同调代数课堂笔记 (1)

18-July-2022

范畴论简介

Def. 范畴 $\mathcal{C}$ 包含三要素

- $\mathcal{C}$ 中对象所成的类, 记作 $\mathsf{Obj}(\mathcal{C})$.
- $\forall A, B \in \mathsf{Obj}(\mathcal{C})$, 记 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ 为 A 至 B 的态射.
- 对任意 $A, B, C \in \mathsf{Obj}(\mathcal{C})$, 总存在态射的复合

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) &\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)\\ (f, g) &\mapsto gf.\end{aligned}$$

Def. 以上定义出的范畴 $\mathcal{C}$ 满足如下公理

- **A1.** 在有意义时总有复合 $(fg)h = f(gh)$.
- **A2.** 对任意 $A \in \mathsf{Obj}(\mathcal{C})$, 存在 $1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ 使得

$$\begin{aligned}\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, A), &\qquad 1_A f = f.\\ \forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \cdot), &\qquad g1_A = g.\end{aligned}$$

- **A3.** $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \cap \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D) \neq \emptyset$ 若且仅若 $(A = C) \wedge (B = D)$.

Def. 取 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, 称

- f 为单的若且仅若对任意 $g, h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$, $fg = fh \Leftrightarrow g = h$.
- f 为满的若且仅若对任意 $g, h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$, $gf = hf \Leftrightarrow g = h$.

Notation. 记 $f : A \rightarrowtail B$ 为单的 f. 记 $f : A \twoheadrightarrow B$ 为满的 f.

Def. 取 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$, 称 f 为同构 (可逆) 若且仅若存在 $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,A)$ 使得

$$gf = 1_A, \quad fg = 1_B.$$

此时称 A 与 B 为同构的.

Examples. 常见范畴如下

范畴	对象 (Obj)	态射 (Mor)
$\mathbb{S}ets$	set	map
$_F\mathbb{L}S$	linear space over F	linear map
$\mathbb{A}G$	Abelian group	group homomorphism
$\mathbb{G}$	group	group homomorphism
$_R\mathcal{M}$	left R-module	module homomorphism
$\mathbb{T}op$	topological space	continuous map
$\mathbb{R}ing$	ring	ring homomorphism

Ex1. $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ 为单且满的 $\overset{\Longleftarrow}{\not\Longrightarrow}$ f 为同构.

Proof. 一方面, f 为同构时一定存在 f' 使得 $ff' = 1_B$, 从而

$$gf = hf \Leftrightarrow gff' = hff' \Leftrightarrow g = h.$$

得 f 为满的. 同理 f 为单的.

另一方面, 考虑 Hausdorff 空间与连续映射所成的范畴, 则嵌入 $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ 为单且满的 (满足左右消去律, 但并非同构).

□

Ex2. 对 $\mathcal{C} = \mathbb{S}ets$, 证明单态射即单射.

Proof. $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$, f 为单的若且仅若对任意 $g,h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,A)$ 总有

$$g = h \Leftrightarrow fg = fh.$$

f 为单时, 下证明 f 为单设. 若存在不同的 $x_1, x_2 \in A$ 使得 $f(x_1) = f(x_2)$, 考虑 g 与 h 分别为将一切 C 中元素映至 x_1 与 x_2 的态射即得 f 非单, 矛盾.

f 为单射时, 下证明 f 为单的, 只需证 $fg = fh \implies g = h$. 若存在 $x_0 \in C$ 使得 $fg(x_0) = fh(x_0)$ 而 $g(x_0) \neq f(x_0)$, 则 $g(x_0)$ 与 $h(x_0)$ 在 f 下的像相同, 矛盾!

□

Example. 称 $(X, \leqq)$ 为半序集若且仅若 X 满足自反性 $(x \leqq x)$ 与传递性 ($(x \leqq y) \wedge (y \leqq z) \implies x \leqq z$). 例如整数集关于整除偏序形成半序集, 至少 $-1 \leqq 1$ 且 $1 \leqq -1$.

记范畴 $\mathcal{C}$ 为半序集 X 与偏序关系 $\leqq$ 所成的范畴. 取

- $\mathsf{Obj}(\mathcal{C}) = X$.
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) = \begin{cases} \{i_y^x\}, & x \leqq y, \\ \emptyset, & \text{otherwise}. \end{cases}$
- 态射满足复合关系 $i_z^y i_y^x = i_z^x$.

Example. 称 $\mathcal{C}$ 为小范畴若且仅若 $\mathsf{Obj}(\mathcal{C})$ 为集合 (并非真类).

Def. 称 $\mathcal{C}^{op}$ 为 $\mathcal{C}$ 的反变范畴, 若且仅若

- $\mathsf{Obj}(\mathcal{C}^{op}) = \mathsf{Obj}(\mathcal{C})$.
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$. 特别地,

$$f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A) \Leftrightarrow f^{op} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A, B)$$

- $g^{op} f^{op} = (fg)^{op}$.

Prop. $(\mathcal{C}^{op})^{op} = \mathcal{C}$.

Proof. 显然 $\mathsf{Obj}(\mathcal{C}) = \mathsf{Obj}((C^{op})^{op})$. 注意到 f 与 $(f^{op})^{op}$ 间存在自然对应, 故 $(\mathcal{C}^{op})^{op} = \mathcal{C}$.

□

Prop. $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ 为单 (满), 若且仅若 f^{op} 为满 (单).

Proof. 注意到

$$(f^{op} g^{op} = f^{op} h^{op}) \Leftrightarrow (gf)^{op} = (hf)^{op} \Leftrightarrow gf = hf.$$

反之亦然即可.

□

Def. 称 $I \in \mathsf{Obj}(\mathcal{C})$ 为起始元, 若 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(I, X)$ 有且仅有一个元素, $\forall X \in \mathsf{Obj}(\mathcal{C})$.

Def. 称 $T \in \mathsf{Obj}(\mathcal{C})$ 为终末元, 若 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, T)$ 有且仅有一个元素, $\forall X \in \mathsf{Obj}(\mathcal{C})$.

Def. 称 $Z \in \mathsf{Obj}(\mathcal{C})$ 为零元当且仅当其同为初始元与终末元.

Example. 单元集合为 $\mathbb{S}tes$ 中的终末元. $\mathbb{S}ets$ 中无初始元.

Example. 0 为 $\mathbb{A}G$ 中的零元; $(\mathbb{R}, \leq)$ 中不含初始元与终末元.

Thm. $\mathcal{C}$ 为含 0 元的范畴. 则

1. 对任意给定的零元 x, y 与 x 同构当且仅当 y 为零元.
2. 取 Z 为零元, 记 $\{0_{AZ}\} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Z)$, $\{0_{ZB}\} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, B)$, 复合态射

$$A \xrightarrow{0_{AZ}} Z \xrightarrow{0_{ZB}} B$$

   与零元之选取无关.

Proof. 对 1., 取任意零元 Z 与 Z', (唯一地) 取 $f : Z \to Z'$, $g : Z' \to Z$. 由于 $fg = 1_Z$, $gf = 1_{Z'}$, 从而 $Z \cong Z'$. 相反地, 若 A 与零元 Z 同构, 则存在唯一的 $f : A \to Z$, $g : Z \to A$. 因此

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A) =: \{gh \mid h : C \to Z\}$$

为一元集, 即 A 为终末元. 同理, A 为起始元.

对 2., 任取 Z 与 Z', 构造如下交换图

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dd, bend right, "g"'] \arrow[dr, "0_{ZB}"] & \\
A \arrow[ur, "0_{AZ}"] \arrow[dr, "0_{AZ'}"'] & & B \\
& Z' \arrow[uu, bend right, "f"'] \arrow[ur, "0_{Z'B}"'] &
\end{tikzcd}$$

. 易见 $0_{Z'B} 0_{AZ'} = (0_{ZB} g)(f 0_{AZ}) = 0_{ZB}(gf)0_{AZ} = 0_{ZB} 0_{AZ}$.

□

Def. 对含有零元 Z 的范畴 $\mathcal{C}$, 记 $0_{AB} = 0_{ZB} 0_{AZ}$ 为 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ 中的零态射.

Prop. $\mathcal{C}$ 为有零元的范畴, 取 $f : A \to B$, $g : B \to C$. 若 $f = 0$ 或 $g = 0$, 则 $gf = 0$.

Proof. 不妨设 Z 为零元, 则 $f = 0$ 时

$$gf = g 0_{AB} = (g 0_{ZB}) 0_{AZ} = 0_{ZC} 0_{AZ} = 0_{AC}.$$

$g = 0$ 时

$$gf = 0_{BC}f = 0_{ZC}(0_{BZ}f) = 0_{ZC}0_{AZ} = 0_{AC}.$$

□

Def. 记 $\{X_i\}_{i\in I}$ 为一族 $\mathcal{C}$ 中以 I 为指标的对象, 称 X 为 $\{X_i\}_{i\in I}$ 的直积若且仅若存在一族投影态射 $p_i : X \to X_i$ 使得满足泛性质:

对任意 $Y \in \mathsf{Obj}(\mathcal{C})$, 与态射 $f_i : Y \to X_i$, 存在唯一的 $f : Y \to X$ 使得 $p_i f = f_i$. 常记作 $(X, p_i) =: \prod_{i\in I} X_i$.

Prop. (X, p_i) 与 (X', p_i') 均为 $\{X_i\}_{i\in I}$ 之直积, 则 $X \cong X'$.

Proof. 考虑态射 $f : X \to X', g : X' \to X$. 根据直积性质得交换图

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, two heads, "p_i"] \arrow[dd, "f"] & & X' \arrow[ll, "g"'] \arrow[dl, two heads, "p'"'] \\
& X_i & \\
X' \arrow[ur, two heads, "p_i'"] \arrow[rr, "g"] & & X \arrow[uu, "f"'] \arrow[ul, two heads, "p_i"']
\end{tikzcd}$$

. 态射 p_i 与 p_i' 满足 $p_i = p_i(gf), p_i' = p_i'(fg)$. 由唯一性知 $gf = 1_X, fg = 1_{X'}$. 从而 X 与 X' 之间存在同构.

□

Def. 记 $\{X_i\}_{i\in I}$ 为一族 $\mathcal{C}$ 中以 I 为指标的对象, 称 X 为 $\{X_i\}_{i\in I}$ 的余直积若且仅若存在一族嵌入态射 $q_i : X_i \to X$ 使得满足泛性质:

对任意 $Y \in \mathsf{Obj}(\mathcal{C})$, 与态射 $g_i : X_i \to Y$, 存在唯一的 $g : X \to Y$ 使得 $gq_i = g_i$. 常记作 $(X, q_i) =: \coprod_{i\in I} X_i$.

Prop. (X, q_i) 与 (X', q_i') 均为 $\{X_i\}_{i\in I}$ 之余直积, 则 $X \cong X'$.

Proof. 同"直积在同构意义下唯一"之证明过程.

□

Prop. $\mathcal{C}$ 中直积 (X, p_i) 等同于 $\mathcal{C}^{op}$ 中余直积 (X, q_i).

Thm. 记 $\mathcal{C}$ 为含零元的范畴, 则

- 取 $\prod_{i\in I} X_i$, 则对任意 $j\in I$, 存在唯一的 $f_j : X_j \to X$ 使得 $p_i f_j = \begin{cases} 1_{X_i}, & j=i, \\ 0, & j\neq i. \end{cases}$

  此时 p_i 为满的.
- 取 $\coprod_{i\in I} X_i$, 则对任意 $j\in I$, 存在唯一的 $g_j : X \to X_j$ 使得 $g_j q_i = \begin{cases} 1_{X_i}, & j=i, \\ 0, & j\neq i. \end{cases}$

  此时 p_i 为单的.

Proof. 定义

$$f_j^i : X_i \to X_j, f_j^i = \begin{cases} 1_{X_i}, & j=i, \\ 0, & j\neq i. \end{cases}$$

端详下交换图, 不难看出唯一的 f_j 与 g_j 即为所得.

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[d, "f_j^i"'] & \prod_i X_i \arrow[l, "p_i"'] \\ X_j \arrow[ur, "\exists| f_j"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "q_i"] \arrow[d, "f_j^i"'] & \coprod_i X_i \arrow[dl, "\exists| g_j"] \\ X_j & \end{tikzcd}$$

.

□

Example. 记半序关系所称的范畴 $\mathcal{C} = (\mathbb{R}, \leq)$, 其中

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y) = \begin{cases} \{i_y^x\}, & x \leqq y, \\ \emptyset, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

则 $\prod_{i\in I} r_i = \inf\{r_i\}_{i\in I}, \coprod_{i\in I} r_i = \sup\{r_i\}_{i\in I}$.

Proof. 首先应保证 $\prod_{i\in I} r_i$ 与一切 r_i 可建立态射, 从而 $\prod_{i\in I} r_i \leq \inf\{r_i\}_{i\in I}$. 若 $\prod_{i\in I} r_i < \inf\{r_i\}_{i\in I}$, 则任取 $r_- \in (\prod_{i\in I} r_i, \inf\{r_i\}_{i\in I})$, 总有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(r_-, \prod_{i\in I} r_i)$ 为空. 因此 r_- 到任意 r_i 的态射为空, 矛盾.

余直积同理.

□

Example. 正整数整除关系所称的范畴 $\mathcal{C} = (\mathbb{Z}_{\geq 1}, |)$ 中, 直积为数组的最大公因数, 余直积为数组的最小公倍数.

加性范畴

Def. 称 $\mathcal{C}$ 为预加性范畴若且仅若其

1. 包含零元.
2. 一切 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ 均为加法 Abel 群.
3. 在定义完备时, 分配律成立.

Def. 称预加性范畴为加性范畴若且仅若其余直积均有限.

Example. $\mathbb{S}ets$ 不是加性范畴. $\mathbb{A}G$ 为加性范畴.

Thm. 记 $\{X_i\}_{i=0}^n \subset \mathsf{Obj}(\mathcal{C})$, $q_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, X_0)$. 则

1. $(X,q_i)=\coprod_{i=1}^n X_i$ 当且仅当对任意 $j\in\{1,2,\ldots,n\}$ 总有唯一的 $p_j : X \to X_i$ 使得 $p_jq_j = \begin{cases}1_{X_i}, & j=i,\\ 0, & j\neq i.\end{cases}$
2. 上述 p_i 使得 $(X,p_i)=\prod_{i=1}^n X_i$.

Proof. 定义 $f_j^i : X_i \to X_j, f_j^i = \begin{cases}1_{X_i}, & j=i,\\ 0, & j\neq i.\end{cases}$

$\Rightarrow$: 根据余直和之定义, 存在唯一的 $p_j : X \to X_j$ 使得 $p_jq_i = f_j^i$. 注意到

$$\left(\sum_{j=1}^n q_jp_j\right)q_i = \sum_{j=1}^n (q_j)(p_jq_i) = q_i, \quad \forall i \in I.$$

从而根据余直积之定义, 存在唯一的 $h_i : X \to X$ 使得 $hq_i = q_i$, 从而 $h_i = 1_X = \sum_{j=1}^n q_jp_j$.

$\Leftarrow$: $\forall Y \in \mathsf{Obj}(\mathcal{C})$, 取态射 $f_i : X_i \to Y$, 定义 $f : X \to Y$ 为 $f := \sum_{j=1}^n f_jp_j$. 注意到

$$fq_i = \sum_{j=1}^n f_j(p_jq_i) = f_i, \quad \forall i = 1,2,\cdots,n.$$

兹有断言: 存在唯一的 $f : X \to Y$ 使得 $fq_i = f_i$. 今取 $g : X \to Y$ 使得 $gq_i = f_i$, 则

$$g = 1_X = g\sum_{j=1}^n q_jp_j = \sum_{j=1}^n (gq_j)p_j = \sum_{j=1}^n f_jp_j = f.$$

继而证明上述 p_i 使得 $(X,p_i)=\prod_{i=1}^n X_i$. 对任意态射 $h_i : Y \to X_i$, 记 $h = \sum_{j=1}^n q_jh_j$, 则

$$p_i h = \sum_{j=1}^{n} (p_i q_j) h_j = h_i.$$

从而存在 h 使得 $p_i h = h_i$. 今证明 h_i 之唯一性, 若 $h' : Y \to X$ 同样满足 $p_i h' = h_i$, 则

$$h' = 1_X h' = \left(\sum_{j=1}^{n} q_j p_j \right) h' = \sum_{j=1}^{n} q_j (p_j h') = \sum_{j=1}^{n} q_j h'_j = h.$$

是以上述 p_i 使得 $(X, p_i) = \prod_{i=1}^{n} X_i$.

□

Prop. $\mathcal{C}$ 为加性范畴, 则 $\mathcal{C}^{op}$ 亦然.

Proof. 取 $\{X_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathsf{Obj}(\mathcal{C})$, 考虑 $(X, p_i^{op}) = \coprod_{i=1}^{n} X_i$ 即可.

□

Abel 范畴

Def. 称 $f : A \to B$ 为加性范畴 $\mathcal{A}$ 中的态射, 定义

- $\ker(f)$ 为态射 $i : K \to A$, 满足 $fi = 0$. 同时对于 $\forall g : X \to A$ 使得 $fg = 0$, 存在唯一的 $\theta : X \to K$ 使得 $g = i\theta$.
- $\mathrm{coker}(f)$ 为态射 $\pi : B \to C$ 使得 $\pi f = 0$. 同时对于 $\forall g : B \to X$ 使得 $gf = 0$, 存在唯一的 $\theta : C \to X$ 使得 $g = \theta\pi$.

换言之, 使得如下图交换

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\exists|\theta"] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "0"] & \\ K \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & X & \\ A \arrow[ur, "0"] \arrow[r, "f"] & B \arrow[u, "g"] \arrow[r, "\pi"] & C \arrow[ul, "\exists|\theta"'] \end{tikzcd}$$

.

Prop. $i^{op} = \mathrm{coker}(f^{op}), \pi^{op} = \ker(f^{op})$.

Prop. $\ker(f)$ 与 $\mathrm{coker}(f)$ 唯一.

Proof. 记 $i : K \to A$ 与 $i' : K' \to A$ 均为 $\ker(f)$, 则有交换图

$$
\begin{tikzcd}
 & K' \arrow[ld, dashed, "\exists!\theta"'] \arrow[d, dashed, "i'"] \arrow[rd, dashed, "0"] & \\
K \arrow[r, "i"] \arrow[rd, "\exists!\theta'"'] & A \arrow[r, "f"] & B \\
 & K' \arrow[u, dashed, "i'"'] \arrow[ru, dashed, "0"'] &
\end{tikzcd}
$$

. 从而 $\theta\theta' = 1_K, \theta'\theta = 1_{K'}$, 故 $K \cong K'$.

□

Prop. $\ker(0)$ 与 $\operatorname{coker}(0)$ 为同构映射.

Proof. 注意到如下交换图

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[ld, "\cong"'] \arrow[d, dashed, "1_A"] \arrow[rd, "0"] & & \\
K \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "0_{AB}"] \arrow[rd, "0"'] & B \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, dashed, "1_B"] & C \arrow[ld, "\cong"] \\
 & & B &
\end{tikzcd}
$$

. 其中存在单态射 $A \to K$ 与 $K \to A$ 且其复合为 1_A, 从而 $i : A \to K$ 为同构, $\pi : B \to C$ 为同构.

□

Thm. $f : A \to B$ 为加性范畴 $\mathcal{A}$ 中的态射.

1. 若 $\ker(f)$ 存在, 则 f 为单的若且仅若 $\ker(f) = 0$.
2. 若 $\operatorname{coker}(f)$ 存在, 则 f 为满的若且仅若 $\operatorname{coker}(f) = 0$.

Proof. 若 $\ker(f) = 0$, 取 $g, h : X \to A$ 使得 $fg = fh$, 则 $f(g - h) = 0$. 从而存在唯一的 $\theta : X \to K$ 使得 $g - h = 0\theta = 0$. 因此 $g = h$, 从而 f 为单的.

反之, f 为单的, 则 $fi = 0$ 表明 $f = 0$.

□

Def. 任取 $B \in \mathsf{Obj}(\mathcal{A})$, 考虑态射 $\{(A, f) \mid f : A \to B\}$. 称 (A, f) 与 (A', f') 等价, 若且仅若存在同构 $\theta : A \to A'$ 使得 $f'\theta = f$.

Def. 等价类 $[(A, f)]$ 为 B 的子对象.

Example. B 的子对象可能仅有 $[(B, 1_B)]$.

Def. 任取 $B \in \mathsf{Obj}(\mathcal{A})$, 考虑态射 $\{(f, C) \mid f : B \to C\}$. 称 (f, C) 与 (f', c') 等价, 若且仅若存在同构 $\theta : C \to C'$ 使得 $\theta f = f'$.

Def. 等价类 $[(f, C)]$ 为 B 的商对象.

Def. 称加性范畴为 Abel 范畴, 若且仅若

1. 一切态射存在 ker 与 coker.
2. 一切单态射为其 coker 的 ker, 一切满态射为其 ker 之 coker.
3. 任意态射 α 可被分解为 $\lambda\sigma$, 其中 σ 为满的且 λ 为单的.

Example. $\mathbb{A}G$ 为 Abel 范畴.

Def. 称 $\mathbb{F}AG$ 为自由 Abel 群范畴, 当且仅当其态射为群同态, 对象为自由 Abel 群 (即有基底, 亦即对 $g \neq e$ 总有 $o(g) = \infty$).

Example. $\mathbb{F}AG$ 并非 Abel 范畴, 至少商群并非都是自由 Abel 群.

Proof. 记 $A = \langle a \rangle, B = \langle b \rangle$ 为自由 Abel 群, 定义 $f : A \to B$, $f(na) = 2nb, \forall n \in \mathbb{Z}$. 显然 f 为单态射但非同构. 若 $\mathbb{F}AG$ 为 Abel 范畴, 今取 $\pi : B \to C$ 为 f 之 coker, 其中 C 为自由 Abel 群, 则 $0 = \pi f(a) = \pi(2b) = 2\pi(b) \in C$. 由于 C 自由, 从而 $\pi(b) = 0$. 是故 $\pi \equiv 0$, f 为同构, 导出矛盾.

□

Thm. 若 Abel 范畴中态射同为单与满的, 则为同构.

Proof. 取 $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ 单且满, 今证明 α 为同构. 注意到

$$
\begin{tikzcd}
K \arrow[dr, tail, "i"] & & D \arrow[dr, tail, "\lambda"] & & C \\
& A \arrow[ur, two heads, "\sigma"] \arrow[rr, tail, two heads, "\alpha"] & & B \arrow[ur, two heads, "\pi"] &
\end{tikzcd}
$$

. 显然 $i = \ker(\alpha)$ 等价于 $i = \ker(\sigma)$: 对任意 $g: X \to A$ 使得 $\alpha g = 0$, 存在唯一的 $\theta: X \to K$ 使得 $i\theta = g$; 而 $\lambda\sigma g = 0 = \lambda 0$, 根据单态射性质知 $\sigma g = 0$, 进而 $\ker(\alpha)$ 与 $\ker(\sigma)$ 等价.

同理, 由 $h\lambda\sigma = 0\sigma \Leftrightarrow h\lambda = 0$ 可知 $\mathrm{coker}(\alpha)$ 与 $\mathrm{coker}(\lambda)$ 等价. 由于 $\lambda = \ker(0)$, $\sigma = \mathrm{coker}(0)$ 均为同构, 则 $\alpha = \lambda\sigma$ 为同构.

□

Def. 记 $\alpha: A \to B$ 为 Abel 范畴中的态射, 记像 $\mathrm{im}(\alpha) := \ker(\mathrm{coker}(\alpha))$.

Prop. α 的像无非分解 $\alpha = \lambda\sigma$ 中的 λ.

Proof. 注意到

$$\begin{aligned}\ker(\mathrm{coker}(\alpha)) &= \ker(\mathrm{coker}(\lambda)) \\ &= \ker(\pi) \\ &= \lambda.\end{aligned}$$

□

Def. 称 $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ 为 Abel 范畴中在 B 处正合的列, 若且仅若 $\mathrm{im}(\alpha) = \ker(\beta)$.

Def. 左正合列具有形式 $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$.

Def. 右正合列具有形式 $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$.

Def. 正合列为左正合且右正合的列.

函子

Def. 称 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 为范畴间的共变函子, 若且仅若满足

F1. $\forall C \in \mathsf{Obj}(\mathcal{C}), FC \in \mathsf{Obj}(\mathcal{D})$.

F2. $\forall C \in \mathsf{Obj}(\mathcal{C}), F(1_{\mathcal{C}}) = 1_{FC}$.

F3. 若 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)$, 则 $Ff \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FC_1, FC_2)$.

F4. $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2), \forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_2, C_3),\ F(gf) = FgFf$.

Def. 称 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 为范畴间的共变函子, 若且仅若满足 **F1-2.** 与

F3'. 若 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2)$, 则 $Ff \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FC_2, FC_1)$.

F4'. $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_1, C_2), \forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C_2, C_3),\ F(gf) = FfFg$.

Remark. 通常定义函子为共变或反变的.

Example. $\forall A \in \mathsf{Obj}(\mathcal{C})$, 定义 $F : \mathcal{C} \to \mathbb{S}ets$ 为

- $\forall B \in \mathsf{Obj}(\mathcal{C}), FB = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.
- $\forall \tau : B \to B', F\tau : FB \to FB'$ 满足 $(F\tau)f = \tau f$ 对任意 $f \in FB$ 成立.

此处 F 为共变函子.

同理, $\forall A \in \mathsf{Obj}(\mathcal{C})$, 定义 $G : \mathcal{C} \to \mathbb{S}ets$ 为

- $\forall B \in \mathsf{Obj}(\mathcal{C}), GB = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$.
- $\forall \tau : B \to B', G\tau : GB' \to GB$ 满足 $(G\tau)f = f\tau$ 对任意 $f \in GB'$ 成立.

此处 F 为反变函子.

Example. 置 $\mathcal{C} = \mathbb{G}, \mathcal{D} = \mathbb{A}G$. 对任意群 G, 定义 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 满足 $FG = G/G'$, 其中 G' 为换位子群. 则同态 $f : G \to H$ 诱导

$$Ff : G/G' \to H/H'.$$

此处 F 为共变函子.

Example. 忘却函子 $F : \mathbb{R}ing \to \mathbb{A}b$ 满足 $F(R, +, \cdot) \to (R, +), F\varphi = \varphi$.

Def. 称范畴 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 间的共变函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$

- 为满的, 若且仅若 $\forall A, B \in \mathsf{Obj}(\mathcal{C})$, 总有满射

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, FB).$$

- 为忠实的, 若且仅若 $\forall A, B \in \mathsf{Obj}(\mathcal{C})$, 总有单射

$$F : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, FB).$$

- 为忠实浸入, 若且仅若 F 为满的, 忠实的, 且作用在对象上为一一的.

Def. 称加性范畴 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 间的函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 为加性函子, 若且仅若

$$F(f + g) = Ff + Fg, \quad \forall f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B).$$

Def. 称 Abel 范畴 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 间的加性共变函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 为

- 半正合的, 若且仅若 $\mathcal{C}$ 中正合列 $(0\to)A\to B\to C(\to 0)$ 推出正合列 $FA\to FB\to FC$.
- 左正合的, 若且仅若 $\mathcal{C}$ 中正合列 $0\to A\to B\to C(\to 0)$ 推出正合列 $0\to FA\to FB\to FC$.
- 右正合的, 若且仅若 $\mathcal{C}$ 中正合列 $(0\to)A\to B\to C\to 0$ 推出正合列 $FA\to FB\to FC\to 0$.
- 正合的, 若且仅若 $\mathcal{C}$ 中正合列 $0\to A\to B\to C\to 0$ 推出正合列 $0\to FA\to FB\to FC\to 0$.

此处考虑或忽视括号中内容均可, 同为正合性之等价定义.

关于 Abel 范畴上加性反变函子的正合性之序数同理, 此处从略.

自然变换

Def. 取 $E,F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 间的共变函子, 自然变换 $\tau:E\to F$ 为一族映射满足 $\tau_A:EA\to FA,\forall A\in\mathsf{Obj}(\mathcal{A})$, 使得对任意 $f:A\to A'$ 总有交换图

$$\begin{tikzcd}
EA \arrow[r, "Ef"] \arrow[d, "\tau_A"] & EA' \arrow[d, "\tau_{A'}"'] \\
FA \arrow[r, "Ff"] & FA'
\end{tikzcd}$$

.

Def. 若自然变换 τ_A 对 $\forall A\in\mathsf{Obj}(\mathcal{A})$ 均为同构, 则称 τ 为自然同构, 记作 $E\cong F$.

Example. 记 $\mathcal{V}$ 为域 k 上线性空间所成之范畴, $\forall V\in\mathsf{Obj}(\mathcal{V})$, 记 $V^*:=\mathrm{Hom}_k(A,k)$ 为对偶, 同理有 V^{**}. 定义共变函子 $F:\mathcal{V}\to\mathcal{V}$ 满足

- $FV=V^{**},\forall V\in\mathsf{Obj}(\mathcal{V})$.
- $Ff=f^{**}:=(f^*)^*,\forall f\in\mathrm{Hom}_k(V_1,V_2)$.

定义自然变换 $\tau_V:V\to V^{**}$ 为

$$\tau_V(x)(\theta)=:\theta(x),\quad \forall x\in V,\theta\in V^*.$$

容易验证交换图

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "1f"] \arrow[d, "\tau_{V_1}"] & V_2 \arrow[d, "\tau_{V_2}"'] \\
V_1^{**} \arrow[r, "Ff = f^{**}"] & V_2^{**}
\end{tikzcd}$$

. 从而 τ 为 $1_{\mathcal{V}}$ 到 F 的自然变换.

Proof. 实际上对任意 $x \in V_1, \theta \in V_2^*$, 总有 $\tau_{V_2}(1_{\mathcal{V}}f)(x)(\theta) = \theta f(x)$. 注意到 f^* 诱导映射

$$f^* : V_2^* \to V_1^*, (\theta : V_2 \to k) \mapsto \theta f,$$

从而 $(f^*)^* \tau_{V_1}(x)(\theta) = \tau_{V_1}(x) f^* \theta = (f^* \theta)x = \theta f(x)$.

□