微分几何笔记(三)

一般参数下的曲率与挠率

以下先前采用弧长参数研究曲线, 下则采用一般参数研究之. 记$\gamma:(a,b)\to\mathbb{R}^3,\ t\mapsto\gamma(t)$. 为简化符号, 记$\dot f=f(t)'$, $\ddot f=f(t)''$, 以此类推.

首先$\gamma'(s)=\dot\gamma\cdot\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)$. 由此得

$$k\vec n=\gamma''(s)=\ddot\gamma\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2+\dot\gamma\left(\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}s^2}\right).$$

再有

$$\begin{aligned}&k'(s)\vec n-k^2\vec t-k\tau\vec b=\gamma'''(s)\\=&\dddot\gamma\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^3+3\ddot\gamma\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}s^2}\right)+\dot\gamma\left(\frac{\mathrm{d}^3t}{\mathrm{d}s^3}\right).\end{aligned}$$

从而

$$k=|\vec t\times k\vec n|=|\dot\gamma\times\ddot\gamma|\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^3=\frac{|\dot\gamma\times\ddot\gamma|}{|\dot\gamma|^3}.$$

为求挠率, 下采用混合积计算, 即

$$-k^2\tau=[\gamma'(s),\gamma''(s),\gamma'''(s)].$$

考虑$\gamma^{(l)}(t)$换元, 则上式等于

$$[\dot\gamma,\ddot\gamma,\dddot\gamma]\cdot\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^6.$$

因此

$$\tau=-\frac{[\dot\gamma,\ddot\gamma,\dddot\gamma]}{k^2\dot s^6}=\frac{[\dddot\gamma,\ddot\gamma,\dot\gamma]}{|\dot\gamma\times\ddot\gamma|^2}.$$

空间挠曲线与球

空间挠曲线指曲率与挠率不为零的曲线, 其曲率代表的偏离值与挠率代表的偏离值应满足一定的关系. 设$\gamma(s)$在某球面上, 则存在向量γ_0与常数R使得

$$\|\gamma-\gamma_0\|^2=R^2.$$

求导得$\left\langle\vec t,\gamma-\gamma_0\right\rangle=0$. 不妨设$\gamma-\gamma_0=\lambda\vec n+\mu\vec b$, 则求导得

$$\vec t=-\lambda k\vec t+(\lambda'+\mu\tau)\vec n+(-\lambda\tau+\mu')\vec b.$$

故$\lambda k=-1,\ \lambda'=-\mu\tau,\mu'=\lambda\tau$. 解得$\lambda=-\frac{1}{k},\mu=\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{k}$. 回代得

$$\frac{1}{k^2}+\frac{1}{\tau^2}\left(\frac{\mathrm{d}k^{-1}}{\mathrm{d}s}\right)^2=R^2.$$

因此空间挠曲线γ在任一点处所在的球的半径为

$$R(s)=\sqrt{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{\tau^2}\left(\frac{\mathrm{d}k^{-1}}{\mathrm{d}s}\right)^2}.$$

反之, 若空间挠曲线满足$R(s)$为恒常数, 则该曲线为常曲率曲线或球面上的曲线.

由于$\vec{t}$光滑, 若将$\tilde{r}(s)=\vec{t}(s)$视作三维单位球上的正则曲线, 则其曲率为

$$\tilde{k}(s)=\frac{|\gamma''(s)\times\gamma'''(s)|}{|\gamma''(s)|^2}=\sqrt{k^2+\tau^2}.$$

> 注: 此处s并非$\tilde{\gamma}$的弧长参数, 故仍作一般参数情形计算.

挠率为$\tilde{\tau}(s)=\dfrac{[\gamma'''',\gamma''',\gamma'']}{|\gamma''\times\gamma'''|^2}$. 此处可通过$\tilde{\gamma}$之弧长参数表示$\tilde{\vec{t}}=\vec{n}$. 从而

$$\tilde{\tau}=\frac{[\vec{n}''(s),\vec{n}'(s),\vec{n}(s)]}{|\vec{n}(s)\times\vec{n}'(s)|^2}=\frac{\tau k'-k\tau'}{k^2+\tau^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\arctan\frac{k}{\tau}$$

从而γ的曲率与挠率由其切向量导出的曲线决定. 换言之, $\vec{n}$导出γ的曲率与挠率.

曲线基本定理

给定正则曲线$\gamma:(a,b)\to\mathbb{R}^3$, 曲率函数$k(s)>0$, 挠率函数$\tau$, 则在同余意义下存在唯一的$\gamma$满足给定条件.

证明: 注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix}\vec{t}\\\vec{n}\\\vec{b}\\\vec{\gamma}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&k&0&0\\-k&0&-\tau&0\\0&\tau&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{t}\\\vec{n}\\\vec{b}\\\vec{\gamma}\end{pmatrix}$$

若限定初值$(\gamma(s_0),\vec{t}(s_0),\vec{n}(s_0),\vec{b}(s_0))$, 则根据解的存在唯一性定理得到唯一可能之解$\gamma^*$. 注意到$\vec{t}^*$, $\vec{n}^*$, $\vec{b}^*$三者两两内积构成了六元常微分方程组(初值条件已给出), 根据解的存在唯一性定理易知其唯一解为$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle\equiv0$($x\neq y$), $\langle\vec{x},\vec{x}\rangle\equiv0$. 从而$(\vec{t}^*,\vec{n}^*,\vec{b}^*)$均为符合要求的解.

实际上, 我们未限定初值条件; 但对于一切可能的初值条件, 所求得的曲线总能通过平移或旋转得到上述γ^*. 证明是显然的.