复变函数基础知识 (中)

留数定理

Def. 亚纯函数 f 在 z_0 处的留数即 f 在 z_0 处 Laurant 展开的 z^{-1} 项系数.

Example. 对 n 阶简单奇点 z_0, 留数为 $\dfrac{1}{(n-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)]$.

Example. 若奇点 z_0 处 $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$ 存在, 则 z_0 为一阶奇点, 极限为留数.

Thm. (留数定理) 若 U 为开区域, $\gamma\subset U$ 为分段可微曲线. 取 z_0 为 γ 围成区域内部的一点, 则任意 $f\in\mathrm{Mer}(U)\cap\mathrm{Hol}(U\setminus\{z_0\})$ 在 z_0 处留数为

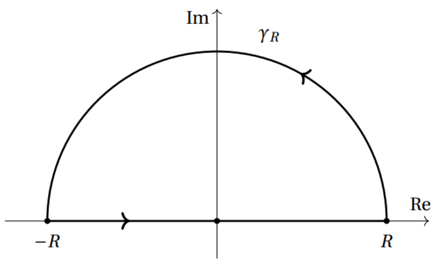
$$I(\gamma,z_0)^{-1}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)\mathrm{d}z$$

Def. $\mathbb{H}$ 为上半平面 $\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}(z)\geq 0\}$.

Example. $f\in\mathrm{Hol}(\mathbb{H})$, 且 $\lim_{z\to\infty}zf(z)=0$, 则 f 在 $\mathbb{H}$ 上的留数和等于

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}f(x)\mathrm{d}x.$$

Proof. 由于 $\lim_{z\to\infty}zf(z)=0$, 故 $f(1/z)/z$ 在 $z\to 0$ 时有可去奇点, 从而存在 $R_0>0$ 使得 $f(z)$ 在 $|z|>R_0$ 时无奇点. 取下图所示的围道



显然 $\oint_\gamma f(z)\mathrm{d}z$ 在 $R>R_0$ 时不变, 而 $R\to\infty$ 时有

$$\int_{\gamma_R}f=\int_0^\pi f(Re^{i\theta})Rie^{i\theta}\mathrm{d}\theta\to 0.$$

从而 f 在 $\mathbb{H}$ 上的留数和等于 $\int_{\mathbb{R}}f$.

□

Example. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 时,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{x^{2n}+1} = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \prod_{1 \leq m \leq 2n, m \neq k} \frac{1}{e^{2\pi k/n} - e^{2\pi m/n}}.$$

Theorem. (Jordan) f 在 $\mathbb{H}$ 连续. 若 $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ 时, 则

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} e^{i\alpha z} f(z)\mathrm{d}z = 0, \quad \forall \alpha > 0.$$

其中 γ_R 取法同上例.

Proof. 此处要求 f 连续即可, 从而是简单的数学分析内容.

□

Col. $f \in \mathrm{Mer}(\mathbb{H})$, $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$, 则对任意 $\alpha > 0$, f 在 $\mathbb{H}$ 上留数和为

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} e^{i\alpha x} f(x)\mathrm{d}x.$$

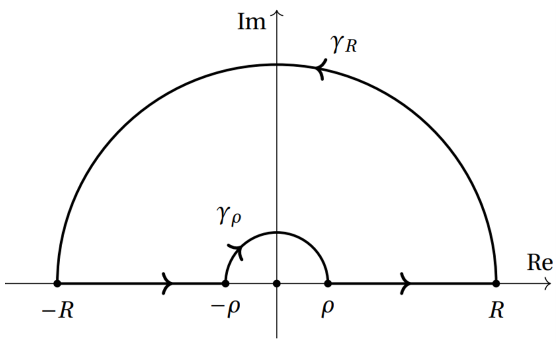
Example. 对任意 $\alpha > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left[2\pi i \cdot \frac{e^{i\alpha\cdot z_0}}{z_0 + i}\right]_{z_0 = i} = \pi \cdot e^{-\alpha}.$$

Lemma. 在简单奇点的小邻域内, 绕奇点 θ 度的积分值近似为留数的 $i\theta$ 倍.

Example. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4}.$

Proof. 取如下围道, $\rho \ll 1$, $R \gg 1$.



- $\int_{\gamma_R} f \to 0$.
- $\int_{\gamma_\rho} \to 0$, 因为 $\lim_{r\to 0} r \ln r = 0$.
- $\int_\rho^R f(z)\mathrm{d}z =: I_1$.

- $\int_{-R}^{\rho} f(z)\mathrm{d}z =: I_2$.

若区域包含原点, 则 ln 无法全局定义. 此处可以在上半平面的内部定义 $\ln(-1) = \pi i$. 从而

$$I_1 + I_2 = 2\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x - i\pi\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x.$$

而 f 在闭路内的留数为二重奇点 i 处的留数, 计算得

$$\lim_{z\to i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[(z-i)^2 f(z)] = \frac{\pi}{8} + \frac{i}{4}.$$

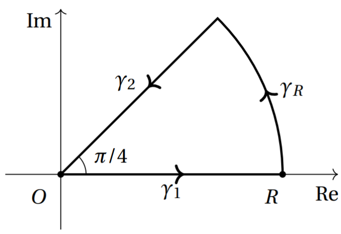
因此, $I_1 = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[2\pi i \cdot (\pi/8 + i/4)] = -\pi/4$.

□

Example. $\displaystyle\int_0^\infty \sin(x^2)\mathrm{d}x = \int_0^\infty \cos(x^2)\mathrm{d}x = \sqrt{\pi/8}$.

> *Gauss 积分:* $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$.

Proof. 取 $f(z) = e^{iz^2} \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C})$. 取围道



从而 γ_1 上的积分值等于 γ_R 与 γ_2 上积分值之和的相反数.

$$\int_{\gamma_2} f = -\int_0^\infty e^{-t^2+\pi i/4}\mathrm{d}t = -\left[(\sqrt{\pi/8} + i\sqrt{\pi/8})\right].$$

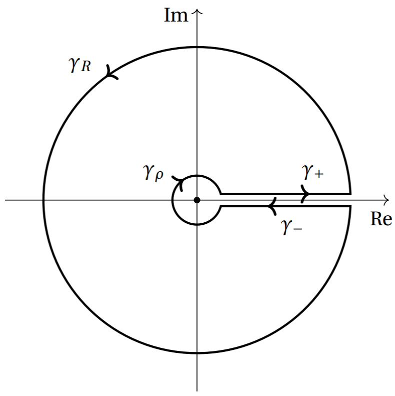
而 γ_R 上积分值趋于 0. 综上,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \sin(x^2)\mathrm{d}x &= -\mathrm{Im}\int_{\gamma_2} f \\ = \int_0^\infty \cos(x^2)\mathrm{d}x &= -\mathrm{Re}\int_{\gamma_2} f = \sqrt{\pi/8}.\end{aligned}$$

□

Example. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^m}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin p\pi}\cdot\prod_{j=1}^{m-1}(1-p/j), m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, p \in (0,m)\setminus\mathbb{Z}$.

Proof. 取 $f(z)=\dfrac{e^{(p-1)\log z}}{(1+z)^m}$. 由于 $e^{(p-1)\log z}$ 在 $p\notin\mathbb{Z}$ 时为多值函数, 下考虑单值化区域.



- 外圈 γ_R 与内圈 γ_ρ 之积分值趋于 0.
- 留数为 $\dfrac{1}{(m-1)!}\prod_{j=1}^{m-1}(p-j)$.
- γ_+ 与 γ_- 足够靠近实轴时, $-e^{2p\pi i}\int_{\gamma_+} f=\int_{\gamma_-} f$.

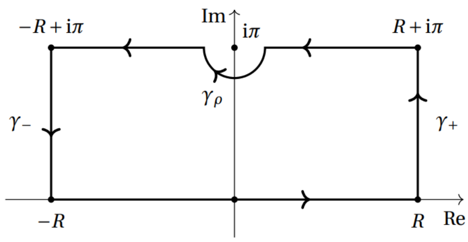
从而

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^m}\mathrm{d}x=\frac{2\pi i}{1-e^{2p\pi i}}\cdot\frac{1}{(m-1)!}\prod_{j=1}^{m-1}(p-j).$$

□

Example. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{x}{\sinh x}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{2}$.

Proof. 所有简单奇点为 $i\pi\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, 阶数均为 1. 点 $i\pi n$ 处的留数为 $i\pi n$. 取围道如下



- $R\to\infty$ 时, $\gamma_\pm$ 积分为 0.
- γ_ρ 处积分为 $i\theta$ 倍留数, 即 $-\pi^2$.

根据留数定理, 同时令 $R\to\infty, \rho\to 0$, 得

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{x}{\sinh x}\mathrm{d}x-\pi^2-\int_{\mathbb{R}}\frac{x+i\pi}{\sinh(x+i\pi)}\mathrm{d}x=0.$$

注意到 $\sinh(x+i\pi)=-\sinh(x)$, 取实部即得证.

$\square$

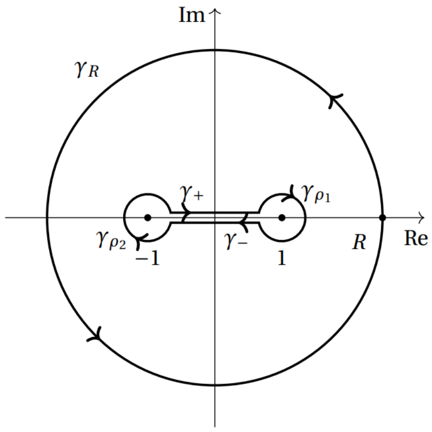
Example.

$$\begin{aligned}
\int_{[0,2\pi]} \frac{\mathrm{d}\theta}{3+\cos\theta+2\sin\theta} &= \oint_{S^1} \frac{\frac{1}{iz}\mathrm{d}z}{3+\frac{z+z^{-1}}{2}+\frac{z-z^{-1}}{2}} \\
&= \frac{10}{i+2}\oint_{S^1} \frac{\mathrm{d}z}{(5z+1+2i)(z+1+2i)} \\
&= 2\pi i\cdot\frac{10}{i+2}\cdot\frac{1}{\frac{-(1+2i)}{5}+1+2i} \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

最后一步是因为 S^1 围成区域内的奇点仅有 $-(1+2i)/5$.

Example. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^{2/3}(1-x)^{1/3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$

Proof. 取单值化区域上的围道如下:



- $\lim_{z\to\infty} zf(z) = e^{i\pi/3}$. 从而 $\oint_{\gamma_R} f \to 2\pi i e^{i\pi/3}$.
- γ_{ρ_i} 处积分趋向 0.
- $\int_{\gamma_-} f = e^{2\pi i/3}\int_{\gamma_+} f$ (顺时针旋转 $2\pi/3$).

从而根据留数定理, 原式等于

$$\int_{\gamma_+} f = \frac{-2\pi i e^{i\pi/3}}{1+e^{2\pi i/3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

$\square$

Weierstrass 展开

Def. 称 f 为整函数, 若且仅若 $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C})$.

Def. 对 $p \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 定义基本分解因子

$$E_p(z) = (1 - z)\exp(z + z^2/2 + \cdots + z^p/p).$$

不妨记 $E_0(z) = 1 - z$.

Prop. $\exists c > 0, \forall p \in \mathbb{N}, \forall z \in B(0, 1/2)$, 则 $|1 - E_p(z)| \leq c|z|^{p+1}$.

Proof. 由 Taylor 展开知 $E_p(z) = \exp(-\sum_{n \geq p+1} z^n/n)$. 结论显然.

□

Thm. (Weierstrass) f 为整函数, f 在 $\mathbb{C}^*$ 中的零点集 (将 k 重零点视作 k 个单零点) 为 $\{a_1, a_2, \cdots\}$. 0 处重数为 m, 则存在整函数 h 使得

$$f(z) = z^m \cdot e^{h(z)} \cdot \prod_{n \geq 1} E_{n-1}(z/a_n).$$

Proof. 考虑 $f \neq 0$, 则对任意 $z \in \mathbb{C}$, $S_z := \{n \mid z/a_n > 1/2\}$ 包含有限个点. 从而

$$\sum_{n \in S_z^c} |1 - E_{n-1}(z/a_n)| \leq c \sum_{n \in S_z^c} |z/a_n|^n \leq c \cdot \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} = c.$$

因此 $P(z) := \prod_{n \geq 1} E_{n-1}(z/a_n)$ 在 $\mathbb{C}$ 上绝对收敛. 记 $\varphi(z) := \dfrac{f(z)}{P(z)z^m}$. 显然 $\varphi(z)$ 与 $1/\varphi(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上均全纯, 从而

$$h(z) - C = \int_0^z \varphi'(z)/\varphi(z)\mathrm{d}z \in \mathrm{Hol}(\mathbb{R}).$$

可检验, $\varphi(z) \cdot e^{-h(z)}$ 的导数恒为 0. 其中 $C \in \mathrm{Ln}(\varphi(0))$.

□

Col. 若序列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} \subset \mathbb{C}^*$ 不含聚点, $\{k_n\} \subset \mathbb{Z}$ 使得 $\sum_{n \geq 1} (r/|a_n|)^{k_n}$ 对一切 $r > 0$ 绝对收敛, 则存在整函数

$$z^m \cdot e^{h(z)} \prod_{n \geq 1} E_{k_n - 1}(z/a_n).$$

Example. 取定 $k_n = 2$, 可得 $\sin z = z \prod_{n \geq 1} (1 - z^2/n^2\pi^2)$.

Example. $\pi\cot(\pi z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(z+n)^{-1}$.

Thm. (Mittag-Leffler) 记 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 为 $\mathbb{C}$ 上不含聚点的序列, 任取有理函数列

$$\varphi_n := \sum_{j=1}^{k_n} \frac{c_{n,j}}{(z-a_n)^j}, \quad c_{n,j}\in\mathbb{C}.$$

则存在亚纯函数 f 使得其简单奇点均在 $\{a_n\}$ 中, 且在 a_n 处主部为 φ_n.

Proof.

由于 φ_n 在 $B(0,|a_n|/2)$ 上全纯, 存在 $s_n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 使得

$$\left|\varphi_n - \sum_{k=0}^{s_n} \frac{\frac{\mathrm{d}\varphi_n^k}{\mathrm{d}z^k}\big|_{z=0}}{k!} z^k\right| < \frac{1}{2^n}.$$

由于 $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, 从而可如上构造一列亚纯函数 f_n 使得其在任意包含原点的紧集上一致收敛.

□