product topology (Тихонов topology) 与 box topology 之不同之处可以类比如下:

定义: 称 $\{x_i\}_{i\in I}$ 线性无关, 若且仅若对一切 I 的有限子集 I_0, $\{x_i\}_{i\in I_0}$ 均线性无关.

定义: 线性张成 $\mathrm{span}(\{x_i\}_{i\in I}) := \cup_{I_0}\mathrm{span}(\{x_i\}_{i\in I_0})$, 其中 I_0 取遍 $\mathcal{P}(I)$ 中有限集.

比较第一个例子, 该例子与有限维线性空间比较贴近 **(**注**:** 不要联想 "基" 的概念**)**; 但需要收藏, 因为这涉及到某本著名泛函分析书里的错误.

c_0 为收敛至 0 的数列全体, 记 $e_k = (0,\dots,0,1,0,\dots)$ (第 k 位为 0), 则

- $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}$ 线性无关.
- $\mathrm{span}(\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}) \subsetneq c_0$.
- $\{e_1, e_2-e_1, e_3-e_2, \dots\}$ 也线性无关.

记 $x = \sum_{k\geq 1} x_k e_k$. 定义 c_0 上的二元函数 $d(x,y) = \sup_{n\geq 1}|x_n - y_n|$, 则

- d 为良定义的度量.
- (c_0, d) 完备.
- $\mathrm{span}(\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 1}})$ 为 c_0 中非开非闭集.
- $\mathrm{span}(\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 1}})$ 在 d 给出的拓扑的闭包下为 c_0.
- **(**留意此处**!)** $\forall x\in c_0$, 存在唯一的 $\{x'_k\}_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}$ 使得 $x = \sum_{k\geq 1} x'_k e_k$. 换言之, $\sum_{k\geq 1} t_k e_k = 0$ 当且仅当 $t_k \equiv 0$.
- 从而 c_0 上的线性函数为 $Tx = \sum_{k\geq 1} t_k x_k$ 形式, 其中 $\sum_{k\geq 1}|t_k| < \infty$.

定义 c 为收敛数列全体, 则

- 沿用以上的 d, (c,d) 完备.
- c 的线性无关组例如 $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 1}} \cup \{(1,1,1,\dots)\}$. 往后定义 $e_0 = (1,1,\dots)$
- $\mathrm{span}(\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}})$ 在 d 给出的拓扑的闭包下为 c.
- **(**留意此处**!)** $\forall x\in c$, 存在唯一的 $\{x'_k\}_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ 使得 $x = \sum_{k\geq 0} x'_k e_k$. 换言之, $\sum_{k\geq 0} t_k e_k = 0$ 当且仅当 $t_k \equiv 0$.
- 从而 c 上的线性函数为 $Tx = \sum_{k\geq 0} t_k x_k$ 形式, 其中 $\sum_{k\geq 1}|t_k| < \infty$.

第二个例子对初学者并不友好. 我们记 d 为 $C([1,2])$ 上的二元函数, 定义为 $d(f,g) = \sup_{1\leq x\leq 2}|f(x) - g(x)|$. 有以下事实:

- Weierstrass 逼近定理: $\{1, x, x^2, \dots\}$ 的闭包为 $C([1,2])$, 即对任意 $f\in C([1,2])$, 存在 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ 使得 $f = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$.
- $\{x^n\}_{n\geq 0}$ 线性无关.

- 因此, $\dfrac{1}{x^m}$ 可由 $\{x^n\}_{n\geq 0}$ 逼近, 即 $\{x^m, x^{m+1}, x^{m+1}\ldots\}$ 可逼近 1, 故闭包为 $C([1,2])$. 不难得到一个神奇的结论:
  a. $\{x^n\}_{n\geq 1}$ 中去掉任意有限个元素后仍在 $C([1,2])$ 中稠密.
  b. 存在无穷组不全为 0 的数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ 使得 $\sum_{n\geq 0} a_n x^n \equiv 0$.

记 $\prod_{i\in I} X_i$ 之 product topology 作 (X, τ_1), $\prod_{i\in I} X_i$ 之 box topology 作 (X, τ_2).

- 使得投影算子 p_i 连续的最粗拓扑为 τ_1.
- τ_2 在 $|I| \geq \omega$ 时严格大于 τ_1 (此处设恒存在 U_i 使得 $\emptyset \subsetneq U_i \subsetneq X_i$).

记 X 为 $\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 个 $(\mathbb{R}, \tau_{\text{normal}})$ 之笛卡尔积, τ_i 定义如上, 则

- 选取 (X, τ_1), 则保证函数 $f: \mathbb{R} \to X, x \mapsto (x, x, x, \ldots)$ 连续之最粗拓扑为 $(\mathbb{R}, \tau_{\text{normal}})$.
- 选取 (X, τ_1), 则保证函数 $f: \mathbb{R} \to X, x \mapsto (x, x, x, \ldots)$ 连续之最粗拓扑为 $(\mathbb{R}, \tau_{\text{discrete}})$. 注意到开集 $\prod_{k\geq 1}(x_0 - k^{-1}, x_0 + k^{-1})$ 之原像为 x_0.

Ex1 定义 ℓ^∞ 为有界数列全体, 以上的 d 仍为 ℓ^∞ 上良定义的度量, ℓ^∞ 仍完备, 则

- 使得函数 $f: \mathbb{R} \to \ell^\infty$ 连续之最粗拓扑为 $(\mathbb{R}, \tau_{\text{discrete}})$.

Ex2 对于上述 (X, τ_i) 是否均存在 $\{U_k\}_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}$ 使得

1. $U_1 \subset U_2 \subset \cdots U_k \subset U_{k+1} \subset \cdots$.
2. $\cup_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 1}} U_k = X$.
3. $f^{-1}(U_k) = \emptyset, \forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.