图谱论导引(第十一期)

> 今天讲讲李群在图论中的一个妙用: 例外图有限表示定理.

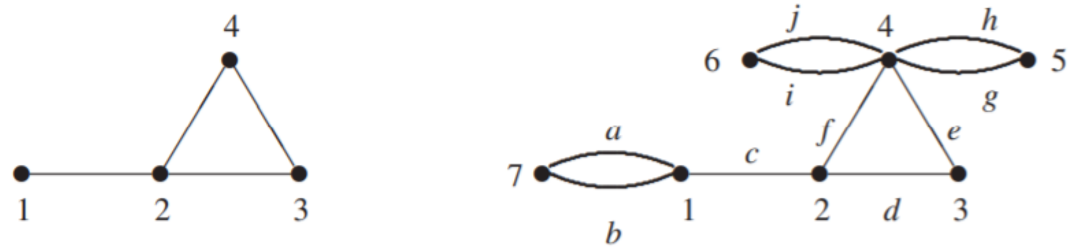
广义线图

前文已介绍线图(line graph)之概念, 即$L(G)$以$E(G)$为顶点集合, 以$E(G)$中的边相邻关系描述$V(L(G))$中的顶点相邻关系. 若在G中顶点j处添上一条边得图G', 则$L(G)$为$L(G')$的某一删点图. 特别地, 记$A := A(L(G))$, 则$A(L(G'))$具有一般形式$\begin{pmatrix} 0 & u^T \\ u & A \end{pmatrix}$. 今问, 能否构造图$G''$使得

$$A(L(G'')) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & u^T \\ 0 & 0 & u^T \\ u & u & A \end{pmatrix}.$$

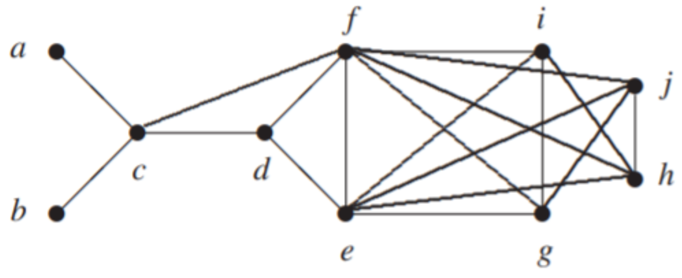
经构造, G''并非简单图, 但可通过在简单图上添加重边获得. 由于$A(L(G''))$仍为简单图, 同时具备线图的重要特点: $A(L(G'')) + 2I$半正定, 即$\lambda_{\min} \geq -2$. 现称该类形如$A(L(G''))$的图为广义线图.

如下图所示, 构造广义线图的一般步骤如下:



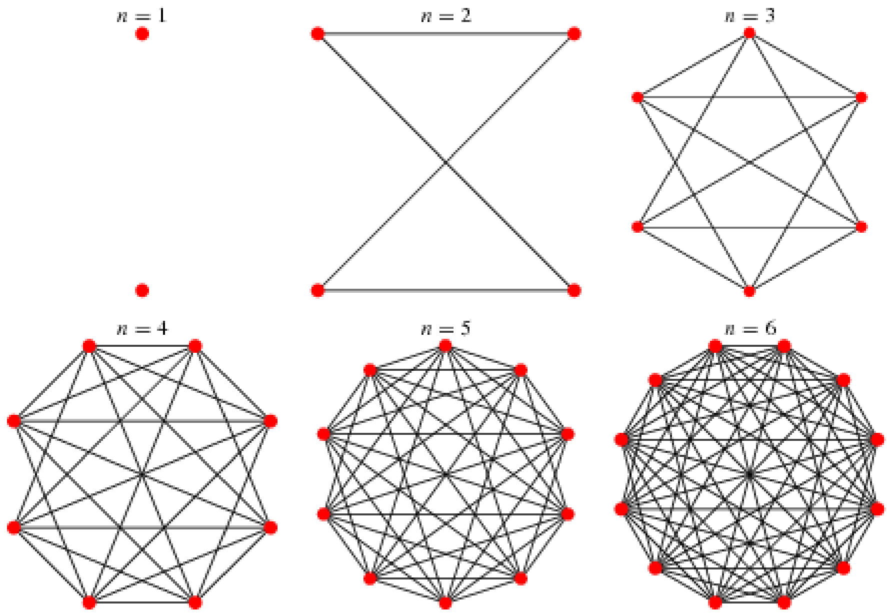
H $\qquad\qquad$ $\hat{H} = H(1,0,0,2)$

$L(\hat{H})$:



1. 在简单图H的部分顶点处添加若干条"花瓣"(pendant), 即有偶数条重边的添边. 例如$\hat{H}$由H于点1上添加一片花瓣, 于点4上添加两片花瓣所得.
2. 仿照线图的定义, 对$\hat{H}$中边进行编号. 其中, 两边相邻若且仅若仅有一个公共顶点. 例如, $i \sim h$, $c \sim a$; 但$i \nsim j$.
3. 根据连边关系作线图$L(\hat{H})$.

特别地, 在单点图K_1上作n片花瓣所导出的广义线图为$K_{2n} - nP_2$, 亦即$\overline{nP_2}$. 称nP_2为梯图(ladder graph), 其补图$K_{2n} - nP_2$如下图所示.



该类图系*cocktail party graph*, 通常直译作*鸡尾酒派对图*, 笔者以字数故更愿译之为*醴宴图*. 由于笔者不谙西洋文化, 也未曾查阅到cocktail party之相关礼节, 故暂时无法解释其名称之文化背景. 实际上, 该类图为特殊的Turán图$T(2n,n)=K_{2,2,\dots,2}$, 下文以$T(2n,n)$记之.

对$T(2n,n)$之构造方式不一, 另有"对偶图"构造法. 试将超立方体Q_n的$2n$个$n-1$维面视作点, 两点相连若且仅若其对应的两个$n-1$维面相邻, 所构造者即$T(2n,n)$.

例外图

引入

如上文所述, 所有线图与广义线图的最小特征值不小于-2; 相反, 一切满足$\lambda_{\min}\geq -2$之图并非线图或广义线图. 实际上, Petersen图为反例.

证明. 首先, $\forall u,v\in V, N(u)\neq N(v)$, 从而Petersen图并非广义线图. 不妨设$L(G)$为Petersen图, 由于$L(G)$中相邻两点无公共邻点, 故$G$中没有三条两两相交的边, 从而为若干圈与路的无交并, 检验得矛盾.

若H满足$\lambda_{\min}\geq -2$但H并非线图或广义线图, 则称之例外图(exceptional graph). 实际上, D. Cvetković(原书作者)等人证明了例外图有限, 并给出了相应的分类方式.

不妨设A为某一例外图的邻接矩阵, $n-r$为其-2特征值重数(允许取0), 则$A+2I=Q^TQ$. 其中$Q=(q_1\mid q_2\mid\cdots\mid q_n)$秩为$r$. 由于$A+2I$之对角元恒为2, 故$\|q_i\|=\sqrt{2}$. 进一步地, 对$i\sim j$, q_i与q_j呈夹角$\dfrac{\pi}{3}$; 反之$q_i\nsim q_j$. 自此, 对例外图的研究可转化至对$\mathbb{R}^r$中直线系统$\mathcal{L}$之研究.

直线系统$\mathcal{L}$

直线系统$\mathcal{L}$可视作一系列(经过原点的)$\mathbb{R}^r$中的一维子空间(直线)之并, 每个子空间(直线)与$\{q_i\}$平行, 且两两夹角为$\dfrac{\pi}{2}$或$\pi/3$. 若G不连通, 则可将$\{q_i\}$分为集合A与B, 使得$\forall x\in A,\forall y\in B: x\perp y$, 谓之可分解的(decomposable); 反之, 连通例外图的直线系统不可分解(indecomposible, 或irreducible).

三条两两夹角为$\pi/3$的直线往往是引人注目的, 兹称三条两两呈角$\pi/3$且共平面(即可通过平移围成等边三角形)的直线为星状的(star). 称直线系统是星状闭的(star-closed)若且仅若对任意夹角为$\pi/3$的两条直线, 系统中存在第三条直线使得三者形成星状系统. 实际上, 任意$\mathbb{R}^r$中系统一定包含于某一星状闭的系统, 只需对满足$\|x\|=\|y\|=\sqrt{2}$且$x^Ty=1$的两条直线构造$x-y$即可, 经过有限步即可完成闭合化操作.

根系

根系(root system)本系李代数(Lie algebra)概念, 只是上文构建的直线系统能较自然地诱导之. 严格而言, 设有限维欧式空间E为$(\cdot,\cdot)$给出的内积空间, 则根系Φ为E中有限向量集, 满足

- $\operatorname{span}(\Phi)=E$, 从而$|\Phi|\geq\dim E$.
- $\forall\alpha\in\Phi$, $k\alpha\in\Phi$若且仅若$k\in\{\pm1\}$.
- $\forall\alpha\in\Phi$, 对任意垂直于α的平面Γ, Φ关于Γ反射对称. 换言之,
$$\forall\alpha,\beta\in\Phi,\exists\gamma\in\Phi\text{ s.t. }(\beta-\gamma)\perp\alpha,(\beta+\gamma)\parallel\alpha.$$
- $\forall\alpha,\beta\in\Phi,\langle\beta,\alpha\rangle:=\dfrac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\in\mathbb{Z}$.

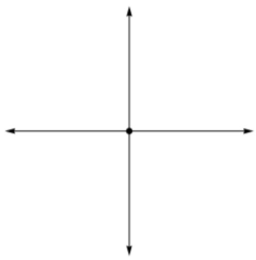
其中, 最后一点要求是耐人寻味的, 其间接要求了α与β之夹角仅能为$\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$或$\pi/6$. 二元运算$\langle\cdot,\cdot\rangle:\Phi^2\to\mathbb{Z}$仅对$\beta$线性.

上文已给出不可约根系之定义, 即$\forall\Phi'\subset\Phi$, $\exists\alpha\in\Phi',\beta\in(\Phi\setminus\Phi')$使得$(\alpha,\beta)\neq0$. 以下将根据秩划分不可约根系.

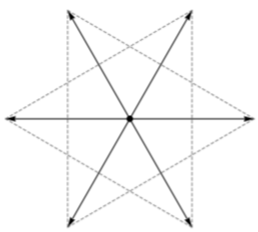
当秩为1时, $\Phi=\{\pm\alpha\}$, 记作A_1. 如下图所示.

当秩为2时, 分别于$\{\pi/2,\pi/3,\pi/4,\pi/6\}$中取向量$\alpha,\beta$之夹角$\theta$即可.

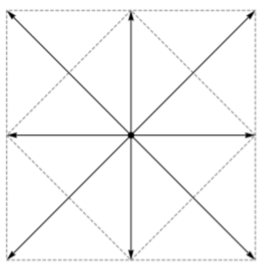
- $\theta=\pi/2$时, 图为$A_1\times A_1$. 如下图所示(该根系可约).



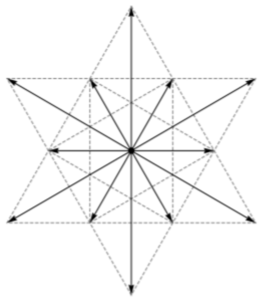
- $\theta=\pi/3$时, 图为A_2. 如下图所示.



- $\theta=\pi/4$时, 图为B_2. 如下图所示.

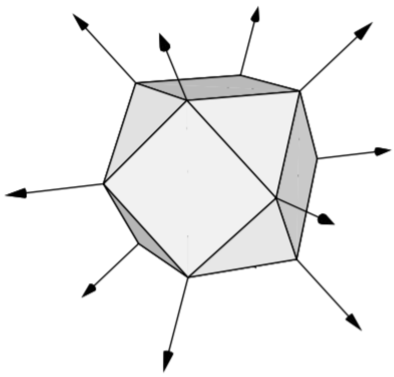


- $\theta=\pi/6$时, 图为G_2. 如下图所示.

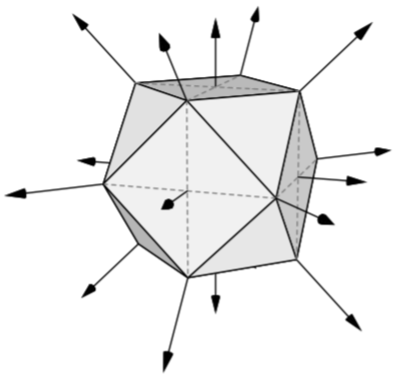


当秩为3时, $A_1\times A_2$, $A_1\times B_2$, $A_1\times G_2$及$A_1\times A_1\times A_1$均为可约根系. 不可约根系仅有

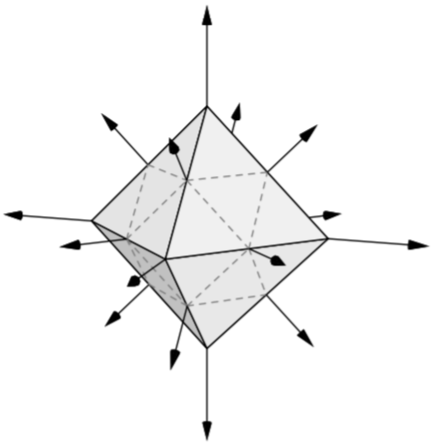
- A_3. 如下图所示.



- B_3. 如下图所示.



- C_3. 如下图所示.



不可约根系分类定理

由于秩大于3的根系无法采用直观的图像描述, 下将引入不可约根系分类理论. 由于根系中向量有限, 故存在$d \in E$使得$\forall \alpha \in \Phi, (d, \alpha) \neq 0$. 由此可定义

$$\Phi^+(d) := \{\alpha \in \Phi : (\alpha, d) > 0\}.$$

以及相应的$\Phi^-(d)$. 从而$\Phi = \Phi^+(d) \dot\cup \Phi^-(d)$. 注意到向量未免线性相关, 例如$A_2$中$\Phi^+(d)$内的某个向量可由其余两向量之和表示. 称$\alpha \in \Phi^+(d)$为单的(simple)若且仅若其无法表示为$\Phi^+(d)$中两个向量之和($\Phi^-(d)$中虽可建立等价定义, 但无必要, 因为$-\alpha$与$\alpha$线性相关), 称所有单向量之集为根系的基底. 在正式介绍分类定理前, 以下引理是必要的.

- $\forall \alpha, \beta \in \Phi$使得$(\alpha, \beta) > 0$且$\alpha \neq \beta$, 则$\alpha - \beta \in \Phi$.

  证明: 由于$\dfrac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}$与$\dfrac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)}$为均为整数, 则其中较小者绝对值为$1$. 不妨设$\dfrac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = 1$, 则$\alpha$关于垂直于$\beta$平面对称的向量为$\alpha - \dfrac{2\beta(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} = \alpha - \beta \in \Phi$.

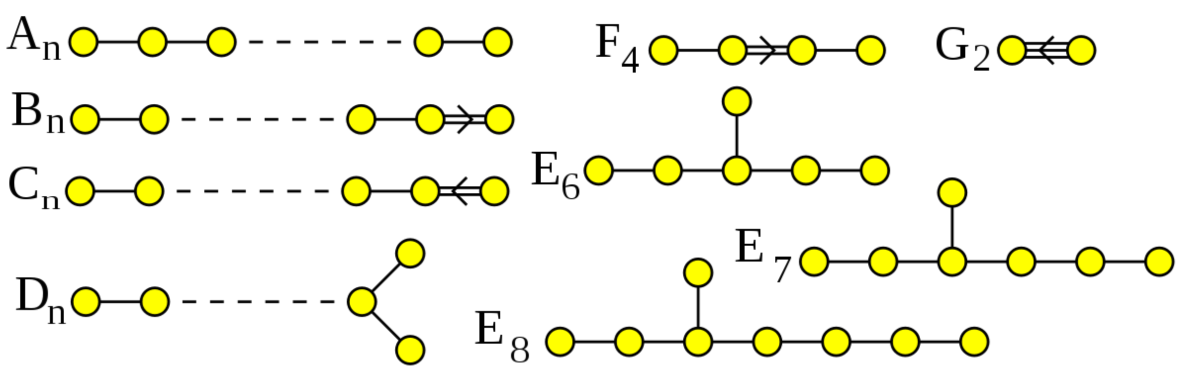
- 所有单的根两两内积非正.

  证明: 反之, 设单的根α, β满足$(\alpha, \beta) > 0$, 则$\alpha - \beta \in \Phi$. 由于$\alpha - \beta$或$\beta - \alpha$中一者属于$\Phi^+(d)$, 矛盾.

- 所有单的根两两线性独立且张成全空间.
- 根系可分解若且仅若单根集可分解.

返回来, 将Φ中向量视作点即可构造Coxeter图(允许重边的无环无向图). 其中α与β之连边数量为$4\cos^2\theta \in \{0, 1, 2, 3\}$. 对例外图之讨论而言, $\theta = \pi/3$或$\pi/2$为仅有的容许值. 构造Coxeter图时, 各向量的模长属性似乎被遗忘; 但对于简单图而言, 所有向量模长确实是相同的.

据定义, 不可约根系对应的Coxeter图连通. 倘若记Coxeter图中的重边是有向的(指向模长较小的向量), 即得Dynkin表. 下将证明: 不可约的Dynkin表仅有以下形式:



称一组单位向量$\{u_i\}_{i=1}^n$为可配的若且仅若$\{u_i\}$线性独立且张成全空间, 同时对一切$i \neq j$均有$(u_i, u_j) \leq 0$, $4\cos^2\theta \in \{0, 1, 2, 3\}$. 注意到

$$\begin{aligned} 0 &< \left(\sum_i v_i, \sum_i v_i\right) \\ &= \sum_i \|v_i\|^2 + 2\sum_{i<j}(v_i, v_j) \\ &\leq n - |E| \end{aligned}.$$

其中, Dynkin图边数$|E|$小于顶点数, 从而为树. 进一步推算可知, Dynkin图无外乎以下情形:

1. 无重边的树.

2. 仅有一条或两条二重边的树.
3. 仅有一条三重边的树.

再者, Dynkin图顶点度数不应大于3. 不妨设c有邻点$\{v_1, \dots, v_k\}$, 由于图中无圈, 故$\{v_1, \dots, v_k\}$两两正交. 设v_0为$c - \sum_{i=1}^k (c, v_i) v_i$对应的标准向量, 则$v_0 = \sum_{i=1}^k (c, v_i) v_i$. 从而

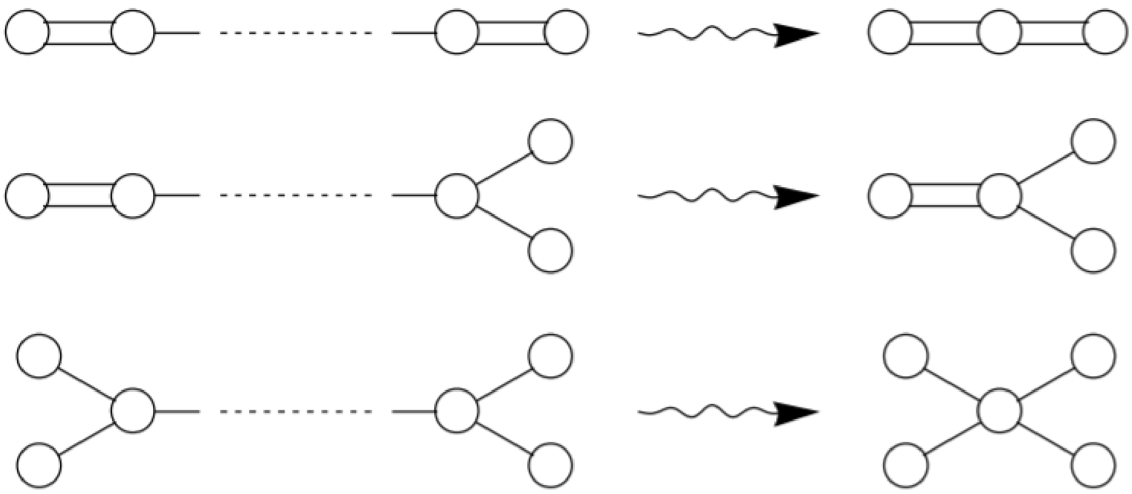
$$1 = (c, c) = (c, v_0)^2 + \sum_{i=1}^k (c, v_i)^2 > \sum_{i=1}^k (c, v_i)^2.$$

从而$\deg c = \sum_{i=1}^k 4(c, v_i)^2 < 4$. 因此, 仅有一条三重边的树只能为$G_2$.

显然, Dynkin图以一列由单边构成的链条为主体. 不妨设$v_1 - v_2 - \cdots - v_n$为链, 记$v := \sum_{i=1}^k v_i$, 则

$$(v, v) = \sum_{i=1}^k + 2 \sum_{i<j} (v_i, v_j) = k - (k - 1) = 1.$$

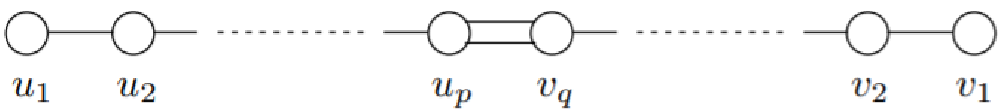
对$\{v_i\}_{i=1}^k$以外的点u而言, u至多与$\{v_i\}_{i=1}^k$中一点v_l相交(由于无圈性), 从而$2(u, v) = 2(u, v_l) \in \{-1, -\sqrt{2}, -\sqrt{3}\}$. 因此, 可将链等价于一点! 由是可剔除以下三种情形:



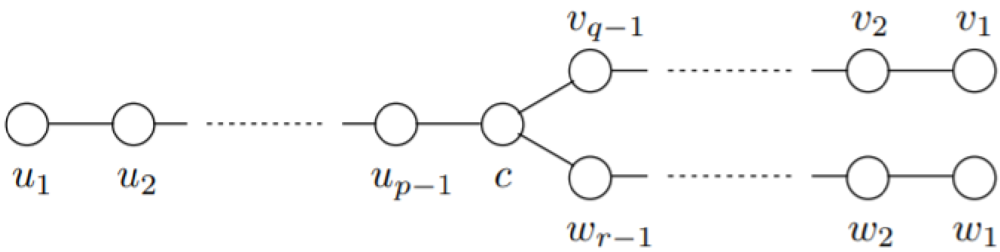
凡可能情形悉列如下:

T1

T2



T3



T1构造容易. 欲构造A_n, 只需在n维上半平面作n个两两成角$2\pi/3$的向量$S_n = \{x_1, \dots, x_n\}$, 再研究

$$\pm[S_n \cup \{x_i + x_j : (x_i, x_j \in S_n) \wedge (i \neq j)\}]$$

即可.

T2稍为复杂. 构造$u=\sum_{i=1}^{p} i\cdot u_i$, 则对于$(1\le i\le p-1)$均有$2(u_i,u_{i+1})=-1$. 展开计算即得

$$(u,u)=\cdots=\frac{p(p+1)}{2}.$$

同理, $(v,v)=\dfrac{q(q+1)}{2}$, $(u,v)=pq(u_p,v_q)$. 注意到

$$\frac{1}{2}=(u_p,u_q)^2<\frac{\|u\|^2\|v\|^2}{p^2q^2}=\frac{(p+1)(q+1)}{4pq}.$$

移项得$(p-1)(q-1)<2$. 从而$p=q=2$或$1\in\{p,q\}$: 前者对应F_4, 后者对应B_n与C_n. 容易验证, B_n或C_n可由A_n与$\prod_{i=1}^{n} A_1$之线性组合表示, 比例分别为$\sqrt{2}$与$\sqrt{1/2}$.

T3同上, 令$u=\sum_{i=1}^{p-1} i\cdot u_i$, 同理作$v$, w. 由于$\{u,v,w\}$彼此正交, 且其线性组合不为c, 故

$$1=(c,c)>\sum\frac{(c,u)^2}{\|u\|^2}=\sum\frac{1-p^{-1}}{2}$$

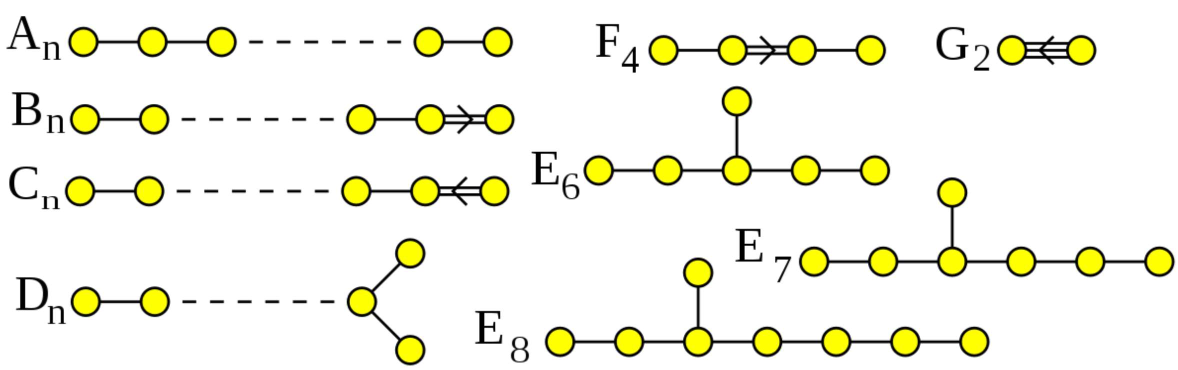
从而$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{r}>1, p,q,r\ge 2$. 从而解得以下所有可能的$(p,q,r)$:

- $p\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}, q=r=2$. 对应$D_n$.
- $p\in\{3,4,5\}, q=3, r=2$. 分别对应E_6, E_7与E_8.

E_6, E_7及E_8之构造将在下文给出.

例外图有限定理

回顾分类表



由于例外图连通, 故只可能由A_n, D_n, E_6, E_7或E_8导出. 其中

- $A_n=\{e_i-e_j:e_i,e_j\in\mathbb{R}^{n+1}, i\ne j\}$.
- $D_n=\{\pm e_i\pm e_j:e_i,e_j\in\mathbb{R}^{n+1}, i\ne j\}$.
- $E_8=D_8\cup\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}\epsilon_i e_i:\epsilon_i=\pm 1,\prod_{i=1}^{8}\epsilon_i=1\}$.
- 同构意义下, 选定$v\in E_8$, $E_7=\{x\in E_8:x\perp v\}$.
- 同构意义下, 选定E_8中星状图(v_1,v_2,v_3构成), $E_6=\{x\in E_8:x\perp v_i, i=1,2,3\}$.

一切以-2为最小特征值的简单图对应的直线系统$\mathcal{L}$在星状闭包下仅可能为A_n, D_n, $E_i(i=6,7,8)$. 下将证明:

- 图G有A_n表示若且仅若G为某一顶点数为$n+1$的二分图之线图.
- 图G有D_n表示若且仅若G为某一广义线图.

注意到广义线图$L(G,a_1,\ldots,a_m)$即线图$L(G)$上添加点

$$\{(i, \pm l) : i = 1, \ldots, m, l = 1, \ldots, a_i\}$$

所得. 记$e_i + e_j$为$L(G, a_1, \ldots, a_m)$中点ij对应的向量, $e_i \pm e_{(i,l)}$分别对应点$(i, \pm l)$即可得广义线图之D_n表示. 若G为二分图, 将边ij记作$e_i - e_j$即可得A_n表示.

从而所有例外图均有E_8表示. 由于$|E_8| = 240$, 例外图有限.

例外图之学问另有洞天, 本文以篇幅故不再展开.