Prop. $\mathbb{R}^3$ 上平均曲率为常数的正则闭曲面为球面

证明. $\mathbb{R}^3$ 中正则闭曲面 S 必有外切球, 从而切点处的截面曲率恒大于外切球半径之倒数, 故 S 含有椭圆点, 从而 $H>0$. 记 p 处为 κ_1 取最大值的点 , 故 κ_2 取最小值. 考虑曲率线网参数 $X(u,v)$, 第一基本形式为 $E\mathrm{d}u^2+G\mathrm{d}v^2$, 第二基本形式为 $e\mathrm{d}u^2+g\mathrm{d}v^2$. 不妨设主曲率为 $\kappa_1=e/E$, $\kappa_2=g/G$. 此时相容性方程

$$\begin{aligned}&X_{uuv}=X_{uvu}\\ \Leftrightarrow&(\Gamma^i_{11}X_i+eN)_v=(\Gamma^i_{12}X_i)_u\\ \Rightarrow&N\cdot(\Gamma^i_{11}X_i+eN)_v=N\cdot(\Gamma^i_{12}X_i)_u\\ \Leftrightarrow&\Gamma^i_{11}h_{i2}+e_v=\Gamma^i_{12}h_{i1}\\ \Leftrightarrow&\Gamma^2_{11}g+e_v=\Gamma^1_{12}e\end{aligned}$$

计算得 $\Gamma^2_{11}=\dfrac{X_{uu}\cdot X_v}{G}=\dfrac{-E_v}{2G}$, $\Gamma^1_{12}=\dfrac{X_{uv}\cdot X_u}{E}=\dfrac{E_v}{2E}$. 从而

$$e_v=HE_v,\quad \text{同理 } g_u=HG_u.$$

p 点处有 $\dfrac{\kappa_1-\kappa_2}{2}=H-\kappa_2=\dfrac{g_u}{G_u}-\dfrac{(G\kappa_2)_u}{G_u}=0$ (当$G_u\neq 0$) 是, 从而S为球. 若 $E_v=G_u=0$, 则

$$K=-\frac{1}{\sqrt{EG}}([\sqrt{E}_v/\sqrt{G}]_v+[\sqrt{G}_u/\sqrt{E}]_u)=0.$$

从而 $\kappa_1>0$, $\kappa_2=0$. 此时 $e\neq 0$, $g=0$. 再考虑闭曲面

$$Y(u,v)=X(u,v)+\frac{1}{2H}N(u,v).$$

从而 $Y_u=\dfrac{\kappa_2}{2H}X_u$, $Y_v=\dfrac{\kappa_1}{2H}X_v$ 仍为正交关系, 故解得

$$\overline{K}=4H^2>0.$$

从而与 $Y_u=0$ 矛盾.