图谱论导引(第九期)

本期文章主要讲述图染色相关内容, 理论来源于一些零零散散的杂文. 染色定理(chromatic theory)系组合学内容, 本期文章实则与图谱论无较大关联.

点染色与边染色

点染色

点染色(vertex-colouring)本质上探讨了如下问题: 如何将图G中顶点赋上最少种颜色, 使得相邻两点异色? 换言之, 若对k元集合S_k存在满射

$$f : V(G) \twoheadrightarrow S_k$$

使得$v_1 \sim v_2 \implies f(v_1) \neq f(v_2)$. 求$\min k$?

显然对于有限图存在某一正整数$k_{\min}$使得$k_{\min} = \min k$, 今称之染色数$\chi(G) := k_{\min}$. 对任意$n \in [\chi(G), |V|] \cap \mathbb{Z}$, G是可被n-染色的, 下简称之n-染色(n-coluoring). 例如P_m, C_m均为3染色的($m \geq 3$), 实际上, $\chi(P_n) = 2$, $\chi(C_n) = \dfrac{5-(-1)^n}{2}$.

边染色

可类似地定义边染色(edge-colouring). 一种染色本质上对应了一个满射

$$g : E(G) \twoheadrightarrow S_k$$

使得$e_1 \sim e_2 \implies g(e_1) \neq g(e_2)$. 为区分方便故, 可将点染色数函数$\chi$写作$\chi_0$; 恒记边染色数为$\chi_1$.

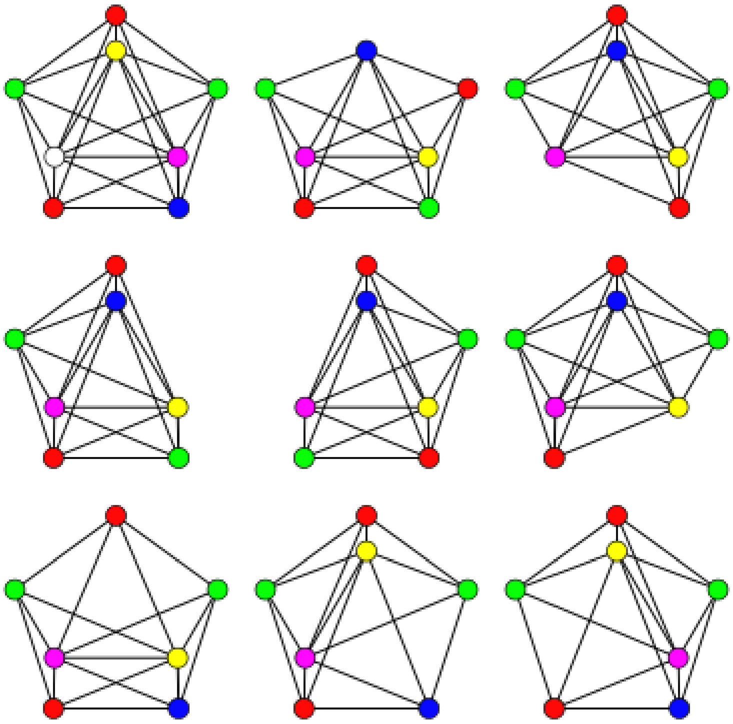
容易发现以下结论:

- $\forall G' \subset G, \chi_i(G') \leq \chi(G)$.
- $\chi(G) \leq 2$若且仅若G为二部图.
- 三角不等式(自行想象之).

相关性质

点染色与险图

称G为险图(critical graph)若且仅若对任意$v \in V$, $\chi(G - v) < \chi(G)$. critical之常见含义无外乎*重要的*, *批判的*, *不稳定的*三者. 笔者姑妄译critical为险, 是以$V(G)$中任意一点就确定$\chi(G)$不可或缺, 逐其一点则形貌大异, *险乎*是谓也. 如下图所示, 西北者即为险图, 而后九者为其对应的删点图.



险图有限

有一不大显然的事实: 险图一定有限. 若不然, 不妨设G为无限图且为险图, 则$\chi(G) < \aleph_0$. 记$k := \chi(G)$, 则G的所有有限子图均可k-染色. 记X为将G中所有点k-上色所生成图之集合, 此处, 上色不必要求邻点异色及颜色种数用毕. 从而X导出了乘积空间$k^{V(G)}$之拓扑. Tychonoff(Тихонов)定理表明任意个紧致空间的乘积空间对于乘积拓扑是紧致的, 该定理必然依赖于选择公理. 记X_H为X中一切包含对有限子图H染色之集合, 从而X_H为闭集. 记$\mathscr{G}$为一切G有限子图之集合, 则$\cap_{H\subset\mathscr{G}} X_H$非空, 从而$G$为$k$-染色的. 与$G$为险图之假定矛盾!

边染色与Визинг定理

Визинг定理描述了一个吃惊的结论: $\max_{v\in V(G)} \deg v - \chi_1(G) \in \{0, 1\}$, 即便具体求解是NP难度(NP-hard)的. 由于$\chi_1(G) \geq \max_{v\in V(G)} \deg v$是必然的, 下仅需证明$\chi_1(G) \leq \Delta + 1$即可. 这里, $\Delta := \max_{v\in V(G)} \deg v$.

引理1. 若v及其邻点的度数均不超过k, 且v的至多一个邻点度数恰为k, 再若$\chi_1(G-v) = k$, 则$\chi_1(G) = k$.

引理1之证明: 只需证明v所有邻点之度数均为k或$k-1$之情形即可. 不妨设$\{c_1, \ldots, c_k\}$为所有颜色, X_i为v邻点中不与i色边相接之点, 从而$\sum_{i=1}^k |X_i| = 2\deg v - 1 < 2k$. 下有引理2.

引理2. 存在一种染色方案使得$||X_i| - |X_j|| \leq 2$恒成立, 即使得$\sum_{i=1}^k |X_i|^2$最小者.

引理2之证明: 不妨设$|X_1| > |X_2| + 2$, 考虑G中所有点及颜色为c_1或c_2的边生成的子图, 该图为若干路(及圈)之无交并. 显然可通过交换路中染色使得$\sum_{i=1}^k |X_i|^2$更小, 矛盾. 引理2得证.

根据推断, 存在i使得$|X_i| = 1$; 若不然, 所有X_i均为0或2, 与和为奇数之事实矛盾. 不妨设$X_1 = \{u\}$, 记G'为G中删去边uv及所有c_1色边而得的图, 则G'满足引理1中将k换作$k-1$之形式($k=1$时显然). 归纳知引理1得证.

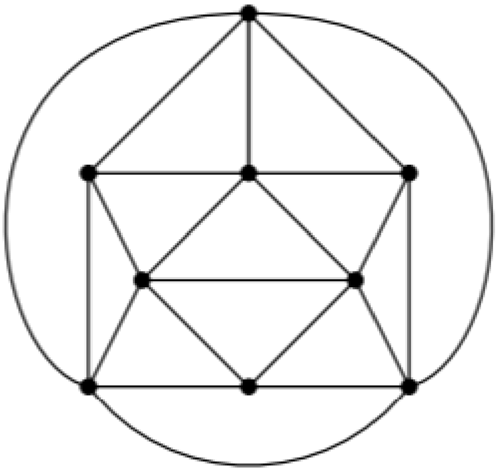
引理1等价于结论: 这是显然的.

> 读者可思考以上论断对重边图(multigraph)是否成立?

关于案例, 可取K_n(考虑n之奇偶性). 自然地, 可依照$\Delta(G) - \chi_1(G)$之取值将图进行分类: 称满足$\Delta(G) - \chi_1(G) = 0$之图为"一类图"; 反之为"二类图".

Визинг猜想

称G为平面图若且仅若G能在边不交叉之情形下被展示在平面上. 等价定义如下: G为平面图若且仅若G的每一连通子图都具有Euler特征值2, 即$|V|+|F|-|E|=2$. Vizing证明了一切$\Delta(G)\geq 8$之平面图均为"一类图", 近年, 山大的两位教授将下界改至7. 当$\Delta\in\{2,3,4,5\}$时, 平面图可能为"二类图", 例子分别为K_3, K_4中任一条边中加一点所得之图, $K_{1,1,1,2}$, 以及下图



注: **上图准确性存疑**. Визинг于原始论文«Критические графы с заданным хроматическим классом»中确乎给出过构造. 以年代久远及苏联解体故, 笔者无从可稽罢了.