图谱论导引(第十六期)

完全图的正则图分解

3-分解

试想如下问题: 在允许点重合而边不可重合的情况下, 能否用3个Petersen图拼出完全图K_{10}? 答案时否定的, 下将给出证明.

反之, 设存在Petersen图对应的邻接矩阵A, B, C使得$A+B+C+I=J$. 注意到
$\dim\ker(I-A)=\dim\ker(I-B)=5$, $\dim(\mathbf{1}^{\perp})=9$, 从而$\ker(I-A)\cap\ker(I-B)\neq\emptyset$. 取
$x\in\ker(I-A)\cap\ker(I-B)$, 从而

$$Ax+Bx+Cx+x=Jx=0.$$

解得$Cx=-3x$. 注意到-1并非Petersen图之特征值, 矛盾.

一般地, 若K_n能够被三个系数为(n,k,λ,μ)的强正则图拼成, 则特征值为$k与

$$\tau,\theta=\frac{(\lambda-\mu)\pm\sqrt{(\lambda-\mu)^2+4(r-\mu)}}{2}.$$

其中

$$m_\tau,m_\theta=\frac{1}{2}\left[(n-1)\pm\frac{(n-1)(\mu-\lambda)-2k}{\sqrt{(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu)}}\right].$$

此外, $n-1=3k$, 因此$m_\theta\neq m_\tau$; 反之$(n-1)(\mu-\lambda)-2k=0$导出$\mu-\lambda=2/3$矛盾. 选取
$x\in\ker(\tau I-A)\cap\ker(\tau I-B)$, 由式子$Ax+bx+Cx+x=Jx=0$知$-2\mu_2-1$为$C$的主特征值(因为特征向量垂直于$\mathbf{1}$). 化简得

$$m_\tau=\frac{1}{2}\left(3k-\frac{3k(\tau+\theta)+2k}{\tau-\theta}\right)$$

从而$m_\tau=2k$, $m_\theta=k$, 进而求解得$(3\lambda-3\mu+2)^2=(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu)$. 注意到
$k(k-\lambda-1)=(n-k-1)\mu$, 从而$(\mu-\lambda+1)^2=\lambda+1$为完全平方数. 因此正则图具有系数
$((3m\pm1)^2,3m^2\pm2m,m^2-1,m^2+m)$, 其中$m$为正整数.

基于3-分解的空间分解

根据以上证明, $\ker(\tau I-A)\cap\ker(\tau I-B)\subset\ker(\tau I-C)$. 同时

$$\begin{aligned}&\dim[\ker(\tau I-A)\cap\ker(\tau I-B)]\\=&\dim(\ker(\tau I-A))+\dim(\ker(\tau I-B))-\dim[\ker(\tau I-A)+\ker(\tau I-B)]\\=&2m_\tau-(n-1)=r\end{aligned}$$

从而$\ker(\tau I-A)\cap\ker(\tau I-B)=\ker(\tau I-C)$. 由于

$$\ker(\tau I-A)+\ker(\tau I-B)+\ker(\tau I-C)=\mathbf{1}^T$$

从而

$$\mathbb{R}^n=\langle\mathbf{1}\rangle\oplus\ker(\theta I-A)\oplus\ker(\theta I-B)\oplus\ker(\theta I-C)$$

有限域上$x^3+y^3=z^3$之解

设$\mathbb{F}_q$为有限域, 其中$q=p^{2h}$, $p\equiv 2 \mod 3$, 记$H=\langle g^3: g\in\mathbb{F}_q^*\rangle$, 显然$-1\in H$. 基于此, 定义$G_i$($i=0,1,2$)如下:

1. G_i之顶点为$\mathbb{F}_q$中数.
2. $u\sim v$若且仅若$u-v$属于陪集$H\cdot g^i$, 其中g为生成元. 由于$-1\in H$故, 图无向.

由此可得G_0, G_1, G_2两两同构, 即$K_{p^{2h}}$可分为相同构的三个强正则图. 对给定的$u\in H$, $u+v=w$之解(v,w)总数为强正则图之系数λ, 即m^2-1. 其中$m=\dfrac{p^h-1}{3}$若且仅若h为奇数, $m=\dfrac{p^h+1}{3}$若且仅若m为偶数. 从而对$x,y,z\in H$, $x+y=z$的所有解数为$\lambda|H|$. 注意到每个H中元素在$\mathbb{F}_q$中均有三个立方根, 从而方程$x^3+y^3=z^3$解总数为

$$27\lambda|H|=(p^{2h}-1)(p^{2h}-2(-p)^h-8).$$

完全图的完全二分图分解

完全图的完全二分图分解有以下定理: 图K_n有r-分解且每一分解所得的子图均为完全二分图, 则$r\geq n-1$.

证明: 设一般图G有n_+个正特征值, n_-个负特征值, 且G能被r-分解成完全二分图$\{G_i\}_{i=1}^r$, 则$A(G)=\sum_{i=1}^r A(G_i)$. 不妨设G_i为点集V_{i1}与V_{i2}两两相连所得, 向量$u_i\in\mathbb{R}^{|V(G)|}$中第$k$个分量为1若且仅若点$k$在$V_i$内, 进而$A(G_i)$为$u_{i1}u_{i2}^T+u_{i2}u_{i1}^T$形式.

下证明$r\geq\max\{n_+,n_-\}$, (不失一般性地)只需证$r\geq n_+$. 若$n_+<r$, 则A正特征向量张成的子空间至多为$r-1$维, 故所有正特征向量张成的子空间V^+包含非零特征向量w使得w与一切u_i垂直. 注意到$w^TAw=0$, 矛盾.

对完全图而言, K_n之谱为$(n-1,(-1)^{n-1})$. 从而$r\geq n-1$.