Willmore能量简介

定义

本文定义曲面S的Willmore能量为

$$\mathcal{W} := \int_S (H^2 - K)\mathrm{d}\sigma.$$

其中$H^2 - K = \dfrac{(\kappa_1 - \kappa_2)^2}{4}$. 对闭曲面而言, 有

$$\mathcal{W} = \int_S H^2 \mathrm{d}\sigma - 2\pi\chi(S).$$

内蕴几何下的Willmore能量

$\mathbb{R}^n$下内蕴几何记号注释

度量: $(g_{i,j})_{n\times n}$. 第一基本形式

$$I(\vec{t}) = \left(\sum_{i=1}^n X_i \cdot (u^i)_s\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n X_i \cdot (u^i)_s\right) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(u^i)_s(u^j)_s.$$

方向$\vec{t}$上的截面曲率为定义了第二基本形式

$$II(\vec{t}) = \kappa\cos\theta(\vec{t}) = \kappa_n(\vec{t}) = \dot{\vec{t}} \cdot \vec{n} = \sum_{i,j=1}^n X_{ij} \cdot n \cdot (u^i_s u^j_s) \left[+\sum_{i=1}^n X_i \cdot n \cdot u^i_{ss}\right] = \sum_{i,j=1} b_{ij} u^i_s u^j_s.$$

相应的测地曲率为$\kappa\sin\theta$. 对非单位切向量$\vec{u}$, 截面曲率即$\dfrac{II(\vec{u})}{I(\vec{u})}$.

考虑常截面曲率之条件, 即使得$(b_{ij}) - \kappa_n(g_{ij})$不满秩的$\kappa_i$. 定义Gauss曲率

$$K := \prod_{i=1}^n \kappa_i = \det[(b_{ij}) \cdot (g_{ij})^{-1}] = \frac{\det(b_{ij})}{\det(g_{ij})}.$$

平均曲率(记$(g^{ij})=(g_{ij})^{-1}$).

$$nH:=\prod_{i=1}^{n}\kappa_i=\mathrm{trace}[(b_{ij})\cdot(g_{ij})^{-1}]=\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}g^{ji}.$$

引入记号

$$\partial_j X_i=\left(\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}X_k\right)+b_{ij}\vec{n}$$
$$\partial_i\vec{n}=-\sum_{j=1}^{n}b_i^jX_j$$

其中Γ_{ij}^k与b_{ij}关于指标ij对称. 注意到

$$\partial_k g_{ij}=\sum_{l=1}^{n}\left(\Gamma_{ik}^{l}g_{lj}+\Gamma_{jk}^{l}g_{li}\right)$$

从而$\sum_{l=1}^{n}\Gamma_{ij}^{l}g_{lk}=\dfrac{\partial_i g_{jk}+\partial_j g_{ki}-\partial_k g_{ij}}{2}$. 写作矩阵$(i,j)$固定即

$$(\Gamma_{ij}^l)_{1\times n}(g_{lk})_{n\times n}=\left(\frac{\partial_i g_{jk}+\partial_j g_{ki}-\partial_k g_{ij}}{2}\right)_{1\times n}.$$

从而

$$\Gamma_{ij}^k=\sum_{l=1}^{n}\left(g^{kl}\cdot\frac{\partial_i g_{jl}+\partial_j g_{li}-\partial_l g_{ij}}{2}\right)$$

考虑$X_{ijk}=X_{ikj}$, 左侧等于

$$\begin{aligned}X_{ijk}=&\left(b_{ij}\vec{n}+\sum_{m=1}^{n}\Gamma_{ij}^{m}X_m\right)_k\\=&\partial_k b_{ij}\vec{n}-\sum_{l=1}^{n}b_{ij}b_k^lX_l+\sum_{l=1}^{n}\partial_k\Gamma_{ij}^{l}X_l+\sum_{m,l=1}^{n}\Gamma_{ij}^{m}\Gamma_{mk}^{l}X_l+\sum_{l=1}^{n}\Gamma_{ij}^{l}b_{lk}\vec{n}\\=&\left(\partial_k b_{ij}+\sum_{l=1}^{n}\Gamma_{ij}^{l}b_{lk}\right)\vec{n}+\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{n}\Gamma_{ij}^{m}\Gamma_{mk}^{l}+\partial_k\Gamma_{ij}^{l}-b_{ij}b_k^l\right)X_l\end{aligned}$$

保持各分量一致, 得

$$\begin{aligned}\partial_k b_{ij}-\partial_j b_{ik}=&\sum_{m=1}^{n}\Gamma_{ij}^{m}b_{mj}-\Gamma_{ik}^{m}b_{mj}\\b_{ij}b_k^l-b_{ik}b_j^l=&R_{ijk}^{l}=\partial_k\Gamma_{ij}^{l}-\partial_j\Gamma_{ik}^{l}+\sum_{m=1}^{n}(\Gamma_{ij}^{m}\Gamma_{mk}^{l}-\Gamma_{jk}^{m}\Gamma_{mj}^{l})\end{aligned}$$

注意到$(b_i^j) = (b_{ij}) \cdot (g^{ij})$, 从而$\sum_{l=1}^n b_i^l g_{lj} = b_{ij}$. 记

$$R_{ijkl} = \sum_{m=1}^n R_{ijk}^m g_{ml} = \sum_{m=1}^n (b_{ij} b_k^m - b_{ik} b_j^m) g_{ml} = b_{ij} b_{kl} - b_{ik} b_{jl}.$$

是故高斯曲率为$\dfrac{\det(b_{ij})}{\det(g_{ij})} = \dfrac{R_{1212}}{\det g}$.

特别地, 记

$$R_{ij} := \sum_{l=1}^n R_{ilj}^l = \sum_{l,m=1}^n R_{ilkm} g^{ml}.$$

二维曲面的**Willmore**能量

二维情形下, $R_{ij} = K g_{ij}$. 从而

$$K g_{ij} = \sum_{l=1}^2 R_{ilj}^l = \sum_{l=1}^2 (b_{ij} b_l^l - b_{il} b_j^l) = 2H b_{ij} - \sum_{l=1}^2 b_j^l b_{il}.$$

定义Ricci曲率$R := \sum_{i,j=1}^n g^{ij} R_{ij}$, 从而二维情形下

$$R = \sum_{i,j=1}^2 g^{ij} g_{ij} K = 2K.$$

因此

$$R_{ijkl} = \frac{R}{2}(g_{ik} g_{jl} - g_{jk} g_{il}) = K \det \begin{pmatrix} g_{ik} & g_{jk} \\ g_{il} & g_{jl} \end{pmatrix}.$$

与Gauss曲率公式相合. 再如

$$\sum_{i,j=1}^2 b_i^j b_j^i = \sum_{i,j,k=1}^2 g^{ij} b_{jk} b_i^k = \sum_{i,j=1}^2 g^{ij}(2H b_{ij} - K g_{ij}) = 4H^2 - 2K.$$

因此二维闭曲面的Willmore能量为

$$\mathcal{W} = \frac{1}{4} \int_S \mathrm{trace}((\mathrm{d}N_p)^2) \mathrm{d}\sigma_p - \pi \chi(S).$$