图谱论导引(第八期)

本期对应原书第三章头节与极值图论相关知识(主要为Turán定理).

简单子图的计数

往期推送曾提及以下问题: 如何计算图中三角形数量? 此前, 我们证明了A^k的i行j列元素对应由i至j的长为k的总步数, 从而$\frac{1}{6}\text{trace}(A^k)$即为图中三角形数量. 该种思想为本小节的简单子图计数奠定了理论基础.

对给定的简单图G, 以下结论不难得证:

- $|V(G)| = \dim A$.
- $|E(G)| = \frac{1}{2}\text{trace}(A^2)$.
- G的平均度数为$\frac{1}{n}\text{trace}(A^2)$.
- 三角形总数为$\frac{1}{6}\text{trace}(A^3)$.

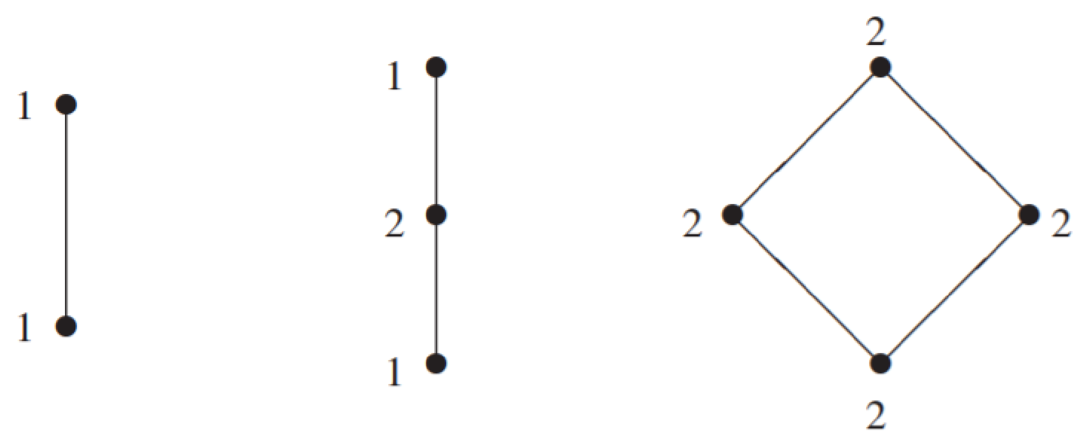
对单个顶点而言, 以点j为起点与终点的长为k的闭合步共计$a_{jj}^{(k)}$. 由于$A^k = Q^T\Lambda Q$, 从而

$$a_{jj}^{(k)} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{ij}^2 \mu_i^k.$$

$\deg j$与包含j的三角形数即可解得.

例1: 四边形计数

现有一问: 如何对图中四边形(即$K_{2,2}$)计数? 实际上, 只需从所有长为4的闭合步中选出"合规者"即可, 即下图中最右者.



只需注意:

- 图中边总数为$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{r}\alpha_{ij}^2\mu_i^2$.
- 图中P_2总数为

$$\sum_{j=1}^{n}\binom{\deg v_j}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j}(\deg v_j)^2 - \frac{1}{2}\sum_{j}\deg v_j$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{r}\alpha_{ij}^2\mu_i^2)^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{r}\alpha_{ij}^2\mu_i^2.$$

- $8n(K_{2,2}) + 4n(P_2) + 2n(e) = \mathrm{trace}(A^4).$

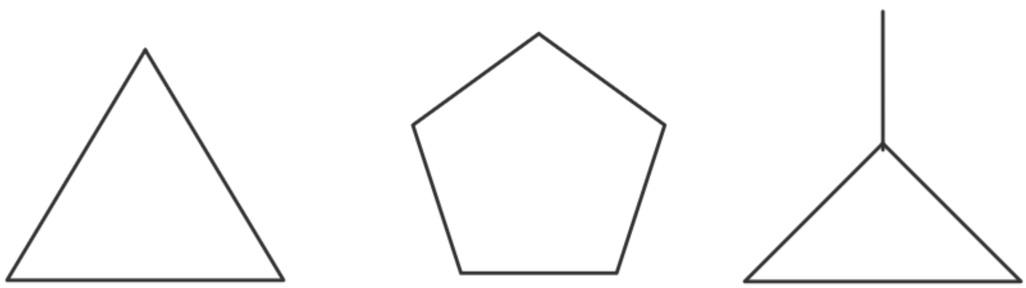
从而图中$K_{2,2}$总数为

$$\frac{1}{8}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{r}\alpha_{ij}^2\mu_i^4 + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{r}\alpha_{ij}^2\mu_i^2 - 2\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{r}\alpha_{ij}^2\mu_i^2)^2\right)$$
$$=\frac{1}{8}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{r}\alpha_{ij}^2\mu_i^2\left(\mu_i^2 + 1 - 2\sum_{k=1}^{r}\alpha_{kj}^2\mu_k^2\right)$$

类似地,

例二: 五边形计数

按图索骥, 现找出一切可能的5-闭合步, 即下列三者:



其中, 三角形重复记数30次, 因为$\mathrm{trace}\left(\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}^5\right) = 30$(此处步数5, 2互质, 从而三角形每条边都被遍历). 五边形重复计数10次, 漏斗型图重复计数10次.

- 所有5-闭合步之数量为$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{r}\alpha_{ij}^2\mu_i^5$.
- 所有三角形之数量为$\frac{30}{6}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{r}\alpha_{ij}^2\mu_i^3$.
- 在点j处度为4的所有漏斗型图数量为

$$\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\alpha_{ij}^2\mu_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_{ij}^2\mu_i^2 - 2\right)$$

故五边形数量为

$$\frac{1}{10}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{r}\alpha_{ij}^2\mu_i^3\left(\mu_i^2 + 5 - 5\sum_{k=1}^{r}\alpha_{kj}^2\mu_k^2\right).$$

何为极值图论

顾名思义, 极值图论(Extremal graph theory)系一类研究图极值性质的图论子学科, 先前所述的Ramsey数问题即是著名极值图论难题: Ramsey数本质上研究了图(及其补图)容许K_r子图之限度. 本节文章所探究的"子图计数"问题与极值图论紧密关联, 故特介绍于此.

最具代表性的极值图论学家当属Turán, 以下问题将引至著名的Turán定理.

Q1: 在保证不生成圈的情况下, n个点至多能添上几条边?

若连通图无边, 则其一定能展成平面图, 从而Euler示性数为2. 根据Euler定理,

$$|V|+|F|=|E|+2$$

此处$|F|=1$, 故$|E|=|V|-1$. 由是表明点数不超过边数的简单图必不为树.

Q2: 在保证不生成三角形的情况下, n个点至多能添上几条边?

直觉表明, 答案应是最大的完全二分图$K_{\lfloor n/2\rfloor,\lceil n/2\rceil}$. 此问题系Mantel于1907年提出(且证明), 大抵为极值图论之滥觞. 下搬运Mantel之原始证明.

对不含三角形的图G取度数最大的点x, 记$k:=\deg x=\max_{v\in V(G)}\deg v$. 由于$G$中无三角形, 故$x$之邻点互不相连. 注意到$|E(G)|\leq\sum_{v\notin N(x)}\deg v$, 故$|E(G)|\leq k(n-k)$. 明所欲证.

Q3: 在保证不生成K_p的情况下, n个点至多能添上几条边?

本问即Turán定理, 答案应为$\left\lfloor\left(1-\dfrac{1}{p-1}\right)\dfrac{n^2}{2}\right\rfloor$, 且等号可取. 以下将采用一种全新的图论研究方法证明, 我们先以极简单的案例作为楔子.

> 楔子: 任意简单图G包含一个二部子图, 使得该子图含有至少$\left\lfloor\dfrac{E(G)}{2}\right\rfloor+1$条边.
>
> 证明: 记$\mathcal{S}$为一切包含G顶点的极大二部子图之集合(包含两张无边图). 该集合构造如是: 将$V(G)$划分为V_1, V_2两个集合, 作新图G'使得其以V为顶点集, 以一切从V_2连至V_1的边为边集. 如此看来, 若随机划分, G中任意一条边出现于G'之概率恒为$\dfrac{1}{2}$. 故期望值$E[E(G')]=\dfrac{E(G)}{2}$. 显然部分空图低于平均值, 故G中的某一极大二部子图至少含有$\left\lfloor\dfrac{E(G)}{2}\right\rfloor+1$条边.

下利用"期望值法"证明Turán定理. 不妨设$V(G)=\{v_1,\dots,v_n\}$, $d_i:=\deg v_i$. 记$\omega(G)$为G中包含的最大完全子图之顶点数, 例如$\omega(G)=3$若且今若G包含K_3而不含K_4. 下证明$\omega(G)\geq\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-d_i}$.

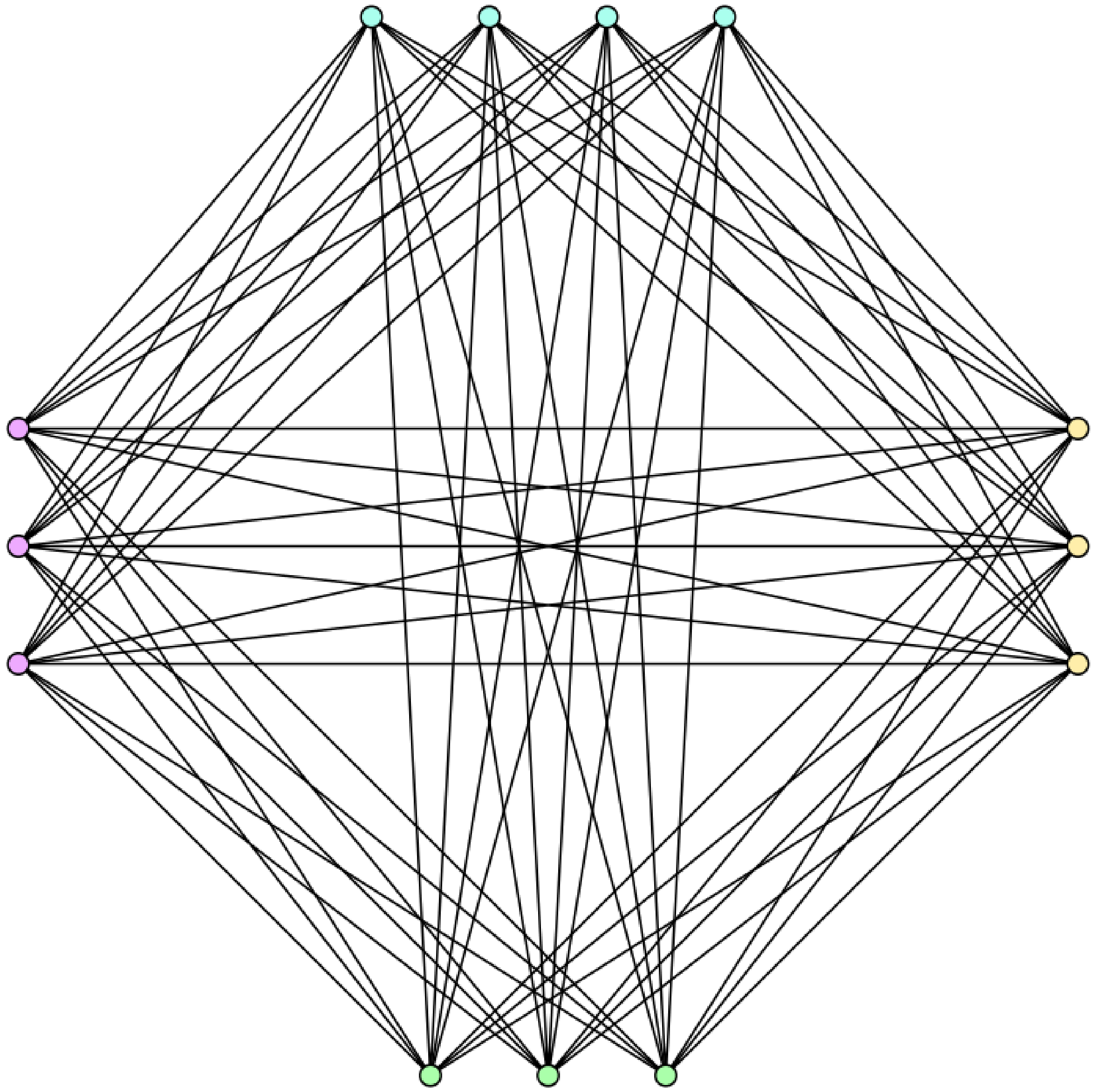
为提取G中完全子图, 定义π为$v_1,\dots,v_n$的随机排序, 即$\pi\in\mathrm{Aut}(V(G))$). 定义C_π为满足以下性质的集合: $\pi(v_j)\in C_\pi$若且仅若对任意$l>j$均有$\pi(v_l)\in C_\pi$. 定义随机变量$X_i=1$若且仅若$v_i\in C_\pi$, 反之$X_i=0$. 注意到$X_i=0$若且仅若$\pi(v_i)$后包含任意非邻点v_j的置换$\pi(v_j)$, 从而$EX_i=\dfrac{1}{n-d_i}$. 根据随机变量期望运算法则,

$$E|C_\pi|=\sum_{i=1}^{n}EX_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-d_i}.$$

注意到

$$
\begin{aligned}
n^2 &\le \left(\sum_{i=1}^{n}(n-d_i)\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(n-d_i)^{-1}\right) \\
&\le \left(n^2-2|E|\right)\omega(G) \\
&\le (n^2-2|E|)(p-1)
\end{aligned}
$$

得证. 取等若且仅若G为某一完全$p-1$部图$K_{r_1,\ldots,r_{p-1}}$, 其中r_i取$\left\lfloor \dfrac{r}{p-1} \right\rfloor$ 或$\left\lceil \dfrac{r}{p-1} \right\rceil$, 且$\sum_i r_i = r$. 例如$n=13$, $p=5$时的极值图为$T(13,4)$. 如下图所示



Stephan Brandt之证明以过于著名(且过于显然)故暂未放出, 读者可自行参阅之.