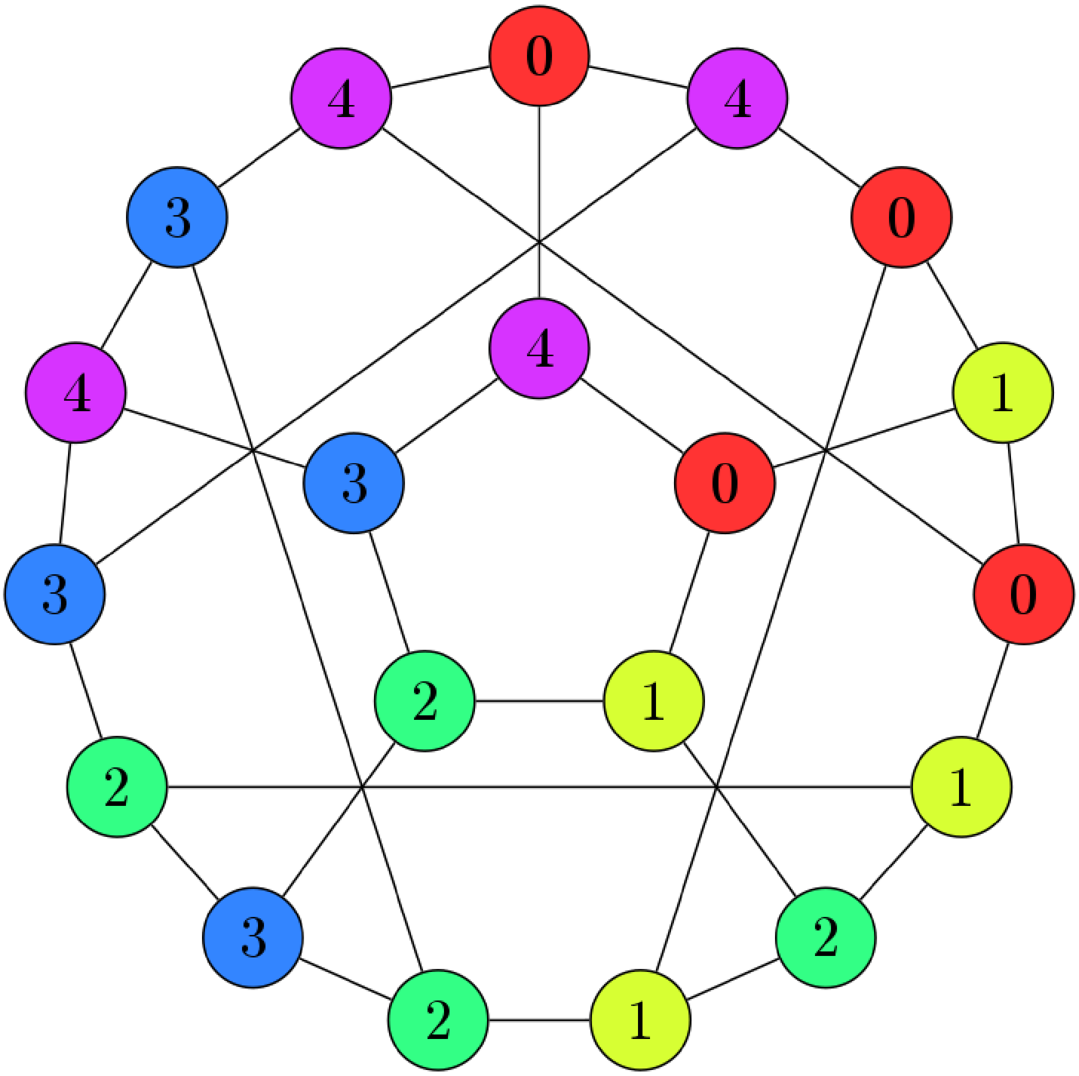
图谱论导引(第十六期)

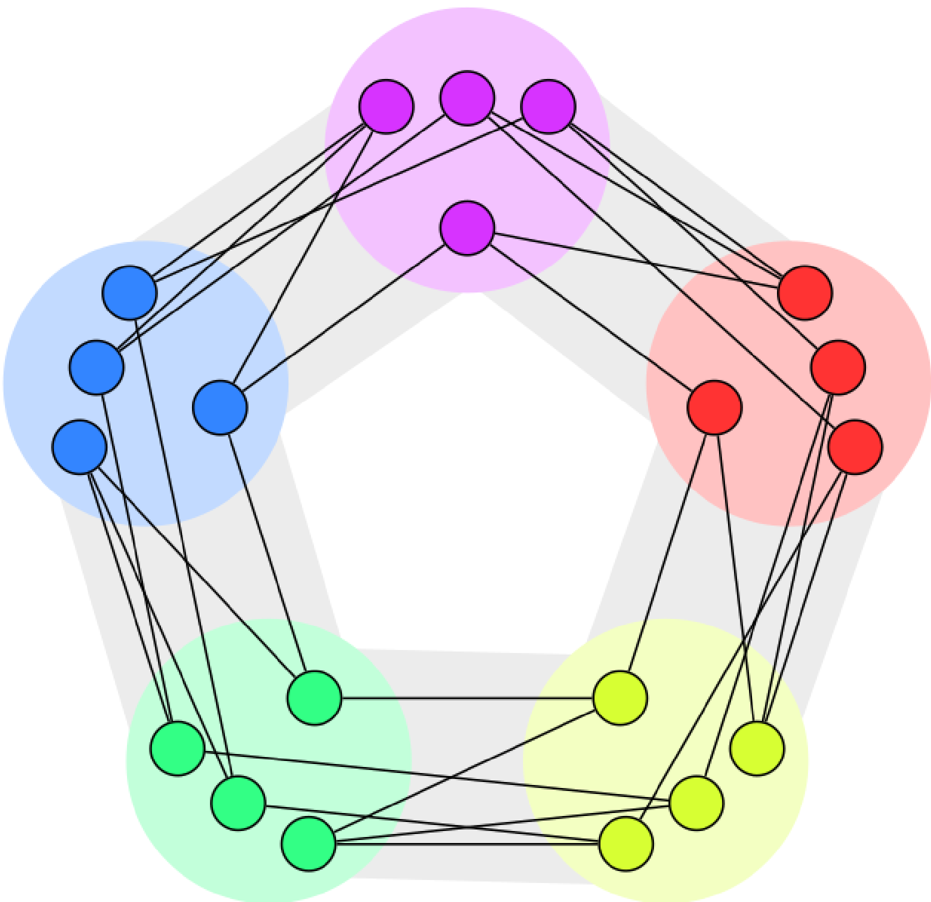
图同态

称$\sigma \in \hom(G, H)$为图同态, 若且仅若

1. $\sigma : V(G) \to V(H)$, $\sigma : E(G) \to E(H)$.
2. $i \sim j \implies \sigma(i) \sim \sigma(j)$.
3. $\sigma : V(G) \to V(H)$为满射.

例如下图为$J_5 \to C_5$的同态之一:


0
4
4
3
0
4
1
4
3
0
3
0
2
1
2
1
3
2
2
1



记矩阵$S_{|V(G)\times V(H)|}$, $s_{ij}=1$若且仅若$\sigma(i)=j$; 反之$s_{ij}=0$. 从而

$$S^TS=\mathrm{diag}(|\sigma^{-1}(1)|,|\sigma^{-1}(2)|,\ldots,|\sigma^{-1}(|V(H)|)|).$$

矩阵$S^TA(G)S$中(i,j)位置的元素表示点集$\sigma^{-1}(i)$与$\sigma^{-1}(j)$间连线条数. 特别地, 称σ为统一的(uniform)若且仅若以下两点成立:

1. 对任意$i\in V(G)$, $|\sigma^{-1}(i)|$为常数p,
2. 对任意$(i,j)\in E(G)$, 边的原像数量为定值q.

端详上图所示的同态$J_5\to C_5$, $(p,q)=(4,6)$.

若G, H顶点数分别为n,m, 且存在以(p,q)为系数的统一的同态$G\to H$, 则$S^TS=pI$, $S^TA(G)S=qA(H)$. 设$Q=\dfrac{1}{\sqrt{p}}S$, 则$Q^TQ=I$, $Q^TA(G)Q=\dfrac{q}{p}A(H)$. 从而根据先前所证明的插值不等式, 对任意$i$均有

$$\lambda_{n-m+i}(G)\leq\frac{q}{p}\lambda_i(H)\leq\lambda_i(G).$$

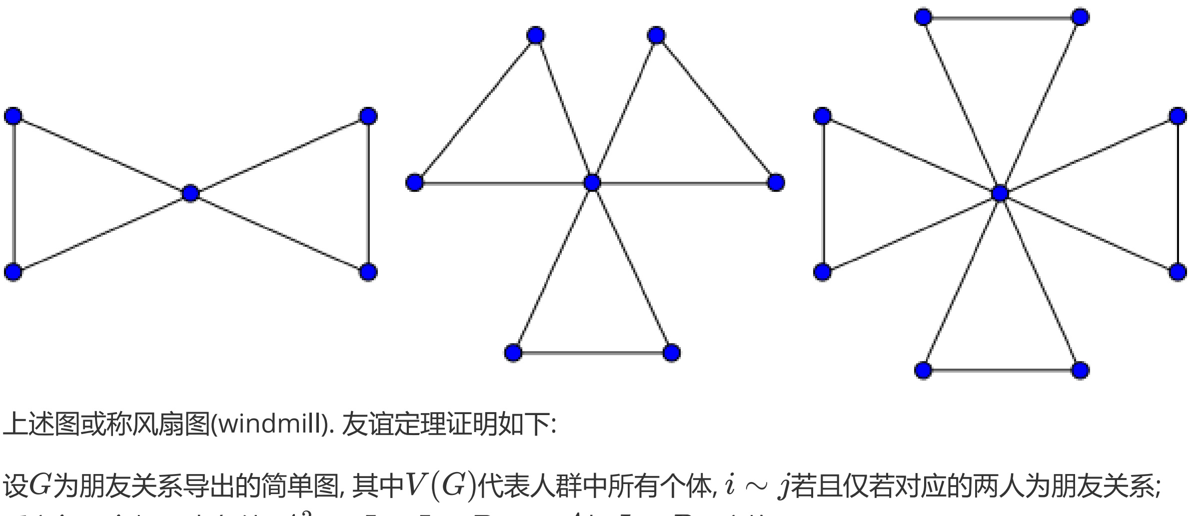
上篇文章已通过根子空间的维度证明K_{10}无法被分解成3份Petersen图, 现将通过同态重新说明之. 反之, 设P为Petersen图, 则K_{10}可被分解成3份Petersen图等价于存在同态$\sigma:2P\to\overline{P}$. 其中σ为以$(2,1)$为系数的统一的同态. 计算的$\overline{P}=L(K_5)$之谱为$(5,1^4,(-2)^5)$, $2P$之谱为$(3^2,1^{10},(-2)^8)$. 从而

$$1=\lambda_{12}(2P)>\frac{1}{2}\lambda_2(\overline{P})=\frac{1}{2}$$

与$\lambda_{n-m+i}(G)\leq\dfrac{q}{p}\lambda_i(H)\leq\lambda_i(G)$矛盾.

友谊定理

友谊定理(friendship theorem)叙述如下: 称两个人为朋友关系若且仅若彼此怀有好感, 若某人群中任意两人有且仅有一个公共朋友, 则存在一个人与人群中其余人均为朋友关系. 易知所有可能图为$K_1\bigtriangledown nK_2$形式, 如下图所示:



上述图或称风扇图(windmill). 友谊定理证明如下:

设G为朋友关系导出的简单图, 其中$V(G)$代表人群中所有个体, $i\sim j$若且仅若对应的两人为朋友关系; 反之$i\nsim j$. 据题中条件, $A^2=J-I+D$. 因而A与$J+D$可交换, 即

$$AJ+AD=JA+DA.$$

考察左右两侧各元素, 故$d_i+a_{ij}d_j=d_j+d_ia_{ij}$, 因式分解之即有$(d_j-d_i)(a_{ij}-1)=0$. 注意到$\deg i\neq\deg j$时$a_{ij}=1$, 对$V(G)$按照度数分类得$V_1$, V_2, …, V_k, 其中$|V_k|=n_k$. 故$A(G)$具有一般形式

$$\begin{pmatrix} * & J_{n_1,n_2} & \cdots & J_{n_1,n_k} \\ J_{n_2,n_1} & * & \cdots & J_{n_2,n_k} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ J_{n_k,n_1} & J_{n_k,n_1} & \cdots & * \end{pmatrix}.$$

注意到$n-k_1 \le a_{12}^{(2)} := \sum_i a_{1i}a_{i2} = 1$, 从而

1. $k_1 = n-1, r = 2; k_2 = 1.$
2. $k_1 = n, r = 1.$

对第一种情形, $A = \begin{pmatrix} A^* & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}^T & 0 \end{pmatrix}$, 其中$A^*\mathbf{1} = \mathbf{1}$. 易知$A^*$为$nK_2$之邻接矩阵, 从而$A$对应风扇图之邻接矩阵.

对第二种情形, G正则. 不妨设$\deg G = d$, 则

$$(A-dI)(A^2-(d-1)I) = (A-D)J = O.$$

由于A有且仅有三个特征值$(d, \pm\sqrt{d-1})$, 从而A强正则. 不妨设A谱为$(d^1, \sqrt{d-1}^{k_1}, -\sqrt{d-1}^{k_2})$, 则

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = n-1 \\ d + \sqrt{d-1}(k_1 - k_2) = 0 \end{cases}.$$

从而$n - 2k_1 - 1 = \dfrac{d}{\sqrt{d-1}}$为整数. d只能为2, 解得合理的图仅为K_3, 可归入第一种情形.

综上, 友谊定理成立, 且其对应的简单图必为$K_1 \bigtriangledown nK_2$形式.