微分几何笔记(四)

补注: Bertrand曲线

上期文章中, 给定曲线$\gamma:(a,b)\to\mathbb{R}^3$在弧长参数下的法向量$\vec{n}(s)$, 有结论

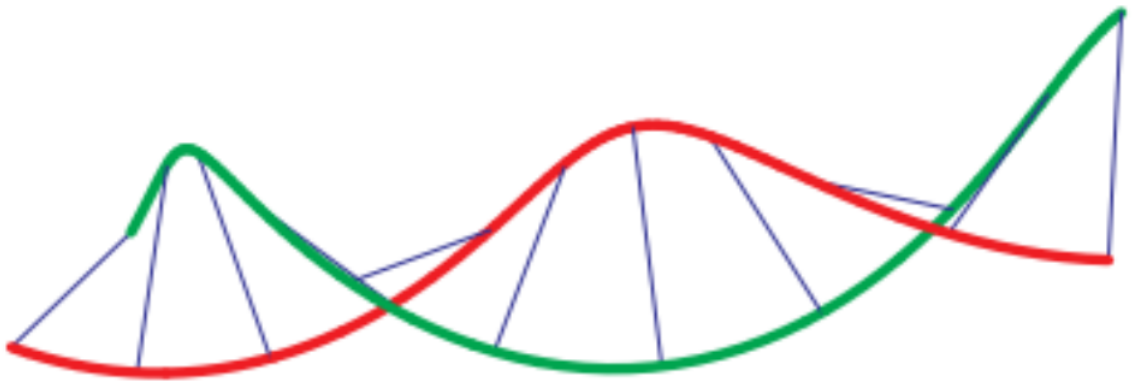
$$\begin{aligned}\frac{[\vec{n}''(s),\vec{n}'(s),\vec{n}(s)]}{|\vec{n}(s)\times\vec{n}'(s)|^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\arctan\frac{k}{\tau}\\|\vec{n}'(s)|&=\sqrt{\tau^2+k^2}.\end{aligned}$$

注意到前一式子之积分包含常数项, $\vec{n}$未必唯一确定曲线之曲率与挠率: 如对$\sqrt{\tau^2+k^2}$恒为常数的螺旋线而言, $\vec{n}(s)$始终相同. 例如螺旋线$\gamma(s)=(a\cos s,a\sin s,bs)$, 其中$a^2+b^2=1$. 显然$|\gamma'(s)|\equiv1$, 从而验证了$s$即为弧长参数. 注意到

$$\vec{n}(s)=\frac{\gamma''(s)}{|\gamma''(s)|}=\operatorname{sgn}(a)\cdot(-\cos s,-\sin s,0)$$

仅与a符号相关. 故对于同号的a而言, 不同曲线或有相同之法向量. 写至此处, 应当有较一般之理论; 探究法向量处处相等之曲线类已有较多的门路, 下将选择极其特殊的一类关系: Bertrand对偶.

定义曲线$\alpha(t)$, $\beta(t)$为一组Bertrand偶若且仅若对任意t, 直线$\alpha(t)+\lambda\vec{n}_\alpha(t)$与直线$\beta(t)+\lambda\vec{n}_\beta(t)\equiv0$始终重合. 如下图所示:



下将列举几点Bertrand偶之性质:

1. 若$\alpha(s)$为弧长参数下的曲线, 则$\beta(s)=\alpha(s)+C\cdot\vec{N}(s)$, 其中$C$为常数, $\vec{N}$为单位化的向量.

   证明: 记$C=c(s)=\left\langle\beta(s)-\alpha(s),\vec{N}(s)\right\rangle$, 则

   $$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}c(s)}{\mathrm{d}s}&=c(s)\left\langle\vec{N}(s),\vec{N}'(s)\right\rangle+\left\langle\beta'(s)-\alpha'(s),\vec{N}(s)\right\rangle\\&=0+0=0.\end{aligned}$$

2. 对应点处, $\vec{t}_\alpha(t)\cdot\vec{t}_\beta(t)$为常数.

   证明: 不失一般性地, 记$t=s$为α的弧长参数. 记$\vec{t},\vec{n},\vec{b}$为$\alpha(s)$之活动标架, 从而

   $$\begin{aligned}(\vec{t}\cdot\vec{t}_\beta)'&=\vec{t}_\beta'\cdot(\beta'-C\vec{N}')+\vec{t}_\beta\cdot(\beta''-C\vec{N}'')\\&=-C(\vec{t}_\beta'\cdot\vec{N}'+\vec{t}_\beta\cdot\vec{N}'')\\&=0.\end{aligned}$$

3. 弧长参数曲线α有Bertrand对偶曲线若且仅若k与τ呈线性关系.

   必要性证明: 记

   $$\vec{t}_\alpha(t)\cdot\vec{t}_\beta(t)=\frac{(1+C\cdot\vec{N}'\cdot\vec{t})}{\|\vec{t}+C\cdot\vec{N}'\|}:=\cos\theta.$$

   计算得

   $$\begin{aligned}&\vec{N}'(s)\cdot\vec{t}=(\vec{N}\cdot\vec{t})'-k\vec{N}\cdot\vec{n}=-k\\&\vec{N}'(s)\cdot\vec{n}=0\\&\vec{N}'(s)\cdot\vec{b}=(\vec{N}\cdot b)'-(\vec{N}\cdot\vec{b}')=-\tau\end{aligned}$$

   从而$\vec{N}'=-k\vec{t}-\tau\vec{b}$. 故

   $$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\tau C}{1-Ck}\right)^2}}$$

   为常数(假定已讨论分母为0之情形). 从而k与τ呈线性关系.

   充分性证明: 倒推上述证明即可, 略.

4. 若α与βBertrand对偶, 则$\tau_\alpha\cdot\tau_\beta=\dfrac{\sin^2\theta}{C^2}$.

   证明略, 注意到$\vec{t}_\beta=\vec{t}\cos\theta+\vec{b}\sin\theta$即可.

5. α有无穷多Bertrand对偶若且仅若α为等距螺旋线(证明略).

$\mathbb{R}^3$中的正则曲面

$\mathbb{R}^3$中曲面S正则, 若且仅若对任意$p\in S$, 存在邻域$U_x\subset\mathbb{R}^3$与映射

$$\begin{aligned}X:&U(\subset\mathbb{R})\to U_x\cap S,\\&(u,v)\mapsto(x(u,v),y(u,v),z(u,v)).\end{aligned}$$

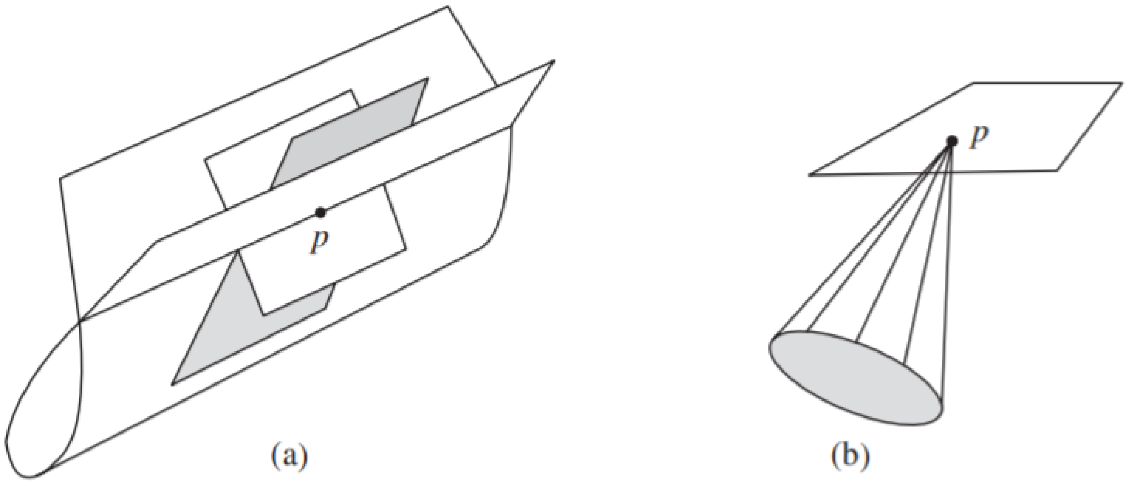
使得

1. X可微, 即$x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$在U上均有连续偏导数.
2. X为同胚, 即$X^{-1}:U_x\cap S\to U$为连续映射(X连续性已知).
3. (正则性) 对任意q, $\mathrm{d}X_q:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$为双射.

此处切空间$T_pS=\mathrm{span}(\partial X_u|_p,\partial X_v|_p)\subset\mathrm{span}(\partial_x\mid_p,\partial_y\mid_p,\partial_z\mid_p)$, 余切空间$T_p^*S=\mathrm{span}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)\subset\mathrm{span}(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$. 映射$\mathrm{d}X_q$在分量形式下为

$$\mathrm{d}X_q=\begin{pmatrix}\partial_ux&\partial_vx\\\partial_uy&\partial_vy\\\partial_uz&\partial_vz\end{pmatrix}.$$

该矩阵的两列应线性无关, 即$\partial_uX\wedge\partial_vX\neq0$. 与正则曲线不同, 定义正则曲面时, 以下情况应予排除:



(a) (b)

第一基本形式

记$S:X=X(u,v)$为正则曲面. 根据数学分析之知识, 单位面元

$$\mathrm{d}S=|\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y|=\begin{vmatrix}\partial_x u & \partial_y u\\ \partial_x v & \partial_y v\end{vmatrix}|\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v|$$

其中, 转换矩阵(映射)

$$\frac{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial(u,v)}:=\begin{pmatrix}\partial_u\tilde{u} & \partial_v\tilde{u}\\ \partial_u\tilde{v} & \partial_v\tilde{v}\end{pmatrix}:\mathrm{d}\tilde{u}\wedge\mathrm{d}\tilde{v}\mapsto\mathrm{d}\tilde{u}\wedge\mathrm{d}\tilde{v}.$$

映射定向即对应的行列式值大于零, 反之反向(immersion之行列式值不等于0).

在切向量表示下, 定义内积空间$(T_xS,\langle,\rangle|_{\mathbb{R},T_xS})$, 则单位面元为

$$\mathrm{d}S=|X_u\times X_v|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

其中$E=\langle X_u,X_u\rangle$, $F=\langle X_u,X_v\rangle$, $G=\langle X_v,X_v\rangle$, $X_u\times X_v$正是X_u,X_v生成之Gram矩阵.

在微分几何中, 第一基本形式是三维欧几里得空间中一个曲面的切空间中内积, 由$\mathbb{R}^3$中标准点积诱导. 它使得曲面的曲率和度量性质(比如长度与面积)可与环绕空间一致地计算. 第一基本形式用罗马数字 I 表示: $I(u,v)=\langle u,v\rangle$

就度量性质而言, 线素$(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)|_p$长度之平方为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2=&(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)^T(X_u\times X_v)(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)\\=&E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2.\end{aligned}$$

从而曲线$(u(t),v(t)),\quad t\in(a,b)$之弧长为

$$\int_a^b\sqrt{E(u')^2+2Fu'v'+G(v')^2}\mathrm{d}t.$$

面积则为

$$\iint_D\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

正则曲线的法曲率

同样设正则曲面

$$X : U(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto X(u, v).$$

其中$X_u \wedge X_v \neq 0$. 曲面弯曲程度可通过切平面反映, 或等价地, 单位法向量

$$\vec{n} := \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}.$$

易知$\vec{n}' \perp \vec{n}$.