习题: 若简单图G的围长大于等于5, 则$|E(G)| \le \dfrac{n}{2}\sqrt{n-1}$.

证: 观察以下情形:

1. $n=5$时的极值图为C_6, 抑或往外新增一边的C_5.
2. 若G中存在两点p,q使得$d(p,q)\ge 4$, 则存在子圈C_m满足$m\ge 4$, 且C_m上相距$\lfloor m/2\rfloor$的两点在G中仍相距$\lfloor m/2\rfloor$.

对任意满足第二点假设的图, 在相应之C_m上连接任意相距$\lfloor m/2\rfloor$的两点可保证生成图围长不小于5. 如是递推, 不妨设G为某张无法适用情形**2**的图, 则$\forall x,y\in V(G), d(x,y)\le 3$. 据情形**1**, $d(x,y)=3$或能取到.

记e_1为G中边之数量, e_2为G中距离为2的点对数量, e_3为G中距离为3的点对数量. 从而

$$\begin{aligned}\binom{n}{2} &= e_1+e_2+e_3\\ &= e_1+\sum_i\binom{\deg(v_i)}{2}+e_3\\ &= \frac{1}{2}\sum_i(\bar{d}-d_i)^2+\frac{n\bar{d}^2}{2}+e_3\\ &= \frac{2E^2}{n}+\|\Delta d\|^2+e_3\end{aligned}$$

从而

$$E\le\sqrt{\binom{n}{2}\cdot\frac{n}{2}}=\frac{n\sqrt{n-1}}{2}.$$

取等号若且仅若G系正则图且任意两点之距离不超过2.