图谱论导引(第二十期)

> 本章介绍两个好玩的定理: 非对称图密度定理与Kuratowski定理. 两定理叙述如下:
>
> - 对称图密度定理: 几乎所有的简单图是非对称的.
> - 简单图为平面图, 若且仅若其任一子图均不与K_5或$K_{3,3}$同胚.

非对称图密度定理

非对称图指一类自同构仅为恒等映射的图. 本小节将通过Burnside引理证明以下结论: 几乎所有的简单图都是非对称的. 换言之, 记$p(n)$为顶点数小于n的所有简单图中非对称图的比例, 则$\lim_{n\to\infty} p(n) = 1$.

对选定n, 记顶点集为$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. 随机连接$V$内点即可得$2^{\binom{n}{2}}$种简单图, 记之为整体$\mathcal{G}$. 诚然其中有同构者, 例如所有同构于$X$的图共计$\dfrac{n!}{|\mathrm{Aut}(X)|}$个. 因而所有不重子图之总数(即轨道总数)为

$$\sum_{G\subset\mathcal{G}} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(G)|}.$$

根据Burnside引理, 即

$$\frac{1}{n!}\sum_{g\in\mathrm{Sym}(V)} |\{G\in\mathcal{G} : g(G) = G\}| = \frac{1}{n!}\sum_{g\in\mathrm{Sym}(V)} 2^{\mathrm{orb}(g)}.$$

其中记$\mathrm{orb}(g)$为g在E中的轨道数量, 即用g不断作用于E中各边所得的不重的单循环的数量.

举例而言, 不妨设置换g有$2r$个动点, r为正整数. 则$\mathrm{orb}(g)$取最大值时, 每组循环节应尽可能地短: 此时g为r组不交对换. 此时非不动边(x,y)分作两类: x,y均为动点且$g(x)\neq y$, x为动点而y为不动点. 前一情形包括$2r(r-1)$条边, 后一情形包括$2r(n-2r)$条边. 从而长为2的轨道数量为
$2r(r-1)+2r(n-2r)$, g在E下轨道数量为

$$\mathrm{orb}(g) = \binom{n}{2} - r(n-r-1).$$

若所有图均为非对称图, 则等价类数量为$\dfrac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}$. 下证明实际的等价类数量为$(1+o(1))\dfrac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}$.

任意选定$m\le n-2$为正偶数, 划分$\mathrm{Sym}(V)$为三类: 恒等映射集合C_1, 非不动点数至多为m的映射之集合C_2, 及其余者之集合C_3. 从而

$$|C_2| \le \binom{n}{m} m!, \quad |C_3| \le n!.$$

据先前证明, C_2中每一映射至多有$\dbinom{n}{2}-(n-2)$条轨道, C_3中每一映射至多有
$\dbinom{n}{2}-\dfrac{m}{2}(n-m/2-1)\le\dbinom{n}{2}-\dfrac{mn}{4}$. 从而

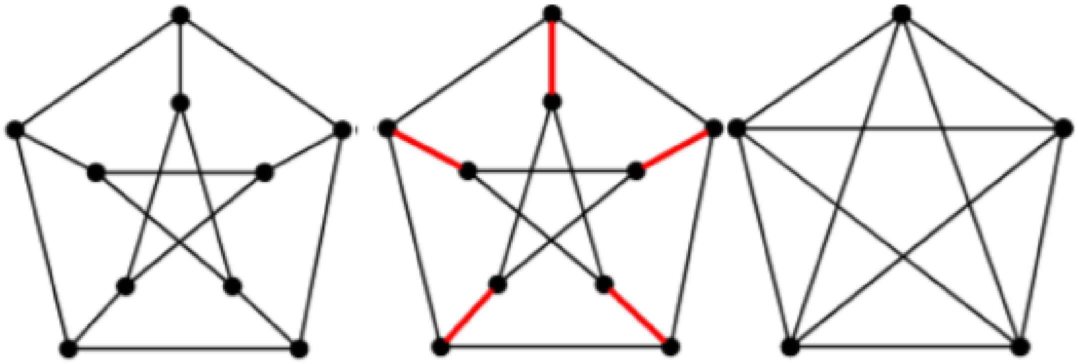
$$\begin{aligned}
&\sum_{g\in\mathrm{Sym}(V)} 2^{\mathrm{orb}(g)}\\
\le&2^{\binom{n}{2}} + \binom{n}{m} m!\cdot 2^{\binom{n}{2}-(n-2)} + n!\cdot 2^{\binom{n}{2}-mn/4}\\
\le&2^{\binom{n}{2}}\left(1+\frac{n\cdots(n-m+1)}{2^{n-2}}+\frac{n!}{2^{mn/4}}\right)
\end{aligned}$$

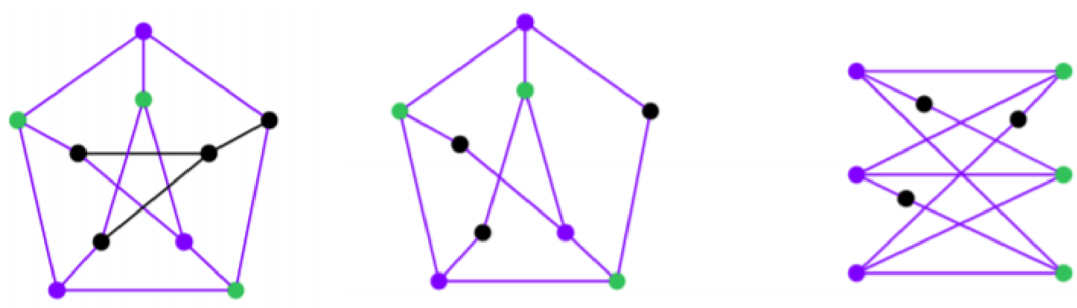
由于$\frac{n!}{2^{mn/4}}$在$m > \lfloor 4\log n \rfloor + \varepsilon_0$时递减至0, $\frac{n\cdots(n-m+1)}{2^{n-2}}$在$m \sim \log n$时一定单减至0, 从而取$m \geq \lfloor 5\log n \rfloor$即可得

$$\sum_{g\in \mathrm{Sym}(V)} 2^{\mathrm{orb}(g)} = 2^{\binom{n}{2}}(1+o(1)).$$

Kuratowski定理

Kuratowski定理给出了判定简单图为平面图与否的充要条件: 图为平面图若且仅若其任一真子图均不同胚于K_5与$K_{3,3}$中任一者. 例如Petersen图非平面图, 以下任一张图即为证明:





证明Kuratowski定理之充分性相对较易, 仅需说明K_5与$K_{3,3}$均非平面图即可. 记图边数为e, 顶点数为v, 面数为f(视无穷大的外部为一个面), 根据Euler定理有

$$f+v-e=2.$$

注意到每个面至少包含了3条边, 从而$2e \geq 3f = 3(e+2-v)$, 故$e \leq 3v-6$. 由是可见K_5非平面图. 同样, 对不含C_3子图(即三角形)的简单图而言, $e \leq 2v-4$. 从而$K_{3,3}$非平面图. 基于上述公式, 以下两则结论成立:

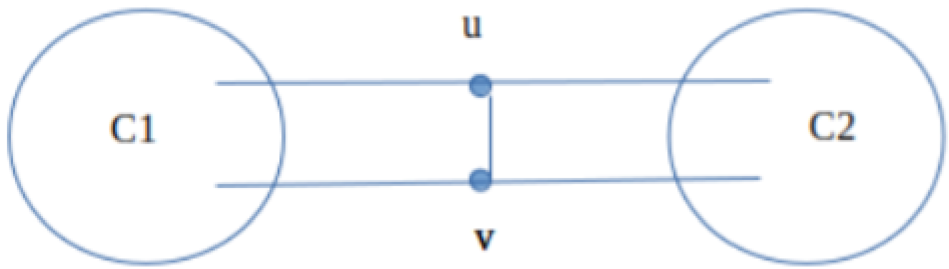
1. 若简单图为平面图, 则图的最小度不超过5.
2. 若简单图为平面图且不含C_3子图, 则图的最小度不超过3.

注意到, $K_{3,3}$距平面图仅一步之遥: $K_{3,3}$的任意真子图均为平面图. 下称此类图为极小非平面图. 显然, 所有极小非平面图为2-连通的(即任意删点图均连通); 反之不妨假设G为1-连通的极小非平面图, 则存在$v \in V(G)$使得$G-v$为若干个不连通的平面图, 与G非平面图之事实矛盾.

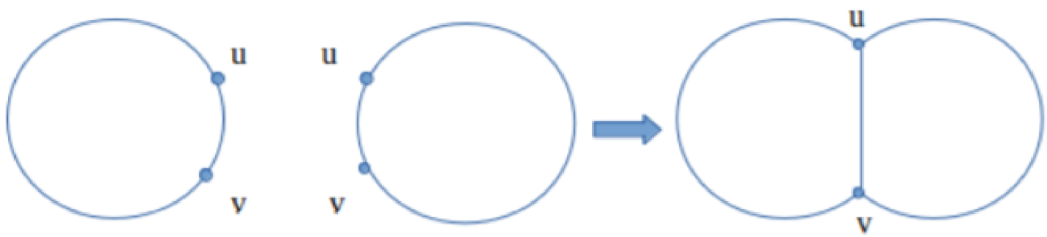
继而证明Kuratowski定理之必要性. 不妨设G为所有不含同胚与$K_{3,3}$或K_5子图的边数最少的非平面简单图, 下先证明G为$3-$连通的.

若不然, 不妨假设设G为2-连通的, 即存在两点$\{u,v\}$使得$G-\{u,v\}$为C_1与C_2之无交并. 由于G为极小非平面图, 则$G-V(C_1)$与$G-V(C_2)$均为平面图. 下讨论如下几类情况:

1. 如下图所示, 若$u \sim v$且$G - V(C_1) - V(C_2)$包含边uv. 此时G显然为平面图, 因为C_1与C_2可表示在某个经过边uv的平面上. 与G非平面图矛盾.



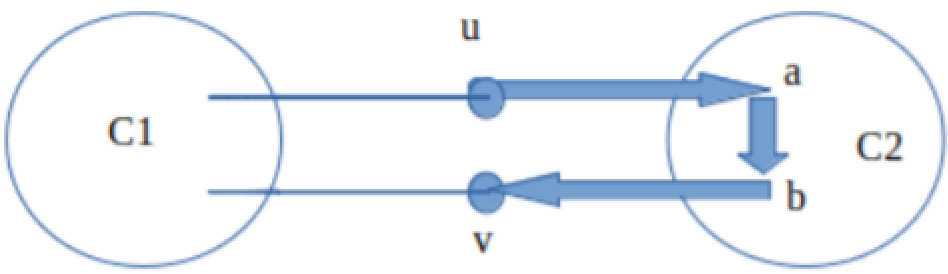
2. 如下图所示, 若$u \sim v$而$G - V(C_1) - V(C_2)$不包含边uv. 此时G显然为平面图, 因为C_1与C_2可表示在某个经过边uv的平面上. 与G非平面图矛盾.



3. 如下图所示, 若$u \nsim v$, 则存在一条$G - C_1$中的路且其端点为$\{u, v\}$. 记命题A_1为存在不包含C_1中所有顶点的路$u - a - \cdots - b - v$; 对称地, 记命题A_2为存在不包含C_2中所有顶点的路$u - a' - \cdots - b' - v$. 当A_1与A_2中一者成立时(不妨设A_2成立), 在$G - C_2 + uv$仍为平面图, 因为真子图

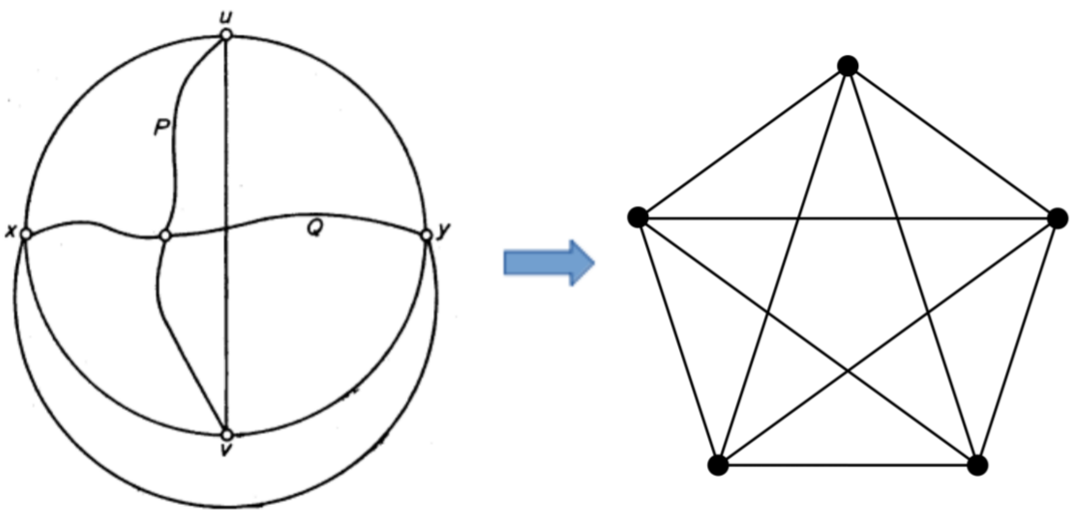
$$G - C_2 + (u - a - \cdots - b - v)$$

为平面图. 此时可归结为上两类情形, 故与假设矛盾. 若A_1与A_2均不成立, 则G为圈, 矛盾.

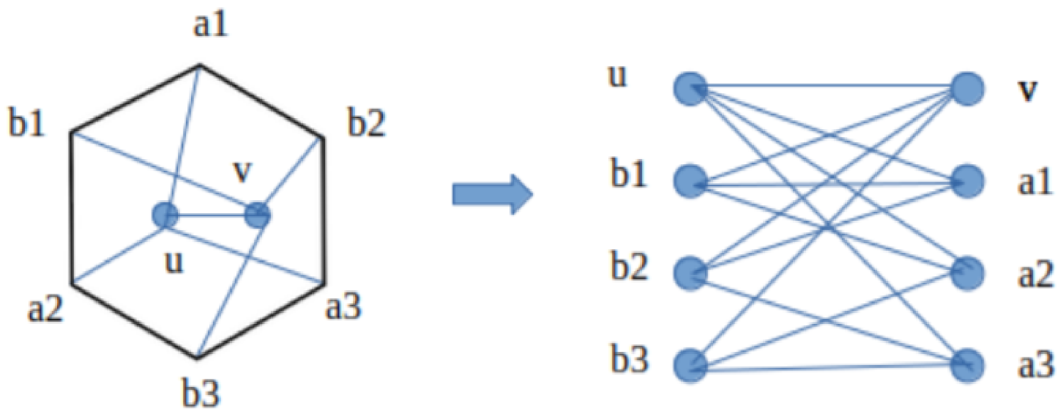


为导出G不存在之矛盾, 不妨设u与v相邻, 下就u与v之公共邻域数量以讨论.

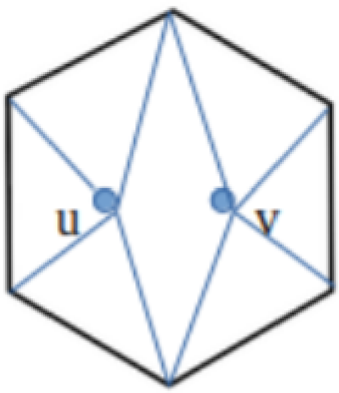
1. 若$|N(u) \cap N(v)| \geq 3$, 则G为下图(同胚于K_5).



2. 若$|N(u)\cap N(v)|\leq 2$, 显然$N(v), N(v)$均大于等于3, 反之G为平面图. 当$N(u)$与$N(v)$中六点相嵌时, 则以下子图包含$K_{3,3}$.



反之, G为



系平面图.

综上, 不存在不含同胚与$K_{3,3}$或K_5子图的边数最少的非平面简单图, 从而Kuratowski定理成立.