黎曼曲面笔记(三)

协变导数

上一章节中, 已定义流形M的切丛$TM := \cup_{p\in M} T_pM$与切向量场

$$X : M \to TM, p \mapsto T_pM.$$

试问: 如何对X进行所谓求导运算?

不妨考虑弧长参数下的闭曲线

$$\gamma : [0, 2\pi) \to S^1, \theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta).$$

向量场$X(\gamma(\theta)) = (-\sin\theta, \cos\theta)$在通常意义下的导数$X'(\gamma(\theta)) = (-\cos\theta, -\sin\theta)$与$T_{\gamma(\theta)}M$完全垂直, 从而$X'(\gamma(\theta))$不属于$T_{\gamma(\theta)}M$. 对张量场分量取取各分量关于矢量场的方向导数已并不在切空间中封闭. 另外, 读者可自行思考: 若将极坐标换作Cartesian坐标, 上述naïve的导数是否改变?

为克服如上困难, 考虑嵌入$M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$. 根据上期文章中的Witney嵌入定理, k的最小值不大于$n+1$, 从而为有限值. 对任意$p \in M$, 考虑分解

$$\mathbb{R}^{n+k} = T_p\mathbb{R}^{n+k} = T_pM \oplus N_pM.$$

其中N_pM称为法空间. 从而定义切分量函数

$$P_T : \mathbb{R}^{n+k} \to T_pM^n, v \mapsto P_T(v).$$

其中$P_T(v)$为向量v在切向的投影.

对$\mathbb{R}^{n+k}$中向量值函数X与Y, 记欧式导数

$$D_XY := (D_XY^1, \ldots, D_XY^{n_k}) = (XY^i)_{n+k}.$$

定义协变导数为$\nabla_XY := P_T(D_XY)$. 记$\Gamma(TM)$为一切切向量场$M \to TM$之集合, 设f为某一光滑函数. 可验证:

1. $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM), (X, Y) \mapsto \nabla_XY.$
2. $\nabla_{fX}Y = P_T(fD_XY) = f\nabla_XY.$
3. $\nabla_X(fY) = P_T(D_X(fY)) = P_T((D_Xf)Y) + fD_XY$. 其中$D_Xf$表示$f$在$X$向的导数, 故 $\nabla_X(fY) = (D_Xf)Y + fD_XY.$

Lie导数

对上述$f : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}$, 记向量场$X : \mathbb{R}^{n+k} \to T\mathbb{R}^{n+k}$. 任一点处$p$处均有

$$X(p)f = \left(\sum_{i=1}^{n+k} x(p)^i \partial_{x_i}|_p\right) f$$

考虑自然等价的向量场$\mathbf{X} : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{n+k}$, 则

$$Xf = \left(\sum_{i=1}^{n+k} x(p)^i \partial_{x_i}\right) f = \mathbf{X} \cdot \nabla f.$$

此处Lie导数$\mathscr{L}_{\mathbf{X}}f=\mathbf{X}\cdot\nabla f=Xf$显然为标量. 若考虑新向量场$\mathbf{Y}:\mathbb{R}^{n+k}\to\mathbb{R}^{n+k}$, 多阶导数算子$\mathscr{L}_{\mathbf{X}}^{m}$可定义. 同时"二重"导数$\mathscr{L}_{\mathbf{Y}}\mathscr{L}_{\mathbf{X}}f$亦可定义, 但对非通常意义下的导数而言, 下式或不再成立.

$$\mathscr{L}_{\mathbf{Y}}\mathscr{L}_{\mathbf{X}}f=\mathscr{L}_{\mathbf{X}}\mathscr{L}_{\mathbf{Y}}f.$$

例如对$\mathbb{R}_+$上的光滑函数$f(t)$, 定义$\mathscr{L}_{\mathbf{X}}:f(t)\mapsto f'(t)$, $\mathscr{L}_{\mathbf{X}}:f(t)\mapsto tf(t)$, 则$\mathscr{L}_{[\mathbf{X},\mathbf{Y}]}\equiv\mathscr{I}$为恒等算子. 定义Lie括号$[X,Y]:=XY-YX$, 注意到

$$\begin{aligned}[\mathbf{X},\mathbf{Y}]\cdot\nabla f=&[X,Y]f\\ =&\mathbf{X}\cdot\nabla(\mathbf{Y}\cdot\nabla f)-\mathbf{Y}\cdot\nabla(\mathbf{X}\cdot\nabla f)\\ =&[(\nabla\mathbf{Y})\mathbf{X}-(\nabla\mathbf{X})\mathbf{Y}]\cdot\nabla f\end{aligned}$$

则$[\mathbf{X},\mathbf{Y}]=[(\nabla\mathbf{Y})\mathbf{X}-(\nabla\mathbf{X})\mathbf{Y}]$. 上述$\mathscr{L}_{[\mathbf{X},\mathbf{Y}]}=\mathscr{L}_{\mathbf{X}}\mathscr{L}_{\mathbf{Y}}-\mathscr{L}_{\mathbf{Y}}\mathscr{L}_{\mathbf{X}}$.

下列举Lie括号部分性质(上述结论不难验证之):

1. 双线性, 即$[\cdot,\cdot]$关于两处均线性.
2. 反对称性, 即$[X,Y]+[Y,X]\equiv 0$.
3. Jacobi恒等式, 即$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$.

最后考虑一类特殊的张量: 挠率张量(扭转张量). 考虑如下2-形式

$$\begin{aligned}T:\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)&\to\Gamma(TM)\\ (X,Y)&\mapsto\nabla_XY-\nabla_YX-[X,Y].\end{aligned}$$

容易验证, 对任意光滑函数f都有

$$T(fX,Y)=T(X,fY)=fT(X,Y).$$

特别地, 若∇为通常意义下的导数, 则$T\equiv 0$.

联络与度量

下正式定义联络: 若映射

$$D:\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\to\Gamma(TM),(X,Y)\mapsto D_XY$$

满足

1. X函数线性, 即对任意$f\in C^{\infty}(M)$均有$D_{X_1+fX_2}Y=D_{X_1}Y+fD_{X_2}Y$.
2. D关于Y为导数, 即:
    1. $D_X(Y)$关于Y线性.
    2. $D_X(fY)=X(f)Y+fD_XY$.

则称D为M上的仿射联络, 即TM上的联络.

下介绍度量. 定义n维流形$M\hookrightarrow\mathbb{R}^{n+k}$中切空间$T_pM$上的内积$\langle,\rangle_{\mathbb{R}^{n+k}|_{T_pM}}$, 从而得到$(\mathbb{R}^{n+k},g_0)$的子流形$(M,g)$. 其中$g_0$为$\mathbb{R}^{n+k}$通常意义下的内积, g为g_0在M上导出的内积. 反之, 对任意(M,g), 是否存在m使得等距嵌入$(M,g)\hookrightarrow(\mathbb{R}^m,g_0)$对某些$g_0$恰好成立? Nash嵌入定理证明了$m\geq 2n^2+n$, 本文以篇幅故, 暂不给出证明.

根据线性性, 可在标架$\{e_i\}$上确定D的二次型形式, 此处可选$e_i=\partial_{x_i}$. 不妨设

$$D_{e_i}e_j=\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ji}^{k}e_k.$$

记$g_{ij}=\left\langle\partial_{x_i},\partial_{x_j}\right\rangle$. 类比符合函数之求导法则, 现给定以下限定:

1. $X\langle Y,Z\rangle=\langle D_XY,Z\rangle+\langle Y,D_XZ\rangle$.
2. $D_XY-D_YX-[X,Y]=0$.

则

$$\begin{aligned}\partial_{x_i}(g_{jk})=&\partial_{x_i}\left\langle\partial_{x_j},\partial_{x_k}\right\rangle\\=&\left\langle D_{\partial x_i}\partial_{x_j},\partial_{x_k}\right\rangle+\left\langle\partial_{x_j},D_{x_i}\partial_{x_k}\right\rangle\\=&\sum_{l=1}^{n}(\Gamma_{ij}^{l}g_{lk}+\Gamma_{ik}^{l}g_{jl})\end{aligned}$$

注意到

$$D_{\partial_{x_i}}\partial_{x_j}-D_{\partial_{x_j}}\partial_{x_i}-[\partial_{x_i},\partial_{x_y}]=\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}\partial_{x_k}-\Gamma_{ji}^{k}\partial_{x_k}\equiv 0$$

从而$\Gamma_{ij}^{k}\equiv\Gamma_{ji}^{k}$, 亦等价于$D$自伴随. 继而考虑

$$\begin{cases}\partial_{x_i}g_{jk}=\sum_{t=1}^{n}\left(g_{ti}\Gamma_{jk}^{t}+g_{kt}\Gamma_{ji}^{t}\right)\\\partial_{x_j}g_{ki}=\sum_{t=1}^{n}\left(g_{tj}\Gamma_{ki}^{t}+g_{it}\Gamma_{kj}^{t}\right).\\\partial_{x_k}g_{ij}=\sum_{t=1}^{n}\left(g_{tk}\Gamma_{ij}^{t}+g_{jt}\Gamma_{ik}^{t}\right)\end{cases}$$

故

$$\Gamma_{ij}^{k}=\sum_{t=1}^{n}\frac{g_{kt}}{2}\left(\partial_{x_j}g_{ti}+\partial_{x_i}g_{tj}-\partial_{x_l}g_{ij}\right).$$

即Γ由度量g唯一确定. 转写之, 则为

$$\langle D_X,Y\rangle=\frac{1}{2}(X\langle Y,Z\rangle+Y\langle Z,X\rangle-Z\langle X,Y\rangle+\langle Z,[X,Y]\rangle+\langle Y,[Z,X]\rangle\langle X,[Y,Z]\rangle).$$