微分几何笔记

(一) 正则参数的曲线

Frenet框架

$\{t, n, b\}$满足$\gamma'(s) = t$, 且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix}.$$

注:

1. Frenet矩阵具有反对称性. 记$F(s)$为Frenet矩阵, $v = (t, n, b)$, 则$v(s) = F(s)v(0)$. 由正交性知

$$0 = (v(s)^2)' = [(F(s) + F^T(s))v] \cdot v.$$

   从而$F(s) + F^T(s) \equiv 0$.

局部Taylor展开: 对弧长参数的曲线$\gamma(s)$, $\gamma(0)$附近展开得

$$\begin{aligned}\gamma(s) &= \gamma(0) + s\gamma'(0) + \frac{s^2}{3}\gamma''(0) + \frac{1}{6}\gamma'''(s) + o(s^2) \\ &= \gamma_0 + (s - \frac{\kappa_0^2 s^3}{6})t + (\frac{\kappa_0 s^2}{2} + \frac{\kappa_0' s^3}{6})n - \frac{\kappa_0 \tau_0 s^3}{6}b \\ &\quad o(s^3)\end{aligned}$$

密切圆与密切球

对弧长参数且曲率挠率均非零的曲线γ, 其密切圆显然为n向半径为κ^{-1}的元.

γ落在球面上的充要条件为$\frac{1}{\kappa^2} + \left(\frac{1}{\kappa}\right)_s^2 \frac{1}{\tau^2} = R^2$, 其中$R$为对应的球面半径.

下求$\gamma(s)$处的近似球面半径. 设球心p, 则$\gamma(s) - p(s) = \lambda(s)n + \mu(s)b$. 求导得

$$t = \lambda' n + \mu' b - \lambda(\kappa t + \tau b) + \mu\tau n.$$

因此

$$\begin{aligned}\lambda\kappa + 1 = 0 \\ \mu\tau + \lambda' = 0 \\ \mu' - \lambda\tau = 0\end{aligned}$$

解得$\lambda = \frac{1}{-\kappa}$, $\mu = \frac{(1/\kappa)_s}{\tau}$. 因此密切球面$R = \sqrt{\frac{1}{\kappa^2} + \left(\frac{1}{\kappa}\right)_s^2 \frac{1}{\tau^2}}$, 朝向$n$.

显然密切圆于密切球上.

曲率与挠率公式

对具有正则参数的曲线$\gamma(t)$, 有

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= s_t \cdot t \\
\gamma''(t) &= \kappa s_t^2 \cdot n + s_{tt} \cdot t \\
\gamma'''(t) &= (\kappa s_t)_t \cdot n - \kappa(\kappa t + \tau b) s_t^3 + (s_{tt} \cdot t)_t
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
\kappa &= \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3} \\
\tau &= \frac{-[\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)]}{|\gamma'(t)|^6 \kappa^2} = \frac{[\gamma'''(t), \gamma''(t), \gamma'(t)]}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^2}
\end{aligned}$$

对平面曲线$\gamma'(t)$, 曲率κ带符号($n = b \times t$). 当$\gamma(t) = (x(t), y(t))$时, 有

$$|k| = \frac{|(x', y') \times (x'', y'')|}{|(x', y')|^2} = \frac{|x'y'' - x''y'|}{|x'^2 + y'^2|^{3/2}}.$$

对极坐标$\rho = r\theta$, 有

$$\begin{aligned}
\rho' &= r'\hat{r} + r\theta'\hat{\theta} \\
\rho'' &= r''\hat{r} + r'\theta'\hat{\theta} + r'\theta'\hat{\theta} + r\theta''\hat{\theta} - r\theta'\theta'\hat{r}
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
|\kappa| &= \frac{|r'(2r'\theta' + r\theta'') - r\theta'(r'' - r\theta'\theta')|}{|r'^2 + r^2\theta'^2|^{3/2}} \\
&= \frac{|2r'^2\theta' + rr'\theta'' - rr''\theta' + r^2\theta'^3|}{|r'^2 + r^2\theta'^2|^{3/2}}
\end{aligned}$$

当θ为参数时, $\kappa = \dfrac{|2r'^2 - rr'' + r^2|}{|r'^2 + r^2|^{3/2}}$.

渐屈线与焦曲面

为法线的包络线, 即两点间法线收敛于渐屈线上的一点. 设$\gamma : I \to \mathbb{R}^3$为有弧长参数的曲线, 则$\gamma(s)$对应的渐屈线上的点$\alpha(s)$满足$\alpha(s) = \gamma(s) + \lambda(s)n(s)$. 显然$\gamma(s)$之法线总为渐屈线之切线, 故

$$\alpha'(s) = t + \lambda' n + \lambda(-\kappa t) \parallel n.$$

从而$\lambda(s) = \dfrac{1}{k(s)}$. 故$\alpha(s) = \gamma(s) + \dfrac{1}{\kappa(s)}n(s)$. 当$\kappa \neq 0$时, 渐屈线正则.

记$X : U \to S$为没有抛物点或脐点的正则曲面, 则曲率线坐标下, 参数曲面

$$\begin{aligned}
Y(u, v) &:= X(u, v) + \frac{1}{\kappa_1} N(u, v) \\
Z(u, v) &:= X(u, v) + \frac{1}{\kappa_2} N(u, v)
\end{aligned}$$

称作焦曲面. 实际上

$$\begin{aligned}
Y_u \wedge Y_v &= (X_u + \frac{1}{\kappa_1} N_u + (\kappa_1^{-1})_u N) \wedge (X_v + \frac{1}{\kappa_1} N_v + (\kappa_1^{-1})_v N) \\
&= (\kappa_1^{-1})_u N \wedge (X_v - \frac{\kappa_2}{\kappa_1} X_v)
\end{aligned}$$

故κ_i关于u, v的一阶导数不为零时, Y, Z均正则.

(二) 曲线的决定

由曲率$\kappa(s)$决定的平面曲线

记$\theta(s)$为法方向旋转角, 则$\theta(s)=\int\kappa(s)\mathrm{d}s+\varphi$. 自然

$$\gamma(s)=(\int\cos\theta(s)+a,\int\sin\theta(s)+b)$$

为一切复合要求之曲线.

由$b(s)$决定的空间曲线

对非零挠率曲线, $b(s)$决定了曲率与挠率的绝对值. 因为

$$\begin{aligned}b' &=\tau n\\ b'' &=\tau' n-\tau(\kappa t+\tau b)\end{aligned}$$

从而$|\tau|=|b'|$, $\kappa=\sqrt{\dfrac{|b'\times b''|^2-|b'|^6}{|b'|^4}}$.

由$n(s)$决定的空间曲线

对非零挠率曲线, 法向量及$\dfrac{\kappa}{\tau}$初值决定了曲率与挠率的. 因为

$$\begin{aligned}n' &=-\kappa t-\tau b\\ n'' &=-\kappa' t-\kappa^2 n-\tau' b-\tau^2 n\end{aligned}$$

从而$|n'|^2=\kappa^2+\tau^2$, 且

$$[n,n',n'']=[n,t,b](-\kappa\tau'+\tau\kappa')=\arctan(\frac{\kappa}{\tau})'\cdot(\kappa^2+\tau^2).$$

因此$\dfrac{\kappa}{\tau}$在初值已知之情形下有解. 因此κ与τ可确定.

注: 在$\dfrac{\kappa}{\tau}$未知之情形下, 解或不唯一. 如螺旋线族

$$\{(a\cos\theta,a\sin\theta,b\theta):a,b>0,a^2+b^2=1\}$$

在$\theta=\theta_0$处法向量一致, 但挠率并非一致.

Berstrand侣线

对有正则参数的曲线$\alpha(t)$, 记活动标架为$\{t,n,b\}$. 若存在$\beta(t)$使得$\beta(t)-\alpha(t)$与n始终平行, 证明对任意t, α与β的挠率之积为常数, 并计算.

证明: 不妨以弧长参数记$\alpha=\alpha(s)$. 记$\beta(s)-\alpha(s)=\gamma(s)n(s)$, 则

$$\beta'(s)-t=\gamma' n+\gamma n'.$$

因此n系数为0, 即γ为常数. 记$\beta(s)$与$\alpha(s)$夹角为θ, 则

$$(\cos\theta)'=(T_\beta\cdot t)'=N_\beta\cdot t+T_\beta\cdot kn=0.$$

从而θ为定值. 注意到$\beta'(s)=t-\gamma(kt+\tau b)$, 则

$$\cos\theta=\frac{\beta'(s)\cdot t}{|\beta'(s)|}=\frac{1-\gamma k}{\sqrt{(1-\gamma k)^2+(\gamma\tau)^2}}.$$

不失一般性地, 记$T_\beta=t\cos\theta+b\sin\theta$. 则

$$B_\beta = T_\beta \times N_\beta = T_\beta \times n = b\cos\theta - t\sin\theta.$$

从而τ_β为B'_β中$-n$的系数, 即$k\sin\theta - \tau\cos\theta$. 注意到$\cot\theta = \dfrac{1-\gamma k}{\gamma\tau}$, 消$k$得

$$\tau_\alpha\tau_\beta = k\tau\sin\theta - \tau\cos\theta = \frac{\sin^2\theta}{\gamma^2}.$$

注:

1. α具有Berstrand侣线当且仅当θ为定值, 即存在(A,B)使得$A\kappa + B\tau \equiv 1$.
2. 若α有两条Berstrand侣线, 则其有无穷条Berstrand侣线, 当且仅当α为圆柱面.

(三) 旋转曲面

记曲线$(\varphi(v),\psi(v))$满足$\varphi(v)>0$且不失一般性设$\varphi'^2(v)+\psi'^2(v)=1$, 则有旋转曲面

$$X(u,v) = (\varphi(v)\cos u, \varphi(v)\sin u, \psi(v)).$$

$$\begin{aligned}
X_u =& (-\varphi(v)\sin u, \varphi(v)\cos u, 0)\\
X_v =& (\varphi'(v)\cos u, \varphi'(v)\sin u, \psi'(v))\\
N =& \frac{(\varphi\psi'\cos u, \varphi\psi'\sin u, -\varphi\varphi')}{|\varphi|\cdot|\varphi'^2+\psi'^2|} = (\psi'\cos u, \psi'\sin u, -\varphi')\\
X_{uu} =& (-\varphi(v)\cos u, -\varphi(v)\sin u, 0)\\
X_{uv} =& (-\varphi'(v)\sin u, \varphi'(v)\cos u, 0)\\
X_{vv} =& (\varphi''(v)\cos u, \varphi''(v)\sin u, \psi''(v))
\end{aligned}$$

故$E=\varphi^2$, $F=0$, $G=1$, $e=-\varphi\psi'$, $f=0$, $g=\varphi''\psi'-\varphi'\psi''=\dfrac{\varphi''}{\psi'}$.

常Gauss曲率曲面

当旋转曲面具有常Gauss曲率时, $eg-f^2=-\varphi\varphi''=K$. 从而

$$\varphi''(v)+K\varphi=0.$$

1. $K>0$时, 不妨取$K=1$. 取$\varphi=C\cos v$, 则$\psi(v)=\int_{v_0}^v\sqrt{1-C^2\sin^2 t}\mathrm{d}t$.
2. $K=0$时, 则$\varphi=av+b$. $\psi(v)$也为一次函数形式. 解为平面, 柱体, 锥体.
3. $K<0$时, 不妨设$K=-1$. 取$\varphi(v)=Ae^{v-v_0}+Be^{-v+v_0}$. 当$A,B$同号/异号/一者为零时, 分别解得
   1. $\psi(v)=\int_0^v\sqrt{1-C^2\sinh^2 t}\mathrm{d}t$.
   2. $\psi(v)=\int_0^v\sqrt{1-C^2\cosh^2 t}\mathrm{d}t$.
   3. $\psi(v)=\int_0^v\sqrt{1-e^{-2t}}\mathrm{d}t$.

Pumps公式

当$v\in(v_1,v_2)$时, 侧面积

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}u\int_{v_1}^{v_2}\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}v = 2\pi\int_{v_1}^{v_2}\varphi\mathrm{d}v.$$

即区段内所有点至旋转轴距离之积分乘以2π. 其中

$$v_2-v_1=\int_{v_1}^{v_2}\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}\mathrm{d}v$$

为曲线段长度.

(四) 直纹面

直纹面$X(t,v)=\alpha(t)+vw(t)$. 通常假定$|w(t)|\equiv 1$, 且$w'(t)\neq 0$(即直纹面非柱面).

腰曲线

若$w(t)$变化率与$\alpha(t)$垂直, 即$w'(t)\cdot\alpha'(t)=0$时, $\alpha(t)$为直纹面的腰曲线. 对一般的α, 考虑参数曲线$\beta(t)=\alpha(t)+u(t)w(t)$, 则

$$\beta'\cdot w'=\alpha'\cdot w'+u(t)w'(t)\cdot w'(t).$$

从而$\beta(t)=\alpha(t)-\dfrac{\alpha'(t)\cdot w'(t)}{\omega'(t)\cdot w'(t)}w(t)$. 显然腰曲线唯一存在.

另一类构造直纹面腰曲线的方法是寻找母线$X(t_1,v)$与$X(t_2,v)$之间的公垂线, 令$t_1-t_2\to 0$即可将垂足对应中心点(腰曲线上的点).

分布参数

由于$\beta'\perp w', w\perp w'$, 故设$\beta'\wedge w=\lambda w'$. 因此$|X_t\wedge X_u|^2=(\lambda^2+u^2)|w'|^2$. 从而可能存在的奇点均在腰曲线上. 实际上,

$$\lambda=\frac{[\beta',w,w']}{|w'|^2}.$$

Gauss曲率为$\dfrac{-\lambda^2}{(u^2+\lambda^2)^2}$.

可展曲面

曲面可展若且仅若$[\alpha',w,w']=0$. 从而可展曲面一定为柱面, 锥面, 平面或其一部分.

(五) 极小曲面

对曲面$X(u,v)$, 考虑变分$\tilde{X}(u,v)=X(u,v)+th(u,v)N(u,v)$. 从而新曲面的单位面积元为

$$\sqrt{1-4thH+o(t)}\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

从而$H=0$时曲面极小.

(六) Gauss曲率

计算公式1

考虑p点映射$-\mathrm{d}N_p:X_u\to -N_u$, $-\mathrm{d}N_p:X_v\to N_v$, 则算子$-\mathrm{d}N_p$的谱为$(\lambda_1,\lambda_2)$. 在基$\{X_u,X_v\}$下对应的矩阵为$\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}e & f\\ f & g\end{pmatrix}$. Gauss曲率为行列式值$\dfrac{eg-f^2}{EG-F^2}$. 平均曲率为$\dfrac{eG+Eg-2Ff}{EG-F^2}$.

计算公式2

当平均曲率为0时, 对任意Gauss映射均有

$$\langle\mathrm{d}N_p(w_1),\mathrm{d}N_p(w_2)\rangle=-K\langle w_1,w_2\rangle.$$

实际上, p点处的Gauss曲率即

$$K=\lim_{(S\supset)U_p\to\{p\}}\frac{N_u\wedge N_v\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{X_u\wedge X_v\mathrm{d}u\mathrm{d}v}=\lim_{(S\supset)U_p\to\{p\}}\frac{\int_{N(U_p)}\mathrm{d}S}{\int_{U_p}\mathrm{d}S}$$

因为$N_u\wedge N_v=\det(\mathrm{d}N)\cdot X_u\wedge X_v=KX_u\wedge X_v$.

计算公式3

设$f:V(\subset S)\to\mathbb{R}$为可微函数, 向量场$V_1$, V_2满足$\forall p\in V$, $v_1\times v_2=N$. 则

$$K=\frac{[\mathrm{d}(fN)(v_1),\mathrm{d}(fN)(v_2),fN]}{f^3}.$$

实际上, 只需注意到$-\mathrm{d}N$在(v_1,v_2)下矩阵表示为$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$. 从而

$$[\mathrm{d}(fN)(v_1),\mathrm{d}(fN)(v_2),fN]=f^3\det\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=f^3K.$$

设$f(x,y,z)=\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}$为在$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$上的限制, 则

$$N=(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2})/f.$$

从而切映射$\mathrm{d}(fN)$在$(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$下的矩阵为$\mathrm{diag}(a^{-2},b^{-2},c^{-2})$. 因此

$$\begin{aligned}K&=\frac{1}{f^3}\det\begin{pmatrix}a^{-2}v_1^1&b^{-2}v_1^2&c^{-2}v_1^3\\a^{-2}v_2^1&b^{-2}v_2^2&c^{-2}v_2^3\\a^{-2}x&b^{-2}y&c^{-2}z\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{f^3(abc)^2}\langle N,(x,y,z)\rangle=\frac{1}{f^4(abc)^2}\end{aligned}$$

脐点处$-\mathrm{d}Nv=\lambda v$, 故$[\mathrm{d}(fN)(v),v,fN]$对任意v恒等于0. 从而

$$\begin{pmatrix}a^{-2}v_1&b^{-2}v_2&c^{-2}v_3\\v_1&v_2&v_3\\a^{-2}x&b^{-2}y&c^{-2}z\end{pmatrix}=0.$$

由于$v\in T_pS=\mathrm{span}((-a^2y,b^2x,0),(-a^2z,0,c^2x))$, 从而代入特值知

$$xyz(a^2-b^2)=xyz(a^2-c^2)=xyz(a^2-c^2)=0.$$

1. $a=b=c$时, 所有点均为脐点.
2. S非球面或其一部分时, $xyz=0$. 不妨设$x=0$, 则$(0,y,z)$处切空间为

   $$\mathrm{span}\{(1,0,0),(0,-z/b^2,y/c^2)\}.$$

   原行列式恒等于零即

   $$(v_2(1-a^2/b^2),v_3(1-a^2/c^2))\parallel(y/b^2,z/c^2).$$

   因此$y^2(a^{-2}-c^{-2})=z(a^{-2}-b^{-2})$. 脐点(4个)为

   $$(0,\pm b\sqrt{\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}},\pm c\sqrt{\frac{c^2-a^2}{c^2-b^2}}).$$

计算公式4

考虑方程

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN \\ X_{uv} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN \\ X_{vv} &= \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN \\ N_u &= a_{11} X_u + a_{21} X_v \\ N_v &= a_{12} X_u + a_{22} X_v \end{aligned}$$

其中$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. 考虑$X_{uvu} = X_{uuv}$, $X_{uvv} = X_{vvu}$, $N_{uv} = N_{vu}$, 则上方程化为

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_u \\ X_v \\ N \end{pmatrix} = 0^3.$$

从而$A_i = B_i = C_i = 0$. 例如注意到$A_2 = 0$时, 参数

$$\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + e a_{22} + \partial_v \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + f a_{21} + \partial_u \Gamma_{12}^2.$$

其中

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}.$$

因此$a_{22} = \dfrac{Ff - Eg}{EG - F^2}$, $a_{21} = \dfrac{Fe - Ef}{EG - F^2}$. 从而

$$\frac{E(eg - f^2)}{EG - F^2} = \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + \partial_v \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \partial_u \Gamma_{12}^2.$$

解之得K.

特别地, 对正交参数曲面$X(u,v)$而言, 则考虑正交标架$\{E^{-1/2} X_u, G^{-1/2} X_v, N\}$, 则记$X_u = \sqrt{E} e_1$, $X_v = \sqrt{G} e_2$. 记$X_{uu} = a_1 e_1 + b_1 e_2 - eN$, 则

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2\sqrt{E}} E_u & b_1 &= -\frac{E_v}{2\sqrt{G}} \\ a_2 &= \frac{1}{2\sqrt{E}} E_v & b_2 &= \frac{1}{2\sqrt{G}} G_u \\ a_3 &= -\frac{G_u}{2\sqrt{E}} & b_3 &= \frac{1}{\sqrt{G}} G_v \end{aligned}$$

Gauss曲率为

$$\begin{aligned} &\frac{(X_{uu} - a_1 e_1 - a_2 e_2) \cdot (X_{vv} - a_3 e_1 - a_3 e_2)}{EG} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{EG}} \Big((E_v / \sqrt{EG})_v + (E_u / \sqrt{EG})_u \Big). \end{aligned}$$

计算公式5

若$E = G = \lambda(u,v)$为等温坐标, 则$K = -\dfrac{1}{2\lambda} \Delta \log \lambda$. 例如$E = G = (u^2 + v^2 + C)^{-2}$时, $K = 4C$为常数.

(七) 特殊参数的曲线

设向量场$w_i(p)=a_i(u,v)X_u+b_i(u,v)X_v$, 考虑$\mathbb{R}^2$上方向场$W_i(u,v)=(a_i,b_i)$可得曲线族$f_i(u,v)=C$. 从而当$i\in\{1,2\}$时(设$w_1\neq w_2$), 首次积分$f_i$确定了新的参数$Y(f_1(u,v),f_2(u,v))=X(u,v)$.

曲率线网

注意到算子$-\mathrm{d}N$关于u,v可微, 故特征值可微. 从而正交方向e_i为可微函数. 曲率线$X(u(t),v(t))$满足

$$X()$$

切比雪夫网

渐近线网

正则曲面的第一与第二基本形式

设$X(u,v)$为正则参数的曲面, 则第一基本形式

$$I=\mathrm{d}s^2=\langle X_u,X_u\rangle\mathrm{d}u^2+2\langle X_u,X_v\rangle\mathrm{d}u\mathrm{d}v+\langle X_v,X_v\rangle\mathrm{d}v^2.$$

曲线$X(u(t),v(t))$长度

$$l_{12}=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2}\mathrm{d}t.$$

夹角$\cos\theta=\dfrac{\langle X_u,X_v\rangle}{|X_u|\cdot|X_v|}=\dfrac{F}{\sqrt{EG}}$.

单位面元

$$\mathrm{d}S=|\mathrm{X}_u\mathrm{d}u\times X_v\mathrm{d}v|=\sqrt{EG}\sin\theta\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

对偶空间解释: $p\in S$处I形式为$T_pS\times T_pS$至$\mathbb{R}$的双线性形式.

旋转曲面

曲线上的梯度

对可微函数$f: S \to \mathbb{R}$, 梯度映射

$$\mathbf{grad} f: S \to \mathbb{R}^3, p \mapsto \mathbf{grad} f(p) \text{ s.t. } \langle \mathbf{grad} f(p), v \rangle_p = \mathrm{d} f_p(v).$$

设S的参数表示为$X(u,v)$, 则$\mathbf{grad} f(p) \cdot X_v = \mathrm{d} f_p(X_v) = f_v$. 同理$\mathbf{grad} f(p) \cdot X_u = f_u$. 注意到$\mathbf{grad} f(p): \begin{pmatrix} X_u \\ X_v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_u \\ f_v \end{pmatrix}$, 记$\mathbf{grad} f = aX_u + bX_v$, 则

$$(aX_u + bX_v) \begin{pmatrix} X_u \\ X_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_u \\ f_v \end{pmatrix}$$

从而$(aE + bF, aF + bG) = (f_u, f_v)$, 即$I \cdot (a, b) = (f_u, f_v)$.

求解逆矩阵得$\mathbf{grad} f = \dfrac{f_u G - f_v F}{I} X_u + \dfrac{f_v E - f_u F}{I} X_v$.

正交曲线族

取$X(u,v)$上的正交曲线族$\phi(u,v) = C_1$, $\psi(u,v) = C_2$. 则t处曲线切向量$X(u(t), v(t))' = X_u u'(t) + X_v v'(t)$, ϕ确定的曲线族上对应的切向量满足$\phi_u u' + \phi_v v' = 0$, ψ同理. 故

$$(X_u(-\phi_v) + X_v(\phi_u)) \perp (X_u(-\psi_v) + X_v(\psi_u)).$$

从而$(\phi_v, -\phi_u)^T \cdot I \cdot (\psi_v, -\psi_u)$. 即$E\phi_v\psi_v - F(\phi_u\psi_v + \phi_v\psi_u) + G\phi_u\psi_u = 0$.

正交参数网可通过以下方式确定: 对正则曲面$X(u,v)$, 其导出的正交向量场X_u与$X_v - \dfrac{X_u \langle X_v, X_v \rangle}{\langle X_u, X_v \rangle} = X_v - \dfrac{G}{F} X_u$在某点邻域附近存在. 实际上, 方程

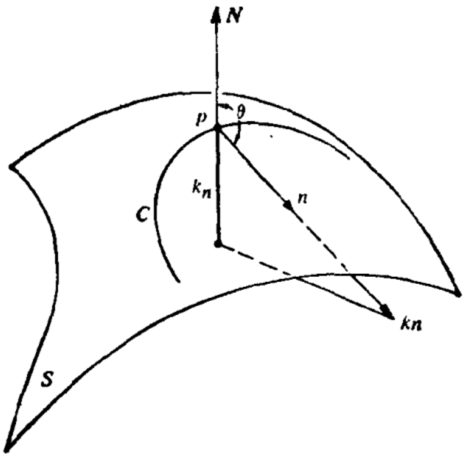
$$au'u' + 2bu'v' + cv'v' = 0, \quad \Delta < 0.$$

确定的两条参数曲线$a(u' - x_1 v')(u' - x_2 v') = 0$正交若且仅若$(X_u + x_1 X_v)(X_u + x_2 X_v) = 0$, 即$Ec + Ga = 2Fb$.

第二基本形式

记$N = \dfrac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}$, 则第二基本形式$II_p(x) = -\langle \mathrm{d}N_p(x), x \rangle$.

法曲率如下图所示:



实际上, $p\in S$处某一切方向$x\in T_pS$的第二基本形式为

$$-\left\langle \mathrm{d}N_p x, x\right\rangle = \left\langle N, \alpha''(0)\right\rangle = \kappa\cdot\cos\theta = \kappa_n.$$

其中曲线α满足$\alpha(0)=p$, $\alpha'(0)=x$.

实际上, 记基X_u, X_v下算子$-\mathrm{d}N_p$的矩阵形式为A, 则

$$A(X_u, X_v) = (-\mathrm{d}N_p X_u, -\mathrm{d}N_p X_v)$$

故$A\cdot I = II$. 即

$$A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} e & f \\ f & g\end{pmatrix}.$$

相应的平均曲率$H=\dfrac{Eg+eG-2Ff}{2(EG-F^2)}$, Gauss曲率$K=\dfrac{eg-f^2}{EG-F^2}$.

当主特征值$\kappa_1\neq\kappa_2$时, 存在标准正交基$\{e_1, e_2\}$使得其恰为两个主曲率方向, 即$-\mathrm{d}N_p$. 从而方向$x=e_1\cos\theta+e_2\sin\theta$上的截面曲率为

$$\kappa_n = \langle -\mathrm{d}N_p x, x\rangle = \kappa_1\cos^2\theta + \kappa_2\sin^2\theta.$$

若$\kappa_1=\kappa_2=\lambda$时, 则称该点为脐点. 若$S=X(u,v)$上处处为脐点, 则

Hesse函数

考虑$h: S\to\mathbb{R}$为可微映射, $\operatorname{rank}(\mathrm{d}h_p)<1$即$p$为$h$的临界点. 若$\mathrm{d}h_p=0$, 取任意正则曲线$\alpha$, Hessian函数为

$$H_p h(\alpha'(t_0)) = \frac{\mathrm{d}^2(h\circ\alpha)}{\mathrm{d}t^2}|_{t=t_0}.$$

设$X(u,v)$为S的参数表示, 且$X(u(0), v(0))=p\in S$为零界点, $\alpha(0)=p$. 则

$$
\begin{aligned}
H_p h(\alpha'(t_0)) =& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}h_p \circ \mathrm{d}X_{X^{-1}(p)} \circ \mathrm{d}(X^{-1}\circ\alpha)_0) \\
=& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((h_x, h_y, h_z)^T \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y,z)} \cdot (u', v')\right) \\
=& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h_u u' + h_v v') \\
=& h_u u'' + h_v u'' + h_{uu} u'^2 + 2h_{uv} u'v' + h_{vv} v'^2 \\
=& h_{uu} u'^2 + 2h_{uv} u'v' + h_{vv} v'^2
\end{aligned}
$$

例如, 对相对p点的高度函数$h_p(q) = \langle q-p, N(p)\rangle$, 注意到任意$p$附近的切向量与$N(p)$垂直, 故$\mathrm{d}h_p : T_pS \to 0$. 从而$p$为$h_p$的零界点. 实际上对任意$w \in T_pS$,

$$
H_p h_p(w) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\langle w, N(p)\rangle) = \kappa_n.
$$

即$H_p h_p(w) = II(w) = -\langle w, \mathrm{d}N_p w\rangle$.

若h_p为距离函数, 即$h_p(q) = \sqrt{\langle q-p, q-p\rangle}$. 则记$\alpha(0) = q$, $\alpha'(0) = w$, 则

$$
\mathrm{d}h_p(w) = \frac{\langle q-p, w\rangle}{|q-p|} = \frac{\langle q-p, w\rangle}{h_p(q)}.
$$

当$\mathrm{d}h_p(w) \equiv 0$时, $q-p \in T_pS^\perp$. 若$q-p \neq 0$, 则

$$
H_p h_p(w) = -\frac{\langle q-p, w\rangle}{h_p(q)^2} + \frac{\langle w, w\rangle}{h_p(q)} - \frac{\langle q-p, \kappa n\rangle}{h_p(q)} = \frac{1}{h_p(q)} - \kappa_n.
$$

定义$H_p h_p(w)$对应的双线性型

$$
Q_p(w_1, w_2) = \frac{1}{2}(H_p h_p(w_1 + w_2) - H_p h_p(w_1) - H_p h_p(w_2)).
$$

取主曲率方向e_1, e_2为标准正交基, 记$A_p h_p$为$H_p h_p$在基$\{e_1, e_2\}$下对应的矩阵, 则

$$
(e_1, e_2)^T A_p h_p(e_1, e_2) = \begin{pmatrix} h_p(q)^{-1} - \kappa_1 & 0 \\ 0 & h_p(q)^{-1} - \kappa_2 \end{pmatrix}
$$

从而Hesse函数在$h_p^{-1}(q) \neq \kappa_i$时非退化.