathcal{C}_{cf}$. 因此，得到函子 $\overline{R}:\mathcal{C}_c\longrightarrow\pi\mathcal{C}_{cf}$, 它就诱导出函子 $\overline{R}':\pi\mathcal{C}_c\longrightarrow\pi\mathcal{C}_{cf}$.

事实上, 如果 $f,g\in\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_c}(X,Y)$ 且 $f\overset{r}{\sim}g$, 则由引理 4.9(1)(iii) 知 $i_Yf\overset{r}{\sim}i_Yg:X\longrightarrow RY$, 从而由引理 4.12(1)’ 知 $Rf\overset{r}{\sim}Rg:RX\longrightarrow RY$. 注意对于 $\mathcal{C}_{cf}$, $\overset{r}{\sim}$ 就是 $\sim$.

将函子 $\overline{Q}$ 与 $\overline{R}'$ 复合即得到函子 $\overline{R}'\circ\overline{Q}:\mathcal{C}\longrightarrow\pi\mathcal{C}_{cf}:\ X\mapsto RQX,\ f\mapsto\overline{RQf}$.

第 3 步： 构造 $\mathcal{C}$ 的同伦范畴.

考虑范畴 $H\mathcal{C}$: 其对象是 $\mathcal{C}$ 的对象；态射集 $\operatorname{Hom}_{H\mathcal{C}}(X,Y)$ 定义为

$$\operatorname{Hom}_{\pi\mathcal{C}_{cf}}(RQX,RQY)=\pi(RQX,RQY).$$

考虑函子

$$\gamma':\mathcal{C}\longrightarrow H\mathcal{C},\quad \gamma'X=X,\quad \gamma'f=\overline{RQf}.$$

则 γ' 诱导出函子 $\mathcal{C}_{cf}\longrightarrow H\mathcal{C},\quad X\mapsto X,\quad f\mapsto\overline{f}$, 仍记为 γ'.

如果 $f,g\in\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}_{cf}}(X,Y)$ 且 $f\sim g$, 则由引理 4.9(1)’ 知 $fp_X\sim gp_X:QX\longrightarrow Y$ (注意到 QX 是余纤维对象且又是纤维对象). 在由引理 4.12(1) 知 $Qf\sim Qg$. 进一步得到 $RQf\sim RQg$, 从而在 $H\mathcal{C}$ 中 $\gamma'f=\gamma'g$. 因此 γ' 诱导出函子

$$\overline{\gamma'}:\pi\mathcal{C}_{cf}\longrightarrow H\mathcal{C},\quad \overline{\gamma'}X=X,\quad \overline{\gamma'}\ \overline{f}=\overline{f}.$$

下证 $\overline{\gamma'}$ 是等价. 当 $X\in\mathcal{C}_{cf}$ 时 $RQf=f$, 故 $\overline{\gamma'}:\pi\mathcal{C}_{cf}\longrightarrow H\mathcal{C}$ 是满忠实的. 设 $f:X\longrightarrow Y$ 是 $\mathcal{C}$ 中弱等价. 由 $fp_X=p_YQf$ 知 Qf 是 $\mathcal{C}_c$ 中弱等价; 进而, RQf 是 $\mathcal{C}_{cf}$ 中弱等价. 由引理 4.12(3), $\overline{RQf}$ 是 $\pi\mathcal{C}_{cf}$ 中同构. 由定义, $\gamma'f=\overline{RQf}$ 就是 X 到 Y 在 $H\mathcal{C}$ 中的同构. 对任意 X，由 $X\xleftarrow{p_X}QX\xrightarrow{i_{Q(X)}}RQX$ 知 X 和 RQX 在 $H\mathcal{C}$ 中同构, 从而 $\overline{\gamma'}$ 稠密. 于是 $\overline{\gamma'}$ 是等价.

下证 $H\mathcal{C}$ 就是 $\mathcal{C}$ 的同伦范畴 (在同构的意义下), $\gamma':\mathcal{C}\longrightarrow H\mathcal{C}$ 就是局部化函子. 上段已证 γ' 将弱等价变成 $H\mathcal{C}$ 中的同构. 设函子 $F:\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{B}$ 将 $\mathcal{C}$ 中弱等价变成 $\mathcal{B}$ 中的同构.定义函子 $\theta:H\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{B}$: $\theta X=FX$; 对于 $\alpha\in\operatorname{Hom}_{H\mathcal{C}}(X,Y)$, 根据 $H\mathcal{C}$ 的态射集的定义, $\alpha=\overline{f}$，其中 f 是 $\mathcal{C}_{cf}$ 中的态射 $RQX\longrightarrow RQY$. 令 $\theta\alpha$ 由下图给出:

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, dashed, "\theta\alpha"] & FY \\
FQX \arrow[u, "Fp_X", "\cong"'] \arrow[d, "Fi_{QX}"', "\cong"] & FQY \arrow[u, "Fp_Y", "\cong"'] \arrow[d, "Fi_{QY}"', "\cong"] \\
FRQX \arrow[r, "Ff"] & FRQY
\end{tikzcd}$$

即

$$\theta\alpha = Fp_Y \circ (Fi_{QY})^{-1} \circ Ff \circ Fi_{QX} \circ (Fp_X)^{-1}.$$

由引理 4.10 知 $\theta\alpha$ 与 f 的选取无关, 从而 θ 是函子. 下证 $\theta\gamma' = F$. 从而 $\gamma' : \mathcal{C} \longrightarrow H\mathcal{C}$ 就是局部化函子.事实上，对于 $\mathcal{C}$ 中态射 $f : X \longrightarrow Y$, $\gamma' f = \overline{RQf}$. 由 $\theta(\overline{RQf})$ 的定义知

$$\begin{aligned}
\theta(\overline{RQf}) &= Fp_Y \circ (Fi_{QY})^{-1} \circ F(RQf) \circ Fi_{QX} \circ (Fp_X)^{-1} \\
&= Fp_Y \circ (Fi_{QY})^{-1} \circ Fi_{QY} \circ FQf \circ (Fp_X)^{-1} \\
&= Fp_Y \circ FQf \circ (Fp_X)^{-1} \\
&= Ff \circ Fp_X \circ (Fp_X)^{-1} = Ff.
\end{aligned}$$

参见交换图

$$\begin{tikzcd}
QX \arrow[r, "i_{QY} \circ Qf"] \arrow[d, "i_{QX}"'] & RQY \arrow[d] \\
RQX \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "RQf"] & 0
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & QY \arrow[d, "p_Y"] \\
QX \arrow[r, "f \circ p_X"'] \arrow[ur, dashed, "Qf"] & Y
\end{tikzcd}$$

因此 $(\theta\gamma')f = Ff$. 这就证明了 $\theta\gamma' = F$. 由上述证明也易知这样的 θ 是唯一的.

至此为止我们已知: $H\mathcal{C}$ 就是 $\mathcal{C}$ 的同伦范畴 $\mathrm{Ho}\mathcal{C}$. 因此, 将 $H\mathcal{C}$ 就写成 $\mathrm{Ho}\mathcal{C}$, 局部化函子就变成 $\gamma : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ho}\mathcal{C}$，它诱导出范畴的等价

$$\overline{\gamma} : \pi\mathcal{C}_{cf} \longrightarrow \mathrm{Ho}\mathcal{C}, \quad X \mapsto X, \quad \overline{f} \mapsto \overline{f}.$$

第 4 步：构造 $\mathcal{C}_c$ 关于弱等价的局部化 $H\mathcal{C}_c$. 这与第 3 步类似.我们包含主要步骤.

令 $H\mathcal{C}_c$ 是这样的范畴: 其对象是 $\mathcal{C}$ 中余纤维对象；态射集 $\mathrm{Hom}_{H\mathcal{C}_c}(X, Y)$ 是

$$\mathrm{Hom}_{\pi\mathcal{C}_{cf}}(RX, RY) = \pi(RX, RY).$$

注意, RX 总是纤维对象; 当 X 是余纤维对象时, RX 也是余纤维对象. 当 X 和 Y 都是余纤维对象时, 则

$$\mathrm{Hom}_{H\mathcal{C}_c}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\pi\mathcal{C}_{cf}}(RX, RY) = \mathrm{Hom}_{\pi\mathcal{C}_{cf}}(RQX, RQY) = \mathrm{Hom}_{H\mathcal{C}}(X, Y).$$

故 $H\mathcal{C}_c$ 是 $\mathrm{Ho}\mathcal{C} = H\mathcal{C}$ 的满子范畴. 设 $f : X \longrightarrow Y$ 是 $\mathcal{C}$ 中弱等价. 由 $fp_X = p_Y Qf$ 知 Qf 是 $\mathcal{C}_c$ 中弱等价; 进而, RQf 是 $\mathcal{C}_{cf}$ 中弱等价. 由引理 4.12(3), $\overline{RQf}$ 是 $\pi\mathcal{C}_{cf}$ 中同构. 由定义, $\overline{RQf}$ 就是 X 到 Y 在 $H\mathcal{C}$ 中的同构. 因此, 对任意 X， 由弱等价 $QX \xrightarrow{p_X} X$ 知在 $H\mathcal{C}$ 中有同构 $X \cong QX \in H\mathcal{C}_c$, 即嵌入函子 $H\mathcal{C}_c \hookrightarrow \mathrm{Ho}\mathcal{C}$ 稠密. 因此, 嵌入 $H\mathcal{C}_c \hookrightarrow \mathrm{Ho}\mathcal{C}$ 事实上是等价.

考虑函子 $\gamma'_c : \mathcal{C} \longrightarrow H\mathcal{C}_c$, $\gamma'_c X = QX$, $\gamma'_c f = \overline{RQf}$. 当 X 是余纤维对象, $QX = X$; 当 f 是 $\mathcal{C}_c$ 中态射, 则 $Qf = f$. 故 γ'_c 诱导出函子 (仍记为 γ'_c)

$$\gamma'_c : \mathcal{C}_c \longrightarrow H\mathcal{C}_c, \quad \gamma'_c X = X, \quad \gamma'_c f = \overline{Rf}.$$

如果 $f,g\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_c}(X,Y)$ 且 $f\overset{r}{\sim} g$, 则由引理 4.9(1)(iii) 知 $i_Yf\overset{r}{\sim} i_Yg: X\longrightarrow RY$. 再由引理 4.12(1)' 知 $Rf\overset{r}{\sim} Rg$. 从而在 $H\mathcal{C}_c$ 中 $\gamma_c' f=\gamma_c' g$. 因此 γ_c' 诱导出函子

$$\overline{\gamma_c'}:\pi\mathcal{C}_c\longrightarrow H\mathcal{C}_c,\quad X\mapsto X,\quad \overline{f}\mapsto \overline{Rf}.$$

注意：一般来说 $\overline{\gamma_c'}$ **不是满忠实的**.

断言： $H\mathcal{C}_c$ 就是 $\mathcal{C}_c$ 关于 $\mathcal{C}_c$ 中的弱等价的局部化, $\gamma_c':\mathcal{C}_c\longrightarrow H\mathcal{C}_c$, $\gamma_c'X=X$, $\gamma_c'f=\overline{Rf}$, 就是局部化函子.

事实上, 设 $f:X\longrightarrow Y$ 是 $\mathcal{C}_c$ 中弱等价. 由 $i_Y\circ f=Rf\circ i_X$ 知 Rf 是 $\mathcal{C}_c$ 中弱等价, 也就是 $\mathcal{C}_{cf}$ 中的弱等价. 由引理 4.12(3), $\overline{Rf}$ 是 $\pi\mathcal{C}_{cf}$ 中同构.由定义, $\gamma_c'f=\overline{Rf}$ 就是 X 到 Y 在 $H\mathcal{C}_c$ 中的同构.这就证明了 γ_c' 将弱等价变成 $H\mathcal{C}_c$ 中的同构. 设函子 $F:\mathcal{C}_c\longrightarrow\mathcal{B}$ 将 $\mathcal{C}_c$ 中弱等价变成 $\mathcal{B}$ 中的同构.定义函子 $\theta: H\mathcal{C}_c\longrightarrow \mathcal{B}$: $\theta X=FX$; 对于 $\alpha\in\mathrm{Hom}_{H\mathcal{C}_c}(X,Y)$, 根据 $H\mathcal{C}_c$ 的态射集的定义, $\alpha=\overline{f}$，其中 f 是 $\mathcal{C}_{cf}$ 中的态射 $RX\longrightarrow RY$. 令 $\theta\alpha$ 由下图给出:

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, dashed, "\theta\alpha"] \arrow[d, "Fi_X"', "\cong"] & FY \arrow[d, "Fi_Y"', "\cong"] \\
FRX \arrow[r, "Ff"] & FRY
\end{tikzcd}$$

即 $\theta\alpha=(Fi_Y)^{-1}\circ Ff\circ Fi_X$. 由引理 4.10 知 $\theta\alpha$ 与 f 的选取无关, 从而 θ 是函子. 下证 $\theta\gamma'=F$. 事实上，对于 $\mathcal{C}_c$ 中态射 $f:X\longrightarrow Y$, $\gamma_c'f=\overline{Rf}$. 由 $\theta(\overline{Rf})$ 的定义知

$$\begin{aligned}
\theta(\overline{Rf}) &= (Fi_Y)^{-1}\circ F(Rf)\circ Fi_X\\
&= (Fi_Y)^{-1}\circ Fi_Y\circ Ff\\
&= Ff.
\end{aligned}$$

参见交换图

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i_Y\circ f"] \arrow[d, "i_X"'] & RY \arrow[d] \\
RX \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "Rf"] & 0
\end{tikzcd}$$

这就证明了 **断言**.

至此我们已知: $H\mathcal{C}_c$ 就是 $\mathcal{C}_c$ 关于弱等价的局部化. 因此, 将 $H\mathcal{C}_c$ 就写成 $\mathrm{Ho}\mathcal{C}_c$, 局部化函子就变成 $\gamma_c:\mathcal{C}_c\longrightarrow \mathrm{Ho}\mathcal{C}_c$，它诱导出函子 (一般不是满忠实的)

$$\overline{\gamma_c}:\pi\mathcal{C}_c\longrightarrow \mathrm{Ho}\mathcal{C}_c,\quad X\mapsto X,\quad \overline{f}\mapsto\overline{Rf}.$$

第 5 步：交换图与伴随. 根据上面的论述我们还有下面 3 个函子:

$$\overline{\gamma}:\pi\mathcal{C}_{cf}\longrightarrow \mathrm{Ho}\mathcal{C},\quad X\mapsto X,\quad \overline{f}\mapsto\overline{f};$$

$$\pi\mathcal{C}_{cf}\hookrightarrow\pi\mathcal{C}_c,\quad X\mapsto X,\quad \overline{f}\mapsto\overline{f};$$

$$\mathrm{Ho}\mathcal{C}_c \longrightarrow \mathrm{Ho}\mathcal{C}, \quad X \mapsto X, \quad \overline{f} \mapsto \overline{f}.$$

注意到对于 $\mathcal{C}_{cf}$ 中的态射 f, 有 $Rf = f$. 由此得到交换图

$$\begin{tikzcd}
\pi\mathcal{C}_c \arrow[r, "\overline{\gamma_c}"] & \mathrm{Ho}\mathcal{C}_c \arrow[d, "\cong"] \\
\pi\mathcal{C}_{cf} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\overline{\gamma}", "\cong"'] & \mathrm{Ho}\mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

而且, 合成 $\mathrm{Ho}\mathcal{C}_c \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ho}\mathcal{C} \xrightarrow{(\overline{\gamma})^{-1}} \pi\mathcal{C}_{cf} \hookrightarrow \pi\mathcal{C}_c$ 是 $\overline{\gamma_c}$ 的右伴随, 即有自然双射

$$\mathrm{Hom}_{\pi\mathcal{C}_{cf}}(RX, RY) \cong \mathrm{Hom}_{\pi\mathcal{C}_c}(X, RY), \quad \forall\ X, Y \in \mathcal{C}_c.$$

这可由引理 4.12(1)'得到.

与第 4 步对偶地, 可以构造 $\mathcal{C}_f$ 关于弱等价的局部化 $H\mathcal{C}_f$: 其对象是 $\mathcal{C}$ 中纤维对象；态射集 $\mathrm{Hom}_{H\mathcal{C}_f}(X, Y)$ 是

$$\mathrm{Hom}_{\pi\mathcal{C}_{cf}}(QX, QY) = \pi(RQX, RQY).$$

它是 $\mathrm{Ho}\mathcal{C} = H\mathcal{C}$ 的满子范畴. 事实上，嵌入 $H\mathcal{C}_f \hookrightarrow \mathrm{Ho}\mathcal{C}$ 是等价. 而且, $H\mathcal{C}_f$ 就是 $\mathcal{C}_f$ 关于弱等价的局部化. 因此, 将 $H\mathcal{C}_f$ 就写成 $\mathrm{Ho}\mathcal{C}_f$, 局部化函子就是 $\gamma_f : \mathcal{C}_f \longrightarrow \mathrm{Ho}\mathcal{C}_f$， 它诱导出函子 (一般不是满忠实的)

$$\overline{\gamma_f} : \pi\mathcal{C}_f \longrightarrow \mathrm{Ho}\mathcal{C}_f, \quad X \mapsto X, \quad \overline{f} \mapsto \overline{Qf}.$$

由此得到交换图

$$\begin{tikzcd}
\pi\mathcal{C}_{cf} \arrow[d, hook] \arrow[r, "\overline{\gamma}", "\cong"'] & \mathrm{Ho}\mathcal{C} \\
\pi\mathcal{C}_f \arrow[r, "\overline{\gamma_f}"] & \mathrm{Ho}\mathcal{C}_f \arrow[u, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

并且, 合成 $\mathrm{Ho}\mathcal{C}_f \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ho}\mathcal{C} \xrightarrow{(\overline{\gamma})^{-1}} \pi\mathcal{C}_{cf} \hookrightarrow \pi\mathcal{C}_f$ 是 $\overline{\gamma_f}$ 的左伴随, 即有自然双射

$$\mathrm{Hom}_{\pi\mathcal{C}_{cf}}(QX, QY) \cong \mathrm{Hom}_{\pi\mathcal{C}_f}(QX, Y), \quad \forall\ X, Y \in \mathcal{C}_f.$$

这可由引理 4.12(1)看出. $\square$

§5 Abel 范畴上相容的闭模型结构与 Hovey 三元组

Abel 范畴上相容的闭模型结构已被 M. Hovey ([H2]) 描述; A. Beligiannis 和 I. Reiten [BR, Chapter VIII] 也得到类似的结果. 本节我们要介绍关于 Abel 范畴上相容的闭模型结构与 Hovey 三元组之间的一一对应.

§5.1 Abel 范畴的余挠对

定义 5.1 ([S]) 设 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴. 称 $\mathcal{A}$ 中的一对对象类 $(\mathcal{C},\mathcal{F})$ 为余挠对, 如果

$$\mathcal{C} = {}^{\perp_1}\mathcal{F}\ (= \{X \in \mathcal{A} \mid \operatorname{Ext}^1(X,\mathcal{F}) = 0\}), \qquad \mathcal{F} = \mathcal{C}^{\perp_1}\ (= \{Y \in \mathcal{A} \mid \operatorname{Ext}^1(\mathcal{C},Y) = 0\}).$$

定义 5.2 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, $\mathcal{C}$ 是对象类, $X \in \mathcal{A}$.

(1) 如果存在短正合列

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow C \xrightarrow{\pi} X \longrightarrow 0$$

其中 $C \in \mathcal{C}$, $F \in \mathcal{C}^{\perp_1}$, 则称 π 是 X 的特殊右 $\mathcal{C}$-逼近.

它具有右 $\mathcal{C}$-逼近的性质: 任意态射 $f : C' \to X$, 其中 $C' \in \mathcal{C}$, 均可通过 π 分解, 即存在 $g : C' \to C$ 使得 $f = \pi g$. 即，特殊右 $\mathcal{C}$-逼近是满态射且核属于 $\mathcal{C}^{\perp_1}$ 的右 $\mathcal{C}$-逼近.

(1') 如果存在短正合列

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\sigma} C \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

其中 $C \in \mathcal{C}$, $F \in {}^{\perp_1}\mathcal{C}$, 则称 σ 是 X 的特殊左 $\mathcal{C}$-逼近. 它具有左 $\mathcal{C}$-逼近的性质: 任意态射 $f : X \to C'$, 其中 $C \in \mathcal{C}'$, 均可通过 σ 分解, 即存在 $g : C' \to C$ 使得 $f = g\sigma$. 即，特殊左 $\mathcal{C}$-逼近是单态射且余核属于 ${}^{\perp_1}\mathcal{C}$ 的左 $\mathcal{C}$-逼近.

定义 5.3 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的余挠对 $(\mathcal{C},\mathcal{F})$ 称为完备的, 如果任意对象 X 都有特殊右 $\mathcal{C}$-逼近, 也都有特殊左 $\mathcal{F}$-逼近, 即 存在短正合列

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow C \longrightarrow X \longrightarrow 0, \quad 0 \longrightarrow X \longrightarrow F' \longrightarrow C' \longrightarrow 0,$$

其中 $C,\ C' \in \mathcal{C}$, $\quad F,\ F' \in \mathcal{F}$.

例 5.4 设 R 是环, $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{I}$ 分别是投射模和内射模的作成的类. 则 $(\mathcal{P},\ R\text{-Mod})$ 和 $(R\text{-Mod},\ \mathcal{I})$ 均是 R-Mod 的完备余挠对.

命题 5.5 ([EJ, Proposition 7.1.7]) 设 $(\mathcal{C},\mathcal{F})$ 是 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的余挠对. 设 $\mathcal{A}$ 有足够多投射对象且有足够多内射对象. 则余挠对的完备性定义中的两个条件是等价的. 即, 任意对象都有特殊右 $\mathcal{C}$-逼近当且仅当任意对象都有特殊左 $\mathcal{F}$-逼近.

证明 假设余挠对的完备性定义中的第一个条件满足. 要证第二个条件也满足. 对任意对象 $X \in \mathcal{A}$, 因为 $\mathcal{A}$ 有足够多内射对象, 故有正合列 $0 \longrightarrow X \longrightarrow I \longrightarrow L \longrightarrow 0$, 其中 I 是内射对象, 特别地, $I \in \mathcal{F}$. 由题设有正合列 $0 \longrightarrow F \longrightarrow C \longrightarrow L \longrightarrow 0$, 其中 $C \in \mathcal{C}$, $F \in \mathcal{F}$. 考虑拉回

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & F \arrow[r, equal] \arrow[d] & F \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & F' \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

则 $F' \in \mathcal{F}$. 于是第二行就给出所需的正合列. $\square$

§5.2 相容的闭模型结构

定义 5.6 ([H2]) Abel 范畴上的一个闭模型结构 $(\mathrm{Cofib}(\mathcal{A}), \mathrm{Fib}(\mathcal{A}), \mathrm{Weq}(\mathcal{A}))$ 称为 相容的 (compatible), 如果它具有如下性质：

(1) 每个余纤维都是单态射; 每个纤维都是满态射;

(2) $\mathrm{Fib}(\mathcal{A}) = \{$满态射 $f \mid \mathrm{Ker}\, f$ 是纤维对象$\}$;

(3) $\mathrm{Fib}(\mathcal{A}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{A}) = \{$满态射 $f \mid \mathrm{Ker}\, f$ 是平凡纤维对象$\}$.

注记 5.7 (1) 相容的闭模型结构在文献中常称为阿贝尔模型结构 (abelian model structure).

(2) 下述引理 5.8 表明相容的闭模型结构是自对偶的: 即， Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 上的闭模型结构 $(\mathrm{Cofib}(\mathcal{A}), \mathrm{Fib}(\mathcal{A}), \mathrm{Weq}(\mathcal{A}))$ 是相容的当且仅当它具有如下性质：

(1) 每个余纤维都是单态射; 每个纤维都是满态射;

(2') $\mathrm{Cofib}(\mathcal{A}) = \{$单态射 $f \mid \mathrm{Coker}\, f$ 是余纤维对象$\}$;

(3') $\mathrm{Cofib}(\mathcal{A}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{A}) = \{$单态射 $f \mid \mathrm{Coker}\, f$ 是平凡余纤维对象$\}$.

设 $(\mathrm{Cofib}(\mathcal{A}), \mathrm{Fib}(\mathcal{A}), \mathrm{Weq}(\mathcal{A}))$ 是 Abel 范畴$\mathcal{A}$ 上的相容的闭模型结构. 令:

$$\mathcal{C} = \{余纤维对象\} = \{X \in \mathcal{A} \mid 0 \longrightarrow X \text{ 是余纤维}\}$$
$$\mathcal{F} = \{纤维对象\} = \{X \in \mathcal{A} \mid X \longrightarrow 0 \text{ 是纤维}\}$$
$$\mathcal{W} = \{平凡对象\} = \{X \in \mathcal{A} \mid 0 \longrightarrow X \text{ 是弱等价}\} = \{X \in \mathcal{A} \mid X \longrightarrow 0 \text{ 是弱等价}\}.$$

引理 5.8 设 $(\mathrm{Cofib}(\mathcal{A}), \mathrm{Fib}(\mathcal{A}), \mathrm{Weq}(\mathcal{A}))$ 是 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 上的闭模型结构, 其中每个余纤维都是单态射, 每个纤维都是满态射. 则

(1) $\mathrm{Fib}(\mathcal{A}) = \{满态射\ f \mid \mathrm{Ker}\, f \text{ 是纤维对象}\}$ 当且仅当 $\mathrm{Cofib}(\mathcal{A}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{A}) = \{单态射\ f \mid \mathrm{Coker}\, f \text{ 是平凡余纤维对象}\}$.

(1′) $\mathrm{Fib}(\mathcal{A}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{A}) = \{满态射\ f \mid \mathrm{Ker}\, f \text{ 是平凡纤维对象}\}$ 当且仅当 $\mathrm{Cofib}(\mathcal{A}) = \{单态射\ f \mid \mathrm{Coker}\, f \text{ 是余纤维对象}\}$.

证明 我们仅证 (1) 的 “仅当” 部分; 类似地可证 (1′) 的 “ 仅当” 部分. 剩下的 (1) 和 (1′) 的 “当” 部分, 利用对偶性即得.

设 $\mathrm{Fib}(\mathcal{A}) = \{满态射\ f \mid \mathrm{Ker}\, f \longrightarrow 0 \text{ 是纤维}\}$. 我们要证 $\mathrm{Cofib}(\mathcal{A}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{A}) = \{单态射\ f \mid 0 \longrightarrow \mathrm{Coker}\, f \text{ 是平凡余纤维}\}$. 设 f 是平凡余纤维. 由题设知 f 是单态射. 设 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} \mathrm{Coker}\, f \longrightarrow 0$ 是相应的正合列. 则

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \arrow[d] \\ B \arrow[r, "g"] & \mathrm{Coker}\, f \end{tikzcd}$$

是推出方块. 因 f 是平凡余纤维, 故 $0 \longrightarrow \mathrm{Coker}\, f$ 也是平凡余纤维.

反之, 设 f 是单态射且 $0 \longrightarrow \mathrm{Coker}\, f$ 是平凡余纤维. 要证 f 是平凡余纤维. 因为闭模型结构的平凡余纤维恰是对任意纤维均有左提升性质的态射, 故只要证明: 对任意纤维 $p : X \longrightarrow Y$ 和任意交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "b"] \arrow[ur, dotted, "s"] & Y \end{tikzcd}$$

均存在 $s : B \longrightarrow X$ 使得上下两个三角均交换即可.

设 $0 \longrightarrow K \longrightarrow X \xrightarrow{p} Y \longrightarrow 0$ 和 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\pi} C = \mathrm{Coker}\, f \longrightarrow 0$ 是正合列. 得到

如下正合列交换图

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Hom}(B,K) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(B,X) \arrow[r] \arrow[d, "f^*"] & \mathrm{Hom}(B,Y) \arrow[d, "f^*"] \\
 & & \mathrm{Hom}(A,K) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(A,X) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(A,Y) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}(C,X) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(C,Y) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(C,K) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(C,X) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(C,Y)
\end{tikzcd}$$

我们断言 $\mathrm{Ext}^1(C,K)=0$. 事实上, 设有短正合列

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} L \xrightarrow{q} C \longrightarrow 0.$$

因为 p 是纤维，故由假设知 K 是纤维对象, 即 $K \longrightarrow 0$ 是纤维.从而, 由假设知 q 是纤维. 又由假设 $0 \longrightarrow C$ 是平凡余纤维. 因此, 由交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[d, "q"] \\
C \arrow[r, equal] \arrow[ur, dotted, "t"] & C
\end{tikzcd}$$

和提升性可知存在 t 使得 $qt=\mathrm{Id}_C$. 故上述短正合列可裂. 这就证明了断言.

注意到 $a\in \mathrm{Hom}(A,X)$, 经 p_* 变为 $pa=bf\in\mathrm{Hom}(A,Y)$, 进而变成 $\mathrm{Ext}^1(C,Y)$ 中的 0. 但 $\mathrm{Ext}^1(C,K)=0$, 故 a 变成 $\mathrm{Ext}^1(C,X)$ 中的 0. 从而存在 $s': B\longrightarrow X$ 使得 $s'f=a$. 因 $(ps'-b)f=pa-bf=0$, 故 $ps'-b$ 通过 π 分解, 即存在 $h: C\longrightarrow Y$ 使得 $ps'-b=h\pi$. 因为 $\mathrm{Hom}(C,X)\longrightarrow \mathrm{Hom}(C,Y)$ 是满射, 故存在 $h': C\longrightarrow X$ 使得 $h=ph'$. 令 $s=s'-h'\pi: B\longrightarrow X$. 则 $sf=s'f-h'\pi f=s'f=a$, $\quad ps=p(s'-h'\pi)=(h\pi+b)-ph'\pi=h\pi+b-h\pi=b$. 即上下两个三角交换. 这就完成了证明. $\square$

引理 5.9 设 $(\mathrm{Cofib}(\mathcal{A}),\mathrm{Fib}(\mathcal{A}),\mathrm{Weq}(\mathcal{A}))$ 是 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 上的一个相容的闭模型结构. 则 $(\mathcal{C},\mathcal{F}\cap\mathcal{W})$ 和 $(\mathcal{C}\cap\mathcal{W},\mathcal{F})$ 均是完备的余挠对.

证明 只证 $(\mathcal{C}\cap\mathcal{W},\mathcal{F})$ 是完备的余挠对. 类似可证 $(\mathcal{C},\mathcal{F}\cap\mathcal{W})$ 是完备的余挠对.

首先证明 $\mathrm{Ext}^1(C,K)=0, \forall\, C\in\mathcal{C}\cap\mathcal{W}, K\in\mathcal{F}$. 设有短正合列

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0.$$

因为 K 是纤维对象, 由定义5.6中第2条知 p 是纤维. 因为 C 是平凡余纤维对象, 故 $0\longrightarrow C$ 是平凡余纤维. 由交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "p"] \\
C \arrow[r, equal] \arrow[ur, dotted, "\pi"] & C
\end{tikzcd}$$

和提升性可知存在 π 使得 $p\pi = \mathrm{Id}_C$. 故上述短正合列可裂, 从而 $\mathrm{Ext}^1(C, K) = 0$.

设对$\mathcal{C} \cap \mathcal{W}$ 中的任一对象 C 均有 $\mathrm{Ext}^1(C, L) = 0$. 要证 $L \in \mathcal{F}$, 即 $L \longrightarrow 0$ 是纤维. 因为闭模型结构的纤维恰是那些对所有平凡余纤维有右提升性质的态射, 故只要证：对于任意平凡余纤维 i 和任意交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "i"] & L \arrow[d] \\ B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

均有提升性. 事实上, 由于这个闭模型结构是相容的, 故 i 是单态射, 从而有正合列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C' \longrightarrow 0.$$

由引理5.8知 $C' \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$. 于是 $\mathrm{Ext}^1(C', L) = 0$. 将 $\mathrm{Hom}(-, L)$ 作用到上述短正合列得到满射 $\mathrm{Hom}(B, L) \xrightarrow{i_*} \mathrm{Hom}(A, L)$. 于是, 存在 $s : B \longrightarrow L$ 使得 $a = si$, 从而得到所需的提升性. 至此我们已经证明了 $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W})^{\perp_1} = \mathcal{F}$.

设对$\mathcal{F}$ 中的任一对象 F 均有 $\mathrm{Ext}^1(A, F) = 0$. 要证 $A \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$, 即 $0 \longrightarrow A$ 是平凡余纤维. 因为平凡余纤维恰是那些对所有纤维有左提升性质的态射, 故只需证明：对于任意纤维 p 和任意交换图

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[r, "b"] & Y \end{tikzcd}$$

均有提升性. 由于在相容的闭模型结构中纤维 p 是满态射且其核是纤维对象, 从而有短正合列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\, p \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} Y \longrightarrow 0$$

且 $\mathrm{Ext}^1(A, \mathrm{Ker}\, p) = 0$. 将 $\mathrm{Hom}(A, -)$ 作用到上述短正合列得到满射 $\mathrm{Hom}(A, X) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Hom}(A, Y)$, 即存在 $s : A \longrightarrow X$ 使得 $b = ps$. 这就证明了提升性. 至此已证明 ${}^{\perp_1}\mathcal{F} = \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$, 从而 $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$ 是余挠对.

最后证明该余挠对是完备的. 设 X 是任一对象, 将$0 \longrightarrow X$分解，得到纤维 $p : C \longrightarrow X$, 其中 C 是平凡余纤维对象, 即 $C \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$. 从而得到短正合列 $0 \longrightarrow K \longrightarrow C \xrightarrow{p} X \longrightarrow 0$. 由相容性的定义知 $K \in \mathcal{F}$.

再将 $X \longrightarrow 0$ 分解，得到平凡余纤维 $i : X \longrightarrow F$, 其中 $F \in \mathcal{F}$ 是纤维对象. 故有正合列 $0 \longrightarrow X \xrightarrow{i} F \longrightarrow C' \longrightarrow 0$. 再由引理5.8 知 $C' \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$, 从而完备性得证. $\square$

§5.3　相容的闭模型结构产生 Hovey 三元组

定义 5.10　Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的三个对象类 $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ 称为 Hovey 三元组, 如果满足下面两条性质：

(1) 对象类 $\mathcal{Z}$ 是 $\mathcal{A}$ 的厚子范畴 (thick subcategory), 即, $\mathcal{Z}$ 对直和项封闭, 且对于任意短正合列 $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$, 若有两项在 $\mathcal{Z}$ 中, 则第三项也在 $\mathcal{Z}$ 中.

(2) $(\mathcal{X}, \mathcal{Y} \cap \mathcal{Z})$ 和 $(\mathcal{X} \cap \mathcal{Z}, \mathcal{Y})$ 是完备的余挠对.

例 5.11 (1) 设 $\mathcal{A}$ 是有足够多投射对象的 Abel 范畴, $\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{A}$ 中投射对象作成的类. 则 $(\mathcal{P}, \mathcal{A}, \mathcal{A})$ 是 Hovey 三元组.

(2) 设 $\mathcal{A}$ 是有足够多投射内象的 Abel 范畴, $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{A}$ 中内射对象作成的类. 则 $(\mathcal{A}, \mathcal{I}, \mathcal{A})$ 是 Hovey 三元组.

定理 5.12 ([H2], [BR]) 设 $(\mathrm{Cofib}(\mathcal{A}), \mathrm{Fib}(\mathcal{A}), \mathrm{Weq}(\mathcal{A}))$ 是 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 上的一个相容的闭模型结构. 则余纤维对象类 $\mathcal{C}$, 纤维对象类 $\mathcal{F}$ 和平凡对象类 $\mathcal{W}$ 作成一个Hovey 三元组 $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W})$, 即, $\mathcal{W}$ 是厚子范畴, 且 $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ 和 $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W}, \mathcal{F})$ 是完备的余挠对.

证明 由引理 5.9 只要证明 $\mathcal{W}$ 是厚子范畴.

设 $W \in \mathcal{W}$ 且 W' 是 W 的直和项. 则有交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
W' \arrow[r, "\binom{1}{0}"] & W = W' \oplus W'' \arrow[r, "(0,1)"] & W'
\end{tikzcd}$$

其中 $0 \longrightarrow W$是弱等价. 于是 $0 \longrightarrow W'$ 是 $0 \longrightarrow W$ 的一个缩回. 由弱等价对于缩回封闭知 $0 \longrightarrow W'$ 也是弱等价, 即 $W' \in \mathcal{W}$.

设 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ 是正合列, 且 $A \in \mathcal{W}$. 由分解性 $g = pi$, 其中 i 是平凡余纤维, p 是纤维. 于是有交换图:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & B' \arrow[r, "p"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

因为 $\mathcal{A}$ 上的闭模型结构是相容的, 故 $K \in \mathcal{F}$. 由引理 5.8 知 $\mathrm{Coker}\, i \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$. 因 $\mathrm{Coker}\, j \cong \mathrm{Coker}\, i$, 故 $\mathrm{Coker}\, j \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$. 注意到 j 单, 故由引理 5.8 知 j 也是平凡余纤维. 因为 $0 \longrightarrow K$ 是弱等价 $0 \longrightarrow A$ 和弱等价 j 的合成, 故 $0 \longrightarrow K$ 是弱等价，从而 $K \in \mathcal{W}$, $K \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$. 再由相容性的定义知 p 是平凡纤维, 故 $g = pi$ 也是弱等价. 因 $0 \longrightarrow C$ 是 $0 \longrightarrow B$ 和 g 的合成, 故由弱等价的“二推三”性质知 $0 \longrightarrow C$ 是弱等价当且仅当 $0 \longrightarrow B$ 是弱等价, 即 $C \in \mathcal{W}$ 当且仅当 $B \in \mathcal{W}$.

类似地, 若 $B, C \in \mathcal{W}$, 则 $0 \longrightarrow B$ 和 $0 \longrightarrow C$ 均是弱等价. 由于 $0 \longrightarrow C$ 是 $0 \longrightarrow B$ 和 g 的合成, 故由弱等价的“二推三”性质知 g 也是弱等价. 再由 $g = pi$ 及 i 是弱等价知 p 是平凡纤维 (记号同上), 从而由相容性的定义知 $K \in \mathcal{W}$, 即 $0 \longrightarrow K$ 是弱等价. 因为 $\mathrm{Coker}\, j \cong \mathrm{Coker}\, i \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$, 故由引理 5.8知 j 是平凡余纤维. 因 $0 \longrightarrow K$ 是 $0 \longrightarrow A$ 和 j 的合成, 从而由弱等价的“二推三”性质知 $0 \longrightarrow A$ 是弱等价, 即 $A \in \mathcal{W}$. $\square$

§5.4 Hovey 三元组诱导的相容的闭模型结构

下述定理是定理 5.12 的逆.

定理 5.13 ([H2], [BR]) 设 $(\mathcal{C},\ \mathcal{F},\ \mathcal{W})$ 是 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中的 Hovey 三元组. 则在 $\mathcal{A}$ 上存在唯一的相容的闭模型结构 $(\mathrm{Cofib}(\mathcal{A}),\ \mathrm{Fib}(\mathcal{A}),\ \mathrm{Weq}(\mathcal{A}))$, 使得 $\mathcal{C}$ 就是余纤维对象类, $\mathcal{F}$ 就是纤维对象类, $\mathcal{W}$ 就是平凡对象类, 其中

- $\mathrm{Cofib}(\mathcal{A}) = \{f$ 是单态射 $\mid \mathrm{Coker}\, f \in \mathcal{C}\}$;
- $\mathrm{Fib}(\mathcal{A}) = \{f$ 是满态射 $\mid \mathrm{Ker}\, f \in \mathcal{F}\}$;
- 称一个态射 f 是平凡余纤维, 如果 f 是单态射且 $\mathrm{Coker}\, f \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$.
称一个态射 f 是平凡纤维, 如果 f 是满态射且 $\mathrm{Ker}\, f \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$.
$\mathrm{Weq}(\mathcal{A}) = \{f = pi \mid i$ 是平凡余纤维且 p 是平凡纤维$\}$, 其中的态射称为弱等价.

注记 5.14 这里的名词"平凡余纤维" 暂时有点迷惑，但后面就会清楚：在闭模型范畴的定义中,平凡余纤维恰指既是余纤维又是弱等价的态射. 这里的"平凡余纤维" f 是余纤维且是弱等价: $f = \mathrm{Id} \cdot f$, 由定义知恒等是平凡余纤维 (因为由余挠对的定义 $0 \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$), 故 f 是弱等价；而既是余纤维又是弱等价的态射是这里的"平凡余纤维"，要到后面才能证明. 因此, 使用这里的名词"平凡余纤维"是可以且方便的.

对这里的名词“平凡纤维”有同样说明：它是纤维且是弱等价；反之, 纤维且是弱等价是这里的“平凡纤维”后面会证明.

§5.5 定理 5.13 的证明: 提升性

引理 5.15 (提升性) 设有交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "b"] \arrow[ur, dotted, "s'"] & Y \end{tikzcd}$$

其中 $i \in \mathrm{Cofib}(\mathcal{A}),\ \ p \in \mathrm{Fib}(\mathcal{A})$.

(1) 若 i 是弱等价, 则存在 $s' : B \longrightarrow X$ 使得上图中上下两个三角交换.

(1′) 若 p 是弱等价, 则存在 $s' : B \longrightarrow X$ 使得上图中上下两个三角交换.

证明 考虑短正合列

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{p} Y \longrightarrow 0, \quad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C \longrightarrow 0.$$

由余纤维和纤维的定义知 $C \in \mathcal{C}$, $K \in \mathcal{F}$.

(1) 设 i 是弱等价. 首先说明 $\mathrm{Ext}^1(C,K)=0$. 因 i 是弱等价, 故有分解:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "i'"'] & & B \\
& B' \arrow[ur, "p'"'] &
\end{tikzcd}$$

其中 i' 是平凡余纤维, p' 是平凡纤维. 则由交换图

$$\begin{tikzcd}
& & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
& & K' \arrow[r, equal] \arrow[d] & K' \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i'"] \arrow[d, equal] & B' \arrow[r] \arrow[d, "p'"] & C' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

由 i' 是平凡余纤维知 $C' \in \mathcal{C}\cap\mathcal{W}$. 由 p' 是平凡纤维知 $K' \in \mathcal{F}\cap\mathcal{W}$. 再由 $\mathcal{W}$ 是厚子范畴知 $C\in\mathcal{W}$, 从而 $C\in\mathcal{C}\cap\mathcal{W}$. 又 $(\mathcal{C}\cap\mathcal{W},\mathcal{F})$ 是余挠对, 故 $\mathrm{Ext}^1(C,K)=0$.

考虑正合列的交换图

$$\begin{tikzcd}
& & (C,X) \arrow[r] \arrow[d] & (C,Y) \arrow[r] \arrow[d, "\pi^*"] & \mathrm{Ext}^1(C,K)=0 \\
& (B,K) \arrow[r] \arrow[d] & (B,X) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "i^*"] & (B,Y) \arrow[d, "i^*"] & \\
& (A,K) \arrow[r] \arrow[d] & (A,X) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "\delta"] & (A,Y) \arrow[d] & \\
(C,Y) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(C,K) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ext}^1(C,X) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1(C,Y) & \\
& 0 & & &
\end{tikzcd}$$

态射 $a\in\mathrm{Hom}(A,X)$ 变成 $pa=bi$, 从而变成 $\mathrm{Ext}^1(C,Y)$ 中的零元. 因 $\mathrm{Ext}^1(C,K)=0$，故 a 变成 $\mathrm{Ext}^1(C,X)$ 中的零元. 于是存在 $s:B\longrightarrow X$ 满足 $a=si$.

因为 $(ps-b)i=0$, 故存在 $h:C\longrightarrow Y$ 满足 $ps-b=h\pi$. 于是存在 $h':C\longrightarrow X$ 满足 $h=ph'$. 从而 $ps-b=ph'\pi$, 即 $b=p(s-h'\pi)$. 令 $s'=s-h'\pi:B\longrightarrow X$, 则 $b=ps'$, $s'i=(s-h'\pi)i=si=a$. 即得提升性.

(1′) 设 p 是弱等价. 则有分解:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "i'"'] & & Y \\
& X' \arrow[ur, "p'"'] &
\end{tikzcd}$$

其中 i' 是平凡余纤维, p' 是平凡纤维. 考虑交换图:

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "i'"] & Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[r, "p'"] \arrow[d] & Y \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, equal] \arrow[d] & C' \arrow[d] & & \\
& 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

因 i' 是平凡余纤维，故 $C' \in \mathcal{C} \cap \mathcal{W}$. 因 p' 是平凡纤维，故 $K' \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$. 再由 $\mathcal{W}$ 是厚子范畴知 $K \in \mathcal{W}$，从而 $K \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$. 又 $(\mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$ 是余挠对, 故 $\mathrm{Ext}^1(C, K) = 0$. 以下重复 (1) 中的证明即得提升性. □

§5.6 定理 5.13 的证明：分解性

在证明分解性之前，先给出如下结论.

引理 5.16 类 $\mathrm{Cofib}(\mathcal{A})$, 平凡余纤维, 类 $\mathrm{Fib}(\mathcal{A})$, 平凡纤维, 均对合成封闭.

证明 设 $p: X \longrightarrow Y$, $q: Y \longrightarrow Y'$ 均为纤维. 考虑交换图:

$$\begin{tikzcd}
& & & 0 \arrow[d] & \\
& 0 \arrow[d] & & L \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r, "p"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r] \arrow[d, "q"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r, "qp"] & Y' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& U \arrow[d] & & 0 & \\
& 0 & & &
\end{tikzcd}$$

由纤维的定义知 $K\in\mathcal{F}$, $L\in\mathcal{F}$. 由蛇引理知 $U\cong L\in\mathcal{F}$, 故 $K'\in\mathcal{F}$, 从而 qp 也是纤维.

进一步, 若 p, q 还是平凡纤维, 则 $K\in\mathcal{F}\cap\mathcal{W}$, $L\in\mathcal{F}\cap\mathcal{W}$, 故 $U\cong L\in\mathcal{F}\cap\mathcal{W}$, 从而 $K'\in\mathcal{F}\cap\mathcal{W}$, 即 qp 也是平凡纤维.

类似地可证类 $\mathrm{Cofib}(\mathcal{A})$ 和平凡余纤维对合成封闭. □

引理 5.17 (分解性) 对于任一态射f有:

(1) $f=pi$, 其中 i 是平凡余纤维, p 是纤维.

(2) $f=qj$, 其中 j 是余纤维, q 是平凡纤维.

证明 (1) 首先，假设 f 是单态射. 考虑短正合列 $0\longrightarrow A\xrightarrow{f}B\longrightarrow C\longrightarrow 0$. 由完备挠对 $(\mathcal{C}\cap\mathcal{W},\mathcal{F})$ 的定义, 可选取满态射 $QC\xrightarrow{\pi}C$, 其中 $QC\in\mathcal{C}\cap\mathcal{W}$, $\operatorname{Ker}\pi=K\in\mathcal{F}$. 考虑如下由拉回得到的交换图

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & K \arrow[r, equal] \arrow[d] & K \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & B' \arrow[r] \arrow[d, "p"] & QC \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

于是 $f=pi$, 其中 i 是平凡余纤维, p 是纤维.

再假设 f 是满态射. 考虑短正合列 $0\longrightarrow K\longrightarrow A\xrightarrow{f}B\longrightarrow 0$. 由完备挠对 $(\mathcal{C}\cap\mathcal{W},\mathcal{F})$ 的定义, 可取单态射 $K\xrightarrow{\sigma}RK$, 其中 $RK\in\mathcal{F}$, $\operatorname{Coker}\sigma=C\in\mathcal{C}\cap\mathcal{W}$. 考虑如下由推出得到的交换图

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & RK \arrow[r] \arrow[d] & A' \arrow[r, "p"] \arrow[d] & B \arrow[r] & 0 \\
 & C \arrow[r, equal] \arrow[d] & C \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

于是 $f = pi$, 其中 i 是平凡余纤维, p 是纤维.

现在，设 $f : A \longrightarrow B$ 是任一态射. 则 $f = (f,1)\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) : A \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)} A \oplus B \xrightarrow{(f,1)} B$. 设 $(f,1) = p'i'$, 其中 i' 是平凡余纤维, p' 是纤维. 再设 $i'\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) = p''i$, 其中 i 是平凡余纤维, p' 是纤维. 则

$$f = (f,1)\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) = p'i'\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) = (p'p'')i$$

其中 i 是平凡余纤维, $p'p''$ 是纤维 (参见引理 5.16).

$(1')$ 的证明类似. □

§5.7 定理 5.13 的证明: 平凡(余)纤维恰是(余)纤维且弱等价

事实 5.18 (1) 设 $h = gf$, 其中 h 和 f 是单态射, g 是满态射. 则有正合列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} g \longrightarrow \operatorname{Coker} f \longrightarrow \operatorname{Coker} h \longrightarrow 0.$$

$(1')$ 设 $h' = g'f'$, 其中 h' 和 g' 是满态射, f' 是单态射. 则有正合列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} h' \longrightarrow \operatorname{Ker} g' \longrightarrow \operatorname{Coker} f' \longrightarrow 0.$$

证明 只证 $(1')$. 对正合列的交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} h' \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "f'"'] & \bullet \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} g' \arrow[r] & \bullet \arrow[r, "g'"] & \bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

使用蛇引理即得. □

事实 5.19 (1) 设 i 是单态射. 则 i 是弱等价当且仅当 $\operatorname{Coker} i \in \mathcal{W}$.

特别地, 态射是平凡余纤维当且仅当它是余纤维且是弱等价.

$(1')$ 设 p 是满态射. 则 p 是弱等价当且仅当 $\operatorname{Ker} p \in \mathcal{W}$.

特别地, 态射是平凡纤维当且仅当它是纤维且是弱等价.

证明 只证 $(1')$. 设满态射 p 有如下分解 $p = qi$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "i"'] & & Y \\
& Z \arrow[ur, "q"'] &
\end{tikzcd}$$

其中 i 是余纤维, q 是平凡纤维. 由事实 5.18$(1')$有正合列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} p \longrightarrow \operatorname{Ker} q \longrightarrow \operatorname{Coker} i \longrightarrow 0.$$

因为 $\operatorname{Ker} q \in \mathcal{W}$, 故 $\operatorname{Ker} p \in \mathcal{W}$ 当且仅当 $\operatorname{Coker} i \in \mathcal{W}$, 当且仅当 i 是平凡余纤维, 当且仅当 p 是弱等价. □

§5.8　定理 5.13 的证明：弱等价的“二推三”性质

引理 5.20　*弱等价对合成封闭.*

证明　设 f 和 g 是可合成的两个弱等价. 要证 gf 也是弱等价. 由弱等价的定义可设 $f = pa$, $g = bi$, 其中 a 和 i 是平凡余纤维, p 和 b 是平凡纤维. 参见下图

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "a"'] & & Y \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "i"] & & Z' \\
& X \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "j"] & & Z \arrow[ur, "b"'] & \\
& & W \arrow[ur, "q"] & &
\end{tikzcd}$$

根据引理5.16 只要证：若 $p : X \longrightarrow Y$ 是平凡纤维, $i : Y \longrightarrow Z$ 是平凡余纤维, 则 ip 是弱等价 (事实上, 此时 $ip = qj$, 其中 j 是平凡余纤维, q 是平凡纤维. 而 $gf = (bq)(ja)$. 由引理5.16知 ja 是平凡余纤维, bq 是平凡纤维. 由弱等价的定义即知 gf 是弱等价).

由分解性引理可设 ip 有分解 $ip = qj$, 其中 j 是余纤维, q 是平凡纤维. 则有如下正合列的交换图

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} p \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker} q \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker} r \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "p"'] & W \arrow[r] \arrow[d, "q"'] & \operatorname{Coker} j \arrow[r] \arrow[d, "r"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "i"] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Coker} i \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

由 p 和 q 是平凡纤维知 $\operatorname{Ker} p \in \mathcal{W}$ 且 $\operatorname{Ker} q \in \mathcal{W}$. 故由 $\mathcal{W}$ 的性质知 $\operatorname{Ker} r \in \mathcal{W}$. 又由 i 是平凡余纤维知 $\operatorname{Coker} i \in \mathcal{W}$. 再由 $\mathcal{W}$ 的扩张闭性质知 $\operatorname{Coker} j \in \mathcal{W}$. 从而 j 是平凡余纤维. 故 ip 是弱等价. □

为证明弱等价的 “二推三”性质的剩余部分, 再说明一些事实.

事实 5.21 (1)　*设 $fi = j$, 其中 i 和 j 是平凡余纤维. 则 f 是弱等价.*

(1′)　*设 $qf = p$, 其中 p 和 q 是平凡纤维. 则 f 是弱等价.*

证明　只证 (1′). 先设 f 是余纤维. 由事实 5.18(1′), 有正合列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} p \longrightarrow \operatorname{Ker} q \longrightarrow \operatorname{Coker} f \longrightarrow 0,$$

其中 $\operatorname{Ker} p \in \mathcal{W}$, $\operatorname{Ker} q \in \mathcal{W}$. 因此 $\operatorname{Coker} f \in \mathcal{W}$. 从而 f 是平凡余纤维. 故 f 是弱等价.

一般地, 设 f 有分解 $f = hi$, 其中 i 是余纤维, h 是平凡纤维. 则 $(qh)i = p$, 其中 qh 是平凡纤维 (引理 5.16). 由上一段已证事实知 i 是弱等价. 再由弱等价的合成是是弱等价知 f 是弱等价.

□

事实 5.22 (1) 设 $pi = j$, 其中 p 是平凡纤维, j 是平凡余纤维. 则 i 是弱等价.

$(1')$ 设 $qj = p$, 其中 j 是平凡余纤维, p 是平凡纤维. 则 q 是弱等价.

证明 只证 $(1')$. 因 p 是是满态射，故 q 是满态射. 由事实 5.18(1'), 有短正合列

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} p \longrightarrow \operatorname{Ker} q \longrightarrow \operatorname{Coker} j \longrightarrow 0,$$

其中 $\operatorname{Ker} p \in \mathcal{W}$, $\operatorname{Coker} j \in \mathcal{W}$. 从而 $\operatorname{Ker} q \in \mathcal{W}$. 又 q 是满态射, 故由事实 $5.19(1')$ 知 q 是弱等价. □

事实 5.23 (1) 设 $jf = i$, 其中 i, j 是平凡余纤维. 则 f 是弱等价.

$(1')$ 设 $fq = p$, 其中 q 和 p 是平凡纤维. 则 f 是弱等价.

证明 只证 $(1')$. 对正合列的交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} q \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & \bullet \arrow[r, "q"] \arrow[d, equal] & \bullet \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} p \arrow[r] & \bullet \arrow[r, "p"] & \bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

使用蛇引理知 $\operatorname{Ker} f \cong \operatorname{Coker} \alpha \in \mathcal{W}$. 又 f 是满态射, 由事实 $5.19(1')$ 知 f 是弱等价. □

下面证明弱等价的 “二推三” 性质.

命题 5.24 设有态射 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$. 若 f, g, gf 中有两个是弱等价, 则第三个也是.

证明 因为已证弱等价对合成封闭, 并由对偶性, 只要证明: 若 gf 是弱等价且 f 是弱等价, 则 g 是弱等价.

将 g 分解成一个平凡余纤维与一个纤维的合成, 因为平凡余纤维是弱等价, 且弱等价的合成是弱等价, 因此不妨设 g 是纤维.

设 $f = pi$, 其中 i 是平凡余纤维, p 是平凡纤维. 设 $gp = qj$, 其中 j 是平凡余纤维, q 是纤维. 即有如下交换图

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & Y \arrow[rr, "g"] & & Z \\
& V \arrow[ur, "p"] \arrow[rr, "j"] & & Z' \arrow[ur, "q"'] &
\end{tikzcd}$$

因为 gf 是弱等价, 因此 gf 有分解 $gf = rk$, 其中 k 是平凡余纤维, r 是平凡纤维. 即有如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & V \arrow[r, "j"] \arrow[d, "p"'] & Z' \arrow[d, "q"'] \\
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "k"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \\
& Z'' \arrow[ur, "r"] &
\end{tikzcd}$$

考虑交换方块

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "ji"] \arrow[d, "k"'] & Z' \arrow[d, "q"] \\
Z'' \arrow[r, "r"] \arrow[ur, dotted, "\alpha"] & Z
\end{tikzcd}$$

由提升性得到态射 α 使得 $\alpha k = ji$, $q\alpha = r$. 因为 ji 是平凡余纤维, k 是平凡余纤维, 从而由事实 5.21(1) 知 α 是弱等价. 设 α 有分解 $\alpha = sl$, 其中 l 是平凡余纤维, s 是平凡纤维. 由 $r = q\alpha = (qs)l$ 是平凡纤维, l 是平凡余纤维, 由事实 5.22(1′) 知 qs 是弱等价. 又 qs 是纤维，故 qs 是平凡纤维. 由事实 5.23(1′) 知 q 是弱等价, 从而 q 是平凡纤维. 因此 $gp = qj$ 是弱等价. 又 gp 是纤维, 从而 gp 是平凡纤维. 由事实 5.23(1′)知 g 是弱等价. □

§5.9 定理 5.13 的证明: 公理 (CM2)

先说明 (平凡)(余)纤维对缩回封闭.

引理 5.25 设有交换图:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "f"] & X' \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "\varphi_2"] & Y' \arrow[r, "\psi_2"] & Y
\end{tikzcd}$$

满足 $\psi_1\varphi_1 = \mathrm{Id}_X$, $\psi_2\varphi_2 = \mathrm{Id}_Y$. 则

(1) 若 g 是余纤维 (平凡余纤维), 则 f 也是.

(1′) 若 g 是纤维 (平凡纤维), 则 f 也是.

证明 只证 (1), (1′) 的证明类似可得. 设 g 是余纤维, 并考虑如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
X \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "f"] & X' \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\pi"] & Y' \arrow[r, "\psi_2"] \arrow[d] & Y \arrow[d, "\pi"] \\
C \arrow[r, "s"] \arrow[d] & C' \arrow[r, "t"] \arrow[d] & C \arrow[d] \\
0 & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

由 $g\varphi_1 = \varphi_2 f$ 单知 f 单. 故取余核即得上述交换图. 再由 $ts\pi = \pi$ 及 π 满知 $ts = \mathrm{Id}_C$, 故 C 是 C' 的直和项, 从而 $C \in \mathcal{C}$, 于是 f 也是余纤维.

若 g 还是平凡的, 则 $C' \in \mathcal{W}$, 从而 $C \in \mathcal{W}$, 即 f 也是平凡余纤维. □

引理 5.26 *弱等价对缩回封闭.*

证明 希望利用引理 2.7(1). 只要逐一检验引理 2.7(1)的各项条件均满足即可. 只剩下验证平凡纤维对拉回封闭. 为此, 考虑平凡纤维 p 和任意态射 ψ 的拉回方块

$$\begin{tikzcd}
Z' \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "p'"'] & Z \arrow[d, "p"] \\
Y' \arrow[r, "\psi"] & Y
\end{tikzcd}$$

则 $\operatorname{Ker} p' \cong \operatorname{Ker} p \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$. 因 p 是满态射, 由拉回的性质知 p' 也是满态射. 从而由这里的平凡纤维的定义知 p' 也是平凡纤维. □

定理 5.13 的证明 由提升性 (引理 5.15)、分解性 (引理 5.17)、弱等价的“二推三”性质 (命题 5.24)、和三个态射类对缩回封闭 (引理 5.25和引理 5.26) 即知 $(\mathrm{Cofib}(\mathcal{A}), \mathrm{Fib}(\mathcal{A}), \mathrm{W}(\mathcal{A}))$ 是$\mathcal{A}$ 上的闭模型结构.

由这个闭模型结构的构造即知: $\mathcal{C}$ 就是余纤维对象类, $\mathcal{F}$ 就是纤维对象类, $\mathcal{W}$ 就是平凡对象类; 由此即知这个闭模型结构是相容的. 进一步, 这个闭模型结构是 $\mathcal{A}$ 上的使得 $\mathcal{C}$ 是余纤维对象类, $\mathcal{F}$ 是纤维对象类, $\mathcal{W}$ 是平凡对象类的唯一的相容的闭模型结构: 相容性的定义即表明相容的闭模型结构由其余纤维对象类, 纤维对象类和平凡对象类唯一确定. □

§5.10 相容的闭模型结构与 Hovey 三元组

将定理 5.12 和定理 5.13 合并即得

定理 5.27 ([H2, Theorem 2.2], [BR, Theorem 3.6, 5.3]) Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 上的相容的闭模型结构与 $\mathcal{A}$ 的 Hovey 三元组之间有一一对应:

$$(\mathrm{Cofib}(\mathcal{A}),\ \mathrm{Fib}(\mathcal{A}),\ \mathrm{Weq}(\mathcal{A})) \mapsto (\text{余纤维对象类},\ \text{纤维对象类},\ \text{平凡对象类})$$

其逆对应为

$$\text{Hovey 三元组 } (\mathcal{C},\ \mathcal{F}, \mathcal{W}) \mapsto (\mathrm{Cofib}(\mathcal{A}),\ \mathrm{Fib}(\mathcal{A}),\ \mathrm{Weq}(\mathcal{A}))$$

其中 $\mathrm{Cofib}(\mathcal{A}) = \{\text{余核属于 } \mathcal{C} \text{ 的单态射}\}$, $\mathrm{Fib}(\mathcal{A}) = \{\text{核属于 } \mathcal{F} \text{ 的满态射}\}$,

$$\mathrm{Weq}(\mathcal{A}) = \{pi \mid i \text{ 是余核属于 } \mathcal{C}\cap\mathcal{W} \text{ 的单态射}, p \text{ 是核属于 } \mathcal{F}\cap\mathcal{W} \text{ 的满态射}\}.$$

注记 5.28 上述对应也被发展到, 例如正合范畴上 ([G2]), 三角范畴上 ([Y]).

§5.11 在 Gorenstrin 环上的应用

首先回顾如下定理 (可参见 [Z, 定理 7.3.8]).

定理 5.29 (E. E. Enochs, O. M. G. Jenda [EJ, Theorem 11.5.1]) 设 $\mathcal{A}$ 是有足够多投射对象的 Abel 范畴, $\mathrm{Gpd}\, M = n < \infty$. 则 M 有一个满的右 $\mathcal{GP}(\mathcal{A})$ 逼近 $\phi: G \longrightarrow M$, 这里 $\mathrm{pd}\,\mathrm{Ker}\,\phi = n-1$ (若 $n=0$, 则 $\mathrm{Ker}\,\phi = 0$).

特别地, Gorenstein 投射维数为 n 的对象有一个长度为 n 的真 Gorenstein 投射分解.

设 R 是 Gorenstein 环, 即 $\mathrm{inj.dim}_R R < \infty$ 且 $\mathrm{inj.dim} R_R < \infty$. 最常见的Gorenstein 环莫过于整数环 $\mathbb{Z}$: $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$. 但没有有限生成的内射 $\mathbb{Z}$-模. Gorenstein 环的一个基本性质: 模 M 有有限的投射维数当且仅当 M 有有限的内射维数.

令 $\mathcal{C} = \mathrm{GP}(R)$ 是 Gorenstein 投射模作成的类, $\mathcal{F} = R\text{-Mod}$, $\mathcal{W} = \mathrm{P}^{<\infty}$ 是有限投射维数的模作成的类, $\mathrm{P}(R)$ 表示投射模作成的类, $\mathrm{GI}(R)$ 是 Gorenstein 内射模作成的类, $\mathrm{I}(R)$ 表示内射模作成的类. 则 $\mathcal{C}\cap\mathcal{W} = \mathrm{GP}(R)\cap \mathrm{P}^{<\infty} = \mathrm{P}(R)$, $\mathrm{P}^{<\infty}\cap \mathrm{GI}(R) = \mathrm{I}(R)$.

定理 5.30 ([BR], [H2], [EJ]) 设 R 是 Gorenstein 环. 则

(1) $(\mathcal{C},\ \mathcal{F}\cap\mathcal{W}) = (\mathrm{GP}(R),\ \mathrm{P}^{<\infty})$ 和 $(\mathcal{C}\cap\mathcal{W},\ \mathcal{F}) = (\mathrm{P}(R),\ R\text{-Mod})$ 是完备余挠对, 从而 $(\mathrm{GP}(R),\ R\text{-Mod},\ \mathrm{P}^{<\infty})$ 是 Hovey 三元组.

(1′) 对偶地, $(\mathrm{P}^{<\infty},\ \mathrm{GI}(R))$ 和 $(R\text{-Mod},\ \mathrm{I}(R))$ 是完备余挠对, 从而 $(R\text{-Mod},\ \mathrm{GI}(R),\ \mathrm{P}^{<\infty})$ 是 Hovey 三元组.

证明 显然 $(\mathrm{P}(R), R\text{-Mod})$ 是完备余挠对. 下证 $(\mathrm{GP}(R),\ \mathrm{P}^{<\infty})$ 是完备余挠对.

首先 $\mathrm{P}^{<\infty} \subseteq \mathrm{GP}(R)^{\perp_1}$, $\mathrm{GP}(R) \subseteq {}^{\perp_1}(\mathrm{P}^{<\infty})$. 设 $X \in {}^{\perp_1}(\mathrm{P}^{<\infty})$, 即 $\mathrm{Ext}^1_R(X, \mathrm{P}^{<\infty}) = 0$. 因为 R 是 Gorenstein 环, 故 X 的 Gorenstein 投射维数有限. 因此有正合列

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow G \longrightarrow X \longrightarrow 0,$$

其中 $G \in \mathrm{GP}(R)$, $K \in \mathrm{P}^{<\infty}$ (参见定理 5.29). 因此这个正合列可裂, $X \in \mathrm{GP}(R)$. 这说明了 ${}^{\perp_1}(\mathrm{P}^{<\infty}) \subseteq \mathrm{GP}(R)$, 即 $\mathrm{GP}(R) = {}^{\perp_1}(\mathrm{P}^{<\infty})$.

设 $Y \in \mathrm{GP}(R)^{\perp_1}$, 即 $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{GP}(R), Y) = 0$. 因此有正合列 $0 \longrightarrow K \longrightarrow G \longrightarrow Y \longrightarrow 0$, $G \in \mathrm{GP}(R)$, $K \in \mathrm{P}^{<\infty}$ (参见定理 5.29). 因为 $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{GP}(R), K) = 0 = \mathrm{Ext}^1(\mathrm{GP}(R), Y)$, 故 $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{GP}(R), G) = 0$. 由 Gorenstein 投射模的性质知有正合列

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow P \longrightarrow G' \longrightarrow 0,$$

其中 $P \in \mathrm{P}(R)$, $G' \in \mathrm{GP}(R)$. 由 $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{GP}(R), G) = 0$ 知这个正合列可裂. 因此 $G \in \mathrm{P}(R)$, 故 $Y \in \mathrm{P}^{<\infty}$. 这就说明了 $\mathrm{GP}(R)^{\perp_1} = \mathrm{P}^{<\infty}$, 从而 $(\mathrm{GP}(R),\ \mathrm{P}^{<\infty})$ 也是余挠对.

再由定理 5.29 知 $(\mathrm{GP}(R), \mathrm{P}^{<\infty})$ 满足余挠对完备性定义中的第一条. 因为 R-Mod 有足够多的内射对象, 根据命题 5.5 知 $(\mathrm{GP}(R),\ \mathrm{P}^{<\infty})$ 也满足余挠对完备性定义中的第二条. 从而 $(\mathrm{GP}(R),\ \mathrm{P}^{<\infty})$ 是完备余挠对. $\square$

重要注记 5.31 设 R 是 Gorenstein 环.

(1) 由$(\mathrm{GP}(R),\ \mathrm{P}^{<\infty})$ 是完备余挠对知: 对于任意 R-模 M, 有正合列

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

其中 $\mathrm{proj.dim} L < \infty$, G 是 Gorenstein 投射模.

特别地, 这说明 任意 R-模有左 $\mathrm{P}^{<\infty}$-逼近, 从而 $\mathrm{P}^{<\infty}$ 是 covariantly 有限的子范畴.

(1′) 由 $(\mathrm{P}^{<\infty},\ \mathrm{GI}(R))$ 是完备余挠对知: 对于任意 R-模 M, 有正合列

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

其中 $\mathrm{proj.dim} L < \infty$, G 是 Gorenstein 内射模.

特别地, 这说明任意有限生成 R-模有右 $\mathrm{P}^{<\infty}$-逼近, 从而 $\mathrm{P}^{<\infty}$ 是 contravariantly 有限的子范畴. 于是 $\mathrm{P}^{<\infty}$ 是函子有限的子范畴.

根据定理 5.30 和 5.13 即得

推论 5.32 ([BR], [H2]) 设 R 是 Gorenstein 环. 则

(1) R-Mod 上有一个闭模型结构, 其中

余纤维恰是余核为 Gorenstein 投射模的单同态;
纤维是所有满同态;
平凡对象恰是有限投射维数的模;
平凡余纤维恰是这样的单同态、其余核是投射模;
平凡纤维恰是这样的满同态、其核具有有限的投射维数;

弱等价恰为 pi, 其中 i 是平凡余纤维, p 是平凡纤维;
余纤维对象恰是 Gorenstein 投射模;
任意模均是纤维对象;
平凡余纤维对象恰是投射模;
平凡纤维对象恰是有限投射维数的模.

这个闭模型结构通常称为投射模型结构.

$(1')$ 对偶地, R-Mod 上有内射模型结构,
其中

余纤维是所有单同态;
纤维恰是核为 Gorenstein 内射模的满同态;
平凡对象恰是有限投射维数的模;
平凡余纤维恰是这样的单同态、其余核具有有限的投射维数;
平凡纤维恰是这样的满同态、其核是内射模;
弱等价恰为 pi, 其中 i 是平凡余纤维, p 是平凡纤维;
任意模均是余纤维对象;
纤维对象恰是 Gorenstein 内射模;
平凡余纤维对象恰是有限投射维数的模;
平凡纤维对象恰是内射模.

§5.12 在 Gorenstrin 代数上的应用

Artin 代数 R 称为 Gorenstein 代数, 如果 $\text{inj.dim}_R R < \infty$ 且 $\text{inj.dim} R_R < \infty$. Gorenstein 代数的一个基本性质: 有限生成模 M 有有限的投射维数当且仅当 M 有有限的内射维数.

令 $\mathcal{C} = \text{gp}(R)$ 是有限生成 Gorenstein 投射模作成的类, $\mathcal{F} = R\text{-mod}$, $\mathcal{W} = \text{p}^{<\infty}$ 是有限投射维数的有限生成模作成的类, $\text{p}(R)$ 表示有限生成投射模作成的类, $\text{gi}(R)$ 是有限生成 Gorenstein 内射模作成的类, $\text{i}(R)$ 表示有限生成内射模作成的类. 则 $\mathcal{C} \cap \mathcal{W} = \text{gp}(R) \cap \text{p}^{<\infty} = \text{p}(R)$, $\text{p}^{<\infty} \cap \text{gi}(R) = \text{i}(R)$.

注意，考虑 Artin 代数的原因是保证存在足够多的有限生成的内射模，即任意有限生成模均可嵌入到有限生成内射模中.

定理 5.33 ([BR], [H2], [EJ]) 设 R 是 Gorenstein 代数. 则

(1) $(\mathcal{C},\ \mathcal{F} \cap \mathcal{W}) = (\text{gp}(R),\ \text{p}^{<\infty})$ 和 $(\mathcal{C} \cap \mathcal{W},\ \mathcal{F}) = (\text{p}(R),\ R\text{-mod})$ 是完备余挠对, 从而 $(\text{gp}(R),\ R\text{-mod},\ \text{p}^{<\infty})$ 是 Hovey 三元组.

$(1')$ 对偶地, $(\text{p}^{<\infty},\ \text{gi}(R))$ 和 $(R\text{-mod},\ \text{i}(R))$ 是完备余挠对, 从而 $(R\text{-mod},\ \text{gi}(R),\ \text{p}^{<\infty})$ 是 Hovey 三元组.

证明 证明与定理 5.30的证明类似, 只要考虑有限生成模. □

重要注记 5.34 设 R 是 Gorenstein 代数.

(1) 由$(\mathrm{gp}(R),\ \mathrm{p}^{<\infty})$ 是完备余挠对知：对于任意有限生成 R-模 M，有正合列

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

其中 $\mathrm{proj.dim} L < \infty$, G 是有限生成 Gorenstein 投射模.

特别地，这说明任意有限生成 R-模有左 $\mathrm{p}^{<\infty}$-逼近, 从而 $\mathrm{p}^{<\infty}$ 是 convariantly 有限的子范畴.

$(1')$ 由 $(\mathrm{p}^{<\infty},\ \mathrm{gi}(R))$ 是完备余挠对知：对于任意有限生成 R-模 M，有正合列

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

其中 $\mathrm{proj.dim} L < \infty$, G 是有限生成 Gorenstein 内射模.

特别地，这说明任意有限生成 R-模有右 $\mathrm{p}^{<\infty}$-逼近, 从而 $\mathrm{p}^{<\infty}$ 是 contravariantly 有限的子范畴. 于是 $\mathrm{p}^{<\infty}$ 是函子有限的子范畴.

注意到对 Artin 代数 R, R-mod 也有足够多的内射对象. 类似于推论 5.32 我们有

推论 5.35 ([BR], [H2]) 设 R 是 Gorenstein 代数. 则

(1) R-mod 上有一个闭模型结构, 其中

余纤维恰是余核为有限生成 Gorenstein 投射模的单同态;
纤维是所有满同态;
平凡对象恰是有限投射维数的有限生成模;
平凡余纤维恰是余核是有限生成投射模的单同态;
平凡纤维恰是这样的满同态、其核是有有限投射维数的有限生成模;
弱等价恰为 pi, 其中 i 是平凡余纤维，p 是平凡纤维;
余纤维对象恰是有限生成 Gorenstein 投射模;
任意有限生成模均是纤维对象;
平凡余纤维对象恰是有限生成投射模;
平凡纤维对象恰是有限投射维数的有限生成模.

这个闭模型结构通常称为投射模型结构.

$(1')$ 对偶地, R-mod 上有内射模型结构,
其中

余纤维是所有单同态;
纤维恰是核为有限生成 Gorenstein 内射模的满同态;
平凡对象恰是有限投射维数的有限生成模;
平凡余纤维恰是这样的单同态、其余核具有有限的投射维数的有限生成模;

平凡纤维恰是核是有限生成内射模的满同态;
弱等价恰为 pi, 其中 i 是平凡余纤维, p 是平凡纤维;
任意有限生成模均是余纤维对象;
纤维对象恰是有限生成 Gorenstein 内射模;
平凡余纤维对象恰是有限投射维数的有限生成模;
平凡纤维对象恰是有限生成内射模.

§6 Hovey 三元组的一种构造

本节将给出从一对遗传、完备、相容的余挠对得到 Hovey 三元组的构造. 材料出自 J. Gillespie [G3].

§6.1 遗传余挠对

定义 6.1 称 Abel 范畴 $\mathcal{C}$ 中的余挠对 $(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$ 是 *遗传的*, 如果 $\mathcal{A}$ 对满射的核封闭，且 $\mathcal{B}$ 对单射的余核封闭.

引理 6.2 ([GR]) *设 Abel 范畴 $\mathcal{C}$ 有足够多的投射对象和足够多的内射对象, $(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$ 是 $\mathcal{C}$ 中的余挠对. 则下述等价*

(1) *余挠对 $(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$ 是遗传的;*
(2) *$\mathcal{A}$ 对满射的核封闭;*
(3) *$\mathcal{B}$ 对单射的余核封闭;*
(4) $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(\mathcal{A},\ \mathcal{B})=0,\ \forall\ i\geq 1.$
(5) $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{C}}(\mathcal{A},\ \mathcal{B})=0.$

证明 只要证 (2), (3), (4) , (5) 的等价性.

(2) $\Longrightarrow$ (3) : 设 $0\to X\to Y\to Z\to 0$ 是 $\mathcal{C}$ 中正合列, 且 $X, Y\in\mathcal{B}$. 要证 $Z\in\mathcal{B}$. 即要证 $\mathrm{Ext}^1(A,Z)=0,\ \forall\ A\in\mathcal{A}$. 因为 $\mathcal{C}$ 有足够多的投射对象, 故有正合列 $0\to K\to P\to A\to 0$，其中 P 是投射对象. 因 $P\in\mathcal{A}$, 故由 (2), $K\in\mathcal{A}$. 由如下正合列的交换图

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & (A,X) \arrow[r]\arrow[d] & (P,X) \arrow[r]\arrow[d] & (K,X) \arrow[r]\arrow[d] & 0=\mathrm{Ext}^1(A,X) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & (A,Y) \arrow[r]\arrow[d] & (P,Y) \arrow[r]\arrow[d] & (K,Y) \arrow[r]\arrow[d, two heads] & 0=\mathrm{Ext}^1(A,Y) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & (A,Z) \arrow[r]\arrow[d] & (P,Z) \arrow[r]\arrow[d] & (K,Z) \arrow[r, two heads]\arrow[d] & \mathrm{Ext}^1(A,Z) \arrow[r] & 0=\mathrm{Ext}^1(P,Z) \\
 & 0 & 0 & 0=\mathrm{Ext}^1(K,X) & &
\end{tikzcd}$$

即可看出 $\mathrm{Ext}^1(A,Z)=0,\ \forall\ A\in\mathcal{A}$.

(3) $\Longrightarrow$ (2) : 这是 (2) $\Longrightarrow$ (3) 的对偶.

(2) $\Longrightarrow$ (4) : 对任意对象 $X\in\mathcal{A}$, 取正合列 $0\to K\to P\to A\to 0$，其中 P 是投射对象. 因 $P\in\mathcal{A}$, 故由 (2), $K\in\mathcal{A}$. 由此即得 $\mathrm{Ext}^2(A,\mathcal{B})=\mathrm{Ext}^1(K,\mathcal{B})=0$. 从而 $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{A},\mathcal{B})=0$.

再由 $\mathrm{Ext}^3(A,\mathcal{B})=\mathrm{Ext}^2(K,\mathcal{B})=0$. 从而 $\mathrm{Ext}^3(\mathcal{A},\mathcal{B})=0$.

继续下去逐可得 $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(\mathcal{A},\ \mathcal{B})=0,\ \forall\ i\geq 1$.

(4) $\Longrightarrow$ (5) 是显然的; (5) $\Longrightarrow$ (2) 是容易证明的. ■

命题 6.3 (关于遗传余挠对的特殊逼近的扩张闭性质) ([AA, 3.1]) 设 Abel 范畴 $\mathcal{C}$ 有足够多的投射对象和足够多的内射对象, $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 是 $\mathcal{C}$ 中遗传余挠对, $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ 是 $\mathcal{C}$ 中正合列.

(1) 假设 X 和 Z 均有特殊左 $\mathcal{B}$-逼近, 即有正合列

$$0 \to X \xrightarrow{\sigma_1} B_1 \xrightarrow{\pi_1} A_1 \to 0, \qquad 0 \to Z \xrightarrow{\sigma_2} B_2 \xrightarrow{\pi_2} A_2 \to 0$$

其中 $B_i \in \mathcal{B}$, $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2$. 则 Y 也有特殊左 $\mathcal{B}$-逼近 $0 \to Y \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{\pi} A \to 0$ 使下图交换且三行和三列均是短正合列

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\sigma_1"] \arrow[d, "f"'] & B_1 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "s"] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "t"] & A \arrow[r] \arrow[d, "d"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z \arrow[r, "\sigma_2"] \arrow[d] & B_2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d] & A_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

(2) 假设 X 和 Z 均有特殊右 $\mathcal{A}$-逼近, 即有正合列

$$0 \to B_1 \xrightarrow{\sigma_1} A_1 \xrightarrow{\pi_1} X \to 0, \qquad 0 \to B_2 \xrightarrow{\sigma_2} A_2 \xrightarrow{\pi_2} Z \to 0$$

其中 $A_i \in \mathcal{A}$, $B_i \in \mathcal{B}$, $i = 1, 2$. 则 Y 也有特殊右 $\mathcal{A}$-逼近 $0 \to B \xrightarrow{\sigma} A \xrightarrow{\pi} Y \to 0$ 使下图交换且三行和三列均是短正合列

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "\sigma_1"] \arrow[d, "s"'] & A_1 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "c"] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "t"'] & A \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "d"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_2 \arrow[r, "\sigma_2"] \arrow[d] & A_2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

证明 (1) 先做 σ_1 和 f 的推出, 得到如下交换图且两行和两列均是短正合列

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\sigma_1"] \arrow[d, "f"'] & B_1 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "f'"] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "\sigma'"] \arrow[d, "g"'] & Y' \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "g'"] & A_1 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z \arrow[r, equal] \arrow[d] & Z \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

将 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, B_1)$ 作用在 $0 \to Z \xrightarrow{\sigma_2} B_2 \xrightarrow{\pi_2} A_2 \to 0$ 上，由遗传性(参见引理 6.2) 得到正合列

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(B_2, B_1) \xrightarrow{\sigma_2^*} \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(Z, B_1) \to \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{C}}(A_2, B_1) = 0$$

从而存在正合列

$$E: \quad 0 \to B_1 \xrightarrow{s} B \xrightarrow{t} B_2 \to 0$$

使得

$$\sigma_2^*(E) = E_1: \quad 0 \to B_1 \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g'} Z \to 0$$

即有如下交换图且两行和两列均是短正合列

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r, equal] \arrow[d, "f'"'] & B_1 \arrow[d, "s"] & & \\
0 \arrow[r] & Y' \arrow[r, "a"] \arrow[d, "g'"'] & B \arrow[r, "b"] \arrow[d, "t"] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z \arrow[r, "\sigma_2"] \arrow[d] & B_2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d] & A_2 \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

取 $a\sigma'$ 的余核 A, 并将上述两个交换图合并，即得到如下交换图且三行和三列均是短正合列

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\sigma_1"] \arrow[d, "f"'] & B_1 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "s"] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, dotted, "c"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "\sigma = a\sigma'"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "t"] & A \arrow[r] \arrow[d, dotted, "d"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z \arrow[r, "\sigma_2"] \arrow[d] & B_2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d] & A_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

并且 $B \in \mathcal{B}$, $A \in \mathcal{A}$.

(2) 作 π_2 和 g 的拉回得到正合列的交换图：

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & X \arrow[r, equal] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] & \\
0 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y' \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "g'"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_2 \arrow[r, "\sigma_2"] & A_2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

将 $\mathrm{Hom}(A_2, -)$ 作用在正合列 $0 \to B_1 \to A_1 \xrightarrow{\pi_1} X \to 0$ 上，由遗传性得到正合列

$$0 \to \mathrm{Ext}^1(A_2, A_1) \to \mathrm{Ext}^1(A_2, X) \to 0$$

从而得到正合列的交换图

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
A_1 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "c"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & 0 \\
A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "d"'] & Y' \arrow[r] \arrow[d, "g'"] & 0 \\
A_2 \arrow[r, equal] \arrow[d] & A_2 \arrow[d] & \\
0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

取 $\pi' a$ 的核，并将上述两个交换图合并，即得到正合列的交换图

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "\sigma_1"] \arrow[d] & A_1 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "c"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] & A \arrow[r, "\pi=\pi' a"] \arrow[d, "d"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_2 \arrow[r, "\sigma_2"] \arrow[d] & A_2 \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

并且 $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$. ■

§6.2 由一对遗传、完备、相容的余挠对得到遗传 Hovey 三元组

Abel 范畴中的 Hovey 三元组 $(\mathcal{C},\ \mathcal{F},\ \mathcal{W})$ 称为 *遗传 Hovey 三元组*, 如果 $(\mathcal{C},\ \mathcal{F}\cap\mathcal{W})$ 和 $(\mathcal{C}\cap\mathcal{W},\ \mathcal{F})$ 都是遗传的完备的余挠对.

定义 6.4 称 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中两个余挠对 $(\Phi,\Phi^{\perp})$ 和 $({}^{\perp}\Psi,\Psi)$ 是 *相容的*, 如果以下两条成立

(i) $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\Phi,\Psi)=0$, 即 $\Phi\subseteq {}^{\perp}\Psi,\ \ \Psi\subseteq\Phi^{\perp}$;

(ii) $\Phi\cap\Phi^{\perp}= {}^{\perp}\Psi\cap\Psi$.

注意这里相容的关系不是对称的.故需调好两个余挠对的次序.

例 6.5 (1) 设 $\mathcal{A}$ 是有足够多投射对象的 Abel 范畴, $\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{A}$ 中投射对象作成的类. 则 $(\mathcal{P},\mathcal{A})$ 和 $(\mathcal{P},\mathcal{A})$ 作成遗传, 完备, 且相容的余挠对, 相应的 Hovey 三元组是 $(\mathcal{P},\mathcal{A},\mathcal{A})$.

(2) 设 R 是 Gorenstein 环, $\mathrm{GP}(R)$ 是 Gorenstein 投射模作成的类, $\mathrm{P}^{<\infty}$ 是有限投射维数的模作成的类, $\mathrm{P}(R)$ 表示投射模作成的类. 则 $(\mathrm{P}(R),\ R\text{-Mod})$ 和 $(\mathrm{GP}(R),\ \mathrm{P}^{<\infty})$ 作成遗传, 完备, 且相容的余挠对, 相应的 Hovey 三元组是 $(\mathrm{GP}(R),\ R\text{-Mod},\ \mathrm{P}^{<\infty})$.

定理 6.6 ([G3, Theorem 1.1]) 设 $(\Phi,\Phi^{\perp})$ 和 $({}^{\perp}\Psi,\Psi)$ 是 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中两个遗传, 完备, 且相容的余挠对. 则 $({}^{\perp}\Psi,\ \Phi^{\perp},\ \mathcal{W})$ 是 $\mathcal{A}$ 中的遗传 Hovey 三元组, 其中

$$\begin{aligned}\mathcal{W}&=\{Y\in\mathcal{A}\mid \exists\ \text{正合列}\ 0\to P\to F\to Y\to 0,\ P\in\Psi,\ F\in\Phi\}\\&=\{Y\in\mathcal{A}\mid \exists\ \text{正合列}\ 0\to Y\to P'\to F'\to 0,\ P'\in\Psi,\ F'\in\Phi\}.\end{aligned}$$

反之, 任意遗传 Hovey 三元组 $(\mathcal{C},\ \mathcal{F},\ \mathcal{W})$ 均可这样得到.

此时,相应的闭模型结构为

- 余纤维恰是余核属于 ${}^{\perp}\Psi$ 的单态射;
- 纤维恰是核属于 $\Phi^{\perp}$ 的满态射;
- 弱等价恰是所有合成 pi, 其中 i 是余核属于 Φ 的单态射, p 是核属于 Ψ 的满态射.

证明 只要证明 $\mathcal{W}$ 是 $\mathcal{A}$ 的厚子范畴, 且 $\Phi= {}^{\perp}\Psi\cap\mathcal{W},\ \Psi=\Phi^{\perp}\cap\mathcal{W}$.

Step 1. 描述 $\mathcal{W}$ 的两个集合是相等的. 设有正合列 $0\to P\to F\to Y\to 0$, 其中 $P\in\Psi,\ F\in\Phi$. 则由 $(\Phi,\ \Phi^{\perp})$ 的完备性知存在正合列 $0\to F\to\tilde{P}\to\tilde{F}\to 0$, 其中

$\tilde{P} \in \Phi^{\perp}$, $\tilde{F} \in \Phi$. 作推出可得

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & P \arrow[r, equal] \arrow[d] & P \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{P} \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{F} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d] & P' \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{F} \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

因 F, $\tilde{F} \in \Phi$，故 $\tilde{P} \in \Phi$，从而 $\tilde{P} \in \Phi \cap \Phi^{\perp} = {}^{\perp}\Psi \cap \Psi$. 又 $({}^{\perp}\Psi, \Psi)$ 遗传且 P, $\tilde{P} \in \Psi$，故 $P' \in \Psi$，从而 Y 属于第二个集合. 反之，同理可证.

Step 2. $\Phi = {}^{\perp}\Psi \cap \mathcal{W}$, $\Psi = \Phi^{\perp} \cap \mathcal{W}$. 首先, 由相容性知 $\Phi \subseteq {}^{\perp}\Psi$; 由 $\mathcal{W}$ 的第一种刻画知 $\Phi \subseteq \mathcal{W}$. 从而 $\Phi \subseteq {}^{\perp}\Psi \cap \mathcal{W}$. 再由 $\mathcal{W}$ 的第一种刻画知 ${}^{\perp}\Psi \cap \mathcal{W} \subseteq \Phi$ (相应的短正合列可裂). 故 $\Phi = {}^{\perp}\Psi \cap \mathcal{W}$.

同理可证 $\Psi = \Phi^{\perp} \cap \mathcal{W}$.

Step 3. $\mathcal{W}$ **扩张闭.** 应用命题 6.3，并利用事实 Φ 和 Ψ 的扩张闭性质，即可知 $\mathcal{W}$ 对扩张封闭.

Step 4. $\mathcal{W}$ **对单射的余核封闭.** 设有正合列 $0 \to W_1 \to W_2 \to Z \to 0$，其中 $W_1, W_2 \in \mathcal{W}$. 取正合列 $0 \to W_1 \to P_1 \to F_1 \to 0$，其中 $P_1 \in \Psi$, $F_1 \in \Phi$. 作推出：

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & W_1 \arrow[r] \arrow[d] & P_1 \arrow[r] \arrow[d] & F_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & W_2 \arrow[r] \arrow[d] & P_2 \arrow[r] \arrow[d] & F_1 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z \arrow[r, equal] \arrow[d] & Z \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

因 $W_2 \in \mathcal{W}$, $F_1 \in \Phi = {}^{\perp}\Psi \cap \mathcal{W}$，故 $P_2 \in \mathcal{W}$. 又因为有正合列 $0 \to P_2 \to X \to Y \to 0$，其中

$X\in\Psi$, $Y\in\Phi$，从而有推出：

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & P_2 \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & Y \arrow[r, equal] \arrow[d] & Y \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

因 $({}^{\perp}\Psi,\Psi)$ 遗传且 P_1, $X\in\Psi$，故 $L\in\Psi$. 于是有正合列 $0\to Z\to L\to Y\to 0$，即 $Z\in\mathcal{W}$.

Step 5. $\mathcal{W}$ **对满射的核封闭.** 设有正合列 $0\to X\to Y\to Z\to 0$，其中 $Y,Z\in\mathcal{W}$. 取正合列 $0\to B_3\to A_3\to Z\to 0$，其中 $B_3\in\Psi$, $A_3\in\Phi$，从而有拉回：

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & X \arrow[r, equal] \arrow[d] & X \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & A_3 \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

因 $Y\in\mathcal{W},B_3\in\Psi=\Phi^{\perp}\cap\mathcal{W}$，故 $A\in\mathcal{W}$. 再取正合列 $0\to M\to N\to A\to 0$，其中 $M\in\Psi$, $N\in\Phi$，则有拉回：

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & L \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & A_3 \arrow[r, equal] \arrow[d] & A_3 \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

因 $A_3,N\in\Phi$ 且 $(\Phi,\Phi^{\perp})$ 遗传，故 $L\in\Phi$. 从而有正合列 $0\to M\to L\to X\to 0$，即 $X\in\mathcal{W}$.

Step 6. $\mathcal{W}$ **对直和项封闭.** 设 $W=W_1\oplus W_2\in\mathcal{W}$. 要证明 $W_1\in\mathcal{W}$.由完备性知有正合列：

$$0\to\Psi_1\to\Phi_1\to W_1\to 0,\quad 0\to\Psi_2\to\Phi_2\to W_2\to 0$$

其中 Ψ_1, $\Psi_2 \in \Phi^{\perp}$, Φ_1, $\Phi_2 \in \Phi$. 从而得到正合列 $0 \to \Psi_1 \oplus \Psi_2 \to \Phi_1 \oplus \Phi_2 \to W \to 0$，其中 $W \in \mathcal{W}$, $\Phi_1 \oplus \Phi_2 \in \Phi \subseteq \mathcal{W}$. 由 $\mathcal{W}$ 对满射的核封闭知 $\Psi_1 \oplus \Psi_2 \in \mathcal{W} \cap \Phi^{\perp} = \Psi$，从而 $\Psi_1 \in \Psi$，即 $W_1 \in \mathcal{W}$. ■

推论 6.7 设 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 是 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中的遗传且完备的余挠对. 则 $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$ 中的 Hovey 三元组. 于是,相应的闭模型结构为

- 余纤维恰是余核属于 $\mathcal{U}$ 的单态射;
- 纤维恰是核属于 $\mathcal{V}$ 的满态射;
- 弱等价恰是所有合成 pi, 其中 i 是余核属于 $\mathcal{U}$ 的单态射, p 是核属于 $\mathcal{V}$ 的满态射.

证明 此时 $(\mathcal{U}, \mathcal{V} = \mathcal{U}^{\perp})$ 和 $(\mathcal{U} = {}^{\perp}\mathcal{V}, \mathcal{V})$ 是 $\mathcal{A}$ 中的两个遗传、完备、且相容的余挠对. 应用命题 6.6 即得 $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$ 中的 Hovey 三元组, 其中

$$\begin{aligned}\mathcal{W} &= \{Y \in \mathcal{A} \mid \exists \text{ 正合列 } 0 \to P \to F \to Y \to 0,\ P \in \mathcal{V},\ F \in \mathcal{U}\} \\ &= \{Y \in \mathcal{A} \mid \exists \text{ 正合列 } 0 \to Y \to P' \to F' \to 0,\ P' \in \mathcal{V},\ F' \in \mathcal{U}\}.\end{aligned}$$

因为 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 是完备的, 故 $\mathcal{W} = \mathcal{A}$. ■

§6.3 遗传 Hovey 三元组相应的模型范畴的 Qullen 的同伦范畴

定理 6.8 (H. Becker; A. Beligiannis, I. Reiten; J. Gillespie) 设 $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W})$ 是 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中的 Hovey 三元组. 则合成 $\mathcal{C} \cap \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ho}(\mathcal{A})$ 诱导范畴等价

$$\mathrm{Ho}(\mathcal{A}) \cong (\mathcal{C} \cap \mathcal{F})/(\mathcal{C} \cap \mathcal{F} \cap \mathcal{W}).$$

进一步, 如果 $(\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{W})$ 是遗传 Hovey 三元组，则 $\mathcal{C} \cap \mathcal{F}$ 是 Frobenius 范畴, $\mathcal{C} \cap \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ 恰是其投射-内射对象作成的类.

证明 首先说明这个模型结构的同伦范畴 $\mathrm{Ho}(\mathcal{A})$ 等价于 $(\mathcal{C} \cap \mathcal{F})/(\mathcal{C} \cap \mathcal{F} \cap \mathcal{W})$. 由定理 4.11, $\mathrm{Ho}(\mathcal{A})$ 就是 $\mathcal{C} \cap \mathcal{F}$ 关于左 (或，右)同伦关系理想的商范畴 (此时左同伦关系与右同伦关系重合.参见引理 4.9). 设 f, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, 其中 $A, B \in \mathcal{C} \cap \mathcal{F}$. 因此只要证 $f \sim g$ 当且仅当 $f - g$ 通过 $\mathcal{C} \cap \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ 中对象分解.

设 $f - g$ 通过 $\mathcal{C} \cap \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ 中对象分解, 即有交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f-g"] \arrow[dr, "p"'] & & B \\ & P \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

其中 $P\in\mathcal{C}\cap\mathcal{F}\cap\mathcal{W}$. 则有交换图

$$\begin{tikzcd}
A\oplus A \arrow[r, "{(f,g)}"] \arrow[d, "{(1,1)}"'] \arrow[dr, "{\left(\begin{smallmatrix}1&1\\p&0\end{smallmatrix}\right)}"] & B \\
A & A\oplus P \arrow[l, "{(1,0)}"] \arrow[u, "{(g,h)}"']
\end{tikzcd}$$

因为 $\mathrm{Ker}(1,0)=P\in\mathcal{C}\cap\mathcal{F}\cap\mathcal{W}\subseteq\mathcal{F}\cap\mathcal{W}$, 由定理 5.13知 $(1,0)$ 是平凡纤维, 特别地 $(1,0)$ 是弱等价. 由定义-引理 4.2 知 $f\sim g$.

反之, 设 $f\sim g$. 由引理 4.9 知存在交换图

$$\begin{tikzcd}
A\oplus A \arrow[r, "{(f,g)}"] \arrow[d, "{(1,1)}"'] \arrow[dr, "{(\partial_0,\partial_1)}"] & B \\
A & \widetilde{A} \arrow[l, "\sigma"] \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

其中 σ 是平凡纤维. 因为 $(\mathcal{C},\mathcal{F}\cap\mathcal{W})$ 是完备余挠对, 存在正合列

$$0\longrightarrow A\xrightarrow{t}P\longrightarrow C\longrightarrow 0$$

其中 $P\in\mathcal{F}\cap\mathcal{W}$, $C\in\mathcal{C}$. 从而 t 是余纤维. 因为 $A\in\mathcal{C}$，故 $P\in\mathcal{C}\cap\mathcal{F}\cap\mathcal{W}$. 由交换图

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\partial_0-\partial_1"] \arrow[d, "t"'] & \widetilde{A} \arrow[d, "\sigma"] \\
P \arrow[r, "0"] \arrow[ur, dotted, "s"] & A
\end{tikzcd}$$

知 $\partial_0-\partial_1$ 通过 P 分解，从而 $f-g$ 通过 $\mathcal{C}\cap\mathcal{F}\cap\mathcal{W}$ 中对象分解.

因为 $(\mathcal{C},\ \mathcal{F}\cap\mathcal{W})$ 和 $(\mathcal{C}\cap\mathcal{W},\ \mathcal{F})$ 都是余挠对, 故 $\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$ 对扩张闭. 从而 $\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$ 有自然的正合结构.

现在设 $(\mathcal{C},\ \mathcal{F},\ \mathcal{W})$ 是遗传 Hovey 三元组. 因为

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}\cap\mathcal{F}\cap\mathcal{W},\ \mathcal{C}\cap\mathcal{F})=0=\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}\cap\mathcal{F},\ \mathcal{C}\cap\mathcal{F}\cap\mathcal{W}),$$

$\mathcal{C}\cap\mathcal{F}\cap\mathcal{W}$ 中的对象是 $\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$ 的投射-内射对象.

因为 $(\mathcal{C}\cap\mathcal{W},\ \mathcal{F})$ 是完备的余挠对, 因此，对于任意对象 $X\in\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$, 存在正合列

$$0\longrightarrow F\longrightarrow C\longrightarrow X\longrightarrow 0$$

其中 $C\in\mathcal{C}\cap\mathcal{W}$, $F\in\mathcal{F}$. 因为 $\mathcal{F}$ 对扩张封闭, 故 $C\in\mathcal{F}$. 从而 $C\in\mathcal{C}\cap\mathcal{F}\cap\mathcal{W}$. 因为 $(\mathcal{C},\ \mathcal{F}\cap\mathcal{W})$ 是遗传的余挠对，故 $\mathcal{C}$ 对于满射的核封闭, 从而 $F\in\mathcal{C}$, 从而 $F\in\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$. 这表明 $\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$ 有足够多的投射对象.

设 P 是 $\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$ 的投射对象. 则有正合列 $0\longrightarrow F\longrightarrow C\longrightarrow P\longrightarrow 0$ 其中 $C\in\mathcal{C}\cap\mathcal{F}\cap\mathcal{W}$, $F\in\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$. 从而 P 是 C 的直和项, 因为 $\mathcal{W}$ 对直和项封闭, 故 $P\in\mathcal{W}$，从而 $P\in\mathcal{C}\cap\mathcal{F}\cap\mathcal{W}$. 这表明 $\mathcal{C}\cap\mathcal{F}\cap\mathcal{W}$ 恰是 $\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$ 的投射对象作成的类.

对偶地可证 $\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$ 有足够多的内射对象且 $\mathcal{C}\cap\mathcal{F}\cap\mathcal{W}$ 恰是 $\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$ 的投射对象作成的类. 于是 $\mathcal{C}\cap\mathcal{F}$ 是 Frobenius 范畴, $\mathcal{C}\cap\mathcal{F}\cap\mathcal{W}$ 恰是其投射-内射对象作成的类. ■

§7 正合范畴

引入正合范畴的动机之一, 就是要研究非 Abel 范畴的正合性和上同调. 即便是 Abel 范畴, 取其一部分正合对, 一般也不再是 Abel 范畴. 例如, Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的满子范畴 $\mathcal{B}$ 连同三项都在 $\mathcal{B}$ 中的正合列, 一般不再是 Abel 范畴.

§7.1 正合范畴的定义

Let $\mathcal{A}$ be an additive category (即 $\mathcal{A}$ 有零对象, 任意两个对象之间的态射集有加群的结构，态射的合成对于态射的加法有左右分配律, 任意两个对象有余积).

An *exact pair* (i, d) is a sequence of morphisms $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{d} Z$ in $\mathcal{A}$ such that i is a kernel of d, and d is a cokernel of i. 因此, 在正合对 (i, d) 中, i 是单态射, d 是满态射.

定义 7.1 (Daniel Quillen [Q3, §2], 1973) An exact category is a pair $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$, where $\mathcal{A}$ is an additive category, and $\mathcal{E}$ is a class of exact pairs satisfying the axioms (E0), (E1), (E1$^{\mathrm{op}}$), (E2), (E2$^{\mathrm{op}}$), (E3), (E4) and (E4$^{\mathrm{op}}$) below, where an exact pair $(i, d) \in \mathcal{E}$ is called a *conflation*, i is called an *inflation*, and d is called a *deflation*.

(E0) $\mathcal{E}$ is closed under isomorphisms, and Id_0 is a deflation.

(E1) The composition of two deflations is a deflation.

(E1$^{\mathrm{op}}$) The composition of two inflations is an inflation.

(E2) For each deflation $d : Y \longrightarrow Z$ and each morphism $f : Z' \longrightarrow Z$, there is a pullback square

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, dotted, "d'"] \arrow[d, dotted, "f'"'] & Z' \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "d"] & Z \end{tikzcd} \tag{7.1}$$

such that d' is a deflation.

(E2$^{\mathrm{op}}$) For each inflation $i : X \longrightarrow Y$ and each morphism $f : X \longrightarrow X'$, there is a pushout square

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, dotted, "f'"] \\ X' \arrow[r, dotted, "i'"] & Y' \end{tikzcd} \tag{7.2}$$

such that i' is an inflation.

(E3) For all objects X and Y, $X \xrightarrow{\binom{1}{0}} X \oplus Y \xrightarrow{(0,1)} Y$ is a conflation.

(E4) If morphism d has a kernel and if de is a deflation for some morphism e, then d is a deflation.

(E4$^{\rm op}$) If morphism i has a cokernel and if ki is an inflation for some morphism k, then i is an inflation.

重要注记 7.2 (1) 请注意，正合范畴 $(\mathcal{A},\mathcal{E})$ 中 $\mathcal{E}$ 未必是所有正合对 (i,d) 作成的类. 只有那些 $\mathcal{E}$ 中的正合对才称为 conflations.

(2) B. Keller [K, Appendix A] 指出，定义 7.1 中的公理 (E1$^{\rm op}$), (E3), (E4) 和 (E4$^{\rm op}$) 可由其它公理推出. 这对初学者来说, 是很好但不太容易的习题. 因此, 使用 Quillen 的原始定义, 对初学者来说较方便.

§7.2 例子

(1) Abel 范畴是正合范畴, 其中 $\mathcal{E}$ 是所有的短正合列作成的类.

(2) 正合范畴 $(\mathcal{A},\mathcal{E})$ 的反范畴 $(\mathcal{A}^{op},\mathcal{E}^{op})$ 是正合范畴.

(3) Abel 范畴 $\mathcal{B}$ 的扩张闭且对同构闭的满子范畴 $\mathcal{A}$ 作成正合范畴, 其中 $\mathcal{E}$ 恰是 $\mathcal{B}$ 中三项都属于$\mathcal{A}$ 的短正合列作成的类. 这是极其重要的正合范畴，它一般不是 Abel 范畴. 以下给出验证的主要细节.

(E1) Deflations 的合成是 deflation. 事实上, 设 $d_1: Y\to Z$ 和 $d_2: Z\to W$ 均是 deflation. 即, 有 $\mathcal{B}$ 中的短正合列 $0\to X\to Y\xrightarrow{d_1} Z\to 0$ 和 $0\to U\to Z\xrightarrow{d_2} W\to 0$, 其中 X,Y,Z,U,W 都属于 $\mathcal{A}$. 要证 $d_2d_1: Y\to W$ 也是 deflation, 即, 要证存在 $\mathcal{B}$ 中的短正合列 $0\to K\to Y\xrightarrow{d_2d_1} W\to 0$ 使得 $K\in\mathcal{A}$. 考虑 $\mathcal{B}$ 中短正合列的交换图

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & X \arrow[r, equal] \arrow[d] & X \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & Y \arrow[r, "d_2d_1"] \arrow[d, "d_1"'] & W \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & U \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r, "d_2"] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

对 3, 4 两行用蛇引理得到 $\mathcal{B}$ 中正合列 $0\to \mathrm{Ker}a\to\mathrm{Ker}d_1\to 0\to\mathrm{Coker}a\to\mathrm{Coker}d_1=0$, 故 $\mathrm{Ker}a\cong X$ 且 a 是满态射. 由 $X\in\mathcal{A}$ 和 $U\in\mathcal{A}$ 即知 $K\in\mathcal{A}$. 因此 d_2d_1 是 deflation.

(E2) 对任意 deflation $d\colon Y\longrightarrow Z$ 和 $\mathcal{A}$ 中任意态射 $f\colon Z'\longrightarrow Z$, 存在拉回方块

$$\begin{tikzcd}
Y' \arrow[r, dotted, "d'"] \arrow[d, dotted, "f'"'] & Z' \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "d"] & Z
\end{tikzcd}$$

其中 d' 是 deflation.

事实上，在 Abel 范畴 $\mathcal{B}$ 中作 d 和 f 的拉回得到正合列的交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y' \arrow[r, dotted, "d'"] \arrow[d, dotted, "f'"'] & Z' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & Y \arrow[r, "d"] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

因为 $X \in \mathcal{A}$ 和 $Z' \in \mathcal{A}$, 故 $Y' \in \mathcal{A}$. 这就证明了 d' 是 deflation.

(4) 实数域或复数域上的 Banach 空间的范畴，其中态射为有界线性映射, 作成正合范畴. 这不是 Abel 范畴.

(5) 环 R 上的 Gorenstein 投射模作成的 R-Mod 的全子范畴 $\mathrm{GP}(R)$是 R-Mod 的扩张闭的全子范畴, 因而是正合范畴, 其中 $\mathcal{E}$ 恰是 R-Mod 中三项都在 $\mathrm{GP}(R)$ 中的短正合列作成的类.

设 A 是 Artin 代数. 则有限生成 Gorenstein 投射模范畴 $\mathrm{gp}(A)$ 是正合范畴, 其中 $\mathcal{E}$ 恰是 A-mod 中三项都在 $\mathrm{gp}(A)$ 中的短正合列作成的类. 只在很特殊的情况下 (即 inj. dim ${}_AA \le 2$, dom.dim ${}_AA \ge 2$), $\mathrm{gp}(A)$ 才是 Abel 范畴 ([Kong, 2.1]).

(6) 箭图 $1 \longrightarrow 2$ 的路代数的投射模作成的全子范畴是扩张闭的，因此是正合范畴, 但它不是 Abel 范畴. 例如, 嵌入 $i: P(2) \longrightarrow P(1)$ 的余核是 $\mathrm{Coker} i = (d: P(1) \longrightarrow 0)$, 而 d 的核是 $\mathrm{Ker} d = (\mathrm{Id}_{P(1)}: P(1) \longrightarrow P(1)) \ne i$.

§7.3 正合范畴的基本性质

事实 7.3 Let $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ be an exact category. Then

(1) For any object X, $0 \longrightarrow X \xrightarrow{\mathrm{Id}_X} X$ is a conflation, and $X \xrightarrow{\mathrm{Id}_X} X \longrightarrow 0$ is a conflation. 特别地, all the identity morphisms are deflations and inflations.

证明 (1) 在 (E3) 中分别取 $X = 0$ 和 $Y = 0$ 即得. □

(2) For all objects X and Y, $Y \xrightarrow{\binom{0}{1}} X \oplus Y \xrightarrow{(1,0)} X$ is a conflation.

证明 (2) 在反范畴 $(\mathcal{A}^{op}, \mathcal{E}^{op})$ 中看 (E3) 即得. □

(3) An isomorphism is a deflation and an inflation.

A deflation which is monic is an isomorphism.

An inflation which is epic is an isomorphism.

证明 (3) Let $f: X \longrightarrow Y$ be an isomorphism. 由交换图

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r] \arrow[d, "f^{-1}"] & 0 \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, equal] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[d, "f^{-1}"] \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, equal] & X
\end{tikzcd}$$

以及 $\mathcal{E}$ 对同构封闭即得 f 是 inflation 和 deflation.

A deflation $f : X \longrightarrow Y$ which is monic is an isomorphism. In fact, let (i, f) be the corresponding conflation. Then $fi = 0$. But f is monic, thus $i = 0$. Since f is the cokernel of $i = 0$, it follows that Id_X factors through f, i.e., $gf = \mathrm{Id}_X$ for some $g : Y \longrightarrow X$. Since $(fg)f = f = \mathrm{Id}_Y f$ and f is epic, it follows that $fg = \mathrm{Id}_Y$, i.e., f is an isomorphism.

Dually, an inflation which is epic is an isomorphism. $\square$

(4) Let (f, g) and (f', g') be conflations. Then the direct sum $(\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g' \end{pmatrix})$ is a conflation.

证明 (4) Let $f : X \longrightarrow Y$ and $f' : X' \longrightarrow Y'$ be two inflations, with conflations (f, g) and (f', g'), respectively. Consider the following pushout square:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\binom{1}{0}"'] & Y \arrow[d, "\binom{1}{0}"] \arrow[ddr, bend left, "\gamma"] & \\
X \oplus X' \arrow[r, "\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}"] \arrow[drr, bend right, "(f\gamma, \beta)"'] & Y \oplus X' \arrow[dr, dotted, "(\gamma, \beta)"] & \\
& & Z
\end{tikzcd}$$

So $\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ is an inflation. Similarly, consider the following pushout square:

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\binom{0}{1}"'] & Y' \arrow[d, "\binom{0}{1}"] \arrow[ddr, bend left, "\gamma"] & \\
X \oplus X' \arrow[r, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix}"] \arrow[drr, bend right, "(\alpha, \gamma f')"'] & X \oplus Y' \arrow[dr, dotted, "(\alpha, \gamma)"] & \\
& & Z
\end{tikzcd}$$

So $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix}$ is an inflation. So the composition $\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix}$ is an inflation. Thus, there is a morphism d such that $(\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix}, d)$ is a conflation. But clearly, the cokernel of $\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix}$ is $\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g' \end{pmatrix}$, so $(\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g' \end{pmatrix})$ is a conflation. $\square$

(5) Let $i : A \longrightarrow B$ be an inflation, $a : A \longrightarrow X$ be an arbitrary morphism. Then $\binom{i}{a} : A \longrightarrow B \oplus X$ is an inflation.

Let $j : A \longrightarrow B$ be a deflation, $b : X \longrightarrow B$ be an arbitrary morphism. Then $(j, b) : A \oplus X \longrightarrow B$ is a deflation.

证明 (5) One has

$$\binom{i}{a} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \binom{1}{0} : A \longrightarrow A \oplus X \longrightarrow A \oplus X \longrightarrow B \oplus X.$$

Since all the three factors are inflations, so is $\binom{i}{a}$.

Similarly, by

$$(j,b) = (1,0)\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} j & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : A \oplus X \longrightarrow B \oplus X \longrightarrow B \oplus X \longrightarrow B,$$

one sees that (j,b) is a deflation. $\square$

引理 7.4 ([Bü, 2.15]) Let $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ be an exact category.

(1) Let (7.1) be a pullback square with d a deflation. If f is an inflation, then so is f'.

(1$'$) Let (7.2) be a pushout square with i an inflation. If f is a deflation, then so is f'.

证明 只证 (1). 结论 (1$'$) 是 (1) 的对偶. 设 (f,g) 是 conflation. 参见下图.

$$\begin{tikzcd}
Y' \arrow[r, dotted, "d'"] \arrow[d, dotted, "f'"'] & Z' \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "d"] & Z \arrow[d, "g"] \\
 & C
\end{tikzcd}$$

则 gd 是 deflation. 从而, 只要证 f' 是 gd 的核. 这由核和拉回的泛性质即得. 细节留给读者. $\square$

A sequence of morphisms $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ is said to be *an $\mathcal{E}$-exact sequence*, or *an exact sequence*, if $(f,g) \in \mathcal{E}$.

命题 7.5 ([Bü, 2.12]) Let $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ be an exact category.

(1) Consider the commutative square in $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$

$$\begin{tikzcd}
B' \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "f'"'] & C' \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r, "d"] & C
\end{tikzcd}$$

where d is a deflation. Then the following are equivalent.

(i) The square is a pullback square.

(ii) The sequence $0 \longrightarrow B' \xrightarrow{\binom{d'}{f'}} C' \oplus B \xrightarrow{(-f,d)} C \longrightarrow 0$ is an exact sequence.

(iii) The square is a pullback - pushout square.

(iv) There is a commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i'"] \arrow[d, equal] & B' \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "f'"'] & C' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "d"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

with exact rows.

(1′) Consider the commutative square in $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "f'"] \\ A' \arrow[r, "i'"] & B' \end{tikzcd}$$

where i is an inflation. Then the following are equivalent.

(i′) The square is a pushout square.

(ii′) The sequence $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\binom{i}{-f}} B \oplus A' \xrightarrow{(f', i')} B' \longrightarrow 0$ is an exact sequence.

(iii′) The square is a pushout - pullback square.

(iv′) There is a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i'"] & B' \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

with exact rows.

命题 7.5 和 Abel 范畴中相应结论是完全一致的. 但 Abel 范畴中相应结论的证明可以稍简单一些. 在 Bühler 的原文中还要求 d' 也是 deflation, 这事实上是不需要的.

证明 只证 (1). 结论 (1′) 是 (1) 的对偶.

(i)$\Longrightarrow$ (ii): 由 d 是 deflation 以及由事实 7.3(5)知 $(-f, d)$ 也是 deflation, 从而存在 conflation $(a,\ (f, d))$. 而所给的方块是拉回方块等价于说 $\binom{d'}{f'}$ 是 $(-f, d)$ 的核. 由核的唯一性可以假设 $\binom{d'}{f'} = a$. 因此 $(\binom{d'}{-f'},\ (f, d))$ 是 conflation.

(ii)$\Longrightarrow$ (iii): 注意到 $\binom{d'}{f'}$ 是 $(-f, d)$ 的核即意味着所给的方块是拉回; 而 $(-f, d)$ 是 $\binom{d'}{f'}$ 的余核即意味着所给的方块是推出.

(iii)$\Longrightarrow$ (i) 是显然的.

(i)$\Longrightarrow$ (iv): 在任何加法范畴中, 在拉回中 d 与 d' 的核都是同构的, 由此即得.

(iv)$\Longrightarrow$ (ii): 作 i' 和 i 的推出, 得到如下交换图和 conflations (j, q) 和 (j', q')

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "i"'] & B' \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "j"'] & C' \arrow[d, equal] \\ B \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "d"'] & X \arrow[r, "q'"] \arrow[d, "q"'] & C' \\ C \arrow[r, equal] & C & \end{tikzcd}$$

由推出的泛性质知存在唯一的态射 $s : X \longrightarrow B$ 使得 $sj' = \mathrm{Id}_B$, $sj = f'$. 参见下图

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "i"'] & B' \arrow[d, "j"'] \arrow[ddr, bend left, "f'"] & \\
B \arrow[r, "j'"] \arrow[drr, bend right, equal] & X \arrow[dr, dotted, "s"] & \\
& & B
\end{tikzcd}$$

由 $(\mathrm{Id}_X - j's)j' = 0$ 和余核的泛性质知存在唯一的态射 $l : C' \longrightarrow X$ 使得 $\mathrm{Id}_X - j's = lq'$.

断言：$(l, j') : C' \oplus B \longrightarrow X$ 和 $\left(\begin{smallmatrix} q' \\ s \end{smallmatrix}\right) : X \longrightarrow C' \oplus B$ 是互逆的态射. 事实上,

$$(l, j')\left(\begin{smallmatrix} q' \\ s \end{smallmatrix}\right) = lq' + j's = \mathrm{Id}_X .$$

因 $q'lq' = q'(\mathrm{Id}_X - j's) = q' - q'j's = q'$ 且 q' 是满态射, 故 $q'l = \mathrm{Id}_{C'}$.

显然 $q'j' = 0$. 已知 $sj' = \mathrm{Id}_B$. 因 $slq' = s(\mathrm{Id}_X - j's) = s - sj's = 0$ 且 q' 是满态射, 故 $sl = 0$. 因此

$$\left(\begin{smallmatrix} q' \\ s \end{smallmatrix}\right)(l, j') = \begin{pmatrix} q'l & q'j' \\ sl & sj' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{C'} & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_B \end{pmatrix} = \mathrm{Id}_{C' \oplus B} .$$

考虑态射图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "j"] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} q' \\ s \end{smallmatrix}\right)"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} d' \\ f' \end{smallmatrix}\right)"] & C' \oplus B \arrow[r, "{(-f,d)}"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

因 $\left(\begin{smallmatrix} q' \\ s \end{smallmatrix}\right) j = \left(\begin{smallmatrix} q'j \\ sj \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} d' \\ f' \end{smallmatrix}\right)$, 故左边方块交换.

直接说明右边方块交换较麻烦. 因 $qld' = qlq'j = q(\mathrm{Id}_X - j's)j = qj - qj'sj = -df' = -fd'$ 以及 d' 是满态射, 故 $ql = -f$. 于是

$$q(l, j') = (-f, d).$$

两边右乘 $\left(\begin{smallmatrix} q' \\ s \end{smallmatrix}\right)$ 即得右边方块交换. 于是 $(\left(\begin{smallmatrix} d' \\ f' \end{smallmatrix}\right), (-f, d))$ 同构于 conflation (j, q), 从而也是 conflation. $\square$

§7.4 正合范畴的 Gabriel-Quillen 嵌入定理

利用函子范畴的理论, 1964 年 P. Freyd 和 B. Mitchell 证明了下述著名的嵌入定理 (参见 [Mit, p.101], [F, p.150], [Faith, 15.30], 或 [W, p.25]).

定理 7.6 (Freyd-Mitchell 嵌入定理) 设 $\mathcal{A}$ 是小 Abel范畴.则存在满忠实且正合的函子 $F : \mathcal{A} \longrightarrow R\text{-Mod}$, 其中 R 是某个环.

关于正合范畴, 有类似的 Gabriel-Quillen 嵌入定理 (一个较方便的文献是 [K, Appendix A.2]).

定理 7.7 (Gabriel-Quillen 嵌入定理) 对小 (small) 正合范畴 $(\mathcal{A},\mathcal{E})$, 存在 Abel 范畴 $\mathcal{B}$ 和满忠实且正合的函子 $F\colon\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ 使得 $\mathrm{Im}F$ 是 $\mathcal{B}$ 的同构闭、扩张封闭的满子范畴, 且 F 可以反射正合性 (即, 若 $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z$ 是 $\mathcal{A}$ 中态射序列且 $0\longrightarrow FX\xrightarrow{Ff}FY\xrightarrow{Fg}FZ\longrightarrow 0$ 是 $\mathcal{B}$ 中正合列, 则 $(f,g)\in\mathcal{E}$).

由此可以推出：对小范畴 $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ 是正合范畴当且仅当它是某个 Abel 范畴的扩张闭、同构闭的满子范畴.

§7.5 加法范畴中的可裂短正合列

定义-引理 7.8 加法范畴中的态射序列 $0\longrightarrow M\xrightarrow{f}L\xrightarrow{g}N\longrightarrow 0$ 称为可裂短正合列, 如果满足下述等价的条件:

(i) f是可裂单态射 (即存在态射$f'\colon L\longrightarrow M$ 使得 $f'f=\mathrm{Id}_M$), 且 g 是 f 的余核;

(ii) g 是可裂满态射 (即存在态射$g'\colon N\longrightarrow L$使得$gg'=\mathrm{Id}_N$), 且 f 是 g 的核;

(iii) 存在态射 $f'\colon L\longrightarrow M$ 和 $g'\colon N\longrightarrow L$, 使得

$$f'f=\mathrm{Id}_M,\quad ff'+g'g=\mathrm{Id}_L,\quad gg'=\mathrm{Id}_N\,.$$

(iv) 存在同构 $\gamma\colon M\oplus N\longrightarrow L$ 使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, equal] & M\oplus N \arrow[r, "{(0,1)}"] \arrow[d, "\gamma"] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] & L \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

证明 只要证明 (i), (iii), (iv) 的等价性. 对反范畴使用 (i), (iii), (iv) 的等价性, 即得 (ii), (iii), (iv) 的等价性.

(i) $\Longrightarrow$ (iii): 因为 $(\mathrm{Id}_L-ff')f=f-f=0$ 且 g 是 f 的余核, 故存在 $g'\colon N\longrightarrow L$ 使得 $\mathrm{Id}_L-ff'=g'g$, 即 $ff'+g'g=\mathrm{Id}_L$. 于是 $\mathrm{Id}_N\,g=g=g(ff'+g'g)=gg'g$. 因为 g 是满态射, 故 $\mathrm{Id}_N=gg'$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv): 因 $f'=f'\,\mathrm{Id}_L=f'(ff'+g'g)=f'+f'g'g$，故 $f'g'g=0$. 因 g 是满态射, 故 $f'g'=0$.

取 $\gamma=(f,g')$. 则 $\binom{f'}{g}\colon L\longrightarrow M\oplus N$ 是 $\gamma=(f,g')$ 的逆:

$$(f,g')\begin{pmatrix}f'\\ g\end{pmatrix}=ff'+g'g=\mathrm{Id}_L,\quad \begin{pmatrix}f'\\ g\end{pmatrix}(f,g')=\begin{pmatrix}f'f & f'g'\\ gf & gg'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{Id}_M & 0\\ 0 & \mathrm{Id}_N\end{pmatrix}.$$

易知 (iv) 中的图交换.

(iv) $\Longrightarrow$ (i): 因 $f=\gamma\binom{1}{0}$ 且 γ 是同构且$\binom{1}{0}$ 可裂单, 故 f 可裂单. 由 (iv) 中的交换图以及 $\binom{1}{0}$ 的余核是 $(0,1)$，即知 g 是 f 的余核. $\square$

§7.6 正合范畴中的可裂 conflations

定义-引理 7.9 正合范畴 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 中的态射序列 $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ 称为可裂 conflation, 如果满足下述等价的条件:

(i) f 是可裂单态射, 且 g 是 f 的余核;

(ii) g 是可裂满态射, 且 f 是 g 的核;

(iii) 存在态射 $f' : L \longrightarrow M$ 和 $g' : N \longrightarrow L$, 使得

$$f'f = \mathrm{Id}_M, \quad ff' + g'g = \mathrm{Id}_L, \quad gg' = \mathrm{Id}_N .$$

(iv) 存在同构 $\gamma : M \oplus N \longrightarrow L$ 使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, equal] & M \oplus N \arrow[r, "(0,1)"] \arrow[d, "\gamma"] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] & L \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

此时, (f, g) 是 conflation, 即 $(f, g) \in \mathcal{E}$.

证明 与引理 7.8的证明完全相同. 因为 $(\binom{1}{0}, (0,1))$ 是 conflation 且 (f, g) 同构于 $(\binom{1}{0}, (0,1))$, 于是 $(f, g) \in \mathcal{E}$ (注意到在正合范畴的公理中要求 $\mathcal{E}$ 对同构封闭), 即 (f, g) 是 conflation. □

重要注记 7.10 (1) 引理 7.9 表明正合范畴 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 中的可裂 conflations 与加法范畴$\mathcal{A}$ 中的可裂短正合列完全是一回事, 即 $\mathcal{A}$ 中的可裂短正合列都是 conflations, 即都属于 $\mathcal{E}$. 这主要是因为有 $\mathcal{E}$ 对同构封闭的公理.

(2) 引理 7.9 也说明了有余核的可裂单态射是 inflation, 有核的可裂满态射是 deflation.

§7.7 弱幂等完备正合范畴

We need the following result (see [DRSSK, Appendix, Proposition]; also [Bü, Definition 7.2, Proposition 7.6]).

命题 7.11 Let $\mathcal{A}$ be an exact category. Then the following are equivalent:

(i) Any splitting epimorphism in $\mathcal{A}$ is a deflation.

(ii) Any splitting epimorphism in $\mathcal{A}$ has a kernel.

(iii) Any splitting monomorphism in $\mathcal{A}$ is an inflation.

(iv) Any splitting monomorphism in $\mathcal{A}$ has a cokernel.

(v) If de is a deflation, then so is d.

(vi) If ki is an inflation, then so is i.

In fact, the assertions (ii) and (iv) are equivalent for any additive category (see [Bü, Lemma 7.1]). Following [Bü], we call an exact category satisfying the above equivalent conditions in Proposition 7.11 *a weakly idempotent complete* exact category. See also [TT, Example 1.11.5].

例 7.12 我们遇到的许多正合范畴都是弱幂等完备的; 但的确存在不是弱幂等完备的正合范畴.

(1) 下面是一个简单的例子.

设 k为域, k-Vect是所有 k-线性空间作成的 Abel范畴. 令 $\mathcal{A}$ 为 k-Vect 中偶数维以及无限维 k-线性空间作成的满子范畴. 则 $\mathcal{A}$ 是扩张闭的, 故它是正合范畴. 考虑线性变换

$$f: k\oplus k\oplus k\oplus\cdots\longrightarrow k\oplus k\oplus k\oplus\cdots,\quad (a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots)\mapsto(a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots).$$

则 f 可裂满. 因 $\mathrm{Ker}f=k\notin\mathcal{A}$, 故 f 不是 $\mathcal{A}$ 中的 delation. 从而 $\mathcal{A}$ 不是弱幂等完备的.

(2) 下面例子来自代数几何.

设 R 是这样的环, 存在有限生成投射 R-模 P 不是自由模, 但存在正整数 n 使得 $P\oplus R^n$ 是自由模. 设 $\mathcal{A}$ 是有限生成自由 R-模范畴. 则 $\mathcal{A}$ 是正合范畴, 因为 $\mathcal{A}$ 是 R-mod 的扩张闭满子范畴. 但 $\mathcal{A}$ 不是弱幂等完备的: 因为 P 不是自由模, 故 $\mathcal{A}$ 中可裂单态射 $\binom{0}{1}: R^n\longrightarrow P\oplus R^n$ 没有核.

这样的环自然地出现在代数几何中. 设 $R=\mathbb{R}[X,Y,Z]/\langle X^2+Y^2+Z^2-1\rangle$ 是 2-球 S^2 的坐标环. 注意到有限生成投射 R- 模 P 就相当于代数向量丛, 而 P 是自由模当且仅当相应的丛是平凡的. 切丛 $TS^2=\{(f,g,h)\in R^3\ /\ Xf+Yg+Zh=0\}$ 满足 $TS^2\oplus R\cong R^3$ (切丛与正规丛的直和是平凡丛), 因此 TS^2 是投射模, 但 TS^2 不是自由模 (The hairy ball theorem).

§8　Frobenius 范畴上的模型结构

Frobenius 范畴是特殊的正合范畴. 有限群的表示范畴，有限维 Hopf 代数的模范畴，自入射代数的模范畴, 环上 Gorenstein 投射模范畴，加法范畴的复形范畴, 都是 Frobenius 范畴. Frobenius 范畴的稳定范畴有自然三角结构. 因此, Frobenius 范畴的理论非常基本、非常重要.

本节要说明 Frobenius 范畴 $\mathcal{F}$ 上有自然的模型结构; 这个模型结构是闭模型结构当且仅当 $\mathcal{F}$ 是弱幂等完备的.

§8.1　Frobenius 范畴

定义 8.1　设 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 是正合范畴.

(1) 对象 P 称为 $\mathcal{E}$-投射对象, 或投射对象, 若对 $\mathcal{A}$ 中任意短正合列 $0 \longrightarrow X \stackrel{u}{\longrightarrow} Y \stackrel{v}{\longrightarrow} Z \longrightarrow 0$ (即 $(u, v) \in \mathcal{E}$) , 以及任意态射 $f : P \longrightarrow Z$, 均存在态射 $g : P \longrightarrow Y$ 使得 $f = vg$.

对偶地, 对象 I 称为 $\mathcal{S}$-内射对象, 或内射对象, 若对 $\mathcal{A}$ 中任意短正合列 $0 \longrightarrow X \stackrel{u}{\longrightarrow} Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ 以及任意态射 $f : X \longrightarrow I$, 均存在态射 $g : Y \longrightarrow I$ 使得 $f = gu$.

(2) 称 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 有足够多投射对象, 如果对每个 $X \in \mathcal{A}$, 存在 $\mathcal{A}$ 中短正合列 $0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow X \longrightarrow 0$, 其中 P 是投射对象.

对偶地, 称 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 有足够多内射对象, 如果对每个 $X \in \mathcal{A}$, 存在 $\mathcal{A}$ 中 短正合列 $0 \longrightarrow X \longrightarrow I \longrightarrow C \longrightarrow 0$, 其中 I 是内射对象.

(3) 称正合范畴 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 是 Frobenius 范畴, 如果它有足够多投射对象和足够多内射对象, 并且一个对象是投射的当且仅当它是内射的.

(4) 设 $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ 是 Frobenius 范畴. 稳定范畴 $\underline{\mathcal{A}}$ 是如下定义的加法范畴:

- $\underline{\mathcal{A}}$ 中对象就是 $\mathcal{A}$ 中的对象;

- 对 $X, Y \in \underline{\mathcal{A}}$, $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{A}}}(X, Y)$ 是商群 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)/I(X, Y)$, 其中 $I(X, Y)$ 是通过投射-内射对象分解的态射 f 作成的子群, 即, 存在 $g : X \longrightarrow I$, $h : I \longrightarrow Y$ 使得 $f = hg$, 其中 I 是内射对象.

对 $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$, 用 $\underline{u}$ 表 示 $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{A}}}(X, Y)$ 中的元 $u + I(X, Y)$.

引理 8.2 Let $\mathcal{A}$ be a Frobenius category. Then $X = 0$ in $\underline{\mathcal{A}}$ if and only if X is a projective-injective object.

证明　Note that $X = 0$ in $\underline{\mathcal{A}}$ if and only if $\mathrm{Id}_X = 0$ in $\underline{\mathcal{A}}$, which means that Id_X is factored through a projective object P:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "a"'] & & X \\ & P \arrow[ur, "b"'] & \end{tikzcd}$$

Consider the exact sequence

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "a"'] & Q \arrow[r, "\pi"] \arrow[dl, dotted, "t"] & L \arrow[r] & 0, \\ & P & & & \end{tikzcd}$$

then there exists $t : Q \longrightarrow P$ such that $t\sigma = a$. Since $a = t\sigma$ is splitting monic, so σ is splitting monic. So X is a direct summand of Q (cf. Lemma 7.9), which implies X is a projective-injective object. $\square$

§8.2 例子

(1) Frobenius 范畴的反范畴是 Frobenius 范畴.

(2) 有限群的表示范畴，有限维 Hopf 代数的模范畴，自入射代数的模范畴, 环上 Gorenstein 投射模范畴，都是 Frobenius 范畴.

(3) 有足够多投射对象的 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 上的 Gorenstein 投射对象作成的全子范畴是 Frobenius 范畴.

(4) 加法范畴 $\mathcal{A}$ 的复形范畴 $\mathcal{C}^b(\mathcal{A})$, $\mathcal{C}^+(\mathcal{A})$, $\mathcal{C}^-(\mathcal{A})$, $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, 都是 Frobenius 范畴, 其中 conflation 为复形的链可裂短正合列 $0 \longrightarrow X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} Z^\bullet \longrightarrow 0$. 细节参见本节最后.

§8.3 Frobenius 范畴的嵌入定理

相应于小 Abel范畴的 Freyd-Mitchell 嵌入定理和小正合范畴的 Gabriel-Quillen 嵌入定理, 也有小 Frobenius 范畴的嵌入定理. 参见 [C, Theorem 4.2].

定理 8.3 (Gabriel-Quillen-Chen 嵌入定理) *设 $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ 是 Frobenius 范畴. 则存在有足够多投射对象的 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 和满忠实且正合的函子 $H\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{A}$ 使得 $\mathrm{Im}F \subseteq \mathcal{G}P(\mathcal{A})$, 其中 $\mathcal{G}P(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$ 中 Gorenstein 投射对象作成的满子范畴, 并且 H 反射正合性.*

§8.4 Trivial inflations and trivial deflations

Let $\mathcal{F}$ be a Frobenius category. Put

$$\mathrm{Cofib}(\mathcal{F}) := \{f : X \longrightarrow Y \mid f \text{ is an inflation}\}$$

$$\mathrm{Fib}(\mathcal{F}) := \{f : X \longrightarrow Y \mid f \text{ is a deflation}\}$$

$$\mathrm{Weq}(\mathcal{F}) := \{f : X \longrightarrow Y \mid \underline{f} \text{ is an isomorphism in } \underline{\mathcal{F}}\}.$$

We call a morphism in $\mathrm{Cofib}(\mathcal{F}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{F})$ *a trivial inflation*, a morphism in $\mathrm{Fib}(\mathcal{F}) \cap \mathrm{Weq}(\mathcal{F})$ *a trivial deflation.*

引理 8.4 (1) Let $i : A \longrightarrow B$. Then i is a trivial inflation if and only if i is splitting monic and $\operatorname{Coker} i$ is a projective-injective object.

($1'$) Let $p : X \longrightarrow Y$. Then p is a trivial deflation if and only if p is splitting epic and $\operatorname{Ker} i$ is a projective-injective object.

证明 只证 (1). 结论 ($1'$) 有对偶性即知. Since $\underline{i}$ is an isomorphism, there exists $j : B \longrightarrow A$ such that the following two diagrams commutes

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "ji-\mathrm{Id}_A"] \arrow[dr, "-c"'] & & A \\ & P \arrow[ur, "d"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\mathrm{Id}_A"] \arrow[dr, "\binom{i}{c}"'] & & A \\ & B \oplus P \arrow[ur, "(j,d)"'] & \end{tikzcd}$$

where P is a projective-injective object. Since i is an inflation, there is a morphism $c' : B \longrightarrow P$ such that the following diagram with exact row commutes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "c"'] & B \arrow[r, "\pi"] \arrow[dl, dotted, "c'"] & Q \arrow[r] & 0 \\ & P & & & \end{tikzcd}$$

So $\binom{i}{c} = \binom{1}{c'} i$. Since $\binom{i}{c}$ is splitting monic, i is splitting monic. By Lemma 7.9, there is an isomorphism $(i, *) : A \oplus Q \longrightarrow B$ in $\mathcal{F}$. Since $(i, *)\binom{1}{0} = \underline{i}$ is an isomorphism, it follows that $\binom{1}{0} : A \longrightarrow A \oplus Q$ is an isomorphism in $\underline{\mathcal{F}}$, say with inverse $(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) : A \oplus Q \longrightarrow A$. Then

$$\begin{pmatrix} \underline{1} \\ \underline{0} \end{pmatrix} (\underline{\alpha}, \underline{\beta}) = \begin{pmatrix} \underline{\alpha} & \underline{\beta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{0} \\ 0 & \underline{1} \end{pmatrix}.$$

So $\mathrm{Id}_{\underline{Q}} = 0$, i.e., $Q = 0$ in $\underline{\mathcal{F}}$. By Lemma 8.2, Q is a projective-injective object. $\square$

§8.5 主定理

定理 8.5 ([G2], [L]) Let $\mathcal{F}$ be a Frobenius category. Then (Cofib($\mathcal{F}$), Fib($\mathcal{F}$), Weq($\mathcal{F}$)) is a model structure on $\mathcal{F}$; 这个模型结构的余纤维对象类为 $\mathcal{F}$, 纤维对象类为 $\mathcal{F}$, 平凡对象类为 $\mathcal{P}$, 即 $\mathcal{F}$ 的投射-内射对象作成的类. 这个模型结构的同伦范畴是 $\mathrm{Ho}(\mathcal{F}) = \underline{\mathcal{F}}$, 即 $\mathcal{F}$ 关于 $\mathcal{P}$ 的稳定范畴.

Moreover, it is a closed model structure if and only if $\mathcal{F}$ is weakly idempotent complete.

证明 **(M1)(1).** If there is a commutative square

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, hook, "i"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "b"'] \arrow[ur, dotted, "s"] & Y \end{tikzcd}$$

with i a trivial inflation, and p a deflation, then there exists a morphism $s : B \longrightarrow X$ such that $si = a$, $ps = b$.

Proof of (M1)(1). By Lemma 8.4, i is a splitting monomorphism with cokernel a projective-injective object Q. Thus one gets a splitting conflation $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 0$. By Lemma 7.9, there exists $i' : B \longrightarrow A$ and $\pi' : Q \longrightarrow B$ such that

$$i'i = \mathrm{Id}_A, \quad \pi\pi' = \mathrm{Id}_Q, \quad ii' + \pi'\pi = \mathrm{Id}_B\,.$$

Since Q is projective-injective and p is a deflation, there exists $t : Q \longrightarrow X$ such that $pt = b\pi'$:

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[dl, dotted, "t"'] \arrow[d, "b\pi'"] \\ X \arrow[r, "p"] & Y \end{tikzcd}$$

Let $s := ai' + t\pi : B \longrightarrow X$. Then

$$si = (ai' + t\pi)i = ai'i = a, \quad ps = p(ai' + t\pi) = bii' + b\pi'\pi = b.$$

This completes the proof of (M1)(1).

Similarly, one can prove **(M1)(2)**: if there is a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, hook, "i"'] & X \arrow[d, two heads, "p"] \\ B \arrow[r, "b"] \arrow[ur, dotted] & Y \end{tikzcd}$$

with i an inflation, p a trivial deflation, then there exists a morphism $s : B \longrightarrow X$ such that $si = a$, $ps = b$.

(M2). Any morphism $f : X \longrightarrow Y$ can be decomposed as $f = pi$ with $i : X \longrightarrow Z$ a trivial inflation and p a deflation; and that $f = p'i'$ with $i' : X \longrightarrow Z'$ an inflation and $p' : Z' \longrightarrow Y$ a trivial deflation.

Proof of (M2). Since $\mathcal{F}$ has enough projective objects, there is an exact sequence $0 \longrightarrow K \longrightarrow P \xrightarrow{\pi} Y \longrightarrow 0$ with P a projective object. One has the decomposition of f:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\binom{1}{0}"'] & & Y \\ & X \oplus P \arrow[ur, "(f,\pi)"'] & \end{tikzcd}$$

where P is a projective-injective object, and π is a deflation. Note that $i = \binom{1}{0}$ is an inflation and $\underline{i} = \underline{\mathrm{Id}_X}$ is an isomorphism, and that $p = (f, \pi)$ is a deflation (since π is a deflation).

Similarly, one can prove the second assertion.

(M3). By construction, it is clear that $\mathrm{Fib}(\mathcal{F})$ and $\mathrm{Cofib}(\mathcal{F})$ are closed under compositions and that isomorphisms are both fibrations and cofibrations. It mains to prove that $\mathrm{Fib}(\mathcal{F})$ is closed under pullback, and that $\mathrm{Cofib}(\mathcal{F})$ is closed under pushout. By construction, these are exactly the axioms (E2) and (E2$^{\mathrm{op}}$) of an exact category, respectively.

(M4)(1). Assume that

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "q"'] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "b"] & Y \end{tikzcd}$$

is a pullback square with p a trivial deflation. Then $\underline{q}$ is an isomorphism in $\underline{\mathcal{F}}$.

Proof of (M4)(1). By the axiom of an exact category, q is a deflation, say, with conflation (i', q). By Proposition 7.5(1) one has the commutative diagram

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "i'"] \arrow[d, equal] & A \arrow[r, "q"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "b"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, "p"] & Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

where (i, p) is a conflation. By Lemma 8.4, p is splitting epic with I a projective-injective object. Since I is a projective-injective object, i' is splitting monic. Thus q is splitting epic, by Lemma 7.9. Again by Lemma 7.9(iv), there is an isomorphism $\gamma : I \oplus B \longrightarrow A$ such that

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, equal] & I \oplus B \arrow[r, "(0,1)"] \arrow[d, "\gamma"] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "i'"] & A \arrow[r, "q"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

commutes. Thus $\underline{q} = \underline{(0,1)} \cdot \underline{\gamma^{-1}}$ is an isomorphism in $\underline{\mathcal{F}}$.

Dually, one can prove **(M4)(2)**: Trivial inflation is closed under pushout.

The axiom **(M5)** clearly holds by construction.

Thus, we have proved that $(\mathrm{Cofib}(\mathcal{F}),\ \mathrm{Fib}(\mathcal{F}),\ \mathrm{Weq}(\mathcal{F}))$ is a model structure on $\mathcal{F}$.

根据构造, 这个模型结构的余纤维对象恰为对象 X, 其中 $0 \longrightarrow X$ 是 inflation. 因此余纤维对象类为 $\mathcal{F}$. 同理, 纤维对象类为 $\mathcal{F}$. 对象 W 是平凡对象当且仅当 $0 : 0 \longrightarrow W$ 是弱等价, 即 $0 : 0 \longrightarrow W$ 是稳定范畴 $\underline{\mathcal{F}}$ 的同构，即平凡对象类为 $\mathcal{P}$.

下面说明这个模型结构的同伦范畴是 $\mathrm{Ho}(\mathcal{F}) = \underline{\mathcal{F}}$. 由定理 4.11, $\mathrm{Ho}(\mathcal{F})$ 就是 $\mathcal{F}$ 关于左(或，右)同伦关系理想的商范畴 (此时左同伦关系与右同伦关系重合). 设 $f,\ g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$. 只要证 $f \sim g$ 当且仅当 $f - g$ 通过 $\mathcal{P}$ 中对象分解. 设 $f \sim g$. 由定义-引理 4.2 知存在交换图

$$\begin{tikzcd} A \oplus A \arrow[r, "(f,g)"] \arrow[d, "(1,1)"'] \arrow[dr, "(\partial_0,\partial_1)"] & B \\ A & \widetilde{A} \arrow[l, "\sigma"] \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

其中 σ 是弱等价, 即 $\underline{\sigma}$ 是稳定范畴 $\underline{\mathcal{F}}$ 的同构. 因为 $\sigma\partial_0 = 1 = \sigma\partial_1$, 故 $\underline{\partial_0} = \underline{\partial_1}$, 即 $\partial_0 - \partial_1$ 通过 $\mathcal{P}$ 中对象分解，从而 $f - g$ 通过 $\mathcal{P}$ 中对象分解.

反之, 设 $f - g$ 通过 $\mathcal{P}$ 中对象分解, 即有交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f-g"] \arrow[dr, "p"'] & & B \\ & P \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

其中 $P \in \mathcal{P}$. 则有交换图

$$\begin{tikzcd} A \oplus A \arrow[r, "{(f,g)}"] \arrow[d, "{(1,1)}"'] \arrow[dr, "\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right)"] & B \\ A & A \oplus P \arrow[l, "{(1,0)}"'] \arrow[u, "{(g,h)}"'] \end{tikzcd}$$

其中 $\sigma = (1,0)$ 是弱等价. 由定义-引理 4.2 知 $f \sim g$.

最后, It remains to prove that this model structure on $\mathcal{F}$ is a closed model structure if and only if $\mathcal{F}$ is weakly idempotent complete. That is, $\operatorname{Cofib}(\mathcal{F}),\ \operatorname{Fib}(\mathcal{F}),\ \operatorname{Weq}(\mathcal{F})$ are closed under retract if and only if $\mathcal{F}$ is weakly idempotent complete.

Assume that $\mathcal{F}$ is weakly idempotent complete. Let f be a retract of g, i.e., there is a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "f"'] & \bullet \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "g"'] & \bullet \arrow[d, "f"'] \\ \bullet \arrow[r, "\varphi_2"] & \bullet \arrow[r, "\psi_2"] & \bullet \end{tikzcd}$$

with $\psi_1\varphi_1 = \mathrm{Id}$, $\psi_2\varphi_2 = \mathrm{Id}$.

Let $g \in \operatorname{Cofib}(\mathcal{F})$, i.e., g be an inflation. Since φ_1 is splitting monic, it is an inflation, by Proposition 7.11(iii). Thus $\varphi_2 f = g\varphi_1$ is an inflation, by the axiom ($\mathrm{E1^{op}}$). It follows from Proposition 7.11(vi) that f is an inflation, i.e., $f \in \operatorname{Cofib}(\mathcal{F})$.

Similarly, one can prove that $\operatorname{Fib}(\mathcal{F})$ is closed under retract.

Let $\underline{g}$ be an isomorphism. By the left square one has $\underline{\varphi_2} \cdot \underline{f} = \underline{g} \cdot \underline{\varphi_1}$. Thus $\underline{\psi_1} \cdot \underline{g}^{-1} \cdot \underline{\varphi_2} \cdot \underline{f} = \mathrm{Id}$, i.e., $\underline{f}$ has a left inverse. Similarly, by the right square one sees that $\underline{f}$ has a right inverse. So $\underline{f}$ is an isomorphism.

Thus, we have proved that if $\mathcal{F}$ is weakly idempotent complete, then $\operatorname{Cofib}(\mathcal{F}),\ \operatorname{Fib}(\mathcal{F}),\ \operatorname{Weq}(\mathcal{F})$ are closed under retract. Conversely, assume that $\operatorname{Cofib}(\mathcal{F}),\ \operatorname{Fib}(\mathcal{F}),\ \operatorname{Weq}(\mathcal{F})$ are closed under retract. We need to prove that $\mathcal{F}$ is weakly idempotent complete. By Proposition 7.11(iii), it suffices to prove that any splitting monomorphism $f : X \longrightarrow Y$ is an inflation. Let $g : Y \longrightarrow X$

be a morphism such that $gf = \mathrm{Id}_X$. The commutative diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\binom{1}{-f}"] \arrow[d, equal] & X \oplus Y \arrow[r, "(f,1)"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f & 1 \end{pmatrix}"'] & Y \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, "\binom{1}{0}"] & X \oplus Y \arrow[r, "(0,1)"] & Y \end{tikzcd}$$

shows that $\binom{1}{-f}$ is an inflation. The commutative diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[r, equal] \arrow[d, "\binom{1}{-f}"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "\binom{g}{-1}"] & X \oplus Y \arrow[r, "(f,fg-1)"] & Y \end{tikzcd}$$

shows that f is a retract of $\binom{1}{-f}$. Thus f is an inflation.

This completes the proof. $\square$

§8.6 例：加法范畴的复形范畴是 Frobenius 范畴

加法范畴 $\mathcal{A}$ 的复形范畴 $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ 中短正合列 $0 \to X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \to 0$ 称为链可裂短正合列, 如果对任意 $n \in \mathbb{Z}$, $0 \to X^n \xrightarrow{u^n} Y^n \xrightarrow{v^n} Z^n \to 0$ 均是可裂短正合列, 即, 存在态射 $s^n : Z^n \to Y^n$, $\pi^n : Y^n \to X^n$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, 使得

$$v^n s^n = \mathrm{Id}_{Z^n}, \quad \pi^n u^n = \mathrm{Id}_{X^n}, \quad \pi^n s^n = 0, \quad u^n \pi^n + s^n v^n = \mathrm{Id}_{Y^n};$$

也即, 它 同构于 $0 \to X^n \xrightarrow{\binom{1}{0}} X^n \oplus Z^n \xrightarrow{(0,1)} Z^n \to 0$. 称 u 为链可裂单的, v 为链可裂满的. 注意, $s = (s^n)$ 和 $\pi = (\pi^n)$ 未必作成链映射.

本讲义中将复形 (X, d_X) 写成(上链, cochain)

$$\cdots \longrightarrow X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \longrightarrow \cdots$$

平移 $X[1]$ 指向左平移一步, 微分变负;平移 $X[-1]$ 指向右平移一步, 微分变负. 因此, 对任意整数 m, 平移 $X[m]$ 的第 n 个位置是 X^{n+m}, 第 n 次微分是 $(-1)^m d_X^{n+m}$.

链映射 $f : X \longrightarrow Y$ 的映射锥 $\mathrm{Cone}(f)$, 它是这样的复形: 其第 n 次齐次分支为

$$(\mathrm{Cone}(f))^n := X^{n+1} \oplus Y^n, \ \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

其第 n次微分为

$$\begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ f^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix} : \quad X^{n+1} \oplus Y^n \longrightarrow X^{n+2} \oplus Y^{n+1}.$$

每个映射锥确定一个链可裂短正合列 $0 \to Y \xrightarrow{\binom{0}{1}} \mathrm{Cone}(f) \xrightarrow{(1\ 0)} X[1] \to 0$.

定义-引理 8.6 (I. Iversen) 设 $\mathcal{A}$ 是加法范畴, $0 \to X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \to 0$ 是复形范畴 $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ 中的链可裂短正合列, 态射 $s^n : Z^n \to Y^n$, $\pi^n : Y^n \to X^n, \forall\, n \in \mathbb{Z}$, 满足

$$v^n s^n = \mathrm{Id}_{Z^n}, \quad \pi^n u^n = \mathrm{Id}_{X^n}, \quad \pi^n s^n = 0, \quad u^n \pi^n + s^n v^n = \mathrm{Id}_{Y^n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

则存在同伦意义下唯一的链映射 $h : Z \to X[1]$ 使得对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 有

$$u^{n+1} h^n = s^{n+1} d_Z^n - d_Y^n s^n : Z^n \to Y^{n+1}, \qquad h^n v^n = d_X^n \pi^n - \pi^{n+1} d_Y^n : Y^n \to X^{n+1}$$

将 h 称为链可裂短正合列 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$ 的同伦不变量.

命题 8.7 (I. Iversen) 设链可裂短正合列 $0 \to X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \to 0$ 的同伦不变量是 $h : Z \to X[1]$. 则有链映射的交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\binom{v}{\pi}"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\binom{0}{1}"] & \mathrm{Cone}(-h[-1]) \arrow[r, "(1,0)"] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中链映射 $\binom{v}{\pi}$ 是复形的同构, 其逆为 (s, u), 且下行中的链可裂短正合列的同伦不变量就是 h.

引理 8.8 设 $\mathcal{A}$ 是加法范畴. 则 $(\mathcal{C}(\mathcal{A}), \mathcal{E})$ 是正合范畴, $\mathcal{E}$ 是链可裂短正合列作成的类. 特别地, 我们有 (以下记号同上).

(1) 设 $f : W \to Z$ 是任一链映射. 则下图中的方块是拉回方块

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\binom{0}{1}"] & \mathrm{Cone}(-h[-1]f[-1]) \arrow[r, "(1,0)"] \arrow[d, "(s,u)\left(\begin{smallmatrix} f & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)"'] & W \arrow[d, "f"] \\
& Y \arrow[r, "v"] & Z
\end{tikzcd}$$

因此, 链可裂满链映射的拉回诱导的链映射 $(1, 0) : \mathrm{Cone}(-h[-1]f[-1]) \to W$ 仍是链可裂满的.

(1′) 设 $g : X \to W'$ 是任一链映射. 则下图中的方块是推出方块

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{smallmatrix}\right)\binom{v}{\pi}"] & \\
W' \arrow[r, "\binom{0}{1}"] & \mathrm{Cone}(-gh[-1]) \arrow[r, "(1,0)"] & Z
\end{tikzcd}$$

因此, 链可裂单链映射的推出诱导的链映射 $\binom{0}{1} : W' \to \mathrm{Cone}(-gh[-1])$ 仍是链可裂单的.

对每一对象 $A \in \mathcal{A}$ 和任意整数 i, 定义在第 i 和第 $i+1$ 处是 A 的复形

$$P^i(A) = \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow A \xrightarrow{=} A \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots,$$

则 $P^i(A)$ 是 $(\mathcal{C}(\mathcal{A}),\mathcal{E})$ 的投射对象. 定义在第 $i-1$ 和第 i 处是 A 的复形

$$I^i(A) = \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow A \xrightarrow{=} A \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots .$$

则 $I^i(A) = P^{i-1}(A)$ 且 $I^i(A)$ 是 $(\mathcal{C}(\mathcal{A}),\mathcal{E})$ 的内射对象. 对复形 $X = (X^i, d^i)$, 定义

$$P(X) = (X^i \oplus X^{i-1}, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} P^i(X^i), \quad I(X) = (X^i \oplus X^{i+1}, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} I^i(X^i).$$

则 $P(X)$ 和 $I(X)$ 既是投射对象也是内射对象. 有链可裂短正合列 $0 \to X[-1] \to P(X) \to X \to 0$ 和 $0 \to X \to I(X) \to X[1] \to 0$, 即 $(\mathcal{C}(\mathcal{A}),\mathcal{E})$ 有足够多投射对象和足够多内射对象.

任意投射对象 P 是 $P(P)$ 的直和项; 任意内射对象 I 是 $I(I)$ 的直和项. 因此 $(\mathcal{C}(\mathcal{A}),\mathcal{E})$ 的投射对象类与内射对象类是相同的. 这就说明了 $(\mathcal{C}(\mathcal{A}),\mathcal{E})$ 是 Frobenius 范畴.

命题 8.9 设 $\mathcal{A}$ 是加法范畴. 则复形范畴 $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ 连同其中的链可裂短正合列作成 Frobenius范畴, 其稳定范畴是 (经典的) 同伦范畴 $K(\mathcal{A})$.

从而, $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ 有模型结构, 其 Quillen 同伦范畴 $\mathrm{Ho}(\mathcal{C}(\mathcal{A}))$ 就是(经典的)同伦范畴 $K(\mathcal{A})$.

§9　复形范畴上的诱导 Hovey 三元组

本节总假定 $\mathcal{C}$ 是 Abel 范畴，$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 是 $\mathcal{C}$ 中的余挠对, $\mathrm{Ch}(\mathcal{C})$ 和 $K(\mathcal{C})$ 分别是 $\mathcal{C}$ 上的复形范畴和同伦范畴. 不再每次声明.

本节目的: 从 $\mathcal{C}$ 中的余挠对出发, (在适当的条件下)诱导出 $\mathrm{Ch}(\mathcal{C})$ 中的余挠对和 Hovey 三元组. 除 6.5，6.6 两小节外，内容大部分出自 J. Gillespie [G1].

§9.1　关于链可裂短正合列的同伦不变量

下述事实是非常有用的. 其证明事实上已在表述中说明.

引理 9.1　(1) 链可裂短正合列 $0 \to X \overset{u}{\to} Y \overset{v}{\to} Z \to 0$ 可裂当且仅当其同伦不变量 h 在同伦范畴中为零, 即 $h \sim 0$.

(2)　给定链映射$f : X \longrightarrow Y$. 则链可裂短正合列 $0 \longrightarrow Y \xrightarrow{\binom{0}{1}} \mathrm{Cone}(f) \xrightarrow{(1\ 0)} X[1] \longrightarrow 0$ 的同伦不变量是 $-f[1]$; 它是可裂短正合列当且仅当 $f \overset{t}{\sim} 0$. 此时 $\binom{1}{-t^{n+1}} : X[1] \to \mathrm{Cone}(f)$ 是链映射且是 $(1, 0)$ 的右逆.

其证明也已在表述中说明，是验证性的. 留作习题. 亦可参见 [I] 或 [Z, 命题 2.5.3].

对复形 $X, Y \in \mathrm{Ch}(\mathcal{C})$, 令 $\mathrm{Ext}^1_{dw}(X, Y)$ 是 $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Ch}(\mathcal{C})}(X, Y)$ 中由链可裂短正合列作成的类. 因为 $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Ch}(\mathcal{C})}(X, Y)$中两个链可裂短正合列的 Baer 和只涉及链可裂短正合列的直和，拉回，推出，而这三种操作保持链可裂短正合列；同时, $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Ch}(\mathcal{C})}(X, Y)$ 中链可裂短正合列 关于 Baer 和的负元仍是链可裂短正合列 因此 $\mathrm{Ext}^1_{dw}(X, Y)$ 是 $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Ch}(\mathcal{C})}(X, Y)$ 的子群.

引理 9.2　([G1, Lemma 2.1])　设 $\mathcal{C}$ 是小 Abel 范畴. 则 $\mathrm{Ext}^1_{dw}(X, Y)$ 是 $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Ch}(\mathcal{C})}(X, Y)$ 的子群，且有 Abel 群的同构

$$\mathrm{Ext}^1_{dw}(X, Y[n-1]) \cong \mathrm{H}^n \operatorname{Hom}^\bullet(X, Y) \cong \operatorname{Hom}_{K(\mathcal{C})}(X, Y[n]),\ \forall\ n \in \mathbb{Z}$$

其中第一个同构将链可裂短正合列 $0 \to Y[n-1] \to Z \to X \to 0$ 映到其同伦不变量 $h : X \to Y[n]$, 其逆映射将 h 映到链可裂短正合列 $0 \to Y[n-1] \xrightarrow{\binom{0}{1}} \mathrm{Cone}(-h[-1]) \xrightarrow{(1,0)} X \to 0$.

特别地, 若 $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Ch}(\mathcal{C})}(X, Y[n-1]) = 0$, 则 $f \sim 0$ (同伦于 0), $\forall\ f : X \to Y[n]$.

注记 9.3　上述引理中”$\mathcal{C}$ 是小范畴“, 仅为保证 $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Ch}(\mathcal{C})}(X, Y)$ 是集合. 当 $\mathcal{C}$ 有足够多投射对象, 或足够多内射对象时, $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Ch}(\mathcal{C})}(X, Y)$ 总是集合. 故在以下应用中, 不必假设 $\mathcal{C}$ 是小范畴.

§9.2　关于复形范畴的链映射、扩张、投射对象、内射对象的若干事实

下述类似于伴随的事实是熟知的，例如 [G1, Lemma 3.1]. 其中前 4 条是容易看出的.

引理 9.4 设 X 和 Y 是 Abel 范畴 $\mathcal{C}$ 上的复形, C 是 $\mathcal{C}$ 中的对象. 则 (以下同构均指群同构)

(1) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, Y^n) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{C})}(P^n(C), Y)$, 其中 $P^n(C)$ 是第 n 和第 $n+1$ 处是 C, 其它位置是 0 的复形.

(2) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^{n+1}, C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{C})}(X, P^n(C))$.

(3) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \mathrm{Ker}\, d_Y^n) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{C})}(C[-n], Y)$, 其中 $C[-n]$ 是第 n 处是 C, 其它位置是 0 的复形.

(4) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^n/\,\mathrm{Im}\, d_X^{n-1}, C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{C})}(X, C[-n])$.

(5) $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(C, Y^n) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Ch}(\mathcal{C})}(P^n(C), Y)$.

证明 设 $0 \to Y \xrightarrow{f} Z \xrightarrow{g} P^n(C) \to 0$ 是复形短正合列. 则其第 n 个位置就给出 $\mathcal{C}$ 中短正合列

$$0 \longrightarrow Y^n \xrightarrow{f^n} Z^n \xrightarrow{g^n} C \longrightarrow 0$$

这给出映射 $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Ch}(\mathcal{C})}(P^n(C), Y) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(C,\ Y^n)$. 根据 Yoneda 扩张的理论, 这个映射是群同态.

反之, 给定 $\mathcal{C}$ 中短正合列 $0 \to Y^n \xrightarrow{f^n} Z^n \xrightarrow{g^n} C \to 0$, 作 f^n 和 d_Y^n 的推出，得到如下正合列的交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Y^{n-1} \arrow[r, equal] \arrow[d, "d_Y^{n-1}"'] & Y^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f^n d_Y^{n-1}"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y^n \arrow[r, "f^n"] \arrow[d, "d_Y^n"'] & Z^n \arrow[r, "g^n"] \arrow[d, "d_Z^n"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y^{n+1} \arrow[r, "f^{n+1}"] \arrow[d, "d_Y^{n+1}"'] & Z^{n+1} \arrow[r, "g^{n+1}"] \arrow[d, "d_Z^{n+1}"] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y^{n+2} \arrow[r, equal] & Y^{n+2} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中 d_Z^{n+1} 的存在和唯一性由推出的泛性质保证. 令 $Z = (Z^m, d_Z^m)$，其中

$$Z^m = \begin{cases} Y^m, & m \neq n, n+1; \\ Z^n, & m = n; \\ Z^{n+1}, & m = n+1. \end{cases} \qquad d_Z^m = \begin{cases} f^n d_Y^{n-1}, & m = n-1; \\ d_Y^m, & m \neq n, n+1; \\ d_Z^n, & m = n; \\ d_Z^{n+1}, & m = n+1. \end{cases}$$

$$f^m = \begin{cases} \mathrm{Id}_{Y^m}, & m \neq n, n+1; \\ f^n, & m = n; \\ f^{n+1}, & m = n+1. \end{cases} \qquad g^m = \begin{cases} 0, & m \neq n, n+1; \\ g^n, & m = n; \\ g^{n+1}, & m = n+1. \end{cases}$$

于是，得到复形短正合列 $0\to Y\xrightarrow{f}Z\xrightarrow{g}P^n(C)\to 0$，其第 n 个位置恰是给定的 $\mathcal{C}$ 中短正合列. 这给出群同态 $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Ch}(\mathcal{C})}(P^n(C),Y)\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(C,\ Y^n)$ 的逆同态 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(C,\ Y^n)\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Ch}(\mathcal{C})}(P^n(C),Y)$. ■

(6) $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(X^n,C)\cong \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Ch}(\mathcal{C})}(X,P^{n-1}(C))$.

其证明类似于 (5).

(7) 如果 Y 是无环复形, 则 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(C,\ \mathrm{Ker}\,d^n_Y)\cong \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Ch}(\mathcal{C})}(C[-n],Y)$.

证明 设 $0\to Y\to Z\to C[-n]\to 0$ 是复形的短正合列. 则有交换图

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & Y^{n-1} \arrow[r, equal] \arrow[d] & Y^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y^n \arrow[r] \arrow[d, "d^n_Y"'] & Z^n \arrow[r] \arrow[d, "d^n_Z"'] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y^{n+1} \arrow[r, equal] \arrow[d] & Y^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

由蛇引理得到正合列

$$0\to \mathrm{Ker}\,d^n_Y\to \mathrm{Ker}\,d^n_Z\to C\to \mathrm{Coker}\,d^n_Y\to \mathrm{Coker}\,d^n_Z\to 0$$

因为 $\mathrm{H}^i(Z)=\begin{cases}0, & i\neq n\\ C, & i=n\end{cases}$, 故 $\mathrm{Im}\,d^n_Z=\mathrm{Ker}\,d^{n+1}_Z=\mathrm{Ker}\,d^{n+1}_Y$. 因此态射 $\mathrm{Coker}\,d^n_Y\to \mathrm{Coker}\,d^n_Z$ 是同构, 从而得到正合列

$$0\to \mathrm{Ker}\,d^n_Y\to \mathrm{Ker}\,d^n_Z\to C\to 0.$$

这就给出映射 $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Ch}(\mathcal{C})}(C[-n],Y)\longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(C,\ \mathrm{Ker}\,d^n_Y)$.

反之, 设 $0\to \mathrm{Ker}\,d^n_Y\xrightarrow{f'}\widetilde{Z^n}\xrightarrow{g'}C\to 0$ 是 $\mathcal{C}$ 中短正合列. 考虑推出

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\,d^n_Y \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "i"'] & \widetilde{Z^n} \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "j"] & C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y^n \arrow[r, "f"] & Z^n \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

由此得到态射 $d_Z^n: Z^n \to Y^{n+1}$ 使下图交换

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} d_Y^n \arrow[r, "\binom{f'}{-i}"] & \widetilde{Z^n} \oplus Y^n \arrow[r, "{(j,f)}"] \arrow[d, "{(0,d_Y^n)}"'] & Z^n \arrow[r] \arrow[dl, "d_Z^n"] & 0 \\
& & Y^{n+1} & &
\end{tikzcd}$$

于是得到复形短正合列 $0 \to Y \to Z \to C[-n] \to 0$, 即有交换图

$$\begin{tikzcd}
& \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & Y^{n-1} \arrow[r, equal] \arrow[d, "d_Y^{n-1}"'] & Y^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "fd_Y^{n-1}"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d_Y^n"'] & Z^n \arrow[r, "g"] \arrow[d, "d_Z^n"'] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y^{n+1} \arrow[r, equal] \arrow[d] & Y^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

这就给出逆映射 $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{C}}(C,\ \operatorname{Ker} d_Y^n) \longrightarrow \operatorname{Ext}^1_{\operatorname{Ch}(\mathcal{C})}(C[-n],\ Y)$. ■

(8) 如果 X 是无环复形, 则 $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{C}}(\operatorname{Ker} d_X^n, C) \cong \operatorname{Ext}^1_{\operatorname{Ch}(\mathcal{C})}(X,\ C[-n])$.

其证明类似于 (7).

§9.3 复形范畴上的诱导余挠对

对于 Abel 范畴 $\mathcal{C}$ 中的余挠对 $(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$, 令 (参见 [G1, Definition 3.3])

$\mathcal{E} = \{\mathcal{C}$ 上的无环复形$\}$

$\mathcal{E}_{\mathcal{A}} = \{X \in \mathcal{E} \mid \operatorname{Ker} d_X^n \in \mathcal{A},\ \forall\, n \in \mathbb{Z}\}$

$\mathcal{E}_{\mathcal{B}} = \{X \in \mathcal{E} \mid \operatorname{Ker} d_X^n \in \mathcal{B},\ \forall\, n \in \mathbb{Z}\}$

$\mathrm{dg}\mathcal{A} = \{\mathcal{C}$ 上的复形 $X \mid X^n \in \mathcal{A},\ \operatorname{Hom}^\bullet(X,\ \mathcal{E}_{\mathcal{B}})$ 正合 $\} = \{X \mid \operatorname{Hom}_{K(\mathcal{C})}(X,\ \mathcal{E}_{\mathcal{B}}) = 0\}$

$\mathrm{dg}\mathcal{B} = \{\mathcal{C}$ 上的复形 $X \mid X^n \in \mathcal{B},\ \operatorname{Hom}^\bullet(\mathcal{E}_{\mathcal{A}},\ X)$ 正合 $\} = \{X \mid \operatorname{Hom}_{K(\mathcal{C})}(\mathcal{E}_{\mathcal{A}},\ X) = 0\}$.

对 $X \in \mathcal{E}_{\mathcal{A}}$, 易知 $X^n \in \mathcal{A},\ \forall\, n \in \mathbb{Z}$; 对 $X \in \mathcal{E}_{\mathcal{B}}$, 易知 $X^n \in \mathcal{B},\ \forall\, n \in \mathbb{Z}$.

在 $\mathrm{dg}\mathcal{A}$ 的定义中，去掉 $X^n \in \mathcal{A}$ 的要求, 并将 $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}$ 改成 $\mathcal{E}$, 就得到同伦投射复形的定义 ([Sp], [BN]), 即 X 是同伦投射复形, 如果 $\operatorname{Hom}^\bullet(X,\ \mathcal{E})$ 正合，或等价地 $\operatorname{Hom}_{K(\mathcal{C})}(X,\ \mathcal{E}) = 0$.

在同伦投射复形的定义中，如果还要求每个 X^n 均是投射对象, 则称为 dg 投射复形 ([AF]).

在 $\mathrm{dg}\mathcal{B}$ 的定义中，去掉 $X^n \in \mathcal{B}$ 的要求, 并将 $\mathcal{E}_\mathcal{A}$ 改成 $\mathcal{E}$, 就得到同伦内射复形的定义 ([Sp], [BN]), 即 X 是同伦内射复形, 如果 $\mathrm{Hom}^\bullet(\mathcal{E},\ X)$ 正合，或等价地 $\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{C})}(\mathcal{E},\ X) = 0$.

在同伦内射复形的定义中，如果还要求每个 X^n 均是内射对象, 则称为 dg 内射复形 ([AF]).

类似于“上有界投射复形是 dg 投射复形”和“下有界内射复形是 dg 内射复形”，用数学归纳法可以证明

引理 9.5 (1) $\mathcal{A}$ 上的上有界复形 $\in \mathrm{dg}\mathcal{A}$.

(2) $\mathcal{B}$ 上的下有界复形 $\in \mathrm{dg}\mathcal{B}$.

命题 9.6 ([G1, Proposition 3.6]) 设 $(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$ 是 Abel 范畴 $\mathcal{C}$ 中的余挠对. 则

(1) ${\mathcal{E}_\mathcal{A}}^{\perp_1} = \mathrm{dg}\mathcal{B}$.

进一步, 如果 $\mathcal{C}$ 中任意对象均是 $\mathcal{B}$ 中某一对象的子对象 (特别地, 如果 $\mathcal{C}$ 有足够多的内射对象), 则 $(\mathcal{E}_\mathcal{A}, \mathrm{dg}\mathcal{B})$ 是复形范畴 $\mathrm{Ch}(\mathcal{C})$ 中的余挠对.

(2) ${}^{\perp_1}\mathcal{E}_\mathcal{B} = \mathrm{dg}\mathcal{A}$.

进一步, 如果 $\mathcal{C}$ 中任意对象均是 $\mathcal{A}$ 中某一对象的商对象 (特别地, 如果 $\mathcal{C}$ 有足够多的投射对象), 则 $(\mathrm{dg}\mathcal{A},\ \mathcal{E}_\mathcal{B})$ 是 $\mathrm{Ch}(\mathcal{C})$ 中余挠对.

证明 只证 (1). 结论 (2) 类似可证.

先证 $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Ch}(\mathcal{C})}(\mathcal{E}_\mathcal{A},\ \mathrm{dg}\mathcal{B}) = 0$, 即，$\mathcal{E}_\mathcal{A} \subseteq {}^{\perp_1}(\mathrm{dg}\mathcal{B})$, $\mathrm{dg}\mathcal{B} \subseteq {\mathcal{E}_\mathcal{A}}^{\perp_1}$. 设 $0 \to B \to Z \to A \to 0$ 是复形的短正合列, 其中 $B \in \mathrm{dg}\mathcal{B}$, $A \in \mathcal{E}_\mathcal{A}$. 则它是链可裂短正合列. 因为其同伦不变量 $h \in \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{C})}(A, B[1]) \in \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{C})}(\mathcal{E}_\mathcal{A}, \mathrm{dg}\mathcal{B}) = 0$, 根据引理 9.1知这个链可裂短正合列可裂.

再证 ${\mathcal{E}_\mathcal{A}}^{\perp_1} \subseteq \mathrm{dg}\mathcal{B}$. 设 $B \in {\mathcal{E}_\mathcal{A}}^{\perp_1}$. 要证 $B \in \mathrm{dg}\mathcal{B}$. 为此, 设 $A' \in \mathcal{A}$. 因为 $P^n(A') \in \mathcal{E}_\mathcal{A}$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$, 故由引理 9.4(5)知

$$0 = \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Ch}(\mathcal{C})}(P^n(A'),\ B) = \mathrm{Ext}^1_\mathcal{C}(A',\ B^n)$$

从而 $B^n \in \mathcal{A}^{\perp_1} = \mathcal{B}$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$. 剩下还要证 $\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{C})}(\mathcal{E}_\mathcal{A},\ B) = 0$. 事实上, 由引理 9.2 知

$$\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{C})}(\mathcal{E}_\mathcal{A},\ B) = \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{dw}}(\mathcal{E}_\mathcal{A},\ B[-1]) = 0$$

这就证明了${\mathcal{E}_\mathcal{A}}^{\perp_1} = \mathrm{dg}\mathcal{B}$.

现在, 假设 $\mathcal{C}$ 中任意对象均是 $\mathcal{B}$ 中某一对象的子对象. 我们要证 ${}^{\perp_1}(\mathrm{dg}\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{E}_\mathcal{A}$. 设 $A \in {}^{\perp_1}(\mathrm{dg}\mathcal{B})$. 要证 $A \in \mathcal{E}_\mathcal{A}$. 首先说明 $\mathrm{Ker}\, d_A^n = \mathrm{Im}\, d_A^{n-1}$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$. 由题设, $A^n/\,\mathrm{Im}\, d_A^{n-1}$ 是 $\mathcal{B}$ 中某一对象的子对象, 故有单态射 $f^n:\ A^n/\,\mathrm{Im}\, d_A^{n-1} \hookrightarrow B' \in \mathcal{B}$. 这诱导出链映射 $f: A \to B'[-n]$.

而 $B'[-n] \in \mathrm{dg}\mathcal{B}$ (参见引理 9.5), 故由 $A \in {}^{\perp_1}(\mathrm{dg}\mathcal{B})$ 知 $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Ch}(\mathcal{C})}(A,\ B'[-n-1]) = 0$. 从而由引理 9.2 知 $\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{C})}(A, B'[-n]) = 0$, 故 $f \sim 0$, 即存在态射 $s^n : A^{n+1} \to B'$ 使得 $f^n\pi^n = s^n d_A^n$, 其中 $\pi^n : A^n \twoheadrightarrow A^n/\operatorname{Im} d_A^{n-1}$ 是典范满态射. 考虑交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} d_A^n/\operatorname{Im} d_A^{n-1} \arrow[r, hook, "k^n"] & A^n/\operatorname{Im} d_A^{n-1} \arrow[r, "p^n"] \arrow[d, "f^n"'] & A^n/\operatorname{Ker} d_A^n \arrow[r] \arrow[dl, "s^n\sigma^n"] & 0 \\
& & B' & &
\end{tikzcd}$$

其中 $\sigma^n : A^n/\operatorname{Ker} d_A^n \hookrightarrow A^{n+1}$ (注意到 $\sigma^n p^n \pi^n = d_A^n$.故由 $f^n\pi^n = s^n d_A^n$ 知 $f^n = s^n\sigma^n p^n$). 由 $f^n k^n = 0$ 即知 $\operatorname{Ker} d_A^n = \operatorname{Im} d_A^{n-1}$.

还要说明 $\operatorname{Ker} d_A^n \in \mathcal{A}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$. 对于任意 $B \in \mathcal{B}$, 由引理 9.4(8)知

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(\operatorname{Ker} d_A^n,\ B) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Ch}(\mathcal{C})}(A,\ B[-n]) = 0.$$

因此 $\operatorname{Ker} d_A^n \in {}^{\perp_1}\mathcal{B} = \mathcal{A}$. ■

引理 9.7 ([G1, Lemma 3.19]) 设 $(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$ 是 Abel 范畴 $\mathcal{C}$ 中的余挠对. 则 $\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{C})}(\mathcal{E}_{\mathcal{A}},\ \mathcal{E}_{\mathcal{B}}) = 0$, 即 $\mathcal{E}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathrm{dg}\mathcal{B}$, $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathrm{dg}\mathcal{A}$.

证明 设 $f : X \to Y$, 其中 $X \in \mathcal{E}_{\mathcal{A}}$, $Y \in \mathcal{E}_{\mathcal{B}}$. 要证 $f \sim 0$. 令 $\widetilde{f^n} : \operatorname{Ker} d_X^n \to \operatorname{Ker} d_Y^n$ 是诱导的典范态射, 使得 $\sigma_Y^n \widetilde{f^n} = f^n \sigma_X^n$. 参见下图.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[rr, "d_X^{n-1}"] \arrow[dd] & & X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[dd, "f^n"] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[dd] \arrow[ddl, "\beta^{n+1}"] & \cdots \\
& & \operatorname{Ker} d_X^n \arrow[ur, hook, "\sigma_X^n"] \arrow[dl, "\alpha^n"'] \arrow[dd, "\widetilde{f^n}"] & & & \\
\cdots \arrow[r] & Y^{n-1} \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi_Y^n"'] & & Y^n \arrow[r, "d_Y^n"'] & Y^{n+1} \arrow[r] & \cdots \\
& & \operatorname{Ker} d_Y^n \arrow[ur, hook, "\sigma_Y^n"] & & &
\end{tikzcd}$$

将 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\operatorname{Ker} d_X^n, -)$ 作用于正合列 $0 \to \operatorname{Ker} d_Y^{n-1} \to Y^{n-1} \xrightarrow{\pi_Y^n} \operatorname{Ker} d_Y^n \to 0$ 得到态射 $\alpha^n : \operatorname{Ker} d_X^n \to Y^{n-1}$, 使得 $\pi_Y^n \alpha^n = \widetilde{f^n}$.

将 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y^{n-1})$ 作用于正合列 $0 \to \operatorname{Ker} d_X^n \xrightarrow{\sigma_X^n} X^n \to \operatorname{Ker} d_X^{n+1} \to 0$ 得到态射 $\beta^n : X^n \to Y^{n-1}$, 使得 $\beta^n \sigma_X^n = \alpha^n$.

令 $g^n = f^n - (d_Y^{n-1}\beta^n + \beta^{n+1}d_X^n) : X^n \to Y^n$. 则容易验证 $g = (g^n)$ 是链映射, 而且 $d_Y^n g^n = 0 = g^{n+1} d_X^n$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$. 由构造即知 $f \overset{\beta}{\sim} g$.

下证 $g \sim 0$. 事实上，链映射 $g : X \to Y$ 满足 $d_Y^n g^n = 0 = g^{n+1} d_X^n$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$. 由下述引理即知 $g \sim 0$.

引理 9.8 设 $(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$ 是 Abel 范畴 $\mathcal{C}$ 中的余挠对，$g: X \to Y$ 是链映射, 满足 $d_Y^n g^n = 0 = g^{n+1} d_X^n$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$, 其中 $X \in \mathcal{E}_{\mathcal{A}}$, $Y \in \mathcal{E}_{\mathcal{B}}$. 则 $g \sim 0$.

证明 因为 $g^n d_X^{n-1} = 0$，故 $g^n \sigma_X^n = 0$. 从而 g^n 通过 π_X^{n+1} 分解, 即存在态射 γ^{n+1} 使得 $\gamma^{n+1}\pi_X^{n+1} = g^n$. 参见下图.

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[rr, "d_X^{n-1}"] \arrow[dr, "\pi_X^n"] \arrow[dd] & & X^n \arrow[rr, "d_X^n"] \arrow[dr, "\pi_X^{n+1}"] \arrow[dd, "g^n"'] & & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[dd, "g^{n+1}"] \arrow[dddlll, bend left, "v^{n+1}"'] & \cdots \\
& & \operatorname{Ker} d_X^n \arrow[ur, hook, "\sigma_X^n"] \arrow[dl, "\gamma^n"'] & & \operatorname{Ker} d_X^{n+1} \arrow[ur, hook, "\sigma_X^{n+1}"] \arrow[dl, "\gamma^{n+1}"] \arrow[ddll, bend right, "\delta^{n+1}"'] & & \\
\cdots \arrow[r] & Y^{n-1} \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi_Y^n"] & & Y^n \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi_Y^{n+1}"'] & & Y^{n+1} \arrow[r] & \cdots \\
& & \operatorname{Ker} d_Y^n \arrow[ur, hook, "\sigma_Y^n"] & & \operatorname{Ker} d_Y^{n+1} \arrow[ur, hook, "\sigma_Y^{n+1}"] & &
\end{tikzcd}
$$

因为 $d_Y^n g^n = 0$，故 $\pi_Y^{n+1} g^n = 0$, 即 $\pi_Y^{n+1}\gamma^{n+1}\pi_X^{n+1} = 0$. 故 $\pi_Y^{n+1}\gamma^{n+1} = 0$. 从而 γ^{n+1} 通过 σ_Y^n 分解, 即存在态射 δ^{n+1} 使得 $\sigma_Y^n \delta^{n+1} = \gamma^{n+1}$.

将 $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \operatorname{Ker} d_Y^n)$ 作用于正合列 $0 \to \operatorname{Ker} d_X^{n+1} \xrightarrow{\sigma^{n+1}} X^{n+1} \xrightarrow{\pi^{n+2}} \operatorname{Ker} d_X^{n+2} \to 0$ 得到提升的态射 $v^{n+1}: X^{n+1} \to \operatorname{Ker} d_Y^n$ 使得 $v^{n+1}\sigma_X^{n+1} = \delta^{n+1}$. (此处用到 $\operatorname{Ext}^1(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$.) 于是得到态射 $\sigma_Y^n v^{n+1}: X^{n+1} \to Y^n$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$.

现在可验证 $g \overset{(\sigma_Y^{n-1} v^n)}{\sim} 0$. 事实上，

$$d_Y^{n-1}\sigma_Y^{n-1} v^n = 0; \quad \sigma_Y^n v^{n+1} d_X^n = \sigma_Y^n v^{n+1}\sigma_X^{n+1}\pi_X^{n+1} = \sigma_Y^n \delta^{n+1}\pi_X^{n+1} = \gamma^{n+1}\pi_X^{n+1} = g^n.$$

因此 $g^n = d_Y^{n-1}(\sigma_Y^{n-1} v^n) + (\sigma_Y^n v^{n+1}) d_X^n$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$, 即 $g \overset{(\sigma_Y^{n-1} v^n)}{\sim} 0$. ■

§9.4 由遗传余挠对诱导的复形范畴上的余挠对的强相容性和遗传性

根据命题 9.6, 在温和的条件下, Abel 范畴 $\mathcal{C}$ 中的余挠对 $(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$ 诱导出复形范畴 $\operatorname{Ch}(\mathcal{C})$ 中的余挠对 $(\mathcal{E}_{\mathcal{A}}, \operatorname{dg}\mathcal{B})$ 和 $(\operatorname{dg}\mathcal{A},\ \mathcal{E}_{\mathcal{B}})$. 进一步的期望是：$(\operatorname{dg}\mathcal{A},\ \operatorname{dg}\mathcal{B},\ \mathcal{E})$ 能够成为 $\operatorname{Ch}(\mathcal{C})$ 中的 Hovey 三元组 (参见定义 5.10), 从而得到 $\operatorname{Ch}(\mathcal{C})$ 上的模型结构. 为此需要研究如下两个问题：

问题 1 何时 $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} = \operatorname{dg}\mathcal{A} \cap \mathcal{E}$, $\mathcal{E}_{\mathcal{B}} = \operatorname{dg}\mathcal{B} \cap \mathcal{E}$? 此时称诱导余挠对 $(\mathcal{E}_{\mathcal{A}}, \operatorname{dg}\mathcal{B})$ 和 $(\operatorname{dg}\mathcal{A},\ \mathcal{E}_{\mathcal{B}})$ 是 强相容的. 它是定义 6.4 有意义下的相容.

问题 2 余挠对 $(\mathcal{E}_{\mathcal{A}}, \operatorname{dg}\mathcal{B})$ 和 $(\operatorname{dg}\mathcal{A},\ \mathcal{E}_{\mathcal{B}})$ 何时是完备的?

本小节讨论问题 1, 下一小节讨论问题 2.

命题 9.9 ([G1, Theorem 3.12]) 设 $(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$ 是 Abel 范畴 $\mathcal{C}$ 中遗传余挠对.

(1) 如果 $\mathcal{C}$ 有足够多投射对象, 则 $\mathcal{E}_{\mathcal{B}} = \mathrm{dg}\mathcal{B} \cap \mathcal{E}$.

(2) 如果 $\mathcal{C}$ 有足够多内射对象, 则 $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} = \mathrm{dg}\mathcal{A} \cap \mathcal{E}$.

故, 当 $\mathcal{C}$ 有足够多投射对象和内射对象时，余挠对 $(\mathrm{dg}\mathcal{A},\ \mathcal{E}_{\mathcal{B}})$ 和 $(\mathcal{E}_{\mathcal{A}}, \mathrm{dg}\mathcal{B})$ 都是强相容的.

证明 只证 (1). 结论 (2) 类似地可证. 引理9.7 已断言 $\mathcal{E}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathrm{dg}\mathcal{B} \cap \mathcal{E}$, 故只要证 $\mathrm{dg}\mathcal{B} \cap \mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}_B$. 设 $X \in \mathrm{dg}\mathcal{B} \cap \mathcal{E}$. 只要证 $\mathrm{Ker}\, d_X^n \in \mathcal{B}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, 即 $\mathrm{Ext}^1(A, \mathrm{Ker}\, d_X^n) = 0$, $\forall\, A \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{Z}$. 因为 $\mathcal{C}$ 有足够多投射对象, 故有投射分解 $P:\ \cdots \to P_1 \to P_0 \to A \to 0$. 因为 $(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$ 是遗传余挠对，故 $P \in \mathcal{E}_{\mathcal{A}}$. 由引理 9.4(7) 和引理 9.2

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(A,\ \mathrm{Ker}\, d_X^n) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Ch}(\mathcal{C})}(A[-n], X) = \mathrm{Ext}^1_{dw}(A[-n], X) \cong \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{C})}(A[-n-1], X).$$

由下图可见，只要证任意态射 $g : A \to \mathrm{Ker}\, d_X^{n-1}$ 均可提升到 $h : A \to X^n$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr] & & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] \arrow[dll, dotted, "h"'] \arrow[ddl, "g"'] & 0 \\
X^n \arrow[rr] \arrow[dr, "a"'] & & X^{n+1} \arrow[r] & X^{n+2} \\
& \mathrm{Ker}\, d_X^{n+1} \arrow[ur, "b"'] & &
\end{tikzcd}$$

注意到 $g : A \to \mathrm{Ker}\, d_X^{n+1}$ 诱导出链映射 $w : P[-n-1] \to X$. 因为 $X \in \mathrm{dg}\mathcal{B}$ 且 $P[-n-1] \in \mathcal{E}_{\mathcal{A}}$, 故 $w \overset{s}{\sim} 0$. 于是 $d_X^n s^{n+1} = w^{n+1} = bg$, 即 $bas^{n+1} = bg$, 故 $as^{n+1} = g$. 即为所证. ■

By the following proposition, 有足够多的投射对象和足够多的内射对象的 Abel 范畴 $\mathcal{C}$ 中余挠对的遗传性，与其诱导的复形范畴中两个余挠对的遗传性和强相容性是相同的.

命题 9.10 ([G1, Corollary 3.13]) 设 $(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$ 是有足够多的投射对象和足够多的内射对象的 Abel 范畴 $\mathcal{C}$ 中余挠对. 则下述等价.

(1) 余挠对 $(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$ 是遗传的;

(2) 诱导余挠对 $(\mathcal{E}_A,\ \mathrm{dg}\mathcal{B})$ 是遗传的;

(3) 诱导余挠对 $(\mathrm{dg}\mathcal{A},\ \mathcal{E}_B)$ 是遗传的;

(4) $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} = \mathrm{dg}\mathcal{A} \cap \mathcal{E}$;

(5) $\mathcal{E}_{\mathcal{B}} = \mathrm{dg}\mathcal{B} \cap \mathcal{E}$.

(6) 诱导的两个余挠对 $(\mathcal{E}_{\mathcal{A}},\ \mathrm{dg}\mathcal{B})$ 和 $(\mathrm{dg}\mathcal{A},\ \mathcal{E}_{\mathcal{B}})$ 均是遗传的, 且 $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} = \mathrm{dg}\mathcal{A} \cap \mathcal{E}$, $\mathcal{E}_{\mathcal{B}} = \mathrm{dg}\mathcal{B} \cap \mathcal{E}$.

证明 (6) $\Longrightarrow$ (2), (6) $\Longrightarrow$ (3), (6) $\Longrightarrow$ (4), (6) $\Longrightarrow$ (5) 是显然的. 只要证 (1) $\Longrightarrow$ (6), (2) $\Longrightarrow$ (1), (3) $\Longrightarrow$ (1), (4) $\Longrightarrow$ (1)，(5) $\Longrightarrow$ (1). 因为 (2) $\Longrightarrow$ (1) 与 (3) $\Longrightarrow$ (1) 的证明类似, (5) $\Longrightarrow$ (1) 与 (4) $\Longrightarrow$ (1) 的证明类似, 故只证 (1) $\Longrightarrow$ (6), (3) $\Longrightarrow$ (1), (4) $\Longrightarrow$ (1).

(1) $\Longrightarrow$ (6): 由命题 9.9, 只要证 ($\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$, dg$\mathcal{B}$) 和 (dg$\mathcal{A}$, $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}$) 均是遗传的. 仅证 ($\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$, dg$\mathcal{B}$) 是遗传的. 根据引理 6.2, 只要证 $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ 对满射的核封闭. 设 $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ 是复形的短正合列, 且 $Y, Z \in \mathcal{E}_{\mathcal{A}}$. 对于任意复形 $B \in \mathrm{dg}\mathcal{B}$, 则有 Abel 群的复形的链映射序列

$$0 \to \mathrm{Hom}^{\bullet}(Z, B) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}^{\bullet}(Y, B) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}^{\bullet}(X, B) \to 0$$

这是复形的短正合列：事实上，看分支，有 Abel 群的群同态序列

$$0 \to \prod_{p \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z^p, B^{n+p}) \longrightarrow \prod_{p \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y^p, B^{n+p}) \longrightarrow \prod_{p \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^p, B^{n+p}) \to 0$$

再看其分支，有 Abel 群的群同态序列

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z^p, B^{n+p}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y^p, B^{n+p}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^p, B^{n+p}) \to 0$$

这的确是短正合列：因为 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 是余挠对. 从而在复形的短正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}^{\bullet}(Z, B) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}^{\bullet}(Y, B) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}^{\bullet}(X, B) \to 0$$

$\mathrm{Hom}^{\bullet}(Z, B)$ 和 $\mathrm{Hom}^{\bullet}(Y, B)$ 均是无环复形, 因此 $\mathrm{Hom}^{\bullet}(X, B)$ 也是无环复形, 即 $\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{C})}(X, \mathrm{dg}\mathcal{B}) = 0$. 则 $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Ch}(\mathcal{C})}(X, \mathrm{dg}\mathcal{B}) = 0$: 事实上, 任意复形的短正合列 $0 \to B \longrightarrow L \longrightarrow X \to 0$ 均是链可裂短正合列 (因为 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 是遗传的, 故 $X^n \in \mathcal{A}$), 其同伦不变量在同伦范畴中为零，因此这个复形的短正合列可裂. 参见引理 9.1. 于是 $X \in {}^{\perp_1}(\mathrm{dg}\mathcal{B}) = \mathcal{E}_{\mathcal{A}}$.

(3) $\Longrightarrow$ (1): 只要证 $\mathcal{A}$ 对满射的核封闭 (参见引理 6.2). 设有 $\mathcal{C}$ 中正合列 $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$，其中 $A_2, A_3 \in \mathcal{A}$. 则 $A_2, A_3 \in \mathrm{dg}\mathcal{A}$. 由假设 dg$\mathcal{A}$ 对满射的核封闭， 故 $A_1 \in \mathrm{dg}\mathcal{A}$, 从而 $A_1 \in \mathcal{A}$.

(4) $\Longrightarrow$ (1): 只要证 $\mathcal{A}$ 对满射的核封闭. 设有 $\mathcal{C}$ 中正合列 $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$，其中 $A_2, A_3 \in \mathcal{A}$. 考虑投射分解 $\cdots \to P_1 \to P_0 \to A_1 \to 0$. 则无环复形

$$\cdots \to P_1 \to P_0 \to A_2 \to A_3 \to 0$$

属于 dg$\mathcal{A}$ (参见引理 9.5). 根据 (4), 它在 $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ 中, 从而 $A_1 \in \mathcal{A}$. ■

§9.5 主定理

本小节讨论由遗传余挠对诱导的复形范畴上的余挠对的完备性. 先利用关于遗传且完备的余挠对的特殊逼近的扩张闭性质，证明无环复形存在特殊逼近.

引理 9.11 *设 Abel 范畴 $\mathcal{C}$ 有足够多的投射对象和足够多的内射对象, $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 是 $\mathcal{C}$ 中遗传且完备的余挠对. 则*

(1) *每个无环复形 E 均有特殊的左 $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}$-逼近, 即有正合列*

$$0 \to E \to B \to A \to 0$$

其中 $B\in\mathcal{E}_{\mathcal{B}},\ A\in \mathrm{dg}\mathcal{A}\cap\mathcal{E}$.

(2) 每个无环复形 E 均有特殊的右 $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$-逼近, 即有正合列

$$0\to B\to A\to E\to 0$$

其中 $A\in\mathcal{E}_{\mathcal{A}},\ B\in \mathrm{dg}\mathcal{B}\cap\mathcal{E}$.

证明 只证 (1). 结论 (2)类似地可证. 考虑正合列

$$0\to \operatorname{Ker} d_E^n \xrightarrow{a^n} E^n \xrightarrow{b^n} \operatorname{Ker} d_E^{n+1}\to 0.$$

因为 $(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$ 是完备余挠对, 故 $\operatorname{Ker} d_E^n$ 和 $\operatorname{Ker} d_E^{n+1}$ 均有特殊左 $\mathcal{B}$-逼近, 即有正合列

$$0\to \operatorname{Ker} d_E^n \xrightarrow{k^n} B'^n \xrightarrow{p^n} A'^n\to 0$$

其中 $B'^n\in\mathcal{B},\ A'^n\in\mathcal{A},\ \forall\ n\in\mathbb{Z}$. 因为 $(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$ 是遗传余挠对, 应用命题 6.3得到如下三行和三列均正合的交换图

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} d_E^n \arrow[r, "k^n"] \arrow[d, "a^n"'] & B'^n \arrow[r, "p^n"] \arrow[d, "s^n"] & A'^n \arrow[r] \arrow[d, "u^n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & E^n \arrow[r, "\sigma^n"] \arrow[d, "b^n"'] & B^n \arrow[r, "\pi^n"] \arrow[d, "t^n"] & A^n \arrow[r] \arrow[d, "v^n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} d_E^{n+1} \arrow[r, "k^{n+1}"] \arrow[d] & B'^{n+1} \arrow[r, "p^{n+1}"] \arrow[d] & A'^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

令 $B=(B^n,\ d_B^n)$ 是复形, 其中 $d_B^n=s^{n+1}t^n$:

$$\begin{tikzcd}
B^n \arrow[rr, "d_B^n"] \arrow[dr, "t^n"'] & & B^{n+1} \\
 & B'^{n+1} \arrow[ur, hook, "s^{n+1}"'] &
\end{tikzcd}$$

则 $\operatorname{Ker} d_B^n=\operatorname{Ker}(s^{n+1}t^n)=\operatorname{Ker} t^n=\operatorname{Im} s^n=\operatorname{Im}(s^nt^{n-1})=\operatorname{Im} d_B^{n-1}$. 故 $B\in\mathcal{E}_{\mathcal{B}}$.

令 $A=(A^n,\ d_A^n)$ 是复形, 其中 $d_A^n=u^{n+1}v^n$:

$$\begin{tikzcd}
A^n \arrow[rr, "d_A^n"] \arrow[dr, "v^n"'] & & A^{n+1} \\
 & A'^{n+1} \arrow[ur, hook, "u^{n+1}"'] &
\end{tikzcd}$$

则 $\operatorname{Ker} d_A^n=\operatorname{Ker}(u^{n+1}v^n)=\operatorname{Ker} v^n=\operatorname{Im} u^n=\operatorname{Im}(u^nv^{n-1})=\operatorname{Im} d_A^{n-1}$. 故 $A\in\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$.

根据构造容易验证 $\sigma=(\sigma^n):E\to B$ 和 $\pi=(\pi^n):B\to A$ 都是链映射. 因此，得到复形的短正合列

$$0\to E\xrightarrow{\sigma}B\xrightarrow{\pi}A\to 0$$

其中 $B\in\mathcal{E}_{\mathcal{B}}$, $A\in\mathcal{E}_{\mathcal{A}}=\mathrm{dg}\mathcal{A}\cap\mathcal{E}$. ■

考虑有投射生成子的 Grothendieck 范畴 $\mathcal{C}$. 则 $\mathcal{C}$ 有足够多投射对象, 足够多内射对象, 有正合直和，有正合直积；并有如下重要定理：对任意复形 X, 存在拟同构且满态射 $f:P\to X$, 其中 P 是 dg 投射复形 (即, 每个 P^n 均是投射对象, 且 $\mathrm{Hom}^\bullet(P,\ \mathcal{E})$ 正合); 也存在拟同构且单态射 $g:X\to I$, 其中 I 是 dg 内射复形，即每个 I^n 均是内射对象且 $\mathrm{Hom}^\bullet(\mathcal{E},I)$ 正合). 这通常被称为任意复形的 dg 投射分解和 dg 内射分解定理. 参见，例如，[Sp], [BN], [M], [Z, 定理 4.5.4, 4.6.7].

引理 9.12 设 $\mathcal{C}$ 是有投射生成子的 Grothendieck 范畴, X 是任意复形.则

(1) 存在链可裂短正合列 $0\to X\to E\to P\to 0$, 其中 $E\in\mathcal{E}$, P 是 dg 投射复形.

(2) 存在链可裂短正合列 $0\to I\to E\to X\to 0$, 其中 $E\in\mathcal{E}$, I 是 dg 内射复形.

证明 这是熟知的结果. 例如，参见 [Z, 命题 4.5.7; 4.6.11].

(1) 由拟同构且满态射 $f:P\to X$, 其中 P 是 dg 投射复形，得到链可裂短正合列 $0\to X\xrightarrow{\binom{0}{1}}\mathrm{Cone}(f)\xrightarrow{(1,0)}P[1]\to 0$. 因为 f 是拟同构, 故 $\mathrm{Cone}(f)$ 是正合列.

(2) 由拟同构且单态射 $g:X\to I$, 其中 I 是 dg 内射复形，得到链可裂短正合列 $0\to I\xrightarrow{\binom{0}{1}}\mathrm{Cone}(g)\xrightarrow{(1,0)}X[1]\to 0$. 因为 g 是拟同构, 故 $\mathrm{Cone}(g)$ 是正合列. ■

定理 9.13 设 $(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$ 是 Abel 范畴 $\mathcal{C}$ 中的余挠对. 则

(1) ([G1, Proposition 3.6]) 若 $\mathcal{C}$ 中对象均是 $\mathcal{A}$ 中某对象的商, 则 $(\mathrm{dg}\mathcal{A},\ \mathcal{E}_{\mathcal{B}})$ 是复形范畴 $\mathrm{Ch}(\mathcal{C})$ 中的余挠对; 若 $\mathcal{C}$ 中对象均是 $\mathcal{B}$ 中某对象的子, 则 $(\mathcal{E}_{\mathcal{A}},\mathrm{dg}\mathcal{B})$ 是 $\mathrm{Ch}(\mathcal{C})$ 中余挠对.

因此, 若 $\mathcal{C}$ 有足够多的投射对象和内射对象, 则 $(\mathrm{dg}\mathcal{A},\ \mathcal{E}_{\mathcal{B}})$ 和 $(\mathcal{E}_{\mathcal{A}},\mathrm{dg}\mathcal{B})$ 均是余挠对.

(2) ([G1, Theorem 3.12; Corollary 3.13]) 若 $\mathcal{C}$ 有足够多投射对象和足够多内射对象且 $(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$ 是遗传余挠对, 则两个诱导余挠对 $(\mathrm{dg}\mathcal{A},\ \mathcal{E}_{\mathcal{B}})$ 和 $(\mathcal{E}_{\mathcal{A}},\mathrm{dg}\mathcal{B})$ 均遗传, 且强相容 (即 $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}=\mathrm{dg}\mathcal{B}\cap\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}=\mathrm{dg}\mathcal{A}\cap\mathcal{E}$).

(3) 设 $\mathcal{C}$ 是有投射生成子的 Grothendieck 范畴, $(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$ 遗传且完备. 则 $(\mathrm{dg}\mathcal{A},\ \mathcal{E}_{\mathcal{B}})$ 和 $(\mathcal{E}_{\mathcal{A}},\ \mathrm{dg}\mathcal{B})$ 均遗传、完备、强相容; 从而 $(\mathrm{dg}\mathcal{A},\ \mathrm{dg}\mathcal{B},\ \mathcal{E})$ 是 $\mathrm{Ch}(\mathcal{C})$ 中 Hovey 三元组.

(4) 设 $\mathcal{C}$ 是有投射生成子的 Grothendieck 范畴, $(\mathcal{A},\ \mathcal{B})$ 遗传且完备. 则在复形范畴 $\mathrm{Ch}(\mathcal{C})$ 上存在唯一的相容的闭模型结构 ($\mathrm{Cofib}(\mathrm{Ch}(\mathcal{C}))$, $\mathrm{Fib}(\mathrm{Ch}(\mathcal{C}))$, $\mathrm{Weq}(\mathrm{Ch}(\mathcal{C}))$), 使得 $\mathrm{dg}\mathcal{A}$ 就是余纤维对象类, $\mathrm{dg}\mathcal{B}$ 就是纤维对象类, $\mathcal{E}$ 就是平凡对象类, 其中

- $\mathrm{Cofib}(\mathrm{Ch}(\mathcal{C})) = \{f$ 是单链映射 $\mid \mathrm{Coker}\, f \in \mathrm{dg}\mathcal{A}\}$;
- $\mathrm{Fib}(\mathrm{Ch}(\mathcal{C})) = \{f$ 是满链映射 $\mid \mathrm{Ker}\, f \in \mathrm{dg}\mathcal{B}\}$;
- 一个链映射 f 是平凡余纤维当且仅当 f 是单链映射且 $\mathrm{Coker}\, f \in \mathrm{dg}\mathcal{A} \cap \mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathcal{A}}$.
一个链映射 f 是平凡纤维当且仅当 f 是满链映射且 $\mathrm{Ker}\, f \in \mathrm{dg}\mathcal{B} \cap \mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}$.
$\mathrm{Weq}(\mathrm{Ch}(\mathcal{C})) = \{f = pi \mid i$ 是平凡余纤维且 p 是平凡纤维$\}$, 其中的链映射称为弱等价.

注记 9.14 李志伟告诉我们, 上述定理 (3) 在 [YD, Theorem 2.5] 中也独立得到, 未使用任意复形的 dg 投射分解和 dg 内射分解定理的推论, 即引理 9.12, 而是直接构造其完备性, 好处是只要求 $\mathcal{C}$ 有余积与积, 但证明较长. 这里仍采用 2010 年我们的笔记中比较简短的证法，但要求 $\mathcal{C}$ 是有投射生成子的 Grothendieck 范畴. 对于模范畴, 这些条件都是自动满足的.

证明 (1) 和 (2) 分别参见命题 9.6 和命题 9.10.

(3) 由 (2), 只要证余挠对 $(\mathrm{dg}\mathcal{A},\ \mathcal{E}_{\mathcal{B}})$ 和 $(\mathcal{E}_{\mathcal{A}},\ \mathrm{dg}\mathcal{B})$ 均是完备的. 我们先证明 $(\mathrm{dg}\mathcal{A},\ \mathcal{E}_{\mathcal{B}})$ 是完备的. 对于任意复形 X, 由引理 9.12, 存在链可裂短正合列 $0 \to X \xrightarrow{f} E \to P \to 0$, 其中 $E \in \mathcal{E}$, P 是 dg 投射复形. 从而 $P \in \mathrm{dg}\mathcal{A}$. 根据引理 9.11, E 有特殊的左 $\mathcal{E}_{\mathcal{B}}$-逼近, 即有正合列 $0 \to E \xrightarrow{\sigma} B \to A \to 0$, 其中 $B \in \mathcal{E}_{\mathcal{B}}$, $A \in \mathrm{dg}\mathcal{A} \cap \mathcal{E}$. 取 σf 的余核 A', 得到正合列

$$0 \to X \xrightarrow{\sigma f} B \to A' \to 0$$

其中 $B \in \mathcal{E}_{\mathcal{B}}$. 参见下图

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"] & P \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\sigma f"] & B \arrow[r] \arrow[d] & A' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & A \arrow[r, equal] \arrow[d] & A \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

因为 $P \in \mathrm{dg}\mathcal{A}$, $A \in \mathrm{dg}\mathcal{A}$, 故 $A' \in \mathrm{dg}\mathcal{A}$. 这就证明了 $(\mathrm{dg}\mathcal{A},\ \mathcal{E}_{\mathcal{B}})$ 满足余挠对完备性的第二个条件. 因为复形范畴 $\mathrm{Ch}(\mathcal{C})$ 也有足够多的投射对象和足够多的内射对象, 根据命题5.5, $(\mathrm{dg}\mathcal{A},\ \mathcal{E}_{\mathcal{B}})$ 也满足余挠对完备性的第一个条件. 从而 $(\mathrm{dg}\mathcal{A},\ \mathcal{E}_{\mathcal{B}})$ 是完备的.

再证明 $(\mathcal{E}_{\mathcal{A}},\ \mathrm{dg}\mathcal{B})$ 是完备的. 对任意复形 X, 由引理 9.12, 存在链可裂短正合列 $0 \to I \to E \xrightarrow{g} X \to 0$, 其中 $E \in \mathcal{E}$, I 是 dg 内射复形. 从而 $I \in \mathrm{dg}\mathcal{B}$. 根据引理 9.11, E 有特殊的右 $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$- 逼近, 即有正合列 $0 \to B \to A \xrightarrow{\pi} E \to 0$, 其中 $A \in \mathcal{E}_{\mathcal{A}}$, $B \in \mathrm{dg}\mathcal{B} \cap \mathcal{E}$. 取 $g\pi$ 的核 I', 得到正合列

$$0 \to I' \to A \to X \to 0$$

$A \in \mathcal{E}_{\mathcal{A}}$. 参见下图

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\ & B \arrow[r, equal] \arrow[d] & B \arrow[d] & & \\ 0 \arrow[r] & I' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r, "g\pi"] \arrow[d, "\pi"] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r, "g"] \arrow[d] & X \arrow[r] & 0 \\ & 0 & 0 & & \end{tikzcd}$$

因为 $B \in \mathrm{dg}\mathcal{B}$ 且 $I \in \mathrm{dg}\mathcal{B}$, 故 $I' \in \mathrm{dg}\mathcal{B}$. 这就证明了 $(\mathcal{E}_{\mathcal{A}},\ \mathrm{dg}\mathcal{B})$ 满足余挠对完备性的第一个条件. 因为复形范畴 $\mathrm{Ch}(\mathcal{C})$ 也有足够多的投射对象和足够多的内射对象, 根据命题5.5, $(\mathcal{E}_{\mathcal{A}},\ \mathrm{dg}\mathcal{B})$ 也满足余挠对完备性的第二个条件. 从而 $(\mathcal{E}_{\mathcal{A}},\ \mathrm{dg}\mathcal{B})$ 是完备的. ■

(4) 这是 (3) 和定理 5.13 的直接推论.

§9.6 例子

设 $\mathcal{C}$ 是有投射生成子的 Grothendieck 范畴, $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{I}$ 分别是 $\mathcal{C}$ 的投射对象和内射对象作成的类.

例 9.15 取 $\mathcal{C}$ 的遗传且完备的余挠对 $(\mathcal{P},\ \mathcal{C})$. 则得到复形范畴 $\mathrm{Ch}(\mathcal{C})$ 中 Hovey 三元组 $(\mathrm{dg}\mathcal{P},\ \mathrm{Ch}(\mathcal{C}),\ \mathcal{E})$, 其中 $\mathrm{dg}\mathcal{P}$ 是 dg 投射复形作成的类,

$$\mathrm{dg}\mathcal{P} \cap \mathcal{E} = \mathcal{P}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{C})} = \{\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} P^i(P) \text{ 的直和项} \mid P \in \mathcal{P}\}.$$

于是有两个遗传且完备的余挠对 $(\mathcal{P}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{C})},\ \mathrm{Ch}(\mathcal{C}))$ 和 $(\mathrm{dg}\mathcal{P},\ \mathcal{E})$, 其中余挠对 $(\mathrm{dg}\mathcal{P},\ \mathcal{E})$ 是在 [EJX] 中发现的.

相应的 $\mathrm{Ch}(\mathcal{C})$ 上的相容的闭模型结构 ($\mathrm{Cofib}(\mathrm{Ch}(\mathcal{C}))$, $\mathrm{Fib}(\mathrm{Ch}(\mathcal{C}))$, $\mathrm{Weq}(\mathrm{Ch}(\mathcal{C}))$) 如下:

- $\mathrm{dg}\mathcal{P}$ 就是余纤维对象类, 任意复形都是纤维对象, $\mathcal{E}$ 就是平凡对象类.
- $\mathrm{Cofib}(\mathrm{Ch}(\mathcal{C})) = \{f \text{ 是单链映射} \mid \mathrm{Coker}\, f \in \mathrm{dg}\mathcal{P}\}$;
- $\mathrm{Fib}(\mathrm{Ch}(\mathcal{C})) = \{f \text{ 是满链映射}\}$;
- 一个链映射 f 是平凡余纤维当且仅当 f 是单链映射且 $\mathrm{Coker}\, f \in \mathcal{P}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{C})}$;

一个链映射 f 是平凡纤维当且仅当 f 是满链映射且 $\mathrm{Ker}\, f \in \mathcal{E}$.
$\mathrm{Weq}(\mathrm{Ch}(\mathcal{C})) = \{f = pi \mid i \text{ 是平凡余纤维且 } p \text{ 是平凡纤维}\} = \{\text{拟同构}\}$.
事实上, 拟同构的这种分解是不平凡的. 我们包含一个直接的证明如下. 设 $f : X \to Y$ 是

任意链映射. 则有满的拟同构 $p: P \to \mathrm{Cone}(f)$, 其中 $P \in \mathrm{dg}P$. 考虑拉回，得到如下交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "a"] \arrow[d, equal] & Q \arrow[r, "b"] \arrow[d, "q"] & P \arrow[r] \arrow[d, "p"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Cyl}(f) \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "(0\ 1\ f)"] & \mathrm{Cone}(f) \arrow[r] & 0 \\
& X \arrow[r, "f"] & Y & &
\end{tikzcd}$$

注意到 $(0\ 1\ f): \mathrm{Cyl}(f) \to Y$ 是满的同伦等价，参见 [Z, 引理 2.3.1]. 因为 p 是满的拟同构，故 q 是满的拟同构. 令 $g = (0\ 1\ f)q$. 则 g 是满的拟同构, 从而 g 是平凡纤维. 于是 $f = ga$, 其中 g 是平凡纤维, a 是单链映射且 $\mathrm{Coker}(a) \in \mathrm{dg}\mathcal{P}$，即 a 是余纤维.

现在, 如果 $f = ga$ 是拟同构, 则 a 也是拟同构, 从而 $\mathrm{Coker}(a) \in \mathrm{dg}\mathcal{P} \cap E = \mathcal{P}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{C})}$，即 a 是平凡余纤维. 于是 f 是一个平凡余纤维与一个平凡纤维的合成. 这就得到上述分解. 进而 $\mathrm{Weq}(\mathrm{Ch}(\mathcal{C})) = \{$拟同构$\}$.

这个模型结构是在 [H1, Theorem 2.3.11] 给出的.

例 9.16 取 $\mathcal{C}$ 的遗传且完备的余挠对 $(\mathcal{C}, \mathcal{I})$. 则得到复形范畴 $\mathrm{Ch}(\mathcal{C})$ 中 Hovey 三元组 $(\mathrm{Ch}(\mathcal{C}), \mathrm{dg}\mathcal{I}, \mathcal{E})$, 其中 $\mathrm{dg}\mathcal{I}$ 是 dg 内射复形作成的类,

$$\mathrm{dg}\mathcal{I} \cap \mathcal{E} = \mathcal{I}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{C})} = \{\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} P^i(I) \text{ 的直和项 } \mid I \in \mathcal{I}\}.$$

于是有两个遗传且完备的余挠对 $(\mathrm{Ch}(\mathcal{C}), \mathcal{I}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{C})})$ 和 $(\mathcal{E}, \mathrm{dg}\mathcal{I})$, 其中余挠对 $(\mathcal{E}, \mathrm{dg}\mathcal{I})$ 是在 [EJX] 中发现的.

相应的 $\mathrm{Ch}(\mathcal{C})$ 上的相容的闭模型结构 ($\mathrm{Cofib}(\mathrm{Ch}(\mathcal{C}))$, $\mathrm{Fib}(\mathrm{Ch}(\mathcal{C}))$, $\mathrm{Weq}(\mathrm{Ch}(\mathcal{C}))$) 如下:

- 任意复形都是余纤维对象, $\mathrm{dg}\mathcal{I}$ 就是纤维对象类, $\mathcal{E}$ 就是平凡对象类.
- $\mathrm{Cofib}(\mathrm{Ch}(\mathcal{C})) = \{f$ 是单链映射$\}$;
- $\mathrm{Fib}(\mathrm{Ch}(\mathcal{C})) = \{f$ 是满链映射 $\mid \mathrm{Ker}\, f \in \mathrm{dg}\mathcal{I}\}$;
- 一个链映射 f 是平凡余纤维当且仅当 f 是单链映射且 $\mathrm{Coker}\, f \in \mathcal{E}$;

一个链映射 f 是平凡纤维当且仅当 f 是满链映射且 $\mathrm{Ker}\, f \in \mathcal{I}_{\mathrm{Ch}(\mathcal{C})}$.
$\mathrm{Weq}(\mathrm{Ch}(\mathcal{C})) = \{f = pi \mid i$ 是平凡余纤维且 p 是平凡纤维$\} = \{$拟同构$\}$.

这个模型结构是在 [H1, Theorem 2.3.13] 给出的.

例 9.17 设 $\mathcal{C}$ 是有投射生成子的 Grothendieck 范畴. 取 $\mathcal{C}$ 的遗传且完备的余挠对 $(\mathcal{GP}(\mathcal{C}), \mathcal{P}^{<\infty})$. 令

$$\mathcal{E}_{\mathcal{GP}(\mathcal{C})} = \{ \text{ 无环复形 } X \mid \mathrm{Ker}\, d_X^n \in \mathcal{GP}(\mathcal{C}), \ \forall\, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\mathcal{E}_{\mathcal{P}^{<\infty}} = \{ \text{ 无环复形 } X \mid \mathrm{Ker}\, d_X^n \in \mathcal{P}^{<\infty}, \ \forall\, n \in \mathbb{Z}\}$$

则得到复形范畴 $\mathrm{Ch}(\mathcal{C})$ 中 Hovel 三元组 $(\mathrm{dg}\mathcal{GP}(\mathcal{C}),\ \mathrm{dg}\mathcal{P}^{<\infty},\ \mathcal{E})$, 其中

$$\mathrm{dg}\mathcal{GP}(\mathcal{C}) = \{\ \text{复形}\ X \mid X^n \in \mathcal{GP}(\mathcal{C}),\ \forall\ n \in \mathbb{Z};\ \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{C})}(X, \mathcal{E}_{\mathcal{P}^{<\infty}}) = 0\}$$

$$\mathrm{dg}\mathcal{P}^{<\infty} = \{\ \text{复形}\ X \mid X^n \in \mathcal{P}^{<\infty},\ \forall\ n \in \mathbb{Z};\ \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{C})}(\mathcal{E}_{\mathcal{GP}(\mathcal{C})}, X) = 0\}$$

于是有两个遗传且完备的余挠对 $(\mathcal{E}_{\mathcal{GP}(\mathcal{C})},\ \mathrm{dg}\mathcal{P}^{<\infty})$ 和 $(\mathrm{dg}\mathcal{GP}(\mathcal{C}),\ \mathcal{E}_{\mathcal{P}^{<\infty}})$.

相应的 $\mathrm{Ch}(\mathcal{C})$ 上的相容的闭模型结构 ($\mathrm{Cofib}(\mathrm{Ch}(\mathcal{C})),\ \mathrm{Fib}(\mathrm{Ch}(\mathcal{C})),\ \mathrm{Weq}(\mathrm{Ch}(\mathcal{C}))$) 如下:

- $\mathrm{dg}\mathcal{GP}(\mathcal{C})$ 就是余纤维对象类, $\mathrm{dg}\mathcal{P}^{<\infty}$就是纤维对象类, $\mathcal{E}$ 就是平凡对象类.
- $\mathrm{Cofib}(\mathrm{Ch}(\mathcal{C})) = \{f \text{ 是单链映射} \mid \mathrm{Coker}\, f \in \mathrm{Cofib}(\mathrm{Ch}(\mathcal{C}))\}$;
- $\mathrm{Fib}(\mathrm{Ch}(\mathcal{C})) = \{f \text{ 是满链映射} \mid \mathrm{Coker}\, f \in \mathrm{dg}\mathcal{P}^{<\infty}\}$;
- 一个链映射 f 是平凡余纤维当且仅当 f 是单链映射且 $\mathrm{Coker}\, f \in \mathcal{E}_{\mathcal{GP}(\mathcal{C})}$;
一个链映射 f 是平凡纤维当且仅当 f 是满链映射且 $\mathrm{Ker}\, f \in \mathcal{E}_{\mathcal{P}^{<\infty}}$.
$\mathrm{Weq}(\mathrm{Ch}(\mathcal{C})) = \{f = pi \mid i \text{ 是平凡余纤维且 } p \text{ 是平凡纤维}\}$.

§10　附录：拉回与推出

拉回与推出是表示论和同调代数中不平凡且强有力的工具. 在这个附录里，我们回顾本讲义中反复要用到的拉回与推出的基本性质.其证明在 [Z, 第 89 页]中均可找到. 为了尽快进入主题, 我们将其作为附录.

定义 10.1　设 $\mathcal{A}$ 是任意范畴. (1) 态射 $b:B\to D$ 和 $g:C\to D$ 的拉回是一对态射 (a,f), 满足 $bf=ga$, 并有**泛性质：**若态射 p 和 q 也满足 $bp=gq$, 则存在**唯一的**态射 $r:X\to A$ 使得 $ar=q$ 和 $fr=p$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[drr, bend left, "p"] \arrow[dr, dotted, "r"] \arrow[ddr, bend right, "q"'] & & \\ & A \arrow[r, dotted, "f"] \arrow[d, dotted, "a"'] & B \arrow[d, "b"] \\ & C \arrow[r, "g"] & D \end{tikzcd}$$

(2) 称 $\mathcal{A}$ 有拉回, 如果 $\mathcal{A}$ 中任意两个态射 $b:B\to D$ 和 $g:C\to D$ 的拉回均存在.

(1′) 态射 $f:A\to B$ 和 $a:A\to C$ 的推出是一对态射 (b,g), 满足 $bf=ga$, 并有**泛性质：**若态射 p 和 q 也满足 $pf=qa$, 则存在**唯一的**态射 $r:D\to X$ 使得 $rb=p$ 和 $rg=q$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[d, dotted, "b"] \arrow[ddr, bend left, "p"] & \\ C \arrow[r, dotted, "g"] \arrow[drr, bend right, "q"'] & D \arrow[dr, dotted, "r"] & \\ & & X. \end{tikzcd}$$

(2′) 称 $\mathcal{A}$ 有推出, 如果 $\mathcal{A}$ 中任意两个态射 $a:A\to C$ 和 $f:A\to B$ 的推出均存在.

事实 10.2　(1) (b,g) 是 (a,f) 在 $\mathcal{A}$ 中的推出当且仅当 (b,g) 是 (a,f) 在反范畴 $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ 中的拉回.

(2) 任意范畴中, 拉回和推出 (若存在) 在同构意义都是唯一的.

(3) 在加法范畴中, 有核与有拉回是一回事; 有余核与有推出是一回事.

(4) Abel 范畴中, 既有拉回, 也有推出.

(i) 设 $b:B\to D$ 和 $g:C\to D$.则有正合列 $0\to \mathrm{Ker}(-b,\ g)\xrightarrow{\binom{f}{a}} B\oplus C\xrightarrow{(-b,g)} D$ 和拉回方块

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}(-b,\ g) \arrow[r, dotted, "f"] \arrow[d, dotted, "a"'] & B \arrow[d, "b"] \\ C \arrow[r, "g"] & D \end{tikzcd}$$

(i') 设 $f: A\to B$ 和 $a: A\to C$. 则有正合列 $A \xrightarrow{\binom{f}{-a}} B\oplus C \xrightarrow{(b,g)} \operatorname{Coker}\binom{f}{-a} \to 0$ 和推出方块

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[d, dotted, "b"] \\ C \arrow[r, dotted, "g"] & \operatorname{Coker}\binom{f}{-a} \end{tikzcd}$$

定理 10.3 设 $\mathcal{A}$ 是Abel范畴.

(1) 设 $\begin{tikzcd} A \arrow[r, dotted, "f"] \arrow[d, dotted, "a"'] & B \arrow[d, "b"] \\ C \arrow[r, "g"] & D \end{tikzcd}$ 是拉回方块.则

(i) 有典范同构 $\widetilde{f}: \operatorname{Ker} a \cong \operatorname{Ker} b$, $\widetilde{a}: \operatorname{Ker} f\cong \operatorname{Ker} g$. (这一条在有核的范畴中都是对的.)

(ii) 典范态射 $\overline{g}: \operatorname{Coker} a\to \operatorname{Coker} b$, $\overline{b}: \operatorname{Coker} f\to \operatorname{Coker} g$ 是单态射, 且它们的余核同构.

(iii) 此方块也是推出当且仅当 $\overline{g}: \operatorname{Coker} a\to \operatorname{Coker} b$ 和 $\overline{b}: \operatorname{Coker} f\to \operatorname{Coker} g$ 是同构.

特别地, 拉回既保持单态射又保持满态射.

$(1')$ 设 $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[d, dotted, "b"] \\ C \arrow[r, dotted, "g"] & D \end{tikzcd}$ 是推出方块.则

(i$'$) 有典范同构 $\overline{g}: \operatorname{Coker} a\cong \operatorname{Coker} b$, $\overline{b}: \operatorname{Coker} f \overset{\tilde{b}}{\cong} \operatorname{Coker} g$. (这一条在有余核的范畴中都是对的.)

(ii$'$) 典范态射 $\widetilde{f}: \operatorname{Ker} a\to \operatorname{Ker} b$, $\widetilde{a}: \operatorname{Ker} f\to \operatorname{Ker} g$ 是满态射, 且它们的核同构.

(iii$'$) 此方块也是拉回当且仅当 $\widetilde{f}: \operatorname{Ker} a\to \operatorname{Ker} b$ 和 $\widetilde{a}: \operatorname{Ker} f\to \operatorname{Ker} g$ 是同构.

特别地, 推出既保持单态射又保持满态射.

定理 10.4 设$\mathcal{A}$ 是Abel范畴.

(1) 设有态射 $b: B\longrightarrow D$ 和 $g: C\longrightarrow D$. 如果 g 是满态射, 则下述等价

(i) 下图右边方块是拉回;

(ii) 存在行正合的交换图

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E \arrow[r, "s"] \arrow[d, equal] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "b"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & E \arrow[r, "t"] & C \arrow[r, "g"] & D \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(iii) $0\longrightarrow A \xrightarrow{\binom{f}{a}} B\oplus C \xrightarrow{(b,-g)} D\longrightarrow 0$是正合列;

(iv) 上图右边方块既是拉回也是推出.

(1′) 设有态射 $f: A \longrightarrow B$ 和 $a: A \longrightarrow C$. 如果 f 是单态射, 则下述等价

(i′) 下图左边方块是推出;

(ii′) 存在正合列的交换图

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & E \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C \arrow[r, "g"] & D \arrow[r] & E \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(iii′) $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\binom{f}{-a}} B \oplus C \xrightarrow{(b,g)} D \longrightarrow 0$ 是正合列;

(iv′) 上图左边方块既是推出也是拉回.

参考文献

[AA] K. D. Akinci, R. Alizade, Special precovers in cortorsion theories, Proc. Edinbuurgh Math. Soc. 45(2002), 411-420.

[AF] V. Avramov, H. B. Foxby, Homological dimensions of unbounded complexes, J. Pure Appl. Algebra 71(1991), 129 – 155.

[BR] A. Beligiannis, I. Reiten, Homological and homotopical aspects of torsion theories, Mem. Amer. Math. Soc. 188(883)(2007).

[Bü] T. Bühler, Exact categories, Expositions Math. 28(2010), 1-69.

[BN] M. Bökstedt, A. Neeman, Homotopy limits in triangulated categories, Compositio Math. 86 (1993), 209-234.

[C] X. W. Chen, Three results on Frobenius categories, Math. Z. 270(2012), 43-58.

[DRSSK] P. Dräxler, I. Reiten, S. O. Smalø, O. Solberg, B. Keller, Exact categories and vector space categories, Trans. Amer. Math. Soc. 351(2)(1999), 647-682.

[EJ] E. E. Enochs, O. M. G. Jenda, Relative homological algebra, de Gruyter Exposit. Math. 30, Walter De Gruyter, Berlin, New York, 2000.

[EJX] E. E. Enochs, O. M. G. Jenda, J. Z. Xu, Orthogonality in the category of complexes, Math. J. Okayama Univ. 38(1996), 25-46.

[Faith] C. Faith, Algebra: rings, modules, and categories, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1973.

[F] P. Freyd, Abelian categories, an Introduction to the Theory of Functors, Harper & Row, 1964.

[Faith] C. Faith, Algebra I, Grundlehren der Math. Wissenschaften 190, Springer-Verlag, 1973.

[GZ] P. Gabriel, M. Zisman, Calculus of fractions and homotopy theory, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1967.

[GR] J. R. García-Rozas, Covers and envelopes in the category of complexes of modules, Research Notes in Math 407, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 1999.

[GL] W. Geigle, H. Lenzing, Perpendicular categories with applications to representations and sheaves, J. Algebra 144 (2) (1991) 273 – 343.

[GM] S. I. Gelfand, Yu. I. Manin, Methods of homological algebra, Second Edition, Springer-Verlag, 2002.

[G1] J. Gillespie, The flat model structure on Ch(R), Trans. Amer. Math. Soc. 356(8)(2004), 3369 – 3390.

[G2] J. Gillespie, Model structures on exact categories, J. Pure Appl. Algebra 215(2011), 2892 – 2902.

[G3] J. Gillespie, How to construct a Hovey triple from two cotorsion pairs, Fund. Math. 230(2015), 281 – 289.

[Hir] P. S. Hirschhorn, Model categories and their localizations, Math. Surveys and Monographs 99, Amer. Math. Soc., Providence, 2003.

[H1] M. Hovey, Model categories, Math. Surveys and Monographs 63, Amer. Math. Soc., Providence, 1999.

[H2] M. Hovey, Cotorsion pairs, model category structures, and representation theory, Math. Z. 241(3)(2002), 553-592.

[H3] M. Hovey, Quillen model categories, J. K-Theory 11(3)(2013), 469 – 478.

[I] B. Iversen, Cohomology of sheaves, Springer-Verlag, 1986.

[K] B. Keller, Chain complexes and stable categories, Manuscripta Math. 67(4)(1990), 379-417.

[Kong] F. Kong, Charactering when the category of Gorenstein-projective modules is a abelian category, Algebr Represent. Theory 17(4)(2014), 1289-1301.

[L] Z. W. Li, A note on model structures on arbitrary Frobenius categories, Czechoslovak Math. J., 67(142)(2017), 329 – 337.

[Mit] B. Mitchell, Theory of categories, Pure and Applied Math. Vol. XVII, Academic Press, 1965.

[M] D. Murfet, Abelian categories, preprint.

[P] N. Popescu, Abelian Categories with Applications to Rings and Modules, Academic Press, London, 1973.

[Q1] D. Quillen, Homotopical algebra, Lecture Notes in Math. 43, Springer-Verlag, 1967.

[Q2] D. Quillen, Rational Homotopy Theory, Ann. Math. 90(2)(1969), 205-295.

[Q3] D. Quillen, Higher algebraic K-theory I, In: Lecture Notes in Math. 341, 85-147, Springer-Verlag, 1973.

[S] L. Salce, Cortorsion theory for abelian groups, Symp. Math. 23(1972), 12-32.

[Serre] J. P. Serre, Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens, Ann. Math. 58(2)(1953), 258-294.

[Sp] N. Spaltenstein, Resolutions of unbounded complexes, Compositio Math. 65(1988), 121-154.

[TT] R. W. Thomason, T. Trobaugh, Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories, The Grothendieck Festschrift, Vol. III, Progr. Math. 88, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, 247-435.

[Ver] J. L. Verdier, Catégories dérivées, état 0 in SGA $4\frac{1}{2}$ Lectures Notes in Math. 569: 262-311. Berlin, Springer-Verlag: 1977.

[Voe] V. Voevodsky, Motivic cohomology with $\mathbf{Z}/2$-coefficients, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. 98(2003), 59-104.

[W] C. A. Weibel, An Introduction to homological Algebra, Cambridge Studies in Adv. Math. 38, Cambridge Univ. Press, 1994.

[Y] X. Y. Yang, Model structures on triangulated categories, Glasgow Math. J. 57(2015), 263-284.

[YD] X. Y. Yang, N. Q. Ding, On a question of Gillespie, Forum Math. 27(2015), 3205-3231.

[Z] 章璞, 三角范畴与导出范畴, 科学出版社, 2015.