图谱论导引(第三期)

> 本文娱乐性质偏重, 主要对$\lambda_{\min}=-2$的强正则图进行分类.

强正则图美妙而莫测, 本文仅是对强正则图的最小特征值的匆匆一瞥, 主要对$\lambda_{\min}=-2$之强正则图进行了分类. 选取$\lambda_{\min}=-2$的原因有二:

1. Seidel证明了$\lambda_{\min}>-2$的所有强正则图无非K_n与C_5; 而$\lambda_{\min}=-2$之情况复杂. Seidel之所证明的结论可仿照本文证明之, 故在此从略.
2. 据日前所证明的等式$\det(xI-A(G))=(2+x)^{|V|-|E|}\det(xI-L(A(G)))$可知, 线图(line graph)之特征值一般包含-2. 而强正则图之线图仍有一定对称性, 故以-2为最小特征值之图或为某强正则图之线图.

我们用系数(v,k,λ,μ)描述一个强正则图. 如日前文章所言, 强正则图$G(v,k,\lambda,\mu)$含有重数为1的主特征值k, 以及非主特征值

$$\begin{cases}\tau=\dfrac{1}{2}\left[(\lambda-\mu)+\sqrt{(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu)}\right],\\ \theta=\dfrac{1}{2}\left[(\lambda-\mu)-\sqrt{(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu)}\right].\end{cases}.$$

相应的重数为

$$\begin{cases}m_\tau=\dfrac{1}{2}\left[v-1-\dfrac{2k+(v-1)(\lambda-\mu)}{\sqrt{(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu)}}\right],\\ m_\theta=\dfrac{1}{2}\left[v-1+\dfrac{2k+(v-1)(\lambda-\mu)}{\sqrt{(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu)}}\right].\end{cases}.$$

同时有必要条件$k(k-\lambda-1)=(v-k-1)\mu$. 当$\theta=-2$时, 化简得$k=2\lambda-\mu+4$.

- 当$\mu=2$时, 得通解$(n^2,2(n-1),n-2,2)$, 其中$n\geq 2$.
- 当$\mu=4$时, 得通解$(n(n-1)/2,2(n-2),n-2,4)$, 其中$n\geq 4$.

当$\mu\neq 2,4$时, 由特征值关系化简知$m_\tau=\dfrac{2v-k-2}{\tau+2}=\dfrac{(\mu+2\tau)(\mu+2\tau+2)}{\mu(\tau+2)}$. 下从图的"部件"数量考察.

设$x\sim a,b$但$a\nsim b$, 记$\{x,a,b\}$包含于c个$K_{1,3}$及q个C_4. 这里, 限定$K_{1,3}$在G中无环, 例如K_4不包含$K_{1,3}$, 但$K_{3,3}$包含$K_{1,3}$. 从而计算x邻点数量得

$$\begin{aligned}k&=\sum_{y\nsim a,y\nsim by\sim x}1+\sum_{y\nsim a,y\sim by\sim x}1+\sum_{y\sim a,y\nsim by\sim x}1-\sum_{y\sim a,y\sim by\sim x}1\\&=2+2\lambda-(\mu-1-q)+c\end{aligned}$$

故$c+q=k-3-2\lambda+\mu=1$. 因此$c=0,q=1$或$c=1,q=0$.

若$c=1$, 则不妨设$\{x,a,b,c\}$组成$K_{1,3}$. 记$N(v):=\{x:x\sim v\}$为v之邻域, $N(H):\{x\in N(v):v\in H\}$为$H$之邻域, $F(H):=V(G)\setminus(V(H)\cup N(H))$为外点集. 注意到

1. $N(x)\cap F(a)$内, $k-\lambda-1=\tau+1$个点在$\{b,c\}\cup N(b,c)\setminus\{x\}$中, 从而$\tau\leq\mu$.
2. $(N(a)\cap F(x))\cup\{a\}$中的$k-\lambda$个点包含于$F(\{b,c\})$中的$\lambda=v-2k+\mu-2$个点, 从而$v\geq 5\tau+\mu+4$.
3. $\mu v=(k-\tau)(k+2)$, 从而$v=3\tau+\mu+2+\dfrac{2\tau(\tau+1)}{\mu}\in\mathbb{N}$. 因此$\mu\leq r$.

故得系数组

- $(6\tau+4,3\tau,2\tau-2,\tau)$, 其中$m_\tau=9-\dfrac{12}{\tau+2}\in\mathbb{N}$. 幸闻A. E. Brouwer对$\mu$界之估计($v\le\dfrac{m_\tau(m_\tau+3)}{2}$), 从而箇地少了交关吃力弗讨好个事体哉(上海言话, 大意为避免徒劳). 取$\tau=1,2,4,10$即可.

若$q=1$, $\{x,a,b\}$属于唯一的C_4, 进而μ必为偶数, $N(a,b)$包含为$K_{(\mu/2)\times 2}$. 若$a\sim d\nsim b$, 则d与$N(a,b)$中的$\mu/2$个点恰好相邻(此处从$K_{1,3}$之不存在性分析即可). 注意到$F(b)$导出强正则图(系数$(v-k-1,k-\mu,\lambda-\mu/2,\mu)$), 这里应当允许$v-k-1$, $k-\mu=0$之无边甚至无点的情况.

- 无边情形对应$K_{2\times n}$.

若$F(b)$导出完全图, 则$m_\tau=8-\dfrac{12}{\tau+2}$. 从而枚举知

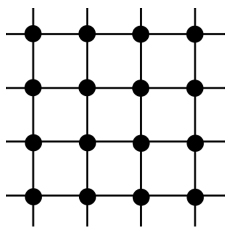
- $(10,6,3,4)$, $(16,10,6,6)$.

若$F(b)$导出(其余情形的)强正则图, 则由

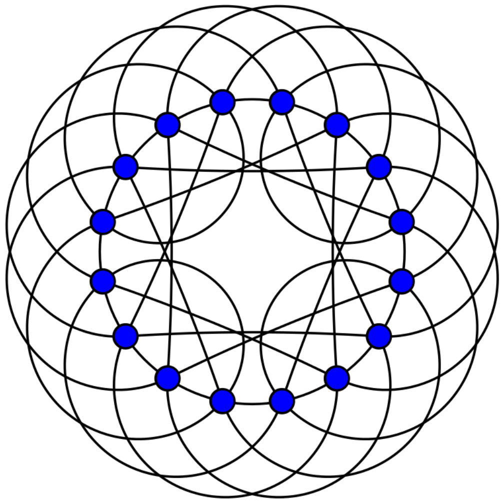
$$(k-\mu)=2(\lambda-\mu/2)-\mu+4$$

知$F(b)$导出的强正则图的最小特征值仍为-2. 该导出图的最大特征值重数为$\dfrac{2\tau(\tau+1)}{(\tau-\mu/2+2)\mu/2}$, 从而$\mu$仅可能为6或8, 或该导出的强正则图为$K_{2\times n}$形式. 就此再进行有限次的枚举, 最终整理得到七类可能的图.

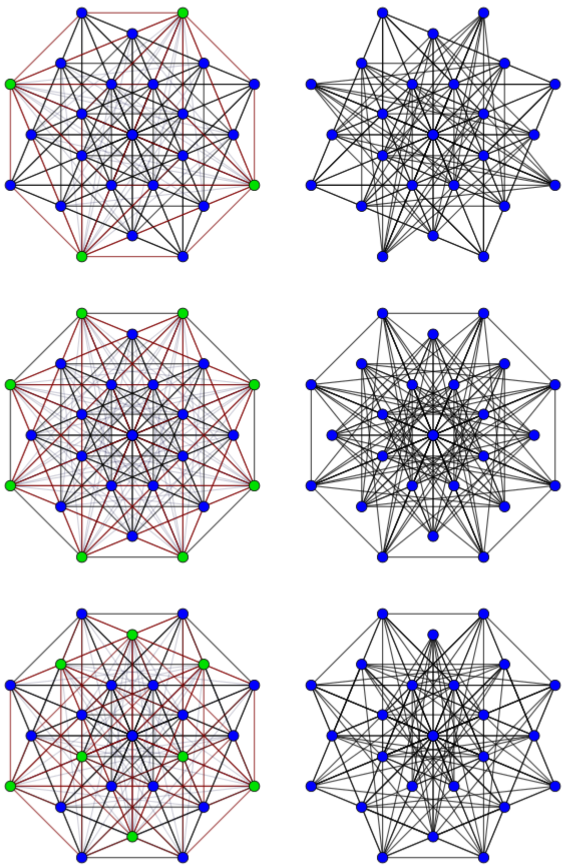
1. $K_{n\times 2}$. 无需赘释.
2. $L_2(n)$, 亦为$H(2,n)$. 系数为$(n^2,2(n-1),n-2,2)$. 前一种表示方式对应格点图(lattice/mesh/gird graph), 每一点仅与同行同列的点相连.

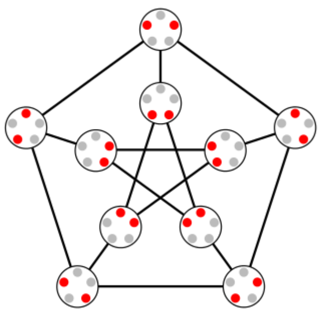
   后一种表示方式为2阶Hamming图, $H(2,n)$的顶点集与$V(K_n)\times V(K_n)$相同, 记作$\{(x_1,x_2):x_1,x_2\in\{1,2,\dots,n\}\}$, $(x_i,x_j)\sim(x_k,x_l)$若且仅若$i=k$或$j=l$.
3. $T(n)$. 系数为$(n(n-1)/2,2(n-2),n-2,4)$. 原理与$L_2(n)$相同, 只是n阶正方形被换做了n阶三角形. 神奇的是, $T(n)=L(K_n)$.
4. Shrikhand图. Shrikhand于1959年证明了结论: 格点图之系数决定了唯一的强正则图, 但$n=4$例外. 实际上, Shrikhand图与$L_2(4)$拥有相同的谱. 该图适合作为头像(在某些特定的审美标准下).



5. Chang(強)图. $T(n)$之系数确定了唯一的强正则图, 除了$n=8$时的三个异构图. 该类图由Chien-Chiang Lee(李建強)首次发现. 同样适合作为头像(在某些特定的审美标准下).

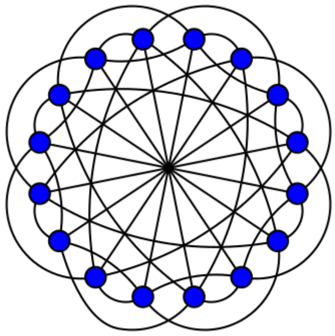


6. Petersen图($KG_{5,2}$), 系数为$(10,3,0,1)$, 前文业已介绍. 之所以写作$KG_{5,2}$, 是因为该图有另一种定义方式, 请端详下图.



图中以$\mathbb{Z}_5$之二元子集为点, 连边若且仅若点所对应的子集相离. 往往可以利用集合关系之对称性作(强)正则图, 读者可回顾往期推送中对$[\mathrm{Aut}(S_6):\mathrm{Inn}(S_6)]=2$之解释($n\neq 2,6$时, $\mathrm{Inn}(S_n)=\mathrm{Aut}(S_n)$).

7. Clebsch图, 系数为$(16,10,6,6)$. 这是证明末段$\mu=6$情形所对应的结果, 其形如下. 该图适合作为Shrikhand图之对偶头像(或称avatar couple, 在某些特定的审美标准下).



读者可思考如下小问题: (参见前文介绍过Ramsey数)已知给K_n中边3染色, 使得必定出现同色的三角形, 则$n\geq 17$. 试问, 应如何构造$n=16$时的反例?

8. Schläfli图, 系数为$(27,16,10,8)$. 这是证明末段$\mu=8$情形所对应的结果. 若读者洞若观火, 可领会Schläfli图中任意一点的邻域(16个点)导出Clebsch图之补图. 谨附Schläfli图于文末.