选择公理介绍

序数理论相关

Zermelo–Fraenkel's 公理

通俗起见, 本节避免一阶逻辑语句. wiki

A1 外延公理: 两集合相等若且仅若其含有相同元素.

> 兹有空集之定义 $\emptyset := \{u \in X \mid u \neq u\}$.

A2 配对公理: 对任意元素 x, y, 存在集合 $\{x, y\}$.

A3 分离公理: 设 P 为关于集合的某一性质, 记 $P(u)$ 为集合 u 满足性质 P. 则对任意 X, 存在集合 $Y := \{u \in X \mid P(u)\}$.

A4 并集公理: 对任意集合 X, 存在相应的并集 $\cup X := \{u \mid \exists v \in X \text{ s.t. } u \in v\}$.

A5 幂集公理: 对任意集合 X, 其子集构成集合 $\mathcal{P}(X) := \{S \mid S \subset X\}$.

A6 无穷公理: 存在无穷集, 其子集为 $\{P^k(\emptyset) \mid k = 0, 1, \ldots\}$.

A7 替换公理: 设 F 为以 X 为定义域之函数, 则存在 $F(X) = \{F(x) \mid x \in X\}$.

A8 正则公理: 任意非空集均含有对从属关系 $\in$ 的极小元素.

A9 选择公理: 设 X 各元素非空, 则存在函数 $g : X \to \cup X$ 使得 $\forall x \in X$, 总有 $g(x) \in x$.

> 此处宜试想 X 为一族非空集, 选择函数 $g(x) \in x$ 意味着 可以从每一 $x \in X$ 中选出一个元素.

实际上, 大多数初等的分析学内容并不依赖选择公理.

Ex1 审慎斟酌如下提问:

- Cantor 利用对角线法则证明实数之不可数性是否需要 **A9**?
- 证明"可数个可数集之并仍为可数集"是否利用 **A9**?
- 能否仅利用 **A1-A8** 证明无法建立实数到整数的双射?
- 利用 Dedekind 分割定义实数之完备性是否利用 **A9**?

Key1 答案对应十进制下 6^{17} 前四位, 数字小于 5 代表否, 反之代表是.

对 Peano 算数公理感兴趣者请移步 🔗 陶哲轩实分析一书.

不存在最大的集合? 是以可定义任何集合之集体为类, 详见 🔗 VNBG 集合论.

序集

预序集 $(P, \leq)$ 定义为 P 上的二元关系, 满足 **L1-L2**.

L1 $\forall x \in P, x \leq x$.

L2 $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \implies x \leq z$.

- 称 $x \in P$ 为极大元, 若且仅若不存在 $y \in P$ 使得 $x < y$.
- 称 $x \in P$ 为 $P' \subset P$ 之上界, 若且仅若 $x' \leq x\ (\forall x' \in P')$.
- 称 $x \in P$ 为 $P' \subset P$ 之上确界, 若且仅若 $x \leq y\ (\forall y$ 为 P' 之上界$)$.

若预序集满足 **L1-L3**, 则称之偏序集.

L3 $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \implies x = y$.

> 显然偏序集上 (下) 确界唯一, 记作 sup (inf).

若预序集满足 **L1-L4**, 则称之全序集 (或链).

L4 $\forall x, y \in P$, 总有 $(x \leq y) \vee (y \leq x)$.

若预序集满足 **L1-L5**, 则称之良序集.

L5 P 的任意非空子集均有极小元.

称 $\phi:(P_1,\leq)\to(P_2,\leqq)$ 为序同构, 若且仅若 $x\leq y$ 等价于 $\phi(x)\leqq\phi(y)$.

Ex2 判断下述论断:

- 良序集 P 不存在非平凡自同构.
- $P'\subset P$ 为良序集 $(P,\leq)$ 之子序 (继承 $\leq$), 则 P 与 P' 间存在至多一个自同构.
- 定义 $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ 的一个划分为数组 $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k)$, 满足

  a. $\lambda_k\in\mathbb{Z}_{>0}$,
  b. $\lambda_j\geq\lambda_{j+1}$ $(\forall j=1,\ldots,k-1)$,
  c. $\sum_{j=1}^{k}\lambda_j=n$.

  记 $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k)\leq(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_l)$ 若且仅若

  a. $k\leq l$,
  b. $\lambda_t\leq\mu_t$ $(\forall t=1,\ldots k)$.

  从而定义整数划分之偏序集, 试求其自同构?

序数

欲了解序数理论之完整架构者请移步 此书. 下文略陈序数之基本理论.

称 α 为传递的, 若且仅若 $\alpha\subset\mathcal{P}(\alpha)$. 若 $(\alpha,\in)$ 为良序集, 则称 α 为序数. 试证明以下论断:

- 序数存在性: $\emptyset$ 为序数.
- 序数无穷性: 若 α 为序数, 则 $\alpha\dot\cup\{\alpha\}$ 亦为序数.
- 序数可比性: 总有 $\alpha\subset\beta$ 或 $\beta\subset\alpha$ 成立.
- 序数 α 之真子集为系其元素, 也为序数.
- (Burali-Forti 佯谬) 序数之全体构成真类, 即非集合的类.

Ex3 记 $\mathbf{On}$ 为序数构成的类, 探寻 $\mathbf{On}$ 与 **L1-L5** 之关系.

Ex4 定义序数 α 之后继为 $\alpha+1:=\alpha\dot\cup\{\alpha\}$, 试判断:

1. α 与 $\alpha+1$ 之间不存在其他序数.
2. 非零序数 α 一定为某一序数之后继.
3. $\forall C\subset\mathbf{On}$, $\inf C:=\cap C$ 为序数 $(C\neq\{\emptyset\})$.
4. $\forall C\in\mathbf{On}$, $\sup C:=\cup C$ 为序数 $(C\neq\{\emptyset\})$.

Key2 答案对应十进制下 π^8 前四位, 数字小于 5 代表否, 反之代表是.

利用 **A6** 构造最小的无穷序数 $\omega := \cup\{\alpha \mid \alpha < \infty\}$, 从而得有限序数与 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 之序同构. 兹不再区分 $(\mathbb{Z}_{\geq 0}, \leq)$ 与 $(\omega, \subset)$, 例如 $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = 2$.

> *Peano* 算数公理之后继运算 $++$ 对应一元运算 $\alpha \mapsto \alpha \dot{\cup} \{\alpha\}$.

称 α 为极限序数若且仅若 α 不为任何序数之后继, 定义为 $\alpha := \cup\{\beta \mid \beta < \alpha\}$.

归纳法

数学归纳法 设 C 为由某些序数构成的类, 假设

1. $0 \in C$.
2. $\alpha \in C \implies \alpha + 1 \in C$.

则 $C = \omega$.

超穷归纳法 设 C 为由某些序数构成的类, 假设

1. $0 \in C$.
2. $\alpha \in C \implies \alpha + 1 \in C$.
3. α 为极限序数. 若对一切 $\beta < \alpha$ 皆有 $\beta \in C$, 则 $\alpha \in C$.

则 $C = \mathbf{On}$.

超穷归纳法之证明基于事实: α 或为极限序数, 或为后继序数. 继而反证即可.

超穷归纳法原理 定义集合之全体为真类 $\mathbf{V}$, 则显然 $\mathbf{V} \supset \{a_\alpha \mid \alpha \in \mathbf{On}\}$. 记 a 为以序数为指标之对象, 定义规则 G 满足

- $a_0 = G(0)$,
- 若 $\alpha = \beta + 1$, 则 $a_\alpha = G(a_\beta)$,
- 若 α 为极限序数, 则 $a_\alpha = G(\{a_\beta \mid \beta < \alpha\})$.

从而对任意序数 θ, 存在唯一的函数 $a : \theta \to \mathbf{V}$ 使得对一切 $\alpha < \theta$ 总有 $a(\alpha) = G(a|_\alpha)$. 特别地, 存在唯一的 $a : \mathbf{On} \to \mathbf{V}$ 使得 $\alpha \mapsto G(a|_\alpha)$ 恒成立.

> 此处 $a|_\alpha := \{(\beta, a(\beta)) \mid \beta \in \alpha\}$ (***A7***).

证明: a 至多唯一. 不妨设 a 与 a' 皆满足以上性质, 则有 (3 可并入 2)

1. $a(0) = a'(0)$.
2. 设 $a(\theta) = a'(\theta)$, 则 $a(\theta + 1) = G(a|_\theta) = G(a'|_\theta) = a'(\theta + 1)$.

3. 设 θ 为极限序数,且 $a(\alpha) = a'(\alpha)$ 对一切 $\alpha < \theta$ 均成立, 则

$$a(\theta) = G(\{a|_\alpha \mid \alpha < \theta\}) = G(\{a'|_\alpha \mid \alpha < \theta\}) = a'(\theta).$$

由超穷归纳法知 $a(\alpha) = a'(\alpha)$.

a 之存在性. $\theta = 0$ 时显然. 今设 $\theta > 0$, 且对任意 $\xi < \theta$, $a_\beta\,(\beta \le \xi)$ 构成之类存在. 由 **A7** 知 a 建立 ξ 至类 $a_{\le\xi}$ 之映射. 从而可拼接 a 为定义在 θ 上的函数. 最后, 由于 $\mathbf{On}$ 无极大元, 故 $a : \mathbf{On} \to \mathbf{V}$ 可唯一定义.

□

由以上, 可定义

- 序数加法, 满足:

  a. $\alpha + 0 = \alpha$,
  b. $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$,
  c. $\alpha + \beta = \sup\{\alpha + \xi \mid \xi < \beta\}$ (β 为极限序数).
- 序数乘法, 满足:

  a. $\alpha \cdot 0 = 1$,
  b. $\alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha$,
  c. $\alpha \cdot \beta = \sup\{\alpha \cdot \xi \mid \xi < \beta\}$ (β 为极限序数).
- 序数指数, 满足:

  a. $\alpha^0 = 1$,
  b. $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$,
  c. $\alpha^\beta = \sup\{\alpha^\xi \mid \xi < \beta\}$ (β 为极限序数).

Ex5 利用超穷归纳法证明 $\alpha + \beta$ 与 $\alpha \cdot \beta$ 作为良序集同构于 $\alpha \dot\cup \beta$ 与 $\alpha \times \beta$. 并证明 $\alpha, \beta < \omega$ 时的运算律, 包括加法交换律等.

> 加法交换律等对一般序数显然不成立, 例如 $1 + \omega = \omega < \omega + 1$.

良序相关

引理 对任意良序集 P, 存在唯一的 $\alpha \in \mathbf{On}$ 与之同构.

证明: 不妨考虑 $P \neq \emptyset$, 取 $S \notin P$ (如取 $S = P \dot\cup \{P\}$). 定义 a_α:

- a_0 为 P 中极小元.
- 若 $\{a_\beta \mid \beta < \alpha\} \subsetneq P$, 则 a_α 为 $P \setminus \{a_\beta \mid \beta < \alpha\}$ 中极小元.
- 若 $\{a_\beta \mid \beta < \alpha\} = P$, 则 $a_\alpha = S$.

> 对 a 之取法仅涉及 *L5*, 不涉及 *A9*.

由于 P 为集合, 从而存在极小的 θ 使得 $a_\theta = S$. 故有同构 (为何?)

$$P \to \theta = \{\alpha \mid \alpha < \theta\}, \quad a_\alpha \mapsto \alpha.$$

> 若不存在极小的 θ, 则 $a : \mathbf{On} \to P$ 为单射. *A3* 给出 $a(\mathbf{On}) \subset P$, *A7* 给出 $a^{-1}(a(\mathbf{On}))$ 为集合, 故矛盾.

□

以下结果涉及选择公理:

Zermelo 良序定理 任何集合 S 都能被赋予良序.

证明**:** 选取 $S_0 \notin S$. 由 **A9** 知存在选择函数

$$g : \mathcal{P}(S) \to S, \quad S'(\subset S) \mapsto x(\in S').$$

取 $a_0 = g(S)$, 利用超穷归纳法定义

- 若 $\{a_\beta \mid \beta < \alpha\} \subsetneq S$, 则 $a_\alpha = g(S \setminus \{a_\beta \mid \beta < \alpha\})$.
- 若 $\{a_\beta \mid \beta < \alpha\} = S$, 则 $a_\alpha = S_0$.

由于 S 为集合, 是故存在极小的 θ 使得 $a_\theta = S_0$.

□

Zorn 引理 非空偏序集 P 中每一链都有上界, 则 P 有极大元.

Ex6 仿照以上两引理证明 Zorn 引理.

> 提示: 反证之. 仿照前两个证明不断取子链上的极大元, 构造其与序数之对应 (需讨论后继序数与极限序数), 最终导出嵌入 $\mathbf{On} \to P$, 得矛盾.

事实 基于 **A1-A8**, **A9** 与 Zermelo 良序定理等价, 亦与 Zorn 引理等价.