空间曲线的小结论

Frenet框架

 $\{t,n,b\}$ 满足 $\gamma'(s)=t$,且

$$rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}egin{pmatrix} t \ n \ b \end{pmatrix} = egin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \ -\kappa & 0 & - au \ 0 & au & 0 \end{pmatrix} \cdot egin{pmatrix} t \ n \ b \end{pmatrix}.$$

注:

1. Frenet矩阵具有反对称性. 记F(s)为Frenet矩阵, v=(t,n,b), 则v(s)=F(s)v(0). 由正交性知

$$0 = (v(s)^2)' = [(F(s) + F^T(s))v] \cdot v.$$

从而
$$F(s) + F^T(s) \equiv 0.$$

局部Taylor展开: 对弧长参数的曲线 $\gamma(s)$, $\gamma(0)$ 附近展开得

$$egin{aligned} \gamma(s) &= \gamma(0) + s \gamma'(0) + rac{s^2}{3} \gamma''(0) + rac{1}{6} \gamma'''(s) + o(s^2) \ &= \gamma_0 + (s - rac{\kappa_0^2 s^3}{6}) t + (rac{\kappa_0 s^2}{2} + rac{\kappa_0' s^3}{6}) n - rac{\kappa_0 au_0 s^3}{6} b \ &o(s^3) \end{aligned}$$

密切圆与密切球

对弧长参数且曲率挠率均非零的曲线 γ , 其密切圆显然为n向半径为 κ^{-1} 的元.

$$\gamma$$
落在球面上的充要条件为 $\frac{1}{\kappa^2}+\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2\frac{1}{\tau^2}=R^2$,其中 R 为对应的球面半径.

下求 $\gamma(s)$ 处的近似球面半径. 设球心p, 则 $\gamma(s)-p(s)=\lambda(s)n+\mu(s)b$. 求导得

$$t = \lambda' n + \mu' b - \lambda (\kappa t + \tau b) + \mu \tau n.$$

因此

$$\lambda \kappa + 1 = 0$$

$$\mu \tau + \lambda' = 0$$

$$\mu' - \lambda \tau = 0$$

解得
$$\lambda=rac{1}{-\kappa}$$
, $\mu=rac{(1/\kappa)_s}{ au}$. 因此密切球面 $R=\sqrt{rac{1}{\kappa^2}+\left(rac{1}{\kappa}
ight)_s^2rac{1}{ au^2}}$, 朝向 n .

显然密切圆于密切球上。

曲率与挠率公式

对具有正则参数的曲线 $\gamma(t)$,有

$$egin{aligned} \gamma'(t) &= s_t \cdot t \ \gamma''(t) &= \kappa s_t^2 \cdot n + s_{tt} \cdot t \ \gamma'''(t) &= (\kappa s_t)_t \cdot n - \kappa (\kappa t + au b) s_t^3 + (s_{tt} \cdot t)_t \end{aligned}$$

$$egin{aligned} \kappa &= rac{|\gamma'(t) imes\gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3} \ au &= rac{-[\gamma'(t),\gamma''(t),\gamma'''(t)]}{|\gamma'(t)|^6\kappa^2} = rac{[\gamma'''(t),\gamma''(t),\gamma'(t)]}{|\gamma'(t) imes\gamma''(t)|^2} \end{aligned}$$

对平面曲线 $\gamma'(t)$, 曲率 κ 带符号 $(n=b\times t)$. 当 $\gamma(t)=(x(t),y(t))$ 时, 有

$$|k| = rac{|(x',y') imes (x'',y'')|}{|(x',y')|^2} = rac{|x'y''-x''y'|}{|x'^2+y'^2|^{3/2}}.$$

对极坐标 $\rho = r\theta$, 有

$$ho' = r'\hat{r} + r heta'\hat{ heta} \
ho'' = r''\hat{r} + r' heta'\hat{ heta} + r' heta'\hat{ heta} + r heta''\hat{ heta} - r heta''\hat{ heta} - r heta''\hat{ heta}$$

从而

$$egin{split} |\kappa| &= rac{|r'(2r' heta'+r heta'')-r heta'(r''-r heta' heta')|}{|r'^2+r^2 heta'^2|^{3/2}} \ &= rac{|2r'^2 heta'+rr' heta''-rr'' heta'+r^2 heta'^3|}{|r'^2+r^2 heta'^2|^{3/2}} \end{split}$$

当heta为参数时, $\kappa=rac{|2r'^2-rr''+r^2|}{|r'^2+r^2|^{3/2}}.$

渐屈线与焦曲面

为法线的包络线, 即两点间法线收敛于渐屈线上的一点. 设 $\gamma:I\to\mathbb{R}^3$ 为有弧长参数的曲线, 则 $\gamma(s)$ 对应的渐屈线上的点 $\alpha(s)$ 满足 $\alpha(s)=\gamma(s)+\lambda(s)n(s)$. 显然 $\gamma(s)$ 之法线总为渐屈线之切线, 故

$$lpha'(s) = t + \lambda' n + \lambda(-\kappa t) \parallel n.$$

从而
$$\lambda(s)=rac{1}{k(s)}$$
. 故 $lpha(s)=\gamma(s)+rac{1}{\kappa(s)}n(s)$. 当 $\kappa
eq 0$ 时, 渐屈线正则.

记X:U o S为没有抛物点或脐点的正则曲面,则曲率线坐标下,参数曲面

$$Y(u,v):=X(u,v)+rac{1}{\kappa_1}N(u,v) \ Z(u,v):=X(u,v)+rac{1}{\kappa_2}N(u,v)$$

称作焦曲面. 实际上

$$egin{aligned} Y_u \wedge Y_v &= (X_u + rac{1}{\kappa_1} N_u + (\kappa_1^{-1})_u N) \wedge (X_v + rac{1}{\kappa_1} N_v + (\kappa_1^{-1})_v N) \ &= (\kappa_1^{-1})_u N \wedge (X_v - rac{\kappa_2}{\kappa_1} X_v) \end{aligned}$$

故 κ_i 关于u, v的一阶导数不为零时, Y, Z均正则.