两个拓扑空间的连续映射全体是否蕴含新的拓扑?

给定拓扑空间 (X,τ_X) 与 (Y,τ_Y), 下将拓扑空间 (Z,τ_Z) 简写作 Z. 记 $[Y^X]$ 为 X 到 Y 的连续映射全体. 此处连续映射即"开集的原像为开集".

1. 定义紧集 $K\subseteq X$ 与开集 $V\subseteq Y$ 共同决定 $[Y^X]$ 中的开集
$$U_{K,V}:=\{f\in[Y^X]\mid f(K)\subseteq V\},$$
则所有形如 $U_{K,V}$ 的开集生成了 $[Y^X]$ 上拓扑. 特别地,
$$\{U_{K,V}\mid K\subseteq X\text{ 为紧集},V\subseteq Y\text{ 为开集}\}$$
在有限交集运算下生成 $[Y^X]$ 的拓扑基.
   - 一般地, 称 $\mathscr{B}\subseteq\tau_X$ 为拓扑基, 若 $\mathscr{B}\xrightarrow{\text{任意}\cup}\tau_X$;
   - 一般地, 称 $\mathscr{A}\subseteq\tau_X$ 为拓扑亚基, 若 $\mathscr{A}\xrightarrow{\text{有限非空}\cap}\mathscr{B}\xrightarrow{\text{任意}\cup}\tau_X$.

   > 友情提示: $\bigcup_{\lambda\in\varnothing}U_\lambda=\varnothing$; 据 d'Morgan 定律, $\bigcap_{\lambda\in\varnothing}U_\lambda$ 为所有集合构成的类, 从而并非集合.

2. 试证明或否定: 集合间的复合映射 $\circ$ 自然给出了乘积拓扑 $[Z^Y]\times[Y^X]$ 与 $[Z^X]$ 间的连续映射
$$\circ:([Z^Y]\times[Y^X])\to[Z^X].$$
3. 若 Y 是局部紧空间, 则的确有连续映射
$$\circ:([Z^Y]\times[Y^X])\to[Z^X].$$
4. 集合映射的乘法结合律对应拓扑空间的典范同构
$$([W^Z]\circ[Z^Y])\circ[Y^X]\simeq[W^Z]\circ([Z^Y]\circ[Y^X]).$$
其中, 我们自然要求 Z 与 Y 是局部紧空间.
5. 对局部紧空间 X, 试证明以下为连续映射(谓之赋值映射):
$$\mathrm{ev}:[Y^X]\times X\to Y,\quad(\overline{f},\overline{x})\mapsto\overline{f}(\overline{x}).$$
其中, $\overline{x}:=\{x'\in X\mid x\text{ 与 }x'\text{ 不可分}\}$. 特别地, X 是 Hausdorff 空间时, $\overline{x}$ 为一元集, 此时 $\overline{f}(\overline{x})=\overline{f(x)}$.
6. 记 Y^X 为集合 X 到 Y 的映射全体, 则有熟知的伴随同构(幂指公式):
$$Z^{X\times Y}\simeq(Z^Y)^X,\quad[(x,y)\mapsto f(x,y)]\mapsto[x\mapsto[y\mapsto f(x,y)]].$$
但很遗憾, 一般情形下没有拓扑空间的同构 $[Z^{X\times Y}]\simeq[[Z^Y]^X]$. 试给出反例.
7. (接上条) 若 Y 是局部紧空间, 则 $[Z^{X\times Y}]$ 与 $[[Z^Y]^X]$ 有一一对应关系, 但并非拓扑空间的同构.
8. (接上条) 若 X 是 Hausdorff 空间, 则有拓扑空间的同构 $[Z^{X\times Y}]\simeq[[Z^Y]^X]$.