黎曼曲面笔记(一)

光滑流形

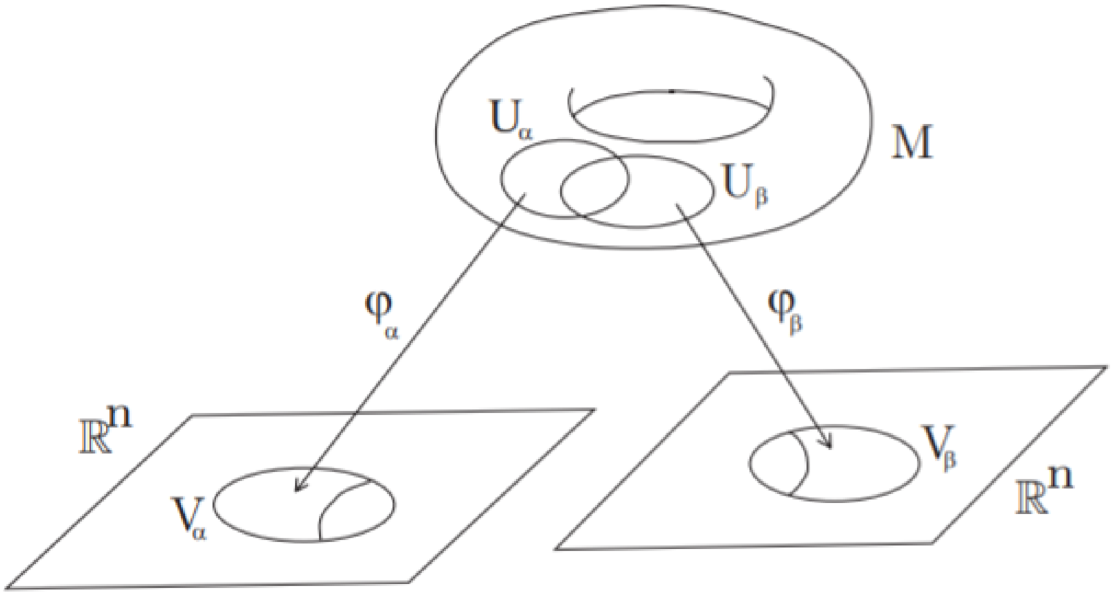
定义M为$\mathbb{R}^m$上的光滑流形, 若且仅若其满足以下性质:

1. 可分性(Hausdorff性), 即有可数个拓扑基(T2). 唯有空间可分, 才能定义度量于其上.
2. 对任意$x \in M$, 若存在邻域$x \in U$与使得U同胚于$\mathbb{R}^n$中开集. 此处即存在连续单射φ_x使得

$$\varphi_x : U \to \mathbb{R}^n, \varphi_x(U) \subset \mathbb{R}^n.$$

   称(U, φ_x)为局部坐标卡.

注意到球面S^2与$\mathbb{R}^2$显然不同胚, 故宜采用一组坐标卡描述某一流形. 由可分性质知流形足以由至多可数的坐标卡所组成的图册$\mathcal{A}$来描述. 应当注意, φ_x之连续性业已道明U_x为开集, 从而极可能存在不同坐标卡之交集, 即存在非空开集$U_{x,y} := U_x \cap U_y$. 是故φ_x与φ_y应当在某些方面保持兼容.



如下图所示, 流形$(M, \mathcal{A})$(或简记作M)上的局部坐标卡$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, (U_β, φ_β)有交集部分. 若交集部分在φ_α作用下所得的点x_α于V_β中对应x_β, 则$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x_\alpha) = x_\beta$. 此处作用如$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta$, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha$之函数称为转移函数. 若转移函数均可做到光滑, 则称M为光滑流形.

若$(M, \mathcal{A})$与$(N, \mathcal{B})$分别为n维与m维流形, 则$(M \times N, \mathcal{A}\#\mathcal{B})$为$m+n$维流形. 证明显然, 只需验证

$$\mathcal{A}\#\mathcal{B} : \{(\varphi_1, \varphi_2) : \varphi_1 \in \mathcal{A}, \varphi \in \mathcal{B}\}$$

导出的映射均光滑即可.

流形上的映射

对流形$(M,\mathcal{A})$, 映射$f:M\to\mathcal{R}$光滑若且仅若对任意坐标卡$\mathcal{A}\ni\varphi:U\to V\subset\mathbb{R}^n$, 函数$f\circ\varphi^{-1}$光滑. 称$F$为$(M,\mathcal{A})$与$(N,\mathcal{B})$间的光滑映射, 若一切$V$至$W$的转移函数$\eta\circ F\circ\varphi^{-1}$均光滑, 则称$F$为光滑映射. 例如

$$\rho:GL_n(\mathbb{R})\times GL_n(\mathbb{R})\to GL_n(\mathbb{R}),(A,B)\mapsto AB$$

光滑.

微分同胚: 称微分流形M, N微分同胚, 若对光滑映射$f:M\to N$存在光滑映射$g:N\to M$使得$f\circ g=\mathrm{id}_N$, $g\circ f=\mathrm{id}_M$. 记作$M\simeq N$. 例如$\mathbb{R}/\mathbb{Z}\simeq S^1$可由映射$f:x\mapsto e^{2\pi ix}$导出.

称$F:M\to N$为嵌入, 若且仅若对任意M中坐标卡φ与N中坐标卡η, 映射

$$\eta\circ F\circ\varphi^{-1}:\varphi(M)\to\eta(N)$$

总是可微且满秩. 例如

$$\pi:S^n\to\mathbb{R}P^n:=(\mathbb{R}^n)^*/\sim,x\mapsto[x]$$

为微分同胚. 对任意$p\in M$, 考虑

$$Df_p:T_pM\to T_{f(p)}N.$$

$F:M\to N$为immersion若且仅若Df_p对一切p均为单射; 称$F:M\to N$为submersion若且仅若Df_p对一切p均为满射.

> 光滑流形的同胚是否一定能构造微分同胚?

以下为一些简单的映射例子, 如$\mathbb{C}P^1\simeq S^2$. 其中$\mathbb{C}P^1:=(\mathbb{C}^2)^*/\sim$, $(z_1,z_2)\sim(z_3,z_4)$若且仅若$z_1z_4=z_2z_3$, 记之为等价类$[z_1,z_2]$.

证明: 考虑图册$\{(U_1,\varphi_1),(U_2,\varphi_2)\}$, 其中

$$\begin{aligned}\varphi_1:&\mathbb{C}P^1\setminus[0,1]:=U_1\to\mathbb{C},[1,z]\mapsto z,\\ \varphi_2:&\mathbb{C}P^1\setminus[1,0]:=U_2\to\mathbb{C},[z,1]\mapsto z.\end{aligned}$$

转换映射

$$\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}^*,z\mapsto z^{-1}.$$

同样, 通过球极投影构造S^2上图册$\{(V_1,\eta_1),(V_2,\eta_2)\}$, 其中

$$\begin{aligned}\eta_1:&S^2\setminus(0,0,+1):=V_1\to\mathbb{C},(a,b,c)\mapsto\frac{a+ib}{1-c},\\ \eta_2:&S^2\setminus(0,0,-1):=V_1\to\mathbb{C},(a,b,c)\mapsto\frac{a-ib}{1+c}.\end{aligned}$$

此时

$$\eta_2\circ\eta_1^{-1}:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}^*,z\mapsto z^{-1}.$$

定义

$$F:\mathbb{C}P^1\to S^2,\varphi_i^{-1}(z)\mapsto\eta_i^{-1}(z).$$

其中$i\in\{1,2\}$. 显然$\eta_i\circ F\circ\varphi_j$对$i=j$而言为恒同映射, 对$i\neq j$为取倒数映射, 从而光滑. f^{-1}同理光滑.

切空间与纤维丛

切空间与余切空间

考虑(光滑)流形中一点$x \in M$, 定义$C^\infty(p)$为M上p邻域内光滑函数全体的商空间(或称函数芽, 英文为germ), $f \sim g$若且仅若f与g在某一更小邻域内相同(为便于理解故, 读者可姑妄认同$f \sim g \Leftrightarrow \nabla(f-g)|_{x=p} = 0$). 定义切向量$V_p$为线性算子$V_p : C^\infty(p) \to \mathbb{R}$, 满足

$$V_p(fg) = f(p)V_p(g) + V_p(f)g(p).$$

定义切空间T_pM为流形M上p处全体切向量生成之线性空间(基域$\mathbb{R}$). 而依直觉有

$$T_pM = \operatorname{span}(\partial_{x_1}|_p, \partial_{x_2}|_p, \ldots, \partial_{x_m}|_p), \quad m = \dim M.$$

下以步骤验证之:

1. $\partial_{x_i}|_p x_j = \delta_i^j$. 从而诸$\partial_{x_i}$线性独立.
2. 对一切满足$\partial_{x_i}|_p(f) \equiv 0 (\forall i)$之函数$f$, $V_p(f) \equiv 0$. 实际上, 不妨设(U_p, φ_p)为覆盖p某一邻域的坐标卡, φ_p光滑. 任取$x \in (\varphi_p(U_p))^*$, 有

$$\begin{aligned} f \circ \varphi_p^{-1}(x) - f \circ \varphi_p^{-1}(0) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \varphi_p^{-1}(tx))\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \sum_{k=1}^m x_k \partial_{x_k}(f \circ \varphi_p^{-1}(tx))\mathrm{d}t. \\ &= \sum_{k=1}^m x_k h_k \end{aligned}$$

   此处h_k为U_p内的某光滑函数. 将$\partial_{x_k}|_p$作用于左式知$h_k(p) \equiv 0$. 从而p处任意切向量作用于f上亦为0.
3. 对一般切向量V_p, 考虑$V_p - \sum_{k=1}^m V_p(x_k)\partial_{x_k}|_p$即可.

实际上, 我们于上式第三步考察$\partial_{x_k}|_p$之分量时, 自然希望存在某一泛函L_k使得$L_k(V_p) = V_p(x_k)$. 此处记L_k为$\mathrm{d}x_k|_p$, 可见$\{\mathrm{d}x_k|_p\}$构成切空间对偶空间之基底, 称之余切空间(T_p^*M).

记$\phi : M \to N$为光滑流形间的光滑映射, 定义ϕ在p处切映射之微分为

$$\phi_{*p} : T_pM \to T_{f(p)}N, V_p \mapsto \phi_{*p}(V_p).$$

其中, $\forall g \in C^\infty(f(p))$, $\phi_{*p}(V_p)(g) = V_p(g \circ \phi)$. 容易验证链式法则:

对光滑映射链$M_0 \overset{\phi_1}{\to} M_1 \overset{\phi_2}{\to} \cdots \overset{\phi_k}{\to} M_k$, 有

$$(\phi_k \circ \cdots \phi_2 \circ \phi_1)_{*p_0} = \phi_{k,*p_k} \circ \cdots \circ \phi_{2,*p_2} \circ \phi_{1,*p_1}.$$

其中$M_0 \ni p_0 \overset{\phi_1}{\to} p_1 \overset{\phi_2}{\to} \cdots \overset{\phi_k}{\to} p_k$.

纤维丛

切空间全体$TM := \cup_{x \in M} TM_x$为$2n$维的光滑流形, 其上有自然的投影

$$\pi : TM \to M.\ TM_x \mapsto x.$$

实际上, 任意点上的切空间同构, 从而对坐标卡(U, φ)均有

$$\pi^{-1}(U) = \cup_{x \in U} TM_x \cong U \times TM_{x'}, \quad \forall x' \in U.$$

局部地看, 乘积空间TM是较为显然的纤维丛. 从上述出发, 定义:

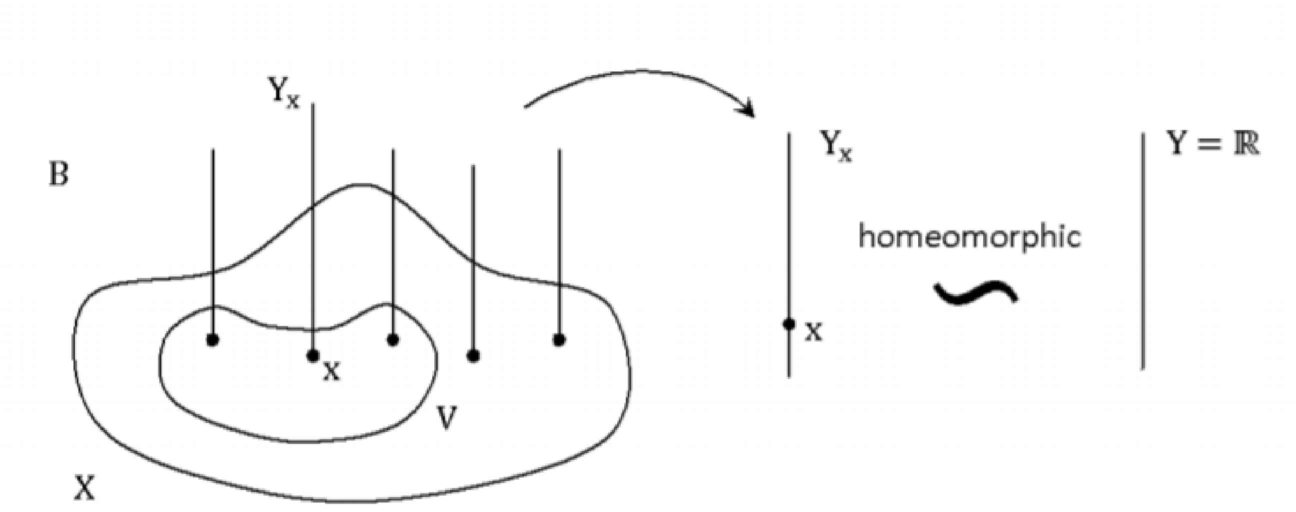
1. B为丛空间(TM起到B之作用)

2. X为底空间(若M起到X之作用), 同时X被某一坐标邻域集$\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$开覆盖.
3. 投影$p: B\to X$为连续满射, 例如上文中π.
4. 记$Y_x := p^{-1}(x), \forall x\in X$为$x$上的纤维. 称$Y$为纤维, 若对任意$x$总有$Y_x$同胚于$Y$. 此处的同胚映射不必唯一; 其间之相差等同于$Y$自身变换群中的某个元素即可. Y的自身变换群G与x之选取无关, 常称G为丛结构群或丛群. 从结构群G应当有效, 即左诱导作用之Kernel为单位元.

即$1\to Y\hookrightarrow B\xrightarrow{p} X\to 1$所示. 读者可自行类比牙刷与其上的毛纤维, 以上定义应是直观的. 为使得模型更加直观, 即从空间B(至少)在局部上类似乘积空间(并非cartesian积!), 我们约定对任意$x\in X$, 存在邻域U_x及同胚φ_x满足:

$$\begin{matrix}\varphi_x: U_x\times Y\to p^{-1}(U_x)\\ p\circ\varphi_x:(\tilde{x},y)\mapsto\tilde{x}\end{matrix}.$$

牙刷模型($Y\cong\mathbb{R}$)如下图所示:



若无最后一条约定, 从空间B未免凌乱不堪. 例如丁狗的毛发:

若增加乘积空间之性质, 丁狗的毛发会变俊, 即同构于∂丁狗于某一区间的乘积空间.

如流形之转换映射, 定义

$$\varphi_{j,x}:Y\to p^{-1}(x),y\mapsto\varphi_j(x,y).$$

则对任意$x\in U_i\cap U_j$, 同胚$\varphi_{j,x}\circ\varphi_{i,x}:Y\to Y$等同于从结构群$G$中某一元素$g_{ji}$于$Y$上之作用. 由于$G$有效, 则$g_{ji}$唯一确定. 可以发现, 在$U_i\cap U_j\cap U_k$上总有乘法

$$g_{ij}(x)g_{jk}(x)=\varphi_{ix}^{-1}\varphi_{jx}\varphi_{jx}^{-1}\varphi_{kx}=g_{ik}(x)$$

依照定义可证明对任意i, g_{ii}为U_i上单位元; g_{ij}与g_{ji}互为逆元; 二元运算封闭且满足结合律. 从而G为良定义的群.

*Hopf*纤维化

注意到$S^3\subset(\mathbb{R}^4)^*\simeq(\mathbb{C}^2)^*$, 我们关心: 是否能通过商映射得到

$$\pi:S^3\to\mathbb{C}P^1\simeq S^2.$$

倘若有足够的观察力, 可直接构造映射

$$\begin{aligned}\pi:&S^3\to S^2\\&(a,b,c,d)\mapsto(a^2+b^2+c^2+d^2,2(ad+bc),2(bd-ac))\end{aligned}$$

进而(可通过平方和恒等式, 可除代数等方面的结论)自然猜想:

$$\begin{aligned}S^0&\hookrightarrow S^1\to S^1\\S^1&\hookrightarrow S^3\to S^2\\S^3&\hookrightarrow S^7\to S^4\\S^7&\hookrightarrow S^{15}\to S^8\end{aligned}$$

下两式可采用八平方和恒等式与十六平方和恒等式验证, 此处从略. 之所以无

$$S^{15}\hookrightarrow S^{31}\to S^{16}$$

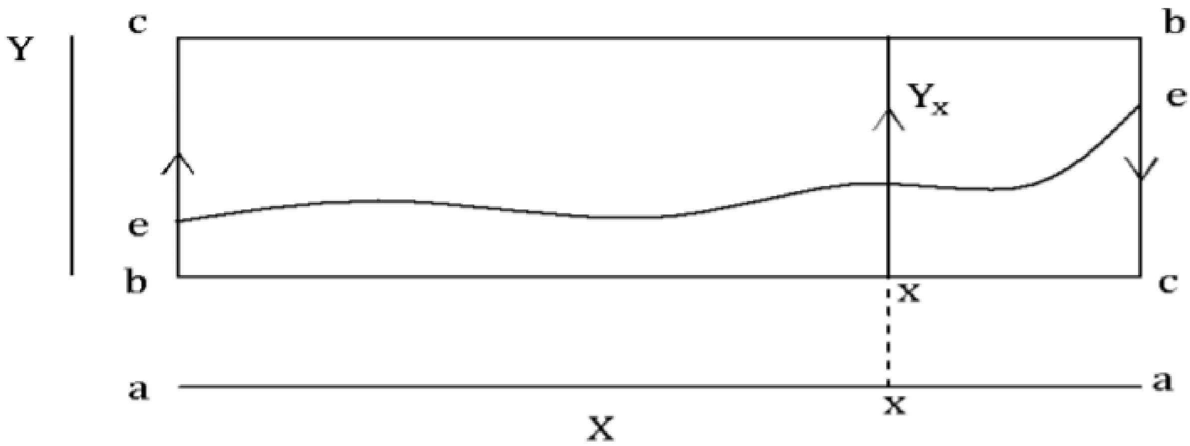
是因为Frobenius定理道明可除代数仅$\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H},\mathbb{O}$四者.

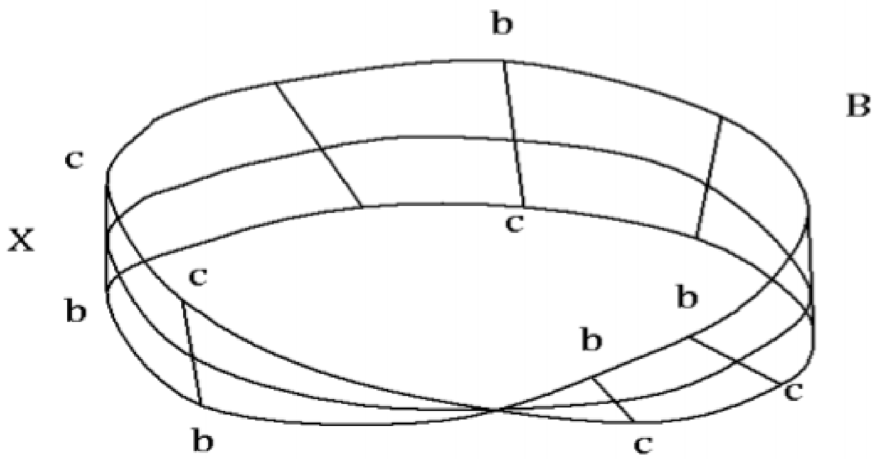
最简单的例子: 实Hopf纤维丛

考虑较平凡的$S^0 \hookrightarrow S^1 \to S^1$, 其中$S^0 \simeq \{a\}\dot\cup\{b\}$为两个点的无交并, $S^1 \simeq \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. 此处$S^1 \to S^1$应为双重覆盖(kernel为两个点), 自然

$$\{\pm 1\} \hookrightarrow S^1 \overset{z \mapsto z^2}{\to} S^1$$

即为所求. 另一种理解方式系通过Möbius带. 如下图所示





Möbius带中经过e点的闭合腰圆为L, 记底空间$X = L$, 从空间$L \times Y$, 自然投影$p : L \times M \to L$. 因此

$$[b, c] \hookrightarrow M \overset{p}{\to} S^1$$

实际上, $[b, c] \times S^1 \not\simeq M$: 这也说明了纤维丛并非为平凡的cartesian积!

则Y某一端点沿Möbius带边界移动回原点所通过的路径同胚于S^1的双重覆盖.

射影空间

一般地, 定义$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$. 记

$$O(n, \mathbb{F}) := \{B \in GL_n(F) : BB^T = B^T B = 1\}$$

为正交群. 记

$$SO(n, \mathbb{F}) : \{B \in O(n, \mathbb{F}) : \det B = 1\}$$

为特殊正交群. 同时约定$O(n) := O(n, \mathbb{R})$, $SO(n) := SO(n, \mathbb{R})$. 旋量群$Spin(n)$为$SO(n)$中的二重覆叠, 即满足

$$1 \to \mathbb{Z}_2 \to Spin(n) \to SO(n) \to 1.$$

低维李群间存在特殊的同构关系, 即巧合同构. 如下表所示:

$$\begin{array}{l} Spin(1) \simeq O(1) \simeq \mathbb{Z}_2 \\ Spin(2) \simeq U(1) \simeq SO(2) \simeq S^1 \\ Spin(3) \simeq Sp(1) \simeq SU(2) \simeq S^3 \\ Spin(4) \simeq Sp(1) \times Sp(1) \\ Spin(5) \simeq Sp(2) \\ Spin(6) \simeq SU(4) \end{array}.$$

实射影空间$\mathbb{R}P^n$为$(\mathbb{R}^{n+1})^*$中的点商去有向长度属性所得的子空间, 即$x \sim y$若且仅若x与y作为向量时平行. 显然有

$$S^0 \hookrightarrow S^n \to \mathbb{R}P^n$$

$\pi : S^n \to \mathbb{R}P^n$构造自然. 同理, $(\mathbb{C}^{n+1})^*$可作为$\mathbb{R}$上的$2n+2$维光滑流形. S^{2n+1}上的等价关系$x \sim y$即x, y作为$\mathbb{C}$上向量时平行, 进而所有等价类可看作S^1左诱导作用于S^{2n+1}所得. 因此

$$S^1 \hookrightarrow S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$$

商映射$\pi : S^n \to \mathbb{R}P^n$构造自然. 对四元数$\mathbb{H}$则有

$$S^3 \hookrightarrow S^{4n+3} \to \mathbb{H}P^n$$

对八元数而言, 不再有$S^7 \hookrightarrow S^{8n+7} \to \mathbb{O}P^n$: 实际上, 八元数的非结合性表明$\mathbb{O}P^n$在$n \geq 2$时无法被良定义.

另$n = 1$, 则$\mathbb{R}P^1 \simeq S^1, \mathbb{C}P^1 \simeq S^3, \mathbb{H}P^1 \simeq S^7, \mathbb{O}P^1 \simeq S^{15}$. Hopf映射得证. 具体映射依照相应代数的赋范结构导出. 对$S^1 \hookrightarrow S^3 \to S^2$而言, 由$\mathbb{C}$上赋范方式

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = |a+bi|^2 \cdot |c+di|^2 = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$$

可构造

$$\begin{aligned} \pi :& S^3 \to S^2 \\ & (a,b,c,d) \mapsto (a^2+b^2+c^2+d^2, 2(ad+bc), 2(bd-ac)) \end{aligned}.$$

对两个谐振子形成的动力系统, 采用Hamilton函数表示其能量则有

$$H = \frac{1}{2}(q_1^2 + p_1^2) + \frac{\lambda}{2}(p_2^2 + q_2^2) + o(q_i^2, p_i^2).$$

若振子相同, 即形成$1:1$共振. Hamilton函数作

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2).$$

作等能量面$H = H_0$可知$\{(p_1, p_2, p_3, p_4) : H(p_1, p_2, q_1, q_2) = H_0\} \simeq S^3$,

考虑换元

$$\begin{aligned} w_1 &= 2(p_1 p_2 + q_1 q_2) \\ w_2 &= 2(p_1 q_2 - p_2 q_1) \\ w_3 &= p_1^2 + q_1^2 - p_2^2 - q_2^2 \end{aligned}$$

则$w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 4H_0^2$. 以上换元建立了自然的Hopf映射:

$$S^1 \hookrightarrow S^3 \to S^2.$$

H_0在$Spin(3) \simeq Sp(1) \simeq SU(2) \simeq S^3$的作用下不变. 共振轨道即$S^3$上大圆.

留尾

关于可除代数, Clifford代数等将日后拟文.