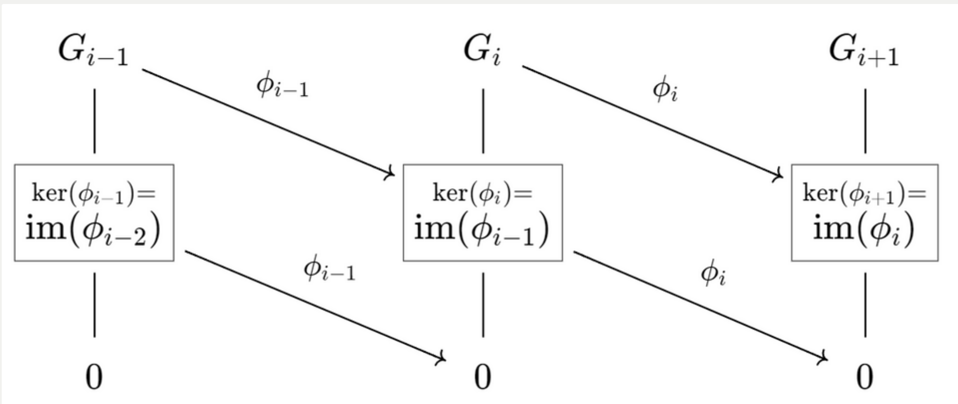
Mayer-Vietoris 同调

Mayer-Vietoris 同调

同调代数拾遗

Definition 2.1.1 称 (Abel 群同态列) $C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E$ 在 D 处**正合**, 若且仅若 $\ker(g) = \operatorname{im}(f)$.

> **Remark** 通常称一列正合关系为正合列, i.e.,
>
> $$\cdots \to G_{i-1} \xrightarrow{\phi_{i-1}} G_i \xrightarrow{\phi_i} G_{i+1} \to \cdots .$$
>
> 
>
>
> 链接

Theorem 2.1.2 对链复形与短正合列 $0 \to C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \to 0$, 考察交换图表

$$\begin{tikzcd}
& \bullet \arrow[d, "\partial_{q+2}"] & \bullet \arrow[d, "\partial_{q+2}"] & \bullet \arrow[d, "\partial_{q+2}"] & \\
0 \arrow[r] & C_{q+1} \arrow[r, "f_{q+1}"] \arrow[d, "\partial_{q+1}"] & D_{q+1} \arrow[r, "g_{q+1}"] \arrow[d, "\partial_{q+1}"] & E_{q+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{q+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_q \arrow[r, "f_q"] \arrow[d, "\partial_q"] & D_q \arrow[r, "g_q"] \arrow[d, "\partial_q"] & E_q \arrow[r] \arrow[d, "\partial_q"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{q-1} \arrow[r, "f_{q-1}"] \arrow[d, "\partial_{q-1}"] & D_{q-1} \arrow[r, "g_{q-1}"] \arrow[d, "\partial_{q-1}"] & E_{q-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{q-1}"] & 0 \\
& \bullet & \bullet & \bullet &
\end{tikzcd}$$

🔗 链接

上图表中横行均正合, 对 $e_q \in Z_q(E)$ 定义**边缘同态**

$$\partial_* : H_q(E) \to H_{q-1}(C), \quad [e_q] \mapsto [f_{q-1}^{-1} \partial_q g_q^{-1}(e_q)].$$

从而可良定义长正合列

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_{q+1}(C) \xrightarrow{f_*} H_{q+1}(D) \xrightarrow{g_*} \boxed{H_{q+1}(E) \xrightarrow{\partial_*} H_q(C)} \xrightarrow{f_*} H_q(D) \xrightarrow{g_*} H_q(E) \xrightarrow{\partial_*} \cdots .$$

▼ Proof of the theorem

实际上, 只需证明以下正合横列给出同态 $\ker(\partial''_q) \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker}(\partial'_q)$

$$\begin{tikzcd}
 & C_q \arrow[r, "f_q"] \arrow[d, "\partial'_q"'] & D_q \arrow[r, "g_q"] \arrow[d, "\partial_q"'] & E_q \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_q"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{q-1} \arrow[r, "f_{q-1}"] & D_{q-1} \arrow[r, "g_{q-1}"] & E_{q-1} &
\end{tikzcd}$$

🔗链接

补全纵列作短正合列, 得右图.

下依次证明:

1 蓝线 (连接框的路径) 给出

$$\delta := \overline{\partial'_q}\, f_{q-1}^{-1}\, \partial_q\, g_q^{-1}\, \partial'_q$$
$$\ker(\partial''_q) \to \operatorname{coker}(\partial'_1)$$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & \ker(\partial'_q) \arrow[r, "f_{q0}"] \arrow[d, "\partial'_{q0}"'] & \ker(\partial_q) \arrow[r, "g_{q0}"] \arrow[d, "\partial_{q0}"'] & \boxed{\ker(\partial''_q)} \arrow[d, "\partial''_{q0}"'] \arrow[dddll, dashed, bend right, "\delta"'] & \\
 & C_q \arrow[r, "f_q"] \arrow[d, "\partial'_q"'] & \boxed{D_q} \arrow[r, "g_q"] \arrow[d, "\partial_q"'] & \boxed{E_q} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_q"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \boxed{C_{q-1}} \arrow[r, "f_{q-1}"] \arrow[d, "\overline{\partial'_q}"'] & \boxed{D_{q-1}} \arrow[r, "g_{q-1}"] \arrow[d, "\overline{\partial_q}"'] & E_{q-1} \arrow[d, "\overline{\partial''_q}"'] & \\
 & \boxed{\operatorname{coker}(\partial'_q)} \arrow[r, "\overline{f_q}"] \arrow[d] & \operatorname{coker}(\partial_q) \arrow[r, "\overline{g_q}"] \arrow[d] & \operatorname{coker}(\partial''_q) \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

🔗链接

2 δ 为良定义的同态.

3 $\operatorname{im}(g_{q0}) = \ker(\delta)$.

4 $\ker(\overline{f_q}) = \operatorname{im}(\delta)$.

1 证明 δ 为映射 (即无法一对多):

1. $\forall e \in \ker(\partial''_q)$, 由于 g_q 为满射, 固存在 $d \in D_q$ 使得 $g_q(d) = \partial''_{q0}(e)$.
2. 注意到 $\partial''_q \circ \partial''_{q0} \equiv 0$, 从而 $\partial''_q g_q(d) = g_{q-1}\partial_q(d) = 0$.
3. 根据短正合列, $\partial_q(d) \in \ker(g_{q-1}) = \mathrm{im}(f_{q-1})$, 因此存在 $c' \in C_{q-1}$ 使得 $f_{q-1}(c') = \partial_q(d)$. 此处 f_{q-1} 为单的, c' 的选取仅取决于 d.
4. 对任意 d_1 与 d_2 使得 $g_q(d_1) = g_q(d_2) = \partial''_{q0}(e)$, $(d_1 - d_2) \in \ker(g_q) = \mathrm{im}(f_q)$. 取 $c \in C_q$ 使得 $f_q(c) = d_1 - d_2$,
5. 当 d_1 变为 d_2 时, c'_1 变为 c'_2, 其间相差 $\partial'_q(c) \in \ker(\overline{\partial'_q})$, 从而 $\overline{\partial'_q}(c'_1) = \overline{\partial'_q}(c'_2)$. 可见 δ 为良定义的映射.

2️⃣ δ 显然为良定义的同态, 就 1️⃣ 中各步骤逐一验证即可.

3️⃣ 分两步证明 $\mathrm{im}(g_{q0}) = \ker(\delta)$:

1. 任取 $d \in \ker(\partial_q)$, 则 $g_{q0}(d) \in \ker(\partial''_q)$, 从而依照交换图有 (六步变四步)

$$\delta(g_{q0}(d)) = \overline{\partial'_q}\, f_{q-1}^{-1}\, \partial_q\, g_q^{-1}\, \partial''_{q0}\, g_{q0}(d) = \overline{\partial'_q}\, f_{q-1}^{-1}\, \partial_q\, \partial_{q0}(d) = 0.$$

   因此得 $\mathrm{im}(g_{q0}) \subset \ker(\delta)$.

2. 另一方面, 沿用 1️⃣ 中符号. 任取 $\forall e \in \ker(\delta)$, 则 $c' \in \ker(\overline{\partial'_q}) = \mathrm{im}(\partial'_q)$. 取 c 使得 $\partial'_q(c) = c'$, 从而 $f_{q-1}(c') = \partial_q f_q(c)$, 即 $d - f_q(c) \in \ker(\partial_q) = \mathrm{im}(\partial_{q0})$. 故存在 $d' \in \ker(\partial_q)$ 使得 $\partial_{q0}(d') = d - f_q(c)$. 因此

$$\partial''_{q0}\, g_{q0}(d') = g_q \partial_{q0}(d') = g_q(d) = \partial''_{q0}(e).$$

   由于 ∂''_{q0} 为单的, 故 $\mathrm{im}(g_{q0}) \supset \ker(\delta)$.

得证.

4️⃣ 类比 3️⃣.

至此, 我们证明了 **Theorem 2.1.2** (或称🐍引理).

> 💡 **Remark** 短正合列 $0 \to C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \to 0$ 导出长正合同调列
>
> $$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_{q+1}(C) \xrightarrow{f_*} H_{q+1}(D) \xrightarrow{g_*} \boxed{H_{q+1}(E) \xrightarrow{\partial_*} H_q(C)} \xrightarrow{f_*} H_q(D) \xrightarrow{g_*} H_q(E) \xrightarrow{\partial_*} \cdots.$$

Theorem 2.1.3 同调序列具有自然性质表现如下. 若存在如下交换图

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & D \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & E \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "f'"] & D' \arrow[r, "g'"] & E' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

链接

其中横行为短正合列, 则存在长正合同调列间的交换图, 如下图所示

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] & C_q \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\alpha_*"'] & D_q \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\beta_*"'] & E_q \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "\gamma_*"'] & C_{q-1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_*"'] & \bullet \\
\bullet \arrow[r] & C_q' \arrow[r, "f_*'"] & D_q' \arrow[r, "g_*'"] & E_q' \arrow[r, "\partial_*'"] & C_{q-1'} \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}
$$

链接

▼ **Proof of the theorem**

证明之主要矛盾系验证 $\alpha_*\partial_* = \partial_*'\gamma_*$. 将边缘同态写作 **Theorem 2.1.3** 中形式即可.

Theorem 2.1.4 (五引理) 选取同调列间的的交换图局部如下

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "t_1"] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "t_2"] & A_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "t_3"] & A_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "t_4"] & A_5 \arrow[d, "t_5"] \\
B_1 \arrow[r, "g_1"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] & B_3 \arrow[r, "g_3"] & B_4 \arrow[r, "g_4"] & B_5
\end{tikzcd}
$$

链接

- 若 t_4 与 t_2 均为满射, t_5 为单射, 则 t_3 为满射.
- 若 t_4 与 t_2 均为单射, t_1 为满射, 则 t_3 为单射.
- 若 t_2, t_4 均为同构, t_5 为单射, t_1 为满射, 则 t_3 为同构.

▼ Proof of the theorem

- 若 t_4 与 t_2 均为满射, t_5 为单射. 任取 $b_3 \in B_3$, 则存在 $a_4 \in A_4$ 使得 $t_4(a_4) = g_3(b_3)$. 由于

  $$0 = g_4 g_3(b_3) = g_4 t_4(a_4) = t_5 f_4(a_4),$$

  加之 t_5 为单射, $f_4(a_4) = 0$. 因此存在 $a_3 \in A_3$ 使得 $f_3(a_3) = a_4$. 再注意到

  $$\begin{aligned} g_3(t_3(a_3) - b_3) &= g_3 t_3(a_3) - g_3 b_3 \\ &= t_4 f_3(a_3) - t_4 a_4 \\ &= t_4(a_4) - t_4(a_4) \\ &= 0. \end{aligned}$$

  从而存在 $b_2 \in B_2$ 使得 $g_2(b_2) = t_3(a_3) - b_3$. 由于 f_2 为满射, 故存在 a_2 使得 $t_2(a_2) = b_2$.

  可发现 b_3 的某一原像大致与 $f_2(a_2)$ 以及 a_3 有关. 计算得

  $$\begin{aligned} t_3 f_2(a_2) &= g_2 t_2(a_2) \\ &= g_2(b_2) \\ &= t_3(a_3) - b_3. \end{aligned}$$

  因此 b_3 的某一原像为 $a_3 - f_2(a_2)$, 从而 t_3 为满射.

- 若 t_4 与 t_2 均为单射, t_1 为满射. 任取 $a_3 \in A_3$ 使得 $t_3(a_3) = 0$, 下验证 a_3 只能为 0. 根据交换图以及 t_4 为单的,

  $$0 = g_3 t_3(a_3) = t_4 f_3(a_3) = f_3(a_3).$$

  从而存在 $a_2 \in A_2$ 使得 $f_2(a_2) = a_3$. 注意到

  $$g_2 t_2(a_2) = t_3 f_2(a_2) = t_3(a_3) = 0,$$

  则存在 $b_1 \in B_1$ 使得 $g_1(b_1) = t_2(a_2)$. 由于 t_1 为满射, 取 $a_1 \in A_1$ 使得 $t_1(a_1) = b_1$. 再注意到

$$t_2(a_2) = g_1(b_1) = g_1 t_1(a_1) = t_2 f_1(a_1).$$

从而 $f_1(a_1) = a_2$. 故 $a_3 = f_2 f_1(a_1) = 0$.

- 最后一则是显然的.

Mayer-Vietoris 同调序列

Definition 2.2.1 称 $\mathcal{U}$ 为 X 的一个覆盖, 若且仅若 $\cup_{U\in\mathcal{U}} U = X$. 称奇异单形 $\sigma : \Delta_q \to X$ 为 $\mathcal{U}$-小的若且仅若 $\sigma(\Delta_q)$ 包含于某一 $U \in \mathcal{U}$ 中.

Theorem 2.2.2 记 $S_*^{\mathcal{U}}(X)$ 为 $\mathcal{U}$-小奇异单形生成的链复形. 则嵌入映射 $i : S_*^{\mathcal{U}}(X) \to S_*(X)$ 为链映射, 且有以下同构

$$i_* : H_*(\widetilde{S_*^{\mathcal{U}}}(X)) \cong H_*(\tilde{S}_*(X)).$$

▼ **Proof of the theorem**

未完待续

💡 **Remark** 定理说明: 在研究同调群时, **小的单形比大的更重要**.

Definition 2.2.3 取拓扑空间的 X 的覆盖 X_1 和 X_2 使得 $X_1 \cup X_2 = X$. 以 $\mathcal{U}$ 记 X 的覆盖 $\{X_1, X_2\}$, 且 $\mathcal{U}$-小奇异单形生成的子链复形

$$S_*^{\mathcal{U}}(X) = S_*(X_1) + S_*(X_2).$$

右侧交换图中, 记 Σ_{X_i} 为 X_i 中单形之集合, 则

- $\Sigma_{X_1\cap X_2} = \Sigma_{X_1} \cap \Sigma_{X_2}$,
- $\Sigma_{(X_1\cup X_2)^{\mathcal{U}}} = \Sigma_{X_1} \cup \Sigma_{X_2}$.

从而有以下短正合列

$$\begin{tikzcd}
& X_1 \arrow[dr, "j_1"] & \\
X_1 \cap X_2 \arrow[ur, hook, "i_1"] \arrow[dr, hook, "i_2"'] & & X_1 \cup X_2 \\
& X_2 \arrow[ur, "j_2"'] &
\end{tikzcd}$$

🔗 链接

$$0 \to S_*(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{h_\#} S_*(X_1) \oplus S_*(X_2) \xrightarrow{k_\#} S_*(X_1) + S_*(X_2) \to 0.$$

其中 $h_\#$ 与 $k_\#$ 的取法可以是

$$h_{\#}(x) := i_{1\#}(x) - i_{2\#}(x), \quad k_{\#}(y,z) := j_{1\#}(y) + j_{2\#}(z).$$

抑或

$$h_{\#}(x) := i_{1\#}(x) + i_{2\#}(x), \quad k_{\#}(y,z) := j_{1\#}(y) - j_{2\#}(z).$$

Fact 2.2.4 根据 **Theorem 2.1.2**, 短正合列

$$0 \to S_*(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{h_{\#}} S_*(X_1) \oplus S_*(X_2) \xrightarrow{k_{\#}} S_*(X_1) + S_*(X_2) \to 0$$

给出了长正合同调链

$$\cdots \to H_q(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\text{差/和}} H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) \xrightarrow{\text{和/差}} \boxed{[H_q(X_1) + H_q(X_2)] \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(X_1 \cap X_2)} \xrightarrow{\text{差/和}} H_{q-1}(X_1) \oplus H_{q-1}(X_2) \to \cdots.$$

此处的 差 与 和 取决于 **Definition 2.2.3** 中 $h_{\#}$ 与 $k_{\#}$ 的取法.

Definition 2.2.5 若嵌入映射 $i : S_*(X_1) + S_*(X_2) \to S_*(X_1 \cup X_2)$ 诱导的同调群同态为同构, i.e.,

$$H_*(S_*(X_1) + S_*(X_2)) \to H_*(X_1 \cup X_2),$$

则称 $\{X_1, X_2\}$ 构成 **Mayer-Vietoris 耦**.

> 💡 **Remark** 若 X_1 与 X_2 之内部覆盖 X, 则
>
> $$i : S_*(X_1) + S_*(X_2) \to S_*(X_1 \cup X_2)$$
>
> 为同伦等价. 因此 $\{X_1, X_2\}$ 构成 Mayer-Vietoris 耦.

Theorem 2.2.6 若 $\{X_1, X_2\}$ 构成 Mayer-Vietoris 耦, 则有如下正合同调序列 (运用同构关系 $H_*(S_*(X_1) + S_*(X_2)) \to H_*(X_1 \cup X_2)$)

$$\cdots \to H_q(\cap) \overset{差/和}{\to} H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) \overset{和/差}{\to} \boxed{H_q(\cup) \overset{\partial_*}{\to} H_{q-1}(\cap)} \overset{差/和}{\to} \cdots .$$

Fact 2.2.7 上述 Mayer-Vietoris 正合列对增广链复形同理, 此处不赘述.

Theorem 2.2.8 结合 **Theorem 2.2.6** 与 **Theorem 2.1.3**, 若 $\{X_1, X_2\}$ 与 $\{Y_1, Y_2\}$ 分别为 X 与 Y 中的 Mayer-Vietoris 耦, 映射 $f : X \to Y$ 满足 $f(X_i) \subset Y_i$ ($i = 1, 2$), 则以下图可交换

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] & H_q(X_1 \cap X_2) \arrow[r, "差/和"] \arrow[d, "f_*"] & H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) \arrow[r, "和/差"] \arrow[d, "f_*"] & H_q(X_1 \cup X_2) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_{q-1}(X_1 \cap X_2) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \bullet \\
\bullet \arrow[r] & H_q(Y_1 \cap Y_2) \arrow[r, "差/和"] & H_q(Y_1) \oplus H_q(Y_2) \arrow[r, "和/差"] & H_q(Y_1 \cup Y_2) \arrow[r, "\partial_*"] & H_{q-1}(Y_1 \cap Y_2) \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}$$

🔗 链接

Example 2.2.9 计算球面 S^n 的简约同调群 $\tilde{H}_*(S^n)$.

▼ Solution

以下将证明南北半球为 Mayer-Vietoris 耦, 继而用数学归纳法求解.

若拓扑空间 X 为两个闭子集 X_1 与 X_2 的并, 交集 $X_1 \cap X_2$ 为某一开邻域 V 的形变收缩核, 下断言 $\{X_1, X_2\}$ 为 Mayer-Vietoris 耦.

记 $V_i := V \cup X_i$ 为 X_i 的开邻域, 其中 $i = 1, 2$. 根据 **Definition 2.2.5** 之 **Remark**, $\{V_1, V_2\}$ 为 Mayer-Vietoris 耦. 只需证明

$$H_*(S_*(V_1) + S_*(V_2)) \to H_*(S_*(X_1) + S_*(X_2))$$

为同构. 端详下图

$$\begin{tikzcd}
 & H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) \arrow[r, "和/差"] \arrow[dddd, "="] & H_q(S_*(X_1) + S_*(X_2)) \arrow[rr, "\partial_*"] \arrow[dr, "="] \arrow[dddd, "???"] & & H_{q-1}(X_1 \cap X_2) \arrow[dr, "差/和"] \arrow[dddd, "="] & \\
H_q(X_1 \cap X_2) \arrow[ur, "差/和"] \arrow[dd, "="] & & & & & H_{q-1}(X_1) \oplus H_{q-1}(X_2) \arrow[dd, "="] \\
 & & & H_q(X) \arrow[dl, "???"] & & \\
H_q(V_1 \cap V_2) \arrow[dr, "差/和"] & & & & & H_{q-1}(V_1) \oplus H_{q-1}(V_2) \\
 & H_q(V_1) \oplus H_q(V_2) \arrow[r, "和/差"] & H_q(S_*(V_1) + S_*(V_2)) \arrow[rr, "\partial_*"] & & H_{q-1}(V_1 \cap V_2) \arrow[ur, "差/和"] &
\end{tikzcd}$$

🔗 链接

根据 **Theorem 2.1.4 (五引理)**, 蓝色箭头 (标问号 **?** 处) 均为同构.

零维球面 $S^0 \cong \{p_1, p_2\}$, 从而简约同调群

- $\tilde{H}_q(S^0) = 0$, 若 $q \geq 1$,
- $\tilde{H}_0(S^0) = \mathbb{Z}$ (根据 **Example 1.3.19**).

既证明 $n \geq 1$ 时, 南北半球 $\{S^q_+, S^q_-\}$ 系 S^q 之 Mayer-Vietoris 耦, 根据 **Definition 1.3.18** 知可缩空间之简约同调群同构于单点之简约同调群, 即零同调. 观察 Mayer-Vietoris 正合同调列,

$$\tilde{H}_q(S_*(S^q_+) + S_*(S^q_-)) \xrightarrow{\partial_*} \boxed{\tilde{H}_{q-1}(S^q_+ \cap S^q_-) = \tilde{H}_{q-1}(S^{q-1})}$$

只能为同构. 从而

- $\tilde{H}_q(S^{q'}) = \tilde{H}_{q-1}(S^{q'-1}) = \cdots = \tilde{H}_{q-q'}(S^0) = 0$, 若 $q > q'$.
- $\tilde{H}_q(S^{q'}) = \tilde{H}_{q-1}(S^{q'-1}) = \cdots = \tilde{H}_0(S^0) = \mathbb{Z}$, 若 $q = q'$.
- $\tilde{H}_q(S^{q'}) = \tilde{H}_{q-1}(S^{q'-1}) = \cdots = \tilde{H}_0(S^{q'-q}) = 0$, 若 $q < q'$.

综上, $\tilde{H}_q(S^{q'}) = \delta_{qq'}\mathbb{Z}$.

Example 2.2.10 记 X 为 Euclid 空间 E^n 中的凸闭集, $f : X \to X$ 为连续映射, 则 f 有不动点.

▼ Solution

若不然, 则存在 f 使得 $f(x) \neq x$ 对一切 $x \in X$ 成立. 作以 $f(x)$ 为端点射向 x 的射线, 记 $g(x)$ 为射线与 ∂X 之交点. 根据凸集之定义, g 为 X 上良定义的映射. 显然 g 为连续映射.

不失一般性地记 $X = D^n$, 即 E^n 中单位球. 由于 $g|_{S^n} : S^n \to S^n$ 为同构, 故 $g : D^n \to S^n$ 为连续满射. 这与 $\tilde{H}_n(D^n) = 0 \neq \mathbb{Z} = \tilde{H}_n(S^n)$ 矛盾!

Definition 2.2.11 映射 $f : S^n \to S^n$ 诱导的同态

$$f_\# : \tilde{H}_n(S^n) \to \tilde{H}_*(S^n), [1] \mapsto [d].$$

称 d 为**映射度**, 记作 $\deg f = d$.

> 💡 **Remark** Hopf 证明了**球面到自身映射下的同伦分类定理**, 即对映射 $f, g : S^n \to S^n$, 以下两则等价:
>
> 1. $\deg f = \deg g$.
> 2. $f \simeq g : S^n \to S^n$.
>
> 球面的映射度满足以下简单性质:
>
> 1. $\deg \mathrm{id} = 1$,
> 2. $\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$,
> 3. $\deg \mathrm{constant} = 0$.

Example 2.2.12 n 维球面的镜面反射

$$r_n : S^n \to S^n, (x_0, \dots, x_n) \mapsto (-x_0, \dots, x_n)$$

满足 $\deg r_n = -1$.

▼ Proof

注意到交换图

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H_q(S^q) \arrow[r, "\partial_*(\cong)"] \arrow[d, "r_{q*}"'] & H_{q-1}(S^{q-1}) \arrow[r] \arrow[d, "r_{q-1*}"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & H_q(S^q) \arrow[r, "\partial_*(\cong)"] & H_q(S^{q-1}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

链接

从而 $\deg(r_{q*}) = \deg(r_{q-1*}) = \cdots \deg(r_0) = -1$.

Corollary 作为推论, 对径映射

$$S^n \to S^n, (x_0, \ldots, x_n) \mapsto (-x_0, \ldots, -x_n)$$

的映射度为 $(-1)^{n+1}$.

Example 2.2.13 若 n 维球面 S^n 的子集 A 同胚于 $I^k := \prod_{i=1}^k [0,1]$, 则 $\tilde{H}_*(S^n \setminus A) = 0$.

▼ Proof

若 $k=0$, 则 A 为单点, 显然成立.

若 $k<m$ 时引理成立, 则 $k=m$ 时, 取闭链 $[z]\in\tilde{H}_*(S^n\setminus A)$. 下证明 $[z]=0$. 若反之, 存在 z 使得 $[z]\neq 0$. 取划分 π 使得 $S^n=S^n_+\cup S^n_-$ 使得 $S^n_+\cap S^n_-=S^{n-1}$, 同时 $A=A_+\cup A_-$, $A_+\cap A_-$ 同胚于 I^{m-1}. 根据 **Theorem 2.2.6**, 有正合列

$$0\to\tilde{H}_q(S^n\setminus A)\to\tilde{H}_q(S^n\setminus A_+)\oplus\tilde{H}_q(S^n\setminus A_-)\to 0.$$

由 $[z]\neq 0$ 可知 $i_{+*}([z])\neq i_{-*}([z])$. 不妨设 $i_{1*([z])}\neq 0$, 取 $A^{(1)}:=A_+$. 同理构造 $\{A^{(m)}\}$ 使得每一 $A^{(m)}$ 均同胚于 I^m, 且满足

1. $A\supset A^{(1)}\supset A^{(2)}\supset\cdots$,
2. $\cap_m A^{(m)}=p$ 为单点,
3. 映射

$$i_*^{(m)}:(S^n\setminus A)\to(S^n\setminus A^{(m)}),[z]\not\mapsto 0.$$

由于 $\tilde{H}_*(S^n\setminus p)=0$, 从而 $(S^n\setminus A)$ 中的闭链 z 为 $(S^n\setminus p)\cong E^n$ 中的边缘链. 设 $\partial c=z$, 其中 $c\in S^n\setminus p$, 即 c 为 $S^n\setminus p$ 中有限个奇异单形之线性组合. 注意到存在 $m_0\in\mathbb{N}$ 使得这些有限个奇异单形落在 $S^n\setminus A^{(m_0)}$ 中, 与 $0\neq[z]\in H_*(S^n\setminus A^{(m_0)})$ 矛盾.

Example 2.2.14 若 n 维球面 S^n 的子集 A 同胚于 S^k, 则 $\tilde{H}_q(S^n\setminus A)=0$ 若 $q\neq n-k-1$, $\tilde{H}_{n-k-1}(S^n\setminus A)=\mathbb{Z}$.

▼ Proof

$k=0$ 时, $(S^n\setminus A)\cong E^n$, 故结论成立.

将 A 分作南北半球, i.e., $A_+\cup A_-$. 显然 $\{S^n\setminus A_+,S^n\setminus A_-\}$ 构成 $S^n\setminus(A_+\cap A_-)$ 的 Mayer-Vietoris 耦. 根据 **Example 2.2.13** 知有以下正合同调链

$$0\to\tilde{H}_{q+1}(S^n\setminus(A_+\cap A_-))\xrightarrow{\partial_*}\tilde{H}_q(S^n\setminus A)\to 0.$$

因此 $\tilde{H}_{q+1}(S^n\setminus A')\cong\tilde{H}_q(S^n\setminus A)$, 其中 $A\cong S^k$, $A'\cong S^{k-1}$.

💡 Corollary Example 2.2.14 给出了以下简单推论:

1. S^{n+1} 中同胚于 S^n 的子集将 S^{n+1} 分作两个单连通的开集, S^n 为公共边界.

> 特别地, $n=1$ 时为 Jordan 曲线定理.

2. S^n 不可能嵌入 E^n.
3. 不同维度的流形一定不同胚.

> 流形即**各点存在邻域同胚于 E^n 之邻域**的拓扑.