Fourier分析整理

卷积

相关定义及性质

定义: $f*g(x)\equiv\int f(y)g(x-y)\mathrm{d}y.$

性质(其中$\hat{f}(n):=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)e^{-2\pi iny}\mathrm{d}y$为傅里叶变换)

1. 线性性: $f*(g+h)=f*g+f*h$, $f*(cg)=c(f*g)$.
2. 满足交换律与结合律.
3. 连续性: 若f, g中一者有界可测, 另一者L^1可积, 则$f*g$连续.
4. $\widehat{f*g}(n)=\hat{f}(n)*\hat{g}(n)$.

其中, 第3, 4两点可直接"正测集之和包含开集"一结论. 考虑特征函数之卷积即可.

各类kernel

Dirichlet kernel: $D_N(x):=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{N}e^{inx}=\frac{\sin[(N+\frac{1}{2})x]}{\sin(\frac{x}{2})}$.

- 卷积$D_N(f)(x):=(D_N*f)(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x-y)\frac{\sin[(N+\frac{1}{2})y]}{\sin(\frac{y}{2})}\mathrm{d}y.$
- $D_n(0)=2N+1$可以无歧义地定义.

Poisson kernel: 定义$P_r(x)$为D_N重求之Abel平均之形式, 即$\{e^{inx}\}_{n=-N}^{N}$之Abel平均.

- $\{a_n\}$之Abel和为$\lim_{r\to1^-}\sum_{n\geq0}a_nr^n$. 即函数$\sum_{n\geq0}a_nr^n$于$r=1^-$之左极限.
- $P_r(x):=\sum_{n=-\infty}^{\infty}r^{|n|}e^{inx}=\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}$.
- 卷积$A_r(f)(x):=(f*P_r)(x)$.

Fejér kernel: 定义$F_N(x)$为$\{D_N(x)\}_{N=0}^{N-1}$之Cesàro和. 即

$$F_N(x)=\frac{D_0(x)+\cdots+D_{N-1}(x)}{N}=\cdots=\frac{\sin^2[\frac{N}{2}x]}{N\sin^2\frac{x}{2}}$$

- Cesàro可和则一定有Abel可和. 因为等比数列之下降速度大于等差数列.
- Abel可和则未必有Cesàro可和. 如考虑$a_n=(-1)^nn^2$.

正态分布 kernel: 定义$\mathbb{R}$上正态分布函数列$\{K_\delta\}$, 其中

$$K_\delta:=f(x)=\delta^{-1/2}e^{-\pi x^2/\delta}$$

- 考虑$\mathbb{R}^n$上的正态分布概率密度函数$f(x)=\dfrac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}\exp-\dfrac{|x|^2}{2\sigma^2}$, 自然可得$\mathbb{R}^n$上之好kernel.

S^1上的好kernel$\{K_n\}$满足以下三点性质:

- $\{K_n\}$绝对积分一致有界(蕴含L^1).
- $\{K_n\}$于$[-\pi,\pi]$上平均积分为1.
- $\{K_n\}$于$[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$上之绝对积分趋向零.

因此Dirichlet kernel非好kernel, 因其不满足第一则性质. Poisson kernl为好kernel, 令$r \to 1^-$即可. Fejér kernel为好kernel. 正态分布kernel为好的kernel, 令$\delta \to 0$即可.

收敛性结论

(Carlesson) 对任意$p \in (1, \infty]$, 若$f \in L^p(S^1)$, 则$S_N(f)(x)$几乎处处收敛至$f(x)$.

Prop. f于x_0处Dini导数均有界(即左右导数上下确界有限), 则$S_N(f)(x_0)$当$N \to \infty$时收敛至$f(x_0)$. 考虑

$$S_N(f)(x_0) - f(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x_0-y)-f(x_0)}{y}\cdot\frac{y}{\sin\frac{y}{2}}\cdot\sin\frac{(2N+1)y}{2}\mathrm{d}y$$

即可.

Prop. f在S^1上有可积导数, 则$S_N(f)$几乎一致收敛至f.

- 思路: 考虑$\widehat{(f')}(n) = in\hat{f}(n) = inc_n$, $(\sum_{n\neq 0} c_n)^2 \leq \sum_{n\neq 0} n^{-2}\sum |inc_n|^2$.

Prop. f之连续点于好kernel之作用下一致收敛. f连续则$f * K_n$几乎处处一致收敛至f.

Prop. f之连续点x处若有$\sum |c_n| \leq \infty$, 则$S_N(f)(x) \to f(x)$. f连续则$S_N(f)$几乎处处一致收敛至f.

最佳逼近

定义内积$(f, g) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$与范数$\|f\| = \sqrt{(f, f)}$. 易知$\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$中元素两两正交. 故

$$\|f\|^2 = \|f - S_N(f)\| + \sum_{n\leq N}|c_n|^2$$

因此对任意$\{a_n\}$均有最佳逼近$\|f - S_N(f)\| \leq \|f - \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}c_n\|$.

Parseval恒等式

- 令$n \to \infty$, 则$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$.
- $F \sim \sum a_n e^{inx}$, $G \sim \sum b_n e^{inx}$, 则$(F, G) = \sum a_n \overline{b_n}$.
  - 注意: $(F, G) = \dfrac{\|F+G\|^2 - \|F-G\|^2 + i\|F+iG\|^2 - i\|F-iG\|^2}{4}$.

Bernstein定理

$\forall f \in L^1(S^1)$, 若存在$\alpha \in (0, 1]$, $C > 0$使得$|f(x+h) - f| \leq C|h|^\alpha$恒立. 则称$f$满足Hölder条件.

对$\hat{f}(n)$估计如下:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - f(x+\pi/n)]\mathrm{e}^{-inx}\mathrm{d}x = \frac{C\pi^\alpha}{2|n|^\alpha}\cdot\theta, \quad \theta \in (-1, 1)$$

记$g_h(x) := f(x+h) - f(x-h)$, 则

$$\hat{g_h}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)e^{-inx} - f(x-h)e^{-inx}\mathrm{d}x = (e^{inh} - e^{-inh})\hat{f}(n)$$

由Parseval恒等式得

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g_h(x)|^2\mathrm{d}x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 4|\sin^2(nh)||\hat{f}(n)|^2$$

再由Hölder条件知存在常数$C > 0$使得$|g_h(x)| \leq C(2h)^\alpha$. 因此

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g_h(x)|^2\mathrm{d}x\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}C^2(2h)^{2\alpha}\mathrm{d}x=C^2 2^{2\alpha}h^{2\alpha}$$

即$\sum_{n=-\infty}^{\infty}4|\sin^2(nh)||\hat{f}(n)|^2$有界. 下借此探讨$\sum\hat{f}(n)$之敛散性. 仅需令$h=\frac{\pi}{2^{n+1}}$, 则

$$\frac{1}{2}\sum_{2^{n-1}\le|n|\le 2^n}|\hat{f}(n)|^2\le\sum_{2^{n-1}\le|n|\le 2^n}|\sin^2\frac{n\pi}{2^{n+1}}||\hat{f}(n)|^2\le C^2\pi^{2\alpha}/2^{2\alpha n+2}$$

因而

$$\sum_{2^{n-1}\le|n|\le 2^n}|\hat{f}(n)|\le\sqrt{2^n\cdot\sum_{2^{n-1}\le|n|\le 2^n}|\hat{f}(n)|^2}\le\frac{C\pi^\alpha}{2^{(\alpha-1/2)n+1/2}}$$

故时$\sum|\hat{f}(n)|$收敛. 一般称之Bernstein定理.

Fourier分析应用举隅

Fourier分析与圆盘面积

等周曲线问题

等周曲线面积极值问题: Γ为长度为l之可求长闭曲线, 则Γ于$\mathbb{R}^2$(或$\mathbb{C}$)中围成之面积何如?

不妨设$\gamma(s)=(x(s),y(s))$为闭曲线方程, 其中$s\in[a,b]$, $\gamma(a)=\gamma(b)$, 则有周长公式

$$l=\int_a^b|\gamma'(s)|\mathrm{d}s=\int_a^b\sqrt{x'(s)^2+y'(s)^2}\mathrm{d}s$$

以及面积公式($\omega:=x+iy$)

$$S=\frac{1}{2i}\int_\Gamma\overline{\omega}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2}|\int_a^b x(s)y'(s)-y(s)x'(s)\mathrm{d}s|$$

对γ进行变换$\gamma_0:=\eta\circ\gamma$使得$\gamma_0'(s)\equiv 1$. 不妨设$l=2\pi$, 则

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x'(s)^2+y'(s)^2\mathrm{d}s=1$$

相应的Parseval恒等式为

$$1=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|ina_n|^2+|inb_n|^2,\quad a_n=\hat{x}(n),b_n=\hat{y}(n)$$

面积

$$S=\pi\cdot|\sum_{n=-\infty}^{\infty}n(a_n\overline{b_n}-\overline{a_n}b_n)|\le\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}n(|a_n|^2+|b_n|^2)=\pi$$

取等时$a_n,b_n=1,\forall n\ge 2$. 易验证轨迹为圆.

Koebe 1/4定理

Koebe 1/4定理揭示了单位圆盘$\mathbb{D}$内全纯函数像的大小问题. 设全纯函数$f\in H(\overline{\mathbb{D}})$, 则

$$\{z:|z-f(0)|\le|f'(0)/4|\}\subset f(\mathbb{D})$$

这里$\frac{1}{4}$实为最佳系数. 为便于证明, 下介绍两则定义:

- Schlicht函数: 称$\mathcal{S}$为所有Schlicht函数之集合, 若且仅若对任意$f\in\mathcal{S}$均有
  - $f\in H(\mathbb{D})$，且f在$\mathbb{D}$上为单射(故单叶).
  - $f(0)=0$, 且$f'(0)=1$.
  - 显然$f(z)=z+\sum_{\geq 2}c_n z^n$为$f\in\mathcal{S}$之一般形式.
- Koebe函数: Koebe函数具有一般形式

$$f(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=\sum_{n\geq 1}nz^n$$

  以及旋转所得的广义Koebe函数

$$f_\alpha(z)=\frac{z}{(1-\alpha z)^2},\quad |\alpha|=1$$

下给出一系列定理及简要证明, 逐步推得Koebe quarter定理:

(Grönwall) 若函数$g(z)=z+\sum_{n\geq 0}b_n z^{-n}$在单位圆盘外单叶, 则

$$\sum_{n\geq 1}n|b_n|^2\leq 1$$

取等当且仅当$\mathbb{C}\setminus g(\mathbb{D})$零测.

证明: 对$r>1$, 取围道$C_r:=\{g(z):|z|=r\}$, 取E_r为C_r所围的紧集, 其面积

$$\begin{aligned}A=\int_{E_r}\mathrm{d}A=\frac{1}{2i}\int_{C_r}\overline{\omega}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2i}\int_{C_r}(\overline{g}\cdot g')(z)\mathrm{d}z\\
=&\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(re^{-i\theta}+\sum_{n\geq 0}\overline{b_n}r^{-n}e^{in\theta}\right)\cdot\left(1-\sum_{m\geq 0}mb_m r^{-m-1}e^{-i(m+1)\theta}\right)re^{i\theta}\mathrm{d}\theta\\
=&\pi\left(r^2-\sum_{n\geq 1}n|b_n|^2r^{-2n}\right)\quad(\text{显然有界})\\
\xrightarrow{r\to 1^+}&\pi\left(1-\sum_{n\geq 1}n|b_n|^2\right)\end{aligned}$$

注意到$|b_1|\leq\sum_{n\geq 1}n|b_n|^2\leq 1$，$|b_1|=1$时有$g(z)=z+b_0+\dfrac{b_1}{z}$形式.

(Bieberbach) 若函数$f(z)=z+\sum_{n\geq 2}a_n z^n$在$\mathbb{D}$内单叶(即$f\in\mathcal{S}$), 则$|a_2|\leq 2$若且仅若$f$为Koebe函数.

证明: 下构造平方根变换(取平方根多值之其一叶即可)

$$g(z)=\frac{1}{f(z^{-2})^{-1/2}}=z-\frac{a_2}{2}\cdot\frac{1}{z}+\cdots$$

取等时$g(z)=z-\dfrac{\alpha}{z}$, 这里$|\alpha|=1$. 回推得$f(w)=\dfrac{z}{(1-\alpha z)^2}=f_\alpha(w)$为Koebe旋转函数.

下证明甚是奇妙的Koebe 1/4定理. 证明前, 为阐释Schlicht函数集$\mathcal{S}$与其特殊元素Koebe函数之关系, 我们先将$\mathcal{S}$改述至等价形式.

> (Koebe) 设全纯函数$f\in\mathcal{S}$, 则$f(\mathbb{D})$包含一半径为$1/4$之圆盘. 这里$\dfrac{1}{4}$实为最佳系数.

证明: 取$f(z)=z+\sum_{n\geq 2}a_n z^n$. 由于$f(\mathbb{D})$非全空间, 故任意取$\omega\in\mathbb{C}\setminus f(\mathbb{D})$. 考虑单叶映射

$$h_\omega(z)=\frac{\omega f(z)}{\omega-f(z)}=z+(a_2+\omega^{-1})z^2+\cdots$$

- 称$h_\omega(z)$单叶是因为$\dfrac{1}{h_\omega(z)}=\dfrac{1}{f(z)}-\dfrac{1}{\omega}$.

根据Bieberbach定理, $|\omega^{-1}| \leq |a_2| + |a_2 + \omega^{-1}| \leq 2+2$, 故$|\omega| \geq 4$. 由于$\omega \in \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{D})$选取之任意性, $f(\mathbb{D})$包含半径为$1/4$之圆盘. 其中，$1/4$为最优系数(考虑Koebe函数).

平均分布

Weyl平均定理

对$x \in \mathbb{R}$, 记$[x]$为等价类$x+\mathbb{Z}$. 若$x \neq \mathbb{Q}$, 记$\{x\} := \inf_{n\in\mathbb{Z}} |x-n|$. Weyl平均定理阐明了

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\{n \in 1,2,\cdots,N : \{nx\} \in (a,b)}{N} = (a,b)$$

即x生成之空间于$\mathbb{Z}$模下均匀.

证明: 定义$\chi_{(a,b)}(x)$为特征函数, 则$\forall f = e^{inx} \in \{e^{inx}\}$都有

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(nk) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} e^{2\pi ikn} = 0$$

对任意1周期的连续函数f, 存在三角多项式P使得$\|P-f\| < \varepsilon/3$. 因此

$$|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(nk) - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x| \leq \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} |f(nk)-P(nk)| + |\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} P(nk) - \int_0^1 P(x)\mathrm{d}x| + \|P-f\| \leq \varepsilon$$

考虑$\chi_{(a,b)}(x)$可被"好"的连续函数$\underline{f}_k(x)$与$\overline{f}_k(x)$上下逼近, 所谓"好"即$\{\underline{f}_k(x)\}$与$\{\overline{f}_k(x)\}$一致趋向$\chi_{(a,b)}(x)$. 因此

$$\|\underline{f}_m\| - \varepsilon(k) \leq \frac{\sum_{k=1}^N \underline{f}_m(nk)}{N} \leq \frac{\sum_{k=1}^N \chi_{(a,b)}(nk)}{N} \leq \frac{\sum_{k=1}^N \overline{f}_m(nk)}{N} \leq \|\overline{f}_m\| + \varepsilon(k)$$

令$\varepsilon(k) \xrightarrow{k\to\infty} 0$即可.

Weyl平均定理亦有等价形式. $x \neq \mathbb{Q}$等价于对任意$d \in \mathbb{Z}$都有$\lim_{N\to\infty} \dfrac{1}{N} \sum e^{2\pi idx} = 0$.

平均分布数列

此书业已记载了众多平均分布数列相关理论, 本节姑陈列若干有趣的结论. 既证明$\{[nx]\}$平均分布若$x \in \mathbb{Q}^c$, 下举出其他例子及反例.

Prop. $\{[\log p_n]\}$非平均分布, 其中p_n为第n个素数.

证明: 记$N_k := \inf_n\{p_n > e^k\}$, $M_k := \inf_n\{p_n > e^{k-1/2}\}$. 简记$\chi(x) := \chi_{[0,1/2)}(x)$. 显然

$$\sum_{n<M_k} \chi(\log p_n) = \sum_{n<N_k} \chi(\log p_n) := C_k$$

若$\{[\log p_n]\}$均匀分布, 则$\dfrac{C_k}{M_k}$与$\dfrac{C_k}{N_k}$之极限相同(为$1/2$). 而根据素数定理$p_n \sim n\log n$则有

$$(k-1/2)e^k \cdot e^{-1/2} \sim M_k \sim N_k \sim e^k k$$

矛盾! 实际上

$$\frac{\sum_{n\leq M_k} \chi \log p_n}{M_k} \geq \frac{\#\{p_n : k-1 \leq \log p_n < k-1/2\}}{M_k} = \frac{\pi(e^{k-1/2}) - \pi(e^{k-1})}{M_k} \geq 1-e^{-1/2}$$

(Fejér) 若$f(t)$为二次可导的实值函数且前两阶导数均保号, 若$\lim_{t\to\infty} tf'(t) = \infty$且$\lim_{\infty} t \to \dfrac{w(t)}{t} = 0$, 则$\{[f(n)]\}$均匀分布. 例如$\{[\sqrt{n}]\}$均匀分布(考虑随机漫步模型则甚是显然).

一类显然而难以快速明察之反例为对偶根式之次方, 如$\{[(\sqrt{2}+1)^n]\}$显然非均匀分布, 留意$(\sqrt{2}-1)^n \to 0$即可.

若干open questions

1. 求$\{[\alpha^n]\}$均匀分布之充要条件.
2. 若α为无理数, 求$\lim\inf_n [n\alpha]$之收敛阶.
3. (Littlewood猜想) $\lim\inf_n [n\alpha][n\beta]=0$对任意$(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$均成立.
    - (Borel) 不符合之(α,β)至多零测.
    - (Adamczewski & Bugeaud, 2010.)对任意$\alpha\in\mathbb{R}$均可构造相应之β使得$\lim\inf_n [n\alpha][n\beta]=0$.

Fourier变换

Schwartz空间简介

考虑Fourier变换时, 为保证诸$f^{(n)}$之可积性, 自然想到定义Schwartz空间

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \{f : \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^k |f^l(x)| < \infty, \forall (k,l)\in\mathbb{N}\}$$

称$\mathcal{S}(\mathbb{R})$上之函数为速降函数, 例如$f(x)=e^{-x^2}\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$. 任意有限多项式与速降函数之积仍速降.

对于复值域函数之$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$空间有类似定义. 特别地, 全体具有紧支撑集之复值域函数$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$构成$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$之子空间.

- 实际上, $\mathcal{S}$乃$\mathcal{D}$之完备化.

鉴于f与$\hat{f}$之转换及$\mathcal{S}$上的内积空间, 应自然想到构造$\mathcal{S}$至$\mathcal{C}$上之连续线性泛函空间$\mathcal{S}'$. 可参见内积以定义运算.

- $\mathcal{D}\subset\mathcal{S}$即$\mathcal{S}'\subset\mathcal{D}'$.
- 任意$T_\varphi\in L^1_{\text{loc}}$均对应泛函$\langle T_\varphi,\cdot\rangle : \mathcal{S}\to\mathbb{C}, f\mapsto\langle\varphi,f\rangle$.
- $T_k\to T$, 若且仅若对任意$f\in\mathcal{S}(\text{ or }\mathcal{D})$均有$\langle T_k,f\rangle\to\langle T,f\rangle$.
- 对多重指标α均有$\langle\partial^\alpha T,\phi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T,\partial^\alpha\phi\rangle$.
- 若光滑函数f及其任意(对应某一多重指标)偏导数均能限制于有限个多项式内, 则$f\phi\in\mathcal{S}$若且仅若$\phi\in\mathcal{S}$.

$$\langle fT,\phi\rangle = \langle T,f\phi\rangle$$

$\mathbb{R}^n$上的Fourier变换

- $\hat{f}(\xi)=\int f(x)e^{-2\pi i\xi x}\mathrm{d}x = (2\pi)^{-n/2}\int f(x)e^{-i\xi x}\mathrm{d}x$. ($\xi x$视作$\xi\cdot x$).
    - 对标准正态分布$f(x)=\dfrac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}\exp-\dfrac{|x|^2}{2\sigma^2}$有
    $$\hat{f}(\xi)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\exp-\frac{-\sigma^2|\xi|^2}{2}$$
    - Fourier变换一者作$\hat{f}(\xi)=(2\pi)^{-n}\int f(x)e^{-i\xi x}\mathrm{d}x$, 在此不采用该种记法.
- Fourier变换$\mathcal{F}:\mathcal{S}\to\mathcal{S}, f\mapsto\hat{f}$为$\mathcal{S}$上的连续双射. 其逆变换为

$$f(\xi)=\int\hat{f}(x)e^{2\pi i\xi x}\mathrm{d}x = (2\pi)^{-n/2}\int\hat{f}(x)e^{i\xi x}\mathrm{d}x$$

- Fourier变换表格:

$F\in\mathcal{S}$	$\mathcal{F}(F)$
$f(x+h)$	$\hat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi h}$
$f(x)e^{-2\pi ixh}$	$\hat{f}(\xi+h)$
$f(cx)$	$c^{-n}\hat{f}(c^{-1}x)$
$\partial^\alpha f$	$(2\pi i\xi)^\alpha\hat{f}(\xi)$
$(-2\pi ix)^\alpha f(x)$	$\partial^\alpha\hat{f}(\xi)$
$f(Ax),\det A\neq 0$	$(\det A)^{-1}\hat{f}({}^tA^{-1}\xi)$
$f*g$	$\hat{f}\hat{g}$

- 因此有如下恒等式:
  - $\langle f,g\rangle=\left\langle\hat{f},\hat{g}\right\rangle$. 特别地, $\langle f,f\rangle=\left\langle\hat{f},\hat{f}\right\rangle$.
  - $\left\langle\hat{\delta},f\right\rangle=\left\langle\delta,\hat{f}\right\rangle=\hat{f}(0)=\langle f,f\rangle=\langle(2\pi)^{-n},\phi\rangle$.
- 对$T\in\mathcal{S}'$有类似结论. 一是因为$\mathcal{S}'$可通过内积空间对应至$\mathcal{S}$, 二是因为有如下的一类方法

$$\left\langle\widehat{\partial^\alpha T},f\right\rangle=\left\langle\partial^\alpha T,\hat{f}\right\rangle=(-1)^{|\alpha|}\left\langle T,\partial^\alpha\hat{f}\right\rangle$$
$$=(-1)^{|\alpha|}\left\langle T,\widehat{(-2\pi i\xi)^\alpha f}\right\rangle=\left\langle T,\widehat{(2\pi i\xi)^\alpha f}\right\rangle=\left\langle(2\pi i\xi)^\alpha T,\hat{f}\right\rangle$$

$L^p(\mathbb{R}^n)$上的Fourier变换

$L^2(\mathbb{R}^n)$上的Fourier变换可通过内积自然定义. 因此$\mathcal{F}:L^2\to L^2$为双射. 此外有$\mathcal{F}:L^1\to L^\infty$(非双射, 考虑$\mathcal{F}:1\mapsto\delta$). 对一般$L^p$空间上的Fourier变换之定义需借助Riesz-Thorin插值公式.

(Riesz-Thorin) 设$1\leq p_0,p_1,q_0,q_1\leq\infty$, Ω为可测空间. 若存在线性映射T满足

- $T:L^{p_0}(\Omega)\to L^{q_0}(\Omega),L^{p_1}(\Omega)\to L^{q_1}(\Omega)$.
- T有界, 即存在M_0与M_1使得$\|Tf\|_{q_0}\leq M_0\|f\|_{p_0}$, $\|Tf\|_{q_1}\leq M_1\|f\|_{p_1}$.

则对任意$\theta\in[0,1]$, 取$\dfrac{1}{p}=\dfrac{\theta}{p_0}+\dfrac{1-\theta}{p_1}$, $\dfrac{1}{q}=\dfrac{\theta}{q_0}+\dfrac{1-\theta}{q_1}$均有

- $T:L^p(\Omega)\to L^q(\Omega)$.
- $\|Tf\|_q\leq M_0^\theta M_1^{1-\theta}\|f\|_p$.

证明: 先考虑Hadamard三线/圆定理, 即对在$\Re(z)\in(a,b)$上全纯, 边界上连续有界之函数$f(z)$, $M(x):=\sup_y|f(x+iy)|$在$x\in(a,b)$时为对数凸函数, 即$\forall t\in(0,1)$都有

$$M(t(x_1)+(1-t)x_2)\leq M^t(x_1)M^{1-t}(x_2)$$

将带区域仿射至圆环上, 利用极大模原理即可证明之.

考虑$T:(\Omega,\mu)\to(\Omega'\mu')$. $\|Tf\|_q:=\sup_{\|g\|_p\leq 1}\int Tfg\mathrm{d}\mu'$. 由于$L^p(\Omega)$上的简单函数均稠密, 考虑

$$f=\sum_{j=1}^n a_j\chi_{E_j}=\sum_{j=1}^n|a_j|e^{i\theta_j}\chi_{E_j},\quad E_i\cap E_j=\emptyset\text{ whenever }i\neq j.$$

同样令

$$g=\sum_{k=1}^{m}b_k\chi_{F_k}=\sum_{k=1}^{m}|b_k|e^{i\varphi_k}\chi_{E_k},\quad E_i\cap E_j=\emptyset\text{ whenever }i\neq j.$$

记$\alpha(z)=\dfrac{1-z}{p_0}+\dfrac{z}{p_1}$, $\beta(z)=\dfrac{1-z}{q_0}+\dfrac{z}{q_1}$. 对固定的$t\in(0,1)$, 令

$$f_z=\sum_{j=1}^{n}|a_j|^{\alpha(z)/\alpha(t)}e^{i\theta_j}\chi_{E_j},\quad g_z=\sum_{k=1}^{m}|b_k|^{(1-\beta(z))/(1-\beta(t))}e^{i\varphi_k}\chi_{E_k}$$

则有$\Phi(z):=\int Tf_zg_z\mathrm{d}\mu'$全纯(可验证). 不难证明Riesz-Thorin定理(篇幅故从略).

取$(p_0,p_1,q_0,q_1)=(1,2,\infty,2)$, 则$\mathcal{F}:L^p(\Omega)\to L^{p^*}(\Omega)$, 其中$p^*=(1-p^{-1})^{-1}$为共轭指标.

Pólya随机漫步问题

设质点于$\mathbb{R}^d$的整点上的运动, 每步可往n个维度($2n$个方向)移动一格. 记随机变量S_n为第n步运动, $W_n:=S_1+\cdots+S_n$可等同为n步后的坐标.

(Pólya) d维随机漫步模型中有如下结论:

- $d=1,2$时, $P(W_n=0\text{ infinitely often})=1$, 即
  - $P(\liminf_{n\to\infty}|W_n|=0)=1$, 醉鬼总能回到家.
- 对$d\geq 3$, $P(\lim_{n\to\infty}|W_n|=\infty)=1$.

定义$\Phi_n(x):=e^{2\pi iW_nx}=\prod_{k=1}^{n}e^{2\pi iS_kx}$, 则

$$\begin{aligned}E\Phi_n(x)&=\sum_{l}P(W_n=l)e^{2\pi ilx}=\sum_{S_1}\cdots\sum_{S_n}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{2\pi iS_kx}}{2d}\\&=\left(\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n}\cos(2\pi x_k)\right)^n\end{aligned}$$

记$\phi_d(x)=\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n}\cos(2\pi x_k)$. 因此

$$P(W_n=l)=\widehat{E\Phi}(l)=\widehat{\phi_d^n}(l)=\int_{[0,1]^d}e^{-2\pi ilx}\phi_d^n(x)\mathrm{d}x$$

特别地, 质点回到原点数量之期望为

$$\sum_{n=0}^{\infty}P(W_n=0)=\int_{[0,1]^d}\sum_{n=0}^{\infty}\phi_d^n(x)\mathrm{d}x=\int_{[0,1]^d}\frac{\mathrm{d}x}{1-\phi_d(x)}$$

注意到$d=1,2$时发散, $d\geq 3$时收敛. 明所欲证.

Abel群上的Fourier分析

抽象代数基础

挠子群

定义挠子群$t(H):=\{h\in H:h^n=1\text{ for some }n\in\mathbb{Z}\}$. 一般置$H$为无限群, 因为有限群之挠子群一定平凡.

> 读者另可参阅环论中"小根"之概念.
>
> 定义根理想$\sqrt{I}:\{x:x^n\in I(\exists n\in\mathbb{N}^+)\}$, 易知$\sqrt{I}$为一切包含$I$的素理想之交. 小根($\sqrt{0}$)即零理想之根理想, 系一切素理想之交. 同时可见小根即环中所有幂零元素之集合.
>
> 小根之于交换代数学应用广泛. 例如通过小根确定一般含幺交换环上的多项式环中的单位是显然的, 即

> $$U(R[x])=\{a_0+\sum_{i=1}^m a_ix^i: a_0\in U(R), a_i \text{ 均幂零}\}$$

复数乘法群之挠子群即

$$\Omega:=t(\mathbb{C}^*)=\cup_{n=1}^\infty C_n,\quad C_n:=\left\langle e^{2\pi i/n}\right\rangle$$

由同态$\pi:\mathbb{Q}\to\Omega, q\mapsto e^{2\pi iq}$知$\Omega\cong\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

对偶群

对任意群G与Abel群A, 记$\operatorname{Hom}(G,A)$为G至A的所有同态(显然$\operatorname{Hom}(G,A)$一定非空). 定义$\operatorname{Hom}(G,A)$中的二元运算(乘法)

$$\cdot:\operatorname{Hom}(G,A)\times\operatorname{Hom}(G,A)\to\operatorname{Hom}(G,A),(f_1,f_2)\mapsto f_1f_2$$

其中

$$f_1f_2:G\to A, g\mapsto f_1(g)f_2(g)$$

显然$(\operatorname{Hom}(G,A),\cdot)$为Abel群.

下先着手特殊情形. 若$A=\Omega$, G为Abel群, 则可定义对偶群$\hat{G}:=\operatorname{Hom}(G,\Omega)$. 取$\alpha\in\operatorname{Hom}(G,H)$为Abel群$G$, H之同态, 则自然有对偶映射$\hat{\alpha}\in\operatorname{Hom}(\hat{H},\hat{G})$满足

$$\hat{\alpha}:\hat{H}\to\hat{G}, f\mapsto\hat{\alpha}(f)=f\circ\alpha$$

显然$\hat{\hat{\alpha}}$与α, $\hat{\hat{G}}$与G可自然地等同起来, 因为对$g\in G$与$f\in\hat{G}$可构造同构

$$\pi_G:G\xrightarrow{\sim}\hat{\hat{G}}, g\mapsto f^g;\quad f^g:\hat{G}\to G,\alpha\mapsto\alpha(g)$$

因此$\pi_G(g)(f)=f^g(f)=f(g)$.

$L(G)$上的内积空间

取$f_a,f_b\in\hat{G}$, 定义内积

$$\langle f_a,f_b\rangle:=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}f_a(g)\overline{f_b(g)}$$

内积具有正交性, 即对$h\neq g$均有$\langle f_g,f_h\rangle=0$. 证明如下:

取任意$x\in G$均有

$$\begin{aligned}|G|f_g(x)\langle f_g,f_h\rangle&=\sum_{y\in G}f_g(x)f_g(y)\overline{f_h(y)}=\sum_{y\in G}f_g(xy)\overline{f_h(xy)}\overline{f_h(x^{-1})}\\&=\overline{f_h(x^{-1})}\langle f_g,f_h\rangle=|G|f_h(x)\langle f_g,f_h\rangle\end{aligned}$$

由于f_g与f_h不恒等, 故$\langle f_g,f_h\rangle=0$.

卷积

$$f_1*f_2(g)=\sum_{h\in G}f_1(gh^{-1})\overline{f_2(h)}$$

再定义$\delta_g(h)=1$当且仅当$g=h$; 反之$\delta_g(h)=0$. δ函数具有如下性质

- $\langle f,\delta_g\rangle=f(g)$, 由此推出分解$f=\sum_{g\in G}f(g)\delta_g$
- $f*\delta_g(x)=f(xg^{-1})=f(x)\overline{f(g)}$. 特别地, $\delta_g*\delta_h=\delta_{gh}$.
- 卷积适应结合律. 注意$f_1*f_2*f_3(x)=\sum_{(g,h)\in G^2}f_1(xh^{-1}g^{-1})f_2(g)f_3(h)$即可.

- 卷积适应交换律(是自然的)
  $f_1 * f_2(x) = \sum_{g\in G} f_1(xg^{-1})f_2(g) = \sum_{g\in G} f_1(xg^{-1})f_2(x(xg^{-1})^{-1}) = f_2 * f_1(x)$.

特征标(以循环群为例)

对有限循环群$(\mathbb{Z}_n,+)$而言, 定义乘法$[j][k]=[jk]$(易验证良定义). 赋予环$(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$至$S^1\subset\mathbb{C}$上的自然同态

$$\mathbb{Z}_n \to S^1, [j] \mapsto e^{2\pi i(j+nk)/n} = e^{2\pi ij/n}$$

由于e^{it}之周期性内蕴商运算, 以下将等同$e^{2\pi i[j]}$与$e^{2\pi ij}$. 同时可定义加法$([j]+[k])\mapsto e^{2\pi i(j+k)}$及乘法$([j][k])\mapsto e^{2\pi i(jk)}$. 若将乘法二元运算之其中一元固定, 限定而得的单变量函数为循环群之特征标.

> Remark: 此节暂未从表示论之观点详述特征标之定义, 故妄假借特征标之正式名称.

于群$G=\mathbb{Z}_n$上定义$\chi_k([m])=e^{2\pi ikm/n}$. 自然$\chi_k\in\hat{G}$. 内积

$$\langle\chi_l,\chi_m\rangle = \frac{1}{|n|}\sum_{t=1}^{n} e^{2\pi ilt/n}e^{-2\pi imt/n} = \begin{cases}1 & l=m,\\ 0 & l\neq m.\end{cases}$$

既验证$\{\chi_k\}$之正交性, 且$\|\chi_k\|=\sqrt{\langle\chi_k,\chi_k\rangle}=1$. 因此任意对$f\in\hat{G}$均有正交分解$f=\sum_{t=1}^{n}\langle f,\chi_t\rangle\chi_t$.

Abel群上的Fourier变换

$$\hat{f}(\chi) = \sum_{g\in G} f(g)\overline{\chi(g)}$$

考虑正交分解即得其逆变换

$$f = \sum_{\chi\in\hat{G}}\langle f,\chi\rangle\chi = \frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in\hat{G}}|G|\langle f,\chi\rangle\chi = \frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in\hat{G}}\hat{f}(\chi)\chi$$

以及Parseval恒等式$\langle f,g\rangle = \left\langle \hat{f},\hat{g}\right\rangle$, $\|f\|=\|\hat{f}\|$.

对偶同构定理

由分析学可知有限Abel群与其对偶群同构($\mathcal{F}:G\to\hat{G}$建立了L^2空间至L^2像空间之间的双射). 从代数角度言之, 对任意有限Abel群G均有$G\cong\hat{G}$, 其中一类同构方式为$(G,\cdot)\cong(\hat{G},*)$(从而可通过自同构群找到所有同构).

证明: 若G为循环群, 考虑对应$g\to\chi_g$知存在G至$\hat{G}$之单同态. 而由$|G|\le|\hat{G}|\le|\hat{\hat{G}}|=|G|$知$G\cong\hat{G}$. 其中

$$\varphi: G\to\hat{G}, g\mapsto\chi_g$$

为同构方式之一. 通过$\mathrm{Aut}(G)$可知所有G至$\hat{G}$之同构.

若G为一般的有限Abel群, 则存在$(k_1,\cdots,k_n)$使得$G\cong\oplus_{i=1}^{n}\mathbb{Z}_{k_n}$. 由是观之, 任意$g\in G$均能唯一地表示为$(g_1,g_2,\cdots,g_n)$. 易检验映射

$$(\chi_{g_1},\cdots,\chi_{g_n}): G\to G, x=(x_1,\cdots,x_n)\mapsto\prod_{t=1}^{n}\chi_{g_t}(x_t)$$

为同态. 从而

$$\varphi: G\to\hat{G}, g=(g_1,\cdots,g_n)\mapsto(\chi_{g_1},\cdots,\chi_{g_n})$$

为同态(进而仿照$n=1$之情形可论证φ是同构).

> 应注意, 对$|G|$之限定不可或缺; 不然, 置$G=\{z:|z|=1\}$, 则$\hat{G}=\mathrm{Hom}(G,\Omega)$至多可数, 与$|G|$不可数矛盾.

Dirichlet问题

素数无穷定理

素数无穷定理有若干初等证法, 其基本方式可归结为反证有限因子组合之有限性. 下分别给出其代数, 拓扑, 分析角度的阐释.

素数无穷定理的代数阐释

反设素数集$\mathbb{P}$有穷, 记所有元素乘积为P, 其Jacobson根$\cap_{p\in\mathbb{P}}(p\mathbb{Z})=P\mathbb{Z}\neq\{0\}$. 注意到Jacobson根同为一切零因子之交, 矛盾.

素数无穷定理之拓扑阐释

定义$\mathbb{Z}$上的开集由一切$N_{a,b}:=\{ak+b:k\in\mathbb{Z}\}$生成, 其中$a,b\in\mathbb{Z}$. 因此任一开集所含元素之个数或无穷或为0. 注意到$N_{a,b}$同为开集与闭集, 则当素数有限时

$$\mathbb{Z}\setminus\{\pm 1\}=\cup_{p\in\mathbb{P}}N_{p,0}$$

同为开集与闭集, 即$\{\pm1\}$同为开集与闭集, 显然矛盾!

素数无穷定理之分析阐释

由无穷级数正项级数之收敛性定义$\zeta>1$时的Riemann-ζ函数

$$\zeta(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}=\prod_{p\in\mathbb{P}}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{p^k}=\prod_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{1-p^{-s}}$$

其中亦应用了$\mathbb{N}$上的唯一因子分解定理. 若素数有限, 则右式于$s\to 1$时有界, 矛盾.

Dirichlet特征

Dirichlet问题可视作对素数无穷定理之延拓, 其旨在研究$\mathbb{Z}$上的非零开集$N_{a,b}:=\{ak+b:k\in\mathbb{Z}\}$是否包含了无穷素数. 其等价命题为

$$\sum_{p\in\mathbb{P},p\equiv l\mod q}\frac{1}{p}=\infty\quad\forall l,q\in\mathbb{N}$$

对任一给定的l与q, 定义函数

$$\chi_k(m)=\begin{cases}e^{2\pi ikm/q} & \gcd(p,q)=1,\\ 0 & \text{else.}\end{cases}$$

其中$\chi(m)$于$\mathbb{Z}_q^*$上依对偶群定义, χ向$\mathbb{Z}$上的延拓是自然的. 定义特征函数

$$\delta_l(m)=\begin{cases}1 & m\equiv l\mod q,\\ 0 & \text{else.}\end{cases}$$

因此有Fourier变换

$$\delta_l=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_k\hat{\chi}_k(\delta_l)\chi_k=\frac{1}{\varphi(q)}\sum_k\overline{\chi_k(l)}\chi_k$$

故

$$
\begin{aligned}
\sum_{p\in\mathbb{P}, p\equiv l \mod q} \frac{1}{p^s} &= \sum_p \frac{\delta_l(p)}{p} \\
&= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_k \overline{\chi_k(l)} \sum_p \frac{\chi_k(p)}{p^s} \\
&= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_p \frac{\chi_0(p)}{p^s} + \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{k\neq 0} \overline{\chi_k(l)} \sum_p \frac{\chi_k(p)}{p^s}
\end{aligned}
$$

其中χ_0为零同态, 且

$$
\frac{1}{\varphi(q)} \sum_p \frac{\chi_0(p)}{p^s} = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{p\nmid q} \frac{1}{p^s}
$$

下仅需证明$\displaystyle\sum_p \frac{\chi(p)}{p^s}$于非平凡$\chi$下之收敛性.

由于$\chi(n) = \chi(\prod_{k=1}^m p_k^{j_k}) = \prod_{k=1}^m \chi^{j_k}(p_k)\chi$为同态. 可仿照上文对Riemann ζ函数之定义, 定义$s > 1$时Dirichlet的特征函数

$$
L(s,\chi) := \prod_p (1-\chi(p)p^{-s})^{-1} = \sum_{n\geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}
$$

由A-D判别法知$L(1,\chi)$收敛($\chi \neq \chi_0$).

取对数则有

$$
\log L(s,\chi) = -\sum_p \log(1-\chi(p)p^{-s})^{-1}
$$

$$
= \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi^m(p)}{m} p^{-ms} = \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} + O(1)
$$

因此$\displaystyle\sum_p \frac{\chi(p)}{p^s}$在$\chi \neq \chi_0$下于$s = 1$处收敛. 从而$N_{q,l}$素数之有穷性与$\mathbb{Z}$中素数之有穷性等价. Dirichlet问题得证.

以上证明亦表明$\dfrac{1}{\varphi(q)}$为素数分布密度, 即

$$
P(p \equiv l \mod q \mid p \in \mathbb{P}) = \frac{1}{\varphi(q)}
$$

Dirichlet的特征函数可解析延拓至全复平面上, 同时亦有相应的广义Riemann猜想. 读者可参见冯克勤所著的*代数数论*一书.

非Abel群之表示

记(ρ, V)为群G之表示, 其中$\rho: G \to GL(V)$为同态, V为$\mathbb{C}$上有限维向量空间. $d_\rho = \dim V$为维度. 自然可将ρ定义为G中元素所对应之置换的矩阵表示, 即左正则表示. 如S_3之左正则表示中, $d_\rho = 3$. 若视S_3为D_3, 则

$$
D_3 = \langle a, b : a^3 = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle
$$

可如是定义ρ:

$$
\rho: S_3 \to GL(2,\mathbb{C}), a \mapsto \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} \\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}, b \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
$$

由于S_3非Abel, 故d_ρ至少为2. 此类将d_ρ降至最低的表示称为不可约表示.

类似线性代数之思想, 群表示论需对一类表示进行空间分解与等价划分等操作. 故下有一系列概念.

称(π, W)为(ρ, V)的子表示, 若且仅若$W \subset V$, π是ρ作用于W上之限制, 例如零表示$(\pi_0, \{0\})$为任意表示之子表示. 表示亦有直和, 若(ρ, V), (π, W)均为G之表示, 且$\phi : G \to GL(V \oplus W)$, 则$\phi(v, w) = (\rho(v), \pi(w))$. 显然, 任意有限群均为若干不可约表示之直和.

称表示(π, W)与(ρ, V)相绕, 若存在线性映射$L \in \mathrm{Hom}(V, W)$使得$L\rho(g) \equiv \pi(g)L$对任意$g \in G$均成立. 例如S_3之左正则表示与不可约表示相绕. 若L为同构, 则上述两表示相似, 即$\rho(g) = L^{-1}\pi(g)L$. 同一群的不可约表示似然和而不同, 实际上, 以下引理说明所有相绕不可约表示彼此相似, 并可由此进行等价划分.

(Schur 正交性引理) 相绕的不可约表示(π, W)与(ρ, V)相似, 即诸相扰算子L或平凡, 或可逆(同构).

证明: 考虑$L \in \mathrm{Hom}(V, W)$使得$L\rho(g) \equiv \pi(g)L$对任意$g \in G$均成立. 若L非平凡, 则$\forall x \in \ker L$均有

$$L(\rho(g)x) = \pi(g)L(x) = 0$$

因此$\rho(g) \ker L \subset \ker L$, 即表示$(\pi, W)$于$\ker L$中限制为$\pi$之子表示. 因此$\dim \ker L = 0$.