图谱论导引(第十四期)

强正则图拾遗

Paley图

实际上, 原书自此章起方初次介绍强正则图. 其第一则例子系Paley图, 构造如下: 取有限域F_q使得$q \equiv 1 \mod 4$, 默认顶点集即F_q. $i \sim j$若且仅若$i-j$为某F_q中数一数的平方, 例如$1 \sim 2$. 通常记Paley图为$P(q)$, 其中q为域的阶.

首先应当验证Paley图系简单图, 即-1为F_q中平方元. 取乘法生成元$w \in F_q^*$, 显然$w^{(q-1)/4}$平方为-1. 其次, 考虑群$(F_q^*, \cdot)$上的乘法同态

$$\pi : F_q^* \to (F_q^*)^2, x \mapsto x^2$$

可知$\ker \pi = \{\pm 1\}$, 故F_q^*中半数为平方数. 故$P(q)$为度为$\dfrac{q-1}{2}$的正则图. 证明$P(q)$强正则性之际, 先介绍若干性质:

强对称性, 即对任意$x, y \in V(P(q))$, 存在自同构ϕ使得$\phi(x) = y$. 对任意$(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in E(P(q))$, 存在自同构$\pi$使得$\pi((x_1, x_2)) = (y_1, y_2)$. 证明如下:

1. 点的强对称性: 可作函数$\phi : x \mapsto ax + b$, 其中a为F_q中平方数. 显然ϕ为双射. 同时, $x_1 - x_2$为平方数若且仅若$\phi(x_1) - \phi(x_2)$亦为平方数. 故ϕ为自同构.
2. 边的强对称性: 沿用上一证明中的同构ϕ, 取$a = (x_2 - y_2)(x_1 - y_1)^{-1}$, $bx_2 - ax_1$即可.

自补性(self-complementary), 即$P(q)$与$\overline{P(q)}$同构. 取F_q中非平方元r, 作映射$f : x \mapsto rx$即可. 作为推论, $P(q)$连通.

强正则性. 特别地, $P(q)$系数为

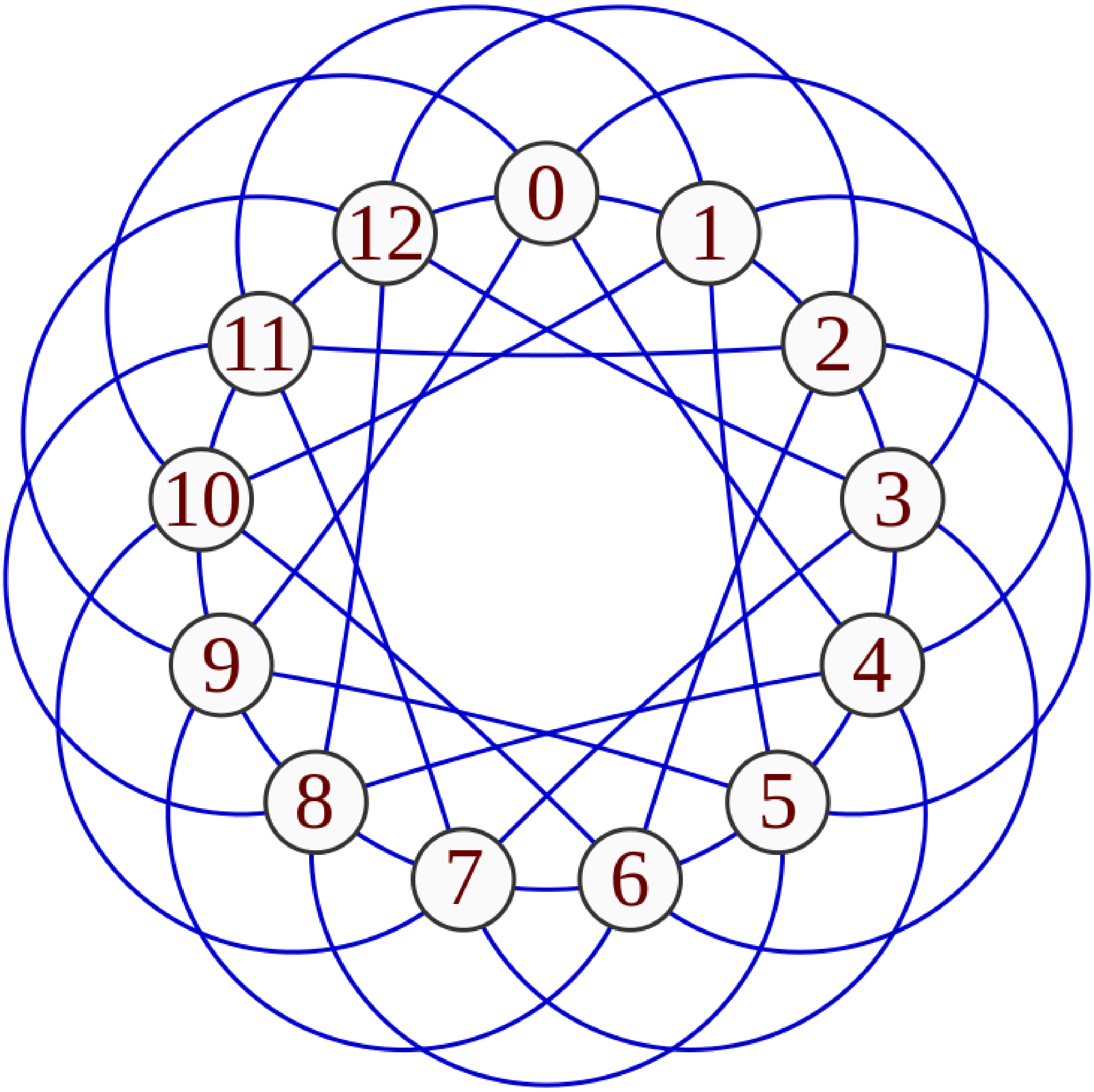
$$(n, k, \lambda, \mu) = \left(q, \frac{q-1}{2}, \frac{q-5}{4}, \frac{q-1}{4}\right).$$

上文已证明$k = \dfrac{q-1}{2}$. 下选定$x \in V(P(q))$, 记$A = N(x)$, $B = V(P(q)) \setminus (A \cup \{x\})$. 由于对称性, 不妨设对任意$y \in A$, $|N(y) \cap B| = l$. 由于$P(q)$自互补, 故对任意$z \in B$, $[V(P(q)) \setminus N(z)] \cap A = l$.

下通过两种方式计算$|A||B|$.

1. $|A| = k = \dfrac{q-1}{2}$, $|B| = q - k - 1 = \dfrac{q-1}{2}$, 从而$|A||B| = \left(\dfrac{q-1}{2}\right)^2$.
2. $|A||B| = |\{(a,b) \in A \times B : a \sim b\}| + |\{(a,b) \in A \times B : a \nsim b\}|$. 其中$|\{(a,b) \in A \times B : a \sim b\}| = \dfrac{q-1}{2} l$, $|\{(a,b) \in A \times B : a \nsim b\}| = \dfrac{q-1}{2} l$.

相加得$\left(\dfrac{q-1}{2}\right)^2 = (q-1)l$, 故$l = \dfrac{q-1}{4}$. 从而$\lambda = |N(y) \cap A| = \dfrac{q-5}{4}$, $\mu = |N(y) \cap A| = \dfrac{q-1}{4}$. 例如, $P(13)$如下.



据先前结论, Paley图之谱为

$$\begin{pmatrix} \frac{q-1}{2}^{(1)}, \frac{-1-\sqrt{q}}{2}^{(\frac{q-1}{2})}, \frac{-1+\sqrt{q}}{2}^{(\frac{q-1}{2})} \end{pmatrix}$$

Paley图之直径为2, 因为不存在两两不邻的三个点.

称联络图(conference graph)为一类以$(n, \frac{n-1}{2}, \frac{n-5}{4}, \frac{n-1}{4})$为系数的强正则图, 以现有之成果暂时无法一一隅举之, 不过, Paley图显然为联络图.

关于强正则图的若干结论

强正则图G以(n, r, λ, μ)为系数, 则以下两则结论有且仅有一者成立.

1. G为联络图.
2. G的特征值均为整数且$(\lambda-\mu)^2+4(r-\mu)=(\theta-\tau)^2$, 其中$\theta$与$\tau$为非主特征值.

证明容易, 此处从略.

对n上界有如下不等式:

$$n \leq \min\left\{\frac{m_\tau(m_\tau+3)}{2}, \frac{m_\theta(m_\theta+3)}{2}\right\}.$$

记P为将$\mathbb{R}^n$投影至$\ker(\tau I - A)$的算子, 由$A^2 + (\mu - \lambda)A + (\mu - r)I = \mu J$可知$P = \alpha I + \beta A + \gamma(J - I - A)$. 计算得

$$P = \frac{m_\tau}{n} I + \frac{m_\tau \mu}{nr} A + \frac{-m_\tau(\mu + 1)}{n(n - m_\tau - 1)}(J - I - A).$$

记$P = H^T H$, 其中$H_{k\times n} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$, 则

$$h_i^T h_j = \begin{cases} \alpha, i = j \\ \beta, i \sim j. \\ \gamma, i \nsim j \end{cases}$$

记Ω为$\mathbb{R}^k$上的球面$\partial B(0, \alpha)$, 记函数$f_i : \Omega \to \mathbb{R}$, 其中

$$f_i(x) = \frac{(h_i^T x - \beta)(h_i^T x - \gamma)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}.$$

显然$f_i \in V_1 \oplus V_2$, 其中V_1为一切$\Omega \to \mathbb{R}$的线性函数, V_2为一切二次型. 由于f_1至f_n线性独立, 则

$$n \le \dim(V_1 \oplus V_2) = m_\tau + (m_\tau + \binom{m_\tau}{2}) = \frac{m_\tau(m_\tau + 3)}{2}.$$

同理, $n \le \dfrac{m_\theta(m_\theta + 3)}{2}$.

Rank-3图

回顾群作用$G \times X \to X, (g, x) \mapsto gx$, 记群作用

$$\begin{aligned} G \times X &\to X \\ g.\, x &\mapsto gx \end{aligned}.$$

称对任意$x \in X$, $Gx := \{gx : g \in G\}$为一条G-轨道. 由于所有轨道自然表示了X的某一划分, 划分数量为1若且仅若G-轨道数为1, 即对任意$c \in X$都有$Gx = X$: 此时群作用可迁. 对$A \subset X$, A保守若且仅若$gA := \{gx : x \in A\} = A$对任意$g \in G$成立.

现考虑群作用

$$\begin{aligned} G \times (X \times X) &\to (X \times X) \\ g(x, y) &\mapsto (gx, gy) \end{aligned}.$$

当$G \times X$可迁时, $G \times (X \times X)$的轨道条数称为作用的秩. 下将研究一类秩为3的作用. 首先, $D := \{(x, x) : x \in X\}$为一条轨道, 记$E$, F为剩余两条轨道. 若E对称, 则F亦然; 反之若$(x, y) \in E$而$(y, x) \in F$, 由于$G(x, y) \cup G(y, x) \cup D = G$, 从而$G(x, y) = E$, 即$F = \{(x, y) : (y, x) \in E\}$与$E$互补. 注意到$(X, E)$与$(X, F)$为一对互补的强正则图, E与F为单一轨道, 从而G给出了(X, E)的自同构群.

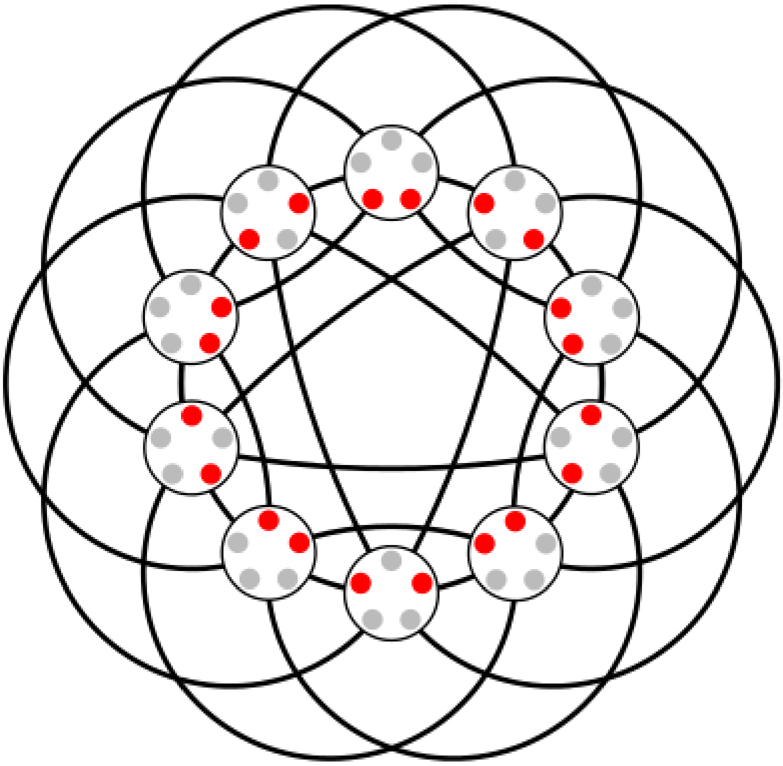
Johnson图

记X为集合, d为自然数. Johnson图$J(X, d)$之顶点与$\binom{|X|}{d}$个d元子集相对应, 两顶点相连若且仅若其对应之集合D, F满足$|D \cap F| = d - 1$. 不妨设$|X| \ge 2d$, 不相交集合对应点之距离为d, 从而$J(X, d)$直径为d; 同理$2d \le |X|$时直径为$|X| - d$, 从而$J(X, d)$之直径为$\min(d, |X| - d)$.

Johnson图$J(X, d)$在群$S(X)$之作用下生成$d + 1$条轨道(包含对角轨道). 下一期文章将证明以下结论: 当$d \ge 2$时有

1. 若$2d < |X|$, 则$\mathrm{Aut}(J(X, d)) \cong S(X)$.
2. 若$2d = |X|$, 则$\mathrm{Aut}(J(X, d)) \cong S(X) \times \mathbb{Z}_2$.

特殊地, $J(n, 2) = L(K_n)$, 从而$\mathrm{Aut}(J(n, 2)) \cong S_n$. 以下为Johnson图$J(5, 2)$.



Hammin图

设X为集合, X^d为d个X的直积. Hamming图$H(d,X)$之顶点对应数组$(a_1,a_2,...,a_d)$, 其中诸$a_i \in X$. 顶点$(a_1,...,a_d)$与$(a_1,...,a_d)$相邻若且仅若有且仅有一个i使得$a_i \neq b_i$. 特殊地, $H(2,X)$为格点图(Lattice graph), $H(d,2)$为d维立方体. 端详Hamming图之定义即可知其在信息科学中应用广泛. 下图为$H(3,3)$.