图谱论导引(第六期)

上一期文中, 我们以特征多项式为工具, 着重讨论了割边图, 割点图, 晕图等导出图之性质. 文末所述的闭合步生成函数有效化简了割点图的直接导出公式. 本文将继续分析一般图的特征多项式, 重点研究线图与Cartesian积之情形.

读者可回忆第一期习题中的某一定理: 图G特征多项式之导函数即其所有真子图特征多项式之和, 即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\det(x-IA(G))=\sum_{i\in V(G)}\det(x-IA(G-j)).$$

证明略. 相反地, 能否通过各子图确定原图之形貌? 此难题系Kelly与Ulam一同提出的, 未尝得解; 可稽之成果略列如下:

- 若G为树, 则P_G由P_{G-j}唯一确定.
- P_G由诸$G-j$之形貌唯一确定.

实际上, 以下论断均成立:

- 给定结构未知的图G及其诸割点图之特征多项式, 若存在有重根的特征多项式$P_{G-j}(x)$, 则P_G可确定.

下一节将给出证明.

特征值排序公式

证明仅需一技巧: 真子图特征值排序公式. 今有以下论断: 若A为n阶对称矩阵, B为A之m阶主子式. 记$\lambda_1,...,\lambda_n$为A升序排列的特征值, $x_1,...,x_n$为对应之特征向量; $\beta_1,...,\beta_m$为B升序排列的特征值, $y_1,...,y_m$为对应之特征向量. 则对任意$k\in\{1,2,...,m\}$, $\lambda_k\le\beta_k\le\lambda_{k+n-m}$.

为证明之便, 下定义

$$V_k:=\mathrm{span}(x_k,...,x_n),W_k:=\mathrm{span}(y_1,...,y_k)$$

为统一维度, 记

$$\tilde{W}_k:W_k\times\mathbf{0}^{n-k}.$$

由于$\dim V+\dim\tilde{W}_k-n=1$, 故不妨取$\tilde{w}_k\in V\cap\tilde{W}_k$, 记$w_k$为$\tilde{w}_k$的前$k$项(后$n-k$项显然为0). 注意到

$$\lambda_k:=\min_{x\in V_k}\frac{x^TAx}{x^Tx}\le\frac{\tilde{w}_k^TA\tilde{w}_k}{\tilde{\omega}_k^T\tilde{\omega}_k}=\frac{\omega_k^TB\omega_k}{\omega_k^T\omega_k}\le\max_{y\in W_k}\frac{y^TBy}{y^Ty}=\beta_k.$$

从而不等式左侧得证. 考虑

$$V_k^*:=\mathrm{span}(x_1,...,x_{k+n-m}),W_k^*:=\mathrm{span}(y_k,...,y_m)$$

即可证得不等式之另一侧.

若$P_{G-j}(x)$有重根, 该重根自然为$P_G(x)$之根. 若诸割点图之特征多项式已知, 即可唯一确定$P_G(x)$.

半正则二部图之线图

回顾线图之定义: $L(G)$以G之边为点, $L(G)$中两点相连若且仅若其对应的G中边相邻. 此前业已定义导出矩阵$B:=(b_{ve})_{|V|\times|E|}$以描述图中点与边之相属关系, 且$A(L(G))=B^TB-2I_{|E(G)|}$. 对$k$正则图$G$而言, $A(G)=BB^T-kI_{|V(G)|}$, 从而

$$P_{L(G)}(x)=(x+2)^{|E|-|V|}P_G(x-k+2).$$

下适当放宽限制, 考虑如是定义的半正则二部图(semi-regular bipartite graph)

- G为半正则二部图若且仅若G为二部图, 且n_1个顶点度为k_1, $n_2:=|V|-n_1$个顶点度为k_2.

此处不妨设$n_1\geq n_2$, 则

$$P_{L(G)}(x)=(x+2)^{n_1k_1-n_1-n_2}P_G\left(\sqrt{(x-k_1+2)(x-k_2+2)}\right)\sqrt{\frac{x-k_1+2}{x-k_2+2}}^{\,n_1-n_2}$$

证明不繁, 仅需注意

$$BB^T=\begin{pmatrix}k_1I_{n_1} & K^T\\ K & k_2I_{n_2}\end{pmatrix}=A+D$$

即可. 记$Q_G(x)$为无符号Laplace矩阵$A(G)+D(G)$之特征多项式, 从而

$$\begin{aligned}Q_G(x)=&\begin{vmatrix}(x-k_1)I_{n_1} & -K^T\\ -K & (x-k_2)I_{n_2}\end{vmatrix}\\ =&\begin{vmatrix}(x-k_1)I_{n_1} & O\\ -K & (x-k_2)I_{n_2}-\dfrac{KK^T}{x-k_1}\end{vmatrix}\\ =&(x-k_1)^{n_1-n_2}P_{KK^T}((x-k_1)(x-k_2))\end{aligned}$$

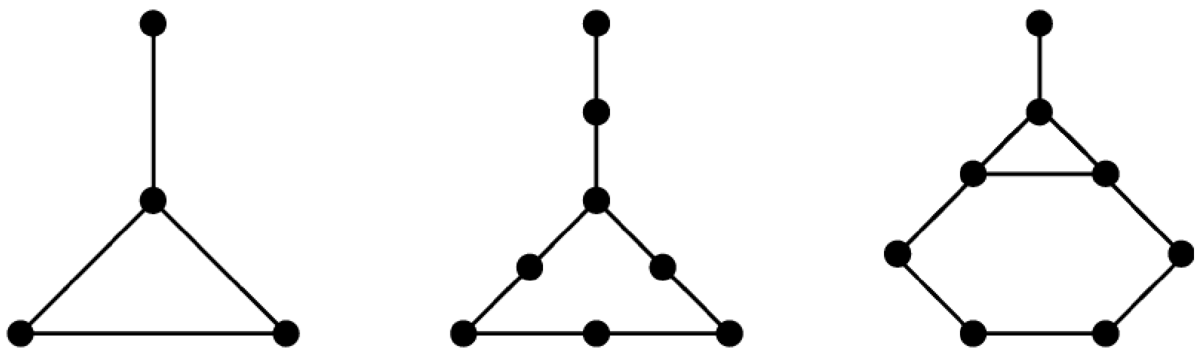
而$P_{A^2}(t^2)=P_A(t)^2=(P_{KK^T}(t)P_{K^TK}(t))^2=x^{2(n_1-n_2)}P_{KK^T}(x)^4$, 回代即得证结论.

倘若前n_2个特征值已知(降序排列), 则可求出$P_{L(G)}(x)$之显式表达. 应留意$\lambda_1(G)=\sqrt{k_1k_2}$, 对应的特征向量系$(\sqrt{r_1}\mathbf{1}_{n_1},\sqrt{r_2}\mathbf{1}_{n_2})$. 再由于$\mathrm{rank}(A(G))\leq 2n_2$. 从而$P_G(x)$有因子$x^{n_1-n_2}$. 计算得

$$\begin{aligned}P_{L(G)}(x)=&(x-k_1-k_2+2)(x-k_2+2)^{n_1-n_2}(x+2)^{n_1k_1-n_1-n_2+1}\\ &\times\prod_{i=2}^{n_2}[(x-k_1+2)(x-k_2+2)-\lambda_i^2]\end{aligned}.$$

中驻图

中驻图(subdivision graph)$S(G)$系G之各边中标注一顶点的生成图, 例如$S(P_n)=P_{2n-1}$, $S(G_1\dot\cup G_2)=S(G_1)\dot\cup S(G_2)$. 笔者姑译之"中驻图", 是以边内安插之新顶点形似驻马亭边, 重有"宛辔憩通衢"之意味. 如下图所示



G $\qquad$ $S(G)$ $\qquad$ $L(S(G))$

注意到$A(S(G))=\begin{pmatrix}O & B^T\\ B & O\end{pmatrix}$, 故$P_{S(G)}(x)=x^{|E|-|V|}Q_G(x^2)$.

端详$V(G)$与$V(S(G))\setminus V(G)$之连边情况, $S(G)$为二部图. 倘若G本身为正则图, $S(G)$即为半正则二部图. 若G为k正则图, 则$P_{S(G)}(x)=x^{m-n}P_G(x^2-k)$.

图谱论导引(第六期(下))

> Cartesian类积系图论中一类重要的多元运算. 由于其本身涉及图的维数增加, 故形式略为复杂；但对Cartesian类积之研究不乏蹊径, 例如本文着重介绍的NEPS语言.

Cartesian类积与NEPS

NEPS(non-complete extended p-sum)系一类甚是常见的图运算. 定义非零且同维数的二进元组$\mathcal{B}\subset\{0,1\}^n\setminus\{0\}^n$, 图序列$\{G_i\}_{i=1}^n$在NEPS运算后之结果如下:

- 新图之顶点无非$V(G_1)\times V(G_2)\times\cdots\times V(G_n)$,
- 新图之两点$(x_1,\ldots,x_n)$与$(y_1,\cdots,y_n)$相邻若且仅若存在$\beta\in\mathcal{B}$使得$\beta_i=0\Leftrightarrow x_i=y_i$且$x_j\sim y_j\Leftrightarrow\beta_j=1$.
- 一般记该新图为$\mathrm{NEPS}(\{G_i\}_{i=1}^n,\mathcal{B})$.

例如记$\mathcal{B}=\{(1,0),(0,1)\}$, $G_1\cong G_2=P_3$, 则$\mathrm{NEPS}(G_1,G_2;\mathcal{B})=$ 田.

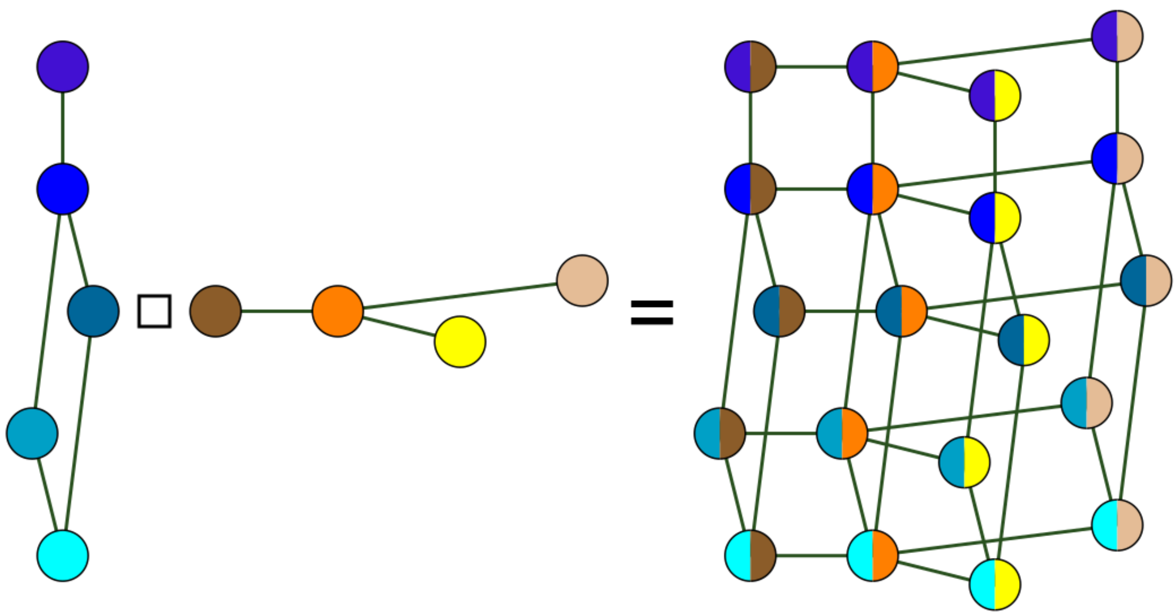
现采用NEPS语言分析常见之图乘积, 姑称之Cartesian类积(Cartesian type products).

Cartesian积

此前业已在第五期推文中介绍该运算之二元情形: 定义$G\Box H$为G与H之Cartesian积, 其中$V(G\Box H)\cong V(G)\times V(H)$, $(g_i,h_i)\sim(g_j,h_j)$若且仅若以下一者成立

- $g_1=g_2$, 且H中$h_1\sim h_2$, 对应$(0,1)\in\mathcal{B}$.
- $h_1=h_2$, 且G中$g_1\sim g_2$, 对应$(1,0)\in\mathcal{B}$.

例如$P_2\Box P_3=$ 日, $(P_2\dot{\cup}P_2)\Box P_3=P_2\Box(P_3\dot{\cup}P_3)=$ 昌. 下图为较复杂的例子



述诸NEPS定义法, Cartesian积$\Box\{G_i\}_{i=1}^n$之$\mathcal{B}$基底为所有仅包含一个1的n元组. 之所以多元Cartesian积良定义, 是因为$(\mathcal{G},\Box)$为良定义的交换半群.

- $\Box$之交换性说明: 以$G_1\Box G_2$为例, $G_1\Box G_2$中点(a_1,a_2)与(b_1,b_2)相邻若且仅若

$$[(a_1=b_1)\wedge(a_2\sim b_2)]\vee[(a_1\sim b_1)\wedge(a_2=b_2)].$$

注意到逻辑符号$\vee$两侧可交换, 从而$\square$可交换.

- $\square$之结合性说明: 以$(G_1\square G_2)\square G_3=G_1\square(G_2\square G_3)$为例, $(G_1\square G_2)\square G_3$中点$(a_1,a_2,a_3)$与$(b_1,b_2,b_3)$相邻若且仅若

$$\begin{aligned}&\big(\{[(a_1=b_1)\wedge(a_2\sim b_2)]\vee[(a_1\sim b_1)\wedge(a_2=b_2)]\}\wedge(a_3=b_3)\big)\\&\vee\{[(a_1=b_1)\wedge(a_2=b_2)]\wedge(a_3\sim b_3)\}\\\Leftrightarrow&\vee_{\text{cyc.}}\{(a_1=b_1)\wedge(a_2=b_2)\wedge(a_3\sim b_3)\}\end{aligned}$$

利用对称式与交换律即可证明

$$(G_1\square G_2)\square G_3=(G_2\square G_3)\square G_1=G_1\square(G_2\square G_3).$$

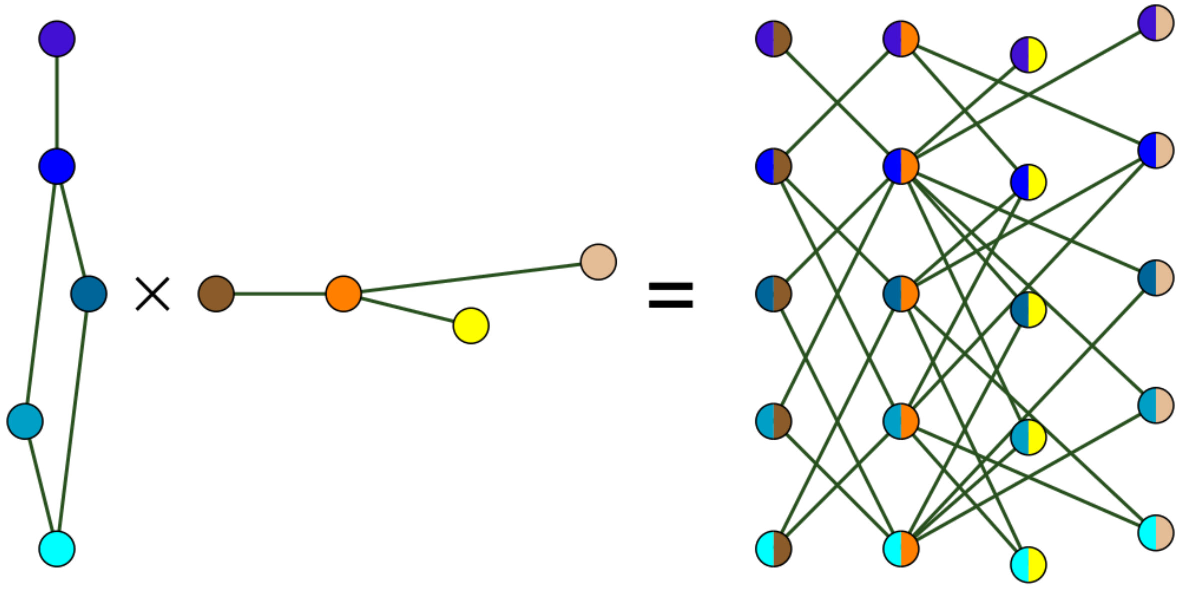
由是可发觉一则简单结论: n元运算具备交换律, 若且仅若$\mathcal{B}$中基底具有高度对称性, 即每一元素对应的数组经过任意形式的重排后仍位于$\mathcal{B}$中. 兹将结合律之相应论断留予读者思索.

张量积

定义$G\times H$为G与H之张量积(tensor product), 其中$V(G\times H)\cong V(G)\times V(H)$, $(g_i,h_i)\sim(g_j,h_j)$若且仅若

$$(g_i\sim g_j)\wedge(h_i\sim h_j).$$

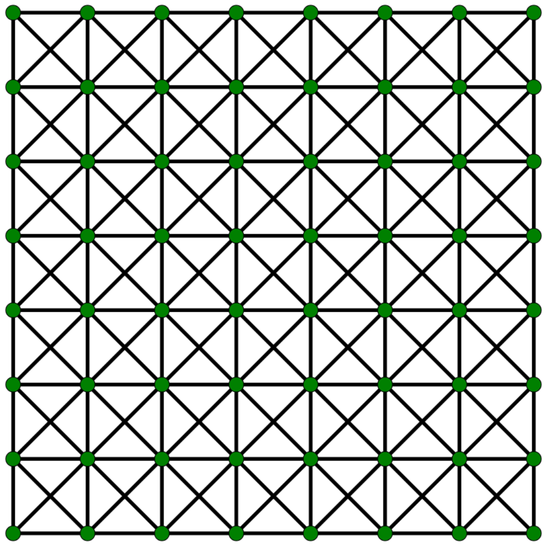
如下图所示:



此时$\mathcal{B}=\{(1,1)\}$, 因此$\times$之交换律与结合律无比显然. 是故多元运算之情形过于显然的, 兹不赘述.

强积

约定$\mathcal{B}=\{0,1\}^n\setminus\{0\}^n$即可. 易知其满足交换律与结合律, 其一般形式留余读者自行探索. 下图为$P_8\boxtimes P_8$的运算结果



颇具Pyramide du Louvre之风.

邻接矩阵与谱

我们自然关心Cartesian类积生成图的邻接矩阵及其谱. 截至此段, NEPS语言暂未显示其独特作用, 但下文之结论实属精妙.

先前文章中已有结论: $A(G\square H)=A(G)\otimes I_{|V(H)|}+I_{|V(G)|}\otimes A(H)$. 注意到$\mathcal{B}=\{(1,0),(0,1)\}$, 由此可自然猜想

$$A(\mathrm{NEPS}(\{G_i\}_{i=1}^n;\mathcal{B}))=\sum_{\beta\in\mathcal{B}}\otimes_{i=1}^n A(G_i)^{\beta_i}.$$

例如

$$\begin{aligned}A(G\square H)=&A(G)^1\otimes A(H)^0+A(G)^0\otimes A(H)^1\\=&A(G)\otimes I_{|V(H)|}+I_{|V(G)|}\otimes A(H)\end{aligned}$$

证明: 将$V(G_1)\times\cdots\times V(G_n)$进行字典排序, 考虑点$(i_1,\ldots,i_n)$与$(j_1,\ldots,j_n)$之相邻关系即可. 相邻时若且仅若$\{G_i\}_{i=1}^n$符合某一组$\beta$, 对应的1元素也仅能在唯一一组$\beta$之作用下于$\otimes_{i=1}^n A(G_i)^{\beta_i}$中展现. 是故得证.

回顾张量积运算$(A\otimes B)(C\otimes D)=(A\otimes C)(B\otimes D)$, 从而$A(\mathrm{NEPS}(\{G_i\}_{i=1}^n;\mathcal{B}))$之特征值为

$$\sum_{\beta\in\mathcal{B}}\left(\prod_{i=1}^n {\lambda_i^{i_k}}^{\beta_i}\right)$$

其中$\lambda_i^{i_k}$为G_i的第k特征值, 对应特征向量$x_i^{i_k}$, 从而$A(\mathrm{NEPS}(\{G_i\}_{i=1}^n;\mathcal{B}))$对应之特征向量为

$$\sum_{\beta\in\mathcal{B}}\otimes_{i=1}^n x_i^{i_k}$$

例如, 由$L(K_{m,n})=K_m\square K_n$可知$L(K_{m,n})$值谱为

$$((m+n-2)^1,(n-2)^{m-1},(m-2)^{n-1},(-2)^{(m-1)(n-1)}).$$

广义NEPS积

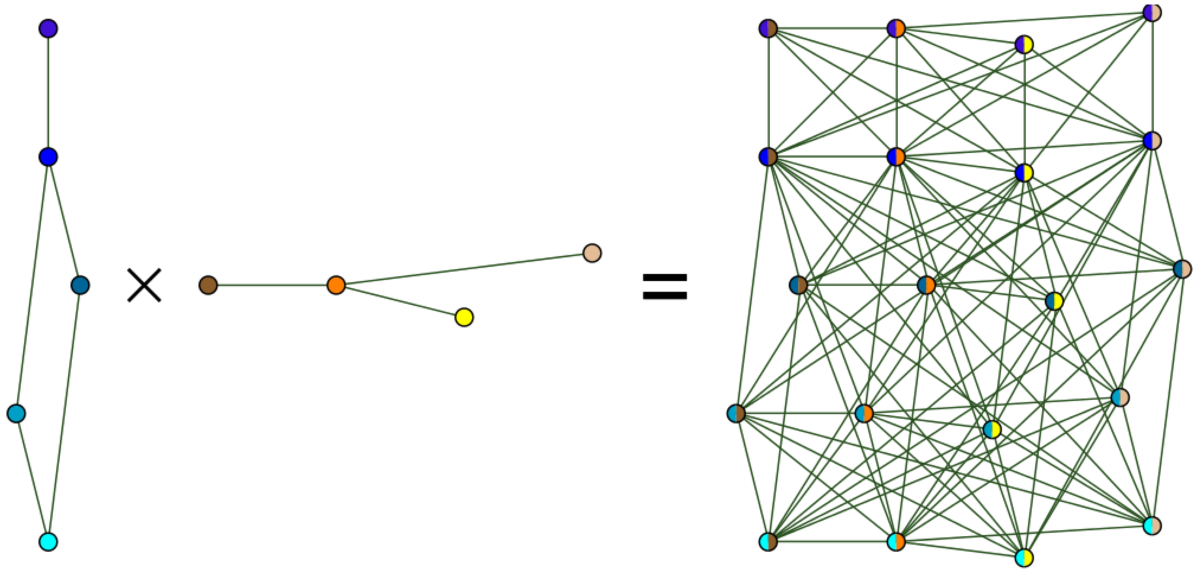
若允许$\mathcal{B}$中元素形式地取-1, 并以此表示对应点不相邻($\nsim$). 为兼容前文之运算, 此处规定$A(G)^{(-1)} = J - I - A(G)$, 再记$\{(*,:)\}$为$\{(*,1),(*,0),(*,-1)\}$. 从而可构造以下常见之图运算:

字典序积(Lexicographical product)

定义$G_1 \cdot G_2$或$G_1[G_2]$为字典序的(Lexicographical), 若且仅若其点关于索引呈字典顺序, 其中$G_1 \cdot G_2$之点集无非$V(G_1) \times V(G_2)$. 具体而言, $(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2)$若且仅若

- $a_1 \sim b_1$或$a_1 = b_1$.
- $a_1 = b_1$时, $a_2 \sim b_2$.

如下图所示



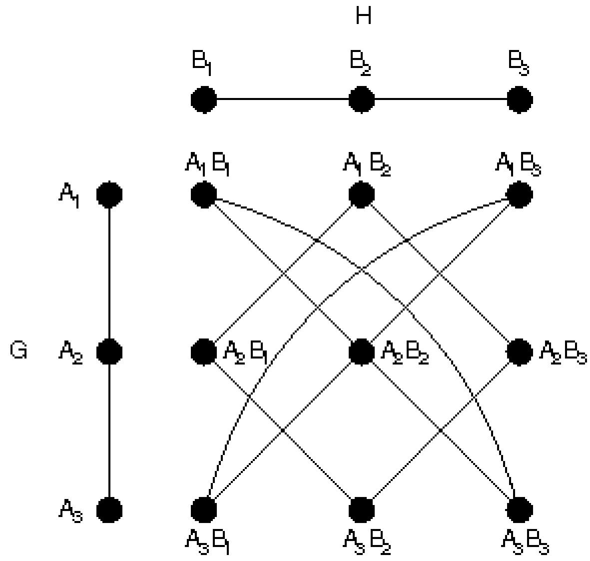
从而$\mathcal{B} = \{(1,:),(0,1)\}$. 可验证其多元运算满足结合律, 例如三元运算对应基底$\mathcal{B} = \{(1,:,:),(0,1,:),(0,0,1)\}$; 但显然不满足交换律.

模积(Modular product)

运算规则为, (a_1, a_2)与(b_1, b_2)相连若且仅若

$$[(a_1 \sim b_1) \wedge (a_2 \sim b_2)] \vee [(a_1 \nsim b_1) \wedge (a_2 \nsim b_2)].$$

如下图所示



modular product of G and H

对应$\mathcal{B}=\{(1,1),(-1,-1)\}$. 该运算可推广至多元情形, 且满足交换律与结合律.