测地线相关

测地完备的等价定义

根据Урысон度量化定理, 流形(M,g)满足T_1, C_2, T_4公理, 因此为度量空间. 定义$d_g(x,y)=\inf_{\gamma:\{(0,1)\}\to\{(x,y)\}}\int_{[0,1]}\sqrt{g(\gamma'(s),\gamma'(s))}\mathrm{d}s$为$x$与$y$间的距离, 易验证其为度量空间.

称M度量完备若且仅若存对任意的Cauchy列$\{x_n\}\subset M$, 存在(唯一的)$x_0\in M$使得

$$\lim_{n\to\infty}d_g(x_0,x_n)=0.$$

称(M,g)为测地完备的若且仅若任意点$p\in M$处任意方向的测地线$\gamma_v(t)$都能延伸至无穷远处. 这里$\gamma_v(0)=p$, $\gamma_v'(0)=v$. Hopf-Rinow定理叙述的以下等价形式:

1. (M,g)度量完备.
2. (M,g)测地完备.
3. 指数映射$\exp_p$可被定义在整个T_pM中.

$1\implies 2$: 不妨设γ_v的最大存在区间为$[0,l]$, 其中$\gamma_v(0)=p$. 此处根据度量完备性, 最大存在区间应为闭集. 注意到$\gamma_v([0,l))$上存在一列收敛至$\lim_{t\to l^-}\gamma_v(l)\in M$的点列, 则自然可定义$\gamma_v(l)$. 由于$p$处存在以$\gamma_v'(l)$为切向量的测地线, 故$\gamma_v$的最大存在区间为$[0,\infty)$中开集. 从而最大存在区间在$[0,\infty)$中既开又闭, 即$[0,\infty)$.

$2\implies 3$: 显然.

$3\implies 1$: 不妨设曲面为单连通的. 下证明引理: 任意$p,q\in M$, 存在连接p与q的极短测地线. 考虑局部微分同胚$\exp_p:\tilde{B}_{2\varepsilon}(O)\to B_{2\varepsilon}(p)$, $\exp_q:\tilde{B}_{\varepsilon}(O)\to B_{\varepsilon}(q)$, 取$p_1\in S_\varepsilon(p)$使得$d_g(p,p_1)+d_g(p_1,q)=d_g(p,q)$. 继而可做$p_2,p_3,\ldots$. 若可构造有限个$p_i$, 则$d_g(p,p_1)+\cdots+d_g(p_{m-1},p_m)+d_g(p_m,q)=d_g(p,q)$. 采用测地线连接每一分段即可. 显然测地线于分段处光滑连接, 反之能构造更小的$d_g(p,q)$, 矛盾.

若$\{p_m\}$无穷, 则$\{p_m\}$在度量d_g下为Cauchy列. 对任意m, 已论证$d_g(p,p_m)$可由测地线实现, 从而存在测地线γ使得其定义在$[0,l)$上, 其中$l=\lim_{m\to\infty}d_g(p,p_m)$. 由于测地线可无线延伸, 故$\gamma$在$[0,l+\varepsilon)$中有定义(取$\varepsilon$为足够小量, $\gamma(l)$存在测地凸邻域). 综上, 总能找到连接p与q的极短测地线.

根据引理, $\{r:d_g(r,p)\le l\}=\exp_p\overline{(\tilde{B}_l(O))}$为紧集. 从而对任意Cauchy序列, 可取$l$使得该序列位于紧致空间内, 从而有极限. 因此$(M,g)$度量完备.

极小测地线与Ray

记弧长参数的测地线$\gamma\in M$为Ray, 若且仅若γ无限延伸, 且$\forall s,t\in\mathbb{R}^+$, 总有

$$d_g(\gamma(s),\gamma(t))=|s-t|.$$

对紧致的完备测地空间而言, Ray并不存在(任意两点距离小于直径). 若M为非紧致的完备流形(无界), 则任意点p处存在至少一条Ray. 取$\{q_n\}_{n=1}^\infty$使得$d_g(p,q_n)\to\infty$, 记γ_n为实现连接q_n与p的测地线. 不妨设γ_n均为弧长参数, 则$\{\gamma_n'(p)\}_{n=1}^\infty\subset S^1$存在至少一个聚点$v_0$, 下证明以$v_0$为初始切向量的测地线$\gamma_{v_0}$即Ray.

若不然, 设$s\in\mathbb{R}^+$使得$d_g(\gamma_{v_0}(0),\underline{\gamma_{v_0}(s)})<s$, 则存在测地线$\gamma_v$使得$\gamma_v$实现$\gamma_{v_0}(0)$到$\gamma_{v_0}(s)$的最短距离, 记缩短的距离为$d_0$. 由于$\exp_p(\tilde{B}_s(O))$的边缘为紧空间, 对任意$0<\varepsilon\ll d_0$, 存在$N$使得$d_g(\gamma_n(s),\gamma_{v_0}(s))<\varepsilon$. 因此

$$\begin{aligned} d_g(p,q_N) \le & d_g(p,\gamma_{v_0}(s))+d_g(\gamma_{v_0}(s),\gamma_n(s))+d_g(\gamma_n(s),q_N) \\ < & s-d_0+\varepsilon+[d_g(p,q_N)-d_g(p,\gamma_n(s))] \\ = & \varepsilon-d_0 \\ < & 0 \end{aligned}$$

矛盾.

特别地, 若曲面上存在两条p点出发且第一次相交于q点的测地线(设为不同的测地线). 设围成区域D单连通, 则其满足

$$\int_D K\mathrm{d}\sigma+\alpha_p+\alpha_q=2\pi.$$

其中α_p与α_q为交点处转过的外角, 从而$\int_D K\mathrm{d}\sigma>0$. 因此恒负Gauß曲率曲面上的两条相交测地线围成区域并非单连通.

因此, 对(测地)完备的单连通流形而言, 若其为恒负曲率的, 则所有无限延伸的测地线都为Ray; 反之, 过一点至少存在一条Ray. 例如下接半球且上端无限延伸的柱面是完备的单连通流形, 柱面上的任意一点处有且仅有一条Ray可被引出(即向上延伸的母线). 直观上, 柱面上的所有Ray存在某些直观的几何特质. 为研究Ray的分布, 不妨引入以下命题:

对给定的一条Ray$\tau:[0,\infty)\to M$, 以及任意固定的$x\in M$与任意的$t\ge s>0$, 函数

$$d_g(x,\tau(t))-t\le d_g(x,\tau(s))+t-s-t=d_g(x,\tau(s))-s.$$

从而极限$\lim_{t\to\infty}[d_g(x,\tau(t))-t]\in[0,d_g(x,\tau(0))]$存在, 并记极限为$b_\tau(x)$(Busemann函数). 以平面为例, $b_\tau(x)$即x距射线τ的"垂直距离". 对给定的τ, $b_\tau(x)$的Lipschitz常数不超过1. 若$b_\tau(x)=0$, 则视x与$\tau(0)$处于同一高度.

对给定的Rayτ与$q\in M$, 存在Ray$\tilde{\tau}$使得$\tilde{\tau}(0)=q$且$b_\tau(\tilde{\tau}(s))-s\equiv b_\tau(q)$对$t\in\mathbb{R}^+$恒成立. 直观地说, 平行移动(距离$s$)后的$\tilde{\tau}$使得与$\tau$处于同一高度, 即过$q$点可做与$\tau$平行的测地线. 同样, 采用证明Ray存在性的思路, 令$\tilde{\tau}_t:[0,d_g(q,\tau(t))]\to M$为实现$q$至$\tau(t)$的极短测地线(弧长参数), $\tilde{\tau}_t(0)$在$t\to\infty$时任一收敛子列的极限即为$\tilde{\tau}_t(0)$.

暂时不再深究由测地线理论导出的几何学.