丛代数一瞥

> **Remark** 本文仅草率地引入若干例子, 以介绍丛代数中的初等议题. 例如以下例子
>
> **Example 0.1** 考虑序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$, 其中
>
> - $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 1$;
> - $x_{n+4} = \dfrac{x_{n+1}x_{n+3} + x_{n+2}^2}{x_n}$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$.
>
> 序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ 被称为 Simos-4 序列, 其前几项为
>
> $$1, 1, 1, 1, 2, 3, 7, 23, 59, 314, 1529, 8209, 83313, 620297, 7869898, \ldots$$
>
> **Theorem 0.2** 我们观察到 Simos-4 序列为正整数序列. 证明从略.

Frieze 铺砌

Definition 1.1 定义 n 阶 Frieze 铺砌为以下 $n+1$ 横行组成的周期数组,

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots & & \\
a_1 & & a_2 & & a_3 & & \cdots & & a_{n-1} & & a_n & & \boxed{z_1} & & a_2 & & \cdots & \\
 & b_1 & & b_2 & & \cdots & & b_{n-2} & & b_{n-1} & & \boxed{y_1} & & \boxed{y_2} & & \cdots & & \\
\boxed{\cdots} & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \boxed{\ddots} & & \boxed{\ddots} & & \boxed{\ddots} & & \cdots & \\
 & \boxed{\ddots} & & x_1 & & x_2 & & x_3 & & \boxed{c_1} & & \boxed{\cdots} & & \boxed{c_{n-3}} & & \boxed{c_{n-2}} & & \\
\boxed{\cdots} & & \boxed{\cdots} & & y_1 & & y_2 & & \boxed{b_1} & & \boxed{b_2} & & \boxed{\cdots} & & \boxed{b_{n-2}} & & \boxed{b_{n-1}} & \\
 & \boxed{\cdots} & & \boxed{\cdots} & & z_1 & & \boxed{a_1} & & \boxed{a_2} & & \boxed{\cdots} & & \boxed{\cdots} & & \boxed{a_{n-1}} & & \boxed{a_n} \\
\cdots & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots &
\end{array},$$

其中

- 首末两行为 0, 次首末两行为 1, 即 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = z_1 = 1$;
- 除首末两行, 一切元素为正整数;
- 蓝色(框内)三角形的第 k 行与红色(未框出)三角形的第 $n+1-k$ 行相等;

- 任一 2×2 的 $\diamond$ 形数阵等同于 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$ 中的某一元素, 即

$$\forall\ \boxed{\begin{array}{ccc} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{array}}\,, \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1.$$

Example 1.2 以下为某一 7 阶 Frieze 铺砌

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccc}
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
& \boxed{1} & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
\boxed{1} & & 2 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & & 4 & & 1 & & 2 & & 2 & & 3 & & 1 \\
& \boxed{1} & & 3 & & 5 & & 2 & & 1 & & 7 & & 3 & & 1 & & 3 & & 5 & & 2 & \\
2 & & \boxed{1} & & 7 & & 3 & & 1 & & 3 & & 5 & & 2 & & 1 & & 7 & & 3 & & 1 \\
& \boxed{1} & & 2 & & 4 & & 1 & & 2 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & & 4 & & 1 & \\
1 & & \boxed{1} & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
& 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 &
\end{array}.$$

Definition 1.3 称 Frieze 铺砌含有丛, 若且仅若次首与次末行被若干 1 相连. 例如 **Example 1.4** 所表示的 Frieze 铺砌包含丛(连接次首末两行的某些 1 被框出).

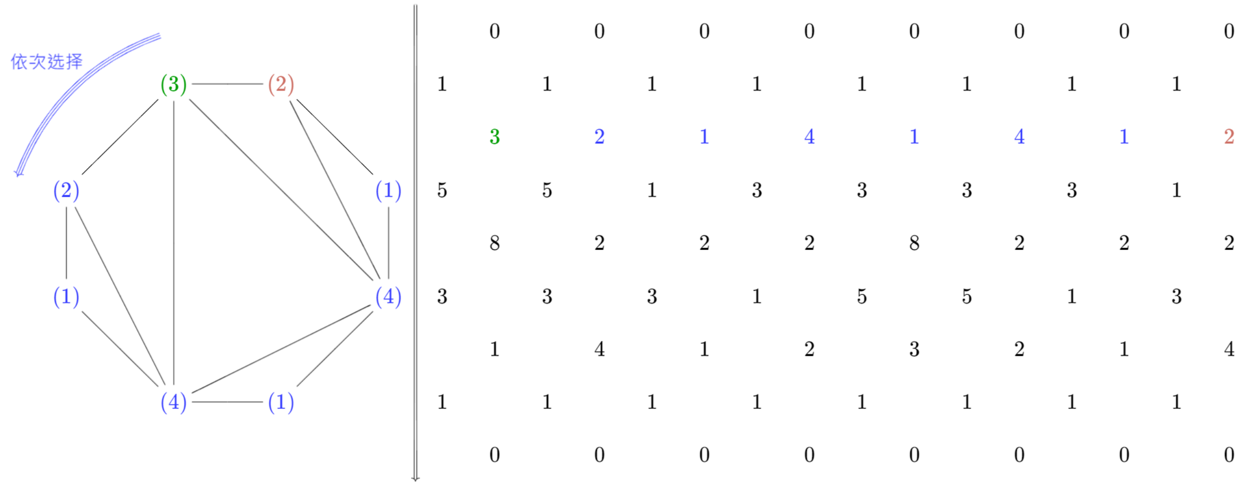
Example 1.4 实际上, 我们可以求出 n 阶 Frieze 铺砌的所有形式. 如 $n=5$ 时待定系数如下

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
& 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
a & & \frac{b+1}{a} & & \frac{a+1}{b} & & b & & \frac{a+b+1}{ab} & & a \\
& b & & \frac{a+b+1}{ab} & & a & & \frac{b+1}{a} & & \frac{a+1}{b} & \\
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
& 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 &
\end{array}.$$

注意到构成 cluster 若且仅若 $\frac{b+1}{a}$ 与 $\frac{a+1}{b}$ 均为整数, 从而解得

$$(a,b) = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}.$$

Theorem 1.5 n 阶 Frieze 铺砌的第三行同构于正 n 边形三角化后个顶点处三角形数量之总和之排列.



🔗链接

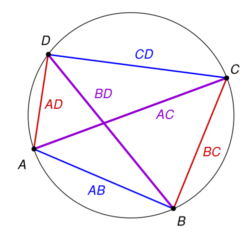
证明见此处.

Theorem 1.6 正 m 边形两两不同的三角化方法数为 $\frac{1}{m-1}\binom{2m-4}{m-2}$.

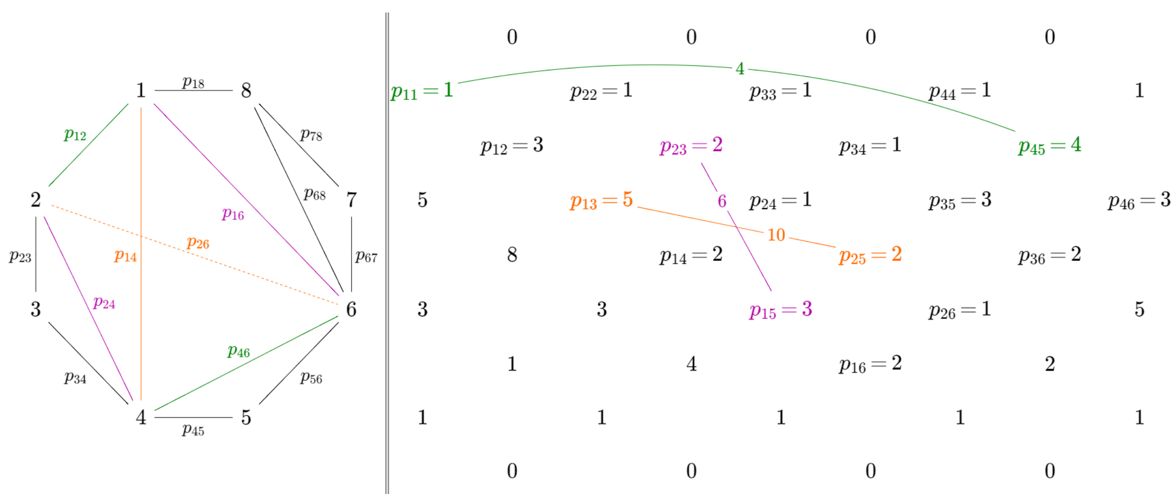
Theorem 1.7 (**Ptolemy**) 右图系圆内接四边形, 则

$$|AD|\cdot|BC|+|AB|\cdot|CD|=|AC|\cdot|BD|.$$

此处 $|AD|$ 即通常意义下的边长. 证明见任意一本平面几何教程.



Theorem 1.8 Frieze 铺砌满足 Ptolemy 对应, 例如下图中 $p_{12}p_{46}+p_{16}p_{24}=p_{14}p_{26}$.



🔗链接

Example 1.9 无穷维 Frieze 铺砌暂不在讨论之列, 例如

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccc}
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
& 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 \\
& 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & \\
4 & & 4 & & 4 & & 4 & & 4 & & 4 & & 4 & & 4 & & 4 & & 4 & & 4 & & 4 \\
& 5 & & 5 & & 5 & & 5 & & 5 & & 5 & & 5 & & 5 & & 5 & & 5 & & 5 & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}.$$

Definition 1.10 Grassmann 空间 $\mathrm{Gr}_{k,m}(\mathbb{R})$ 为 $\mathbb{R}^m$ 中 k 维子空间之集, 即商空间

$$\{A \in \mathbb{R}^{m\times k} \mid \mathrm{rank}(A) = k\}/\text{初等(纵)列变换}.$$

特别地, 可取代表元

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n-k,1} & \cdots & \cdots & a_{n-k,k} \end{pmatrix}.$$

从而可见同构 $\mathrm{Gr}_{k,m}(\mathbb{R}) \cong \mathrm{Gr}_{(m-k),m}(\mathbb{R})$.

Example 1.11 定义子空间 $\mathrm{Gr}^+_{2,m}(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{Gr}_{2,m}(\mathbb{R})$, 其中任意 $A \in \mathrm{Gr}^+_{2,m}(\mathbb{R})$ 的一切 2×2 子式行列式值均为正. 实际上, 判断 A 恒正与否所需的最少行列式值为 $2n-3$. 对任意 $\left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{smallmatrix}\right)$, 记 $p_{ij} = \det\left(\begin{smallmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{smallmatrix}\right)$, 则有关系

$$p_{ik}p_{jl} = p_{ij}p_{kl} + p_{il}p_{jk} \qquad (1 \le i < j < k < l \le m).$$

对照 **Theorem 1.8**, 计算 A 的所有 2×2 子式的行列式值仅需所有边(n 条)与三角化给出的对角线($n-3$ 条) 即可.

Definition 1.12 Example 1.11 中给出 $\mathrm{Gr}_{2,m}(\mathbb{R})$ 的一种恒正条件. 先定义 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ 上的旗恒正条件如下, 记 $J = \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$, 则 $A \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ 旗恒正若且仅若一切

$$\det\begin{pmatrix} a_{1,i_1} & a_{1,i_2} & \cdots & a_{k,i_k} \\ a_{2,i_1} & a_{2,i_2} & \cdots & a_{k,i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,i_1} & a_{k,i_2} & \cdots & a_{k,i_k} \end{pmatrix} > 0.$$

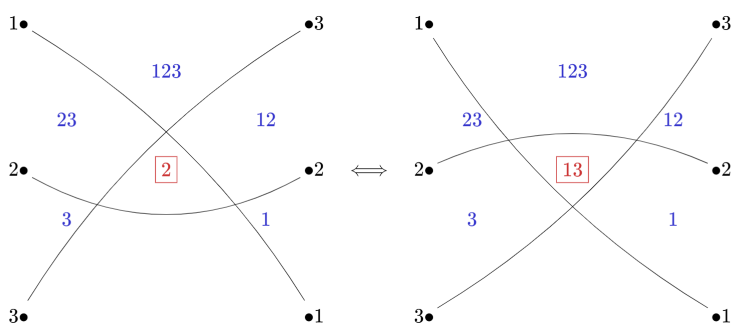
其中 $1 \le k \le n$, 不妨假定 $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$.

💡 **Remark** 可以注意到, $(\det(a_{t,i_t}) \mid 1 \le k \le n, J \subseteq \{1, \ldots, n\})$ 在左乘 1-对角下三角矩阵下不变. 该性质可以联系 Lie 群半单表示.

Remark 称之旗恒正, 是因为对 $J_1 \subsetneqq J_2 \subsetneqq \cdots$, 限制在 $\{1, 2 \ldots, |J_k|\} \times J_k$ 上的子矩阵之列向量空间如旗帜般包含, 如

$$\mathrm{span}\{1\text{ 维的升旗台(点)}\} \subsetneqq \mathrm{span}\{1\text{ 维旗杆}\} \subsetneqq \mathrm{span}\{2\text{ 维旗面}\} \subsetneqq \cdots .$$

Example 1.13 我们希望寻找刻画旗恒正关系的最少子矩阵数. 实际上, 观察变换



🔗链接

图中,

- 任意一张图左右两侧的黑点分别为 $\{1, \ldots, n\}$ 的正序与倒序;
- 任意两条线有且仅有一个交点;
- 不存在交于一点的三条直线.

记 p_J 为 $\det(a_{k,i_l})_{1 \le k,l \le |J|}$, 则有关系 $p_{\{1,3\}}p_{\{2\}} = p_{\{1,2\}}p_{\{3\}} + p_{\{2,3\}}p_{\{1\}}$. 从而旗恒正关系所需的最少子矩阵恰好等同于图中区域数量, 即 $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$.

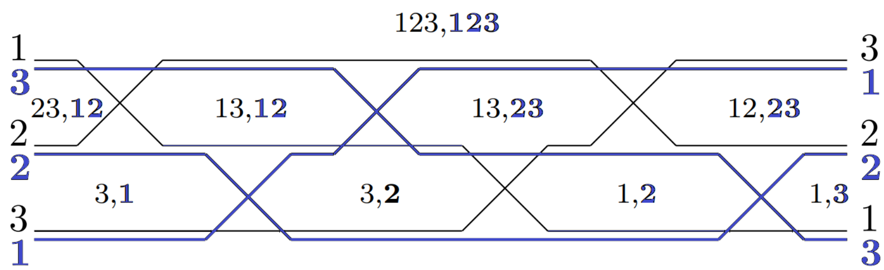
Theorem 1.14 (Muir) 若矩阵的某些子式(方阵)的行列式满足某些齐次恒等关系(如 $p_{\{1,3\}}p_{\{2\}} = p_{\{1,2\}}p_{\{3\}} + p_{\{2,3\}}p_{\{1\}}$), 则对于嵌入

$$\iota : U \hookrightarrow \tilde{U}, A \mapsto \begin{pmatrix} A & * \\ * & *_{R \times C} \end{pmatrix},$$

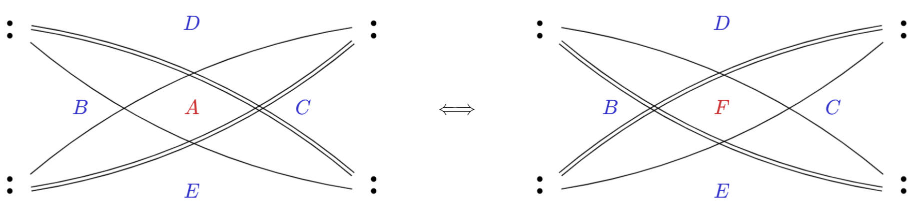
相应的恒等式在嵌入的空间中仍成立, 其中 $p_{I,J} \mapsto p_{I \dot\cup R, J \dot\cup C}$. 例如 $\mathfrak{sl}_4(\mathbb{R})$ 中

$$p_{\{1,3,4\}}p_{\{2,4\}} = p_{\{1,2,4\}}p_{\{3,4\}} + p_{\{2,3,4\}}p_{\{1,4\}}.$$

Example 1.15 将旗恒正关系推广至一般情形, 即判断 $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ 的子式行列式值($\sum_{i=1}^{3}\binom{3}{i}^2 = 19$ 种)恒正所需的最少子式行列式值. 类比 **Example 1.13**, 考虑双写图表



对应的子式有 9 个. 相应的自然变换另有下图(其中, $AF = DE + BC$).



🔗链接

Quivers

Definiton 2.1 丛代数中的 quiver 为有向图, 其中

- 允许多重边;
- 不允许出现边数为 1 或 2 的定向环;
- 顶点分为固定的与可迁的两类.
- 在运动中, 固定点间的连边被保留, 即一切活动在所有可迁点及其箭头上进行.

Definition 2.2 固定 quiver 内的可迁顶点 k, 定义 k 处的运动 μ_k 包含以下四步:

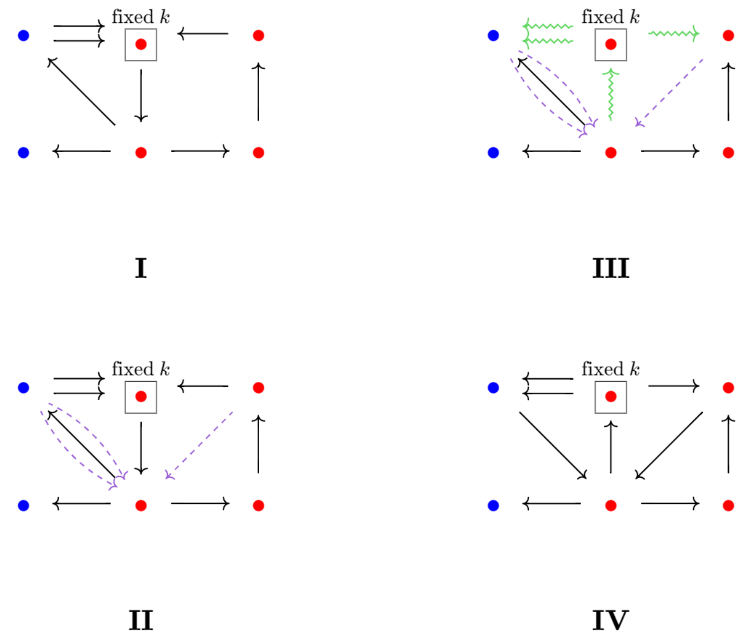
Step I. 右图即为 quiver, 左侧两个蓝色点固定, 右侧四个红色点可迁.

Step II. 若存在长度为 2 的道路 $i \to \boxed{k} \to j$, 则添边 $i \to j$. 此时暂不考虑有无既有的连边 $i \to j$.

> 特别地, 当 i 与 j 均不是可迁的, 则不进行任何操作!

Step III. 将 $\boxed{k}$ 点处所有箭头反向, 如 $i \to \boxed{k}$ (resp. $\boxed{k} \to j$) 变更为 $\boxed{k} \to j$ (resp. $j \to \boxed{k}$).

Step IV. 约去边数为 2 的定向圈, 即逐一约化 $i \rightleftarrows j$ 为 $i \quad j$.



🔗链接

Theorem 2.3 $\mu_k^2 = \mathrm{Id}$ 对一切(可迁的) k 成立. 对不相连的 i 与 j, 有对易关系 $\mu_i\mu_j = \mu_j\mu_i$.

Definition 2.4 参照 **Definition 3.2**, 定义 quiver 上的

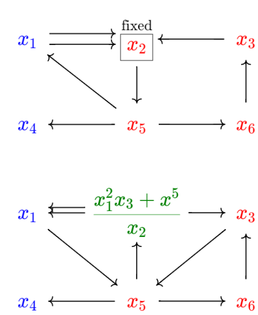
$$\begin{aligned} \text{丛} &\longleftrightarrow \{\text{丛变量}\}, \\ \text{广丛} &\longleftrightarrow \{\text{丛变量}, \text{常量}\}; \\ \text{常量} &\longleftrightarrow \bullet\ \text{固定点}, \\ \text{丛变量} &\longleftrightarrow \bullet\ \text{可迁点}. \end{aligned}$$

> 💡 **Remark** 对上述许多变换均可建立广丛, 例如以下几个例子.

Example 2.5 定义变换如下

$$\mu_k : (Q, x) \mapsto (Q', x');$$

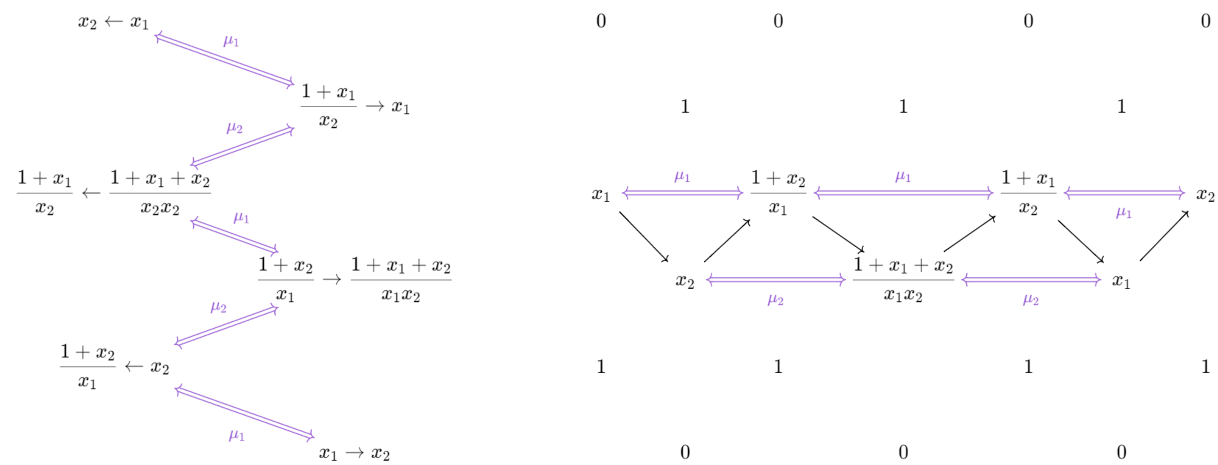
$$\begin{aligned} Q' &= \mu_k(Q), \\ x' &= (x \setminus \{x_k\}) \cup \{x_k'\}, \\ x_k' &:= \frac{\prod_{j \leftarrow k} x_j + \prod_{i \to k} x_i}{x_k}. \end{aligned}$$



🔗链接

从而生成若干 Laurent 多项式.

特别地, Quiver $1 \to 2$ 中所有顶点可迁, 则有如下变换



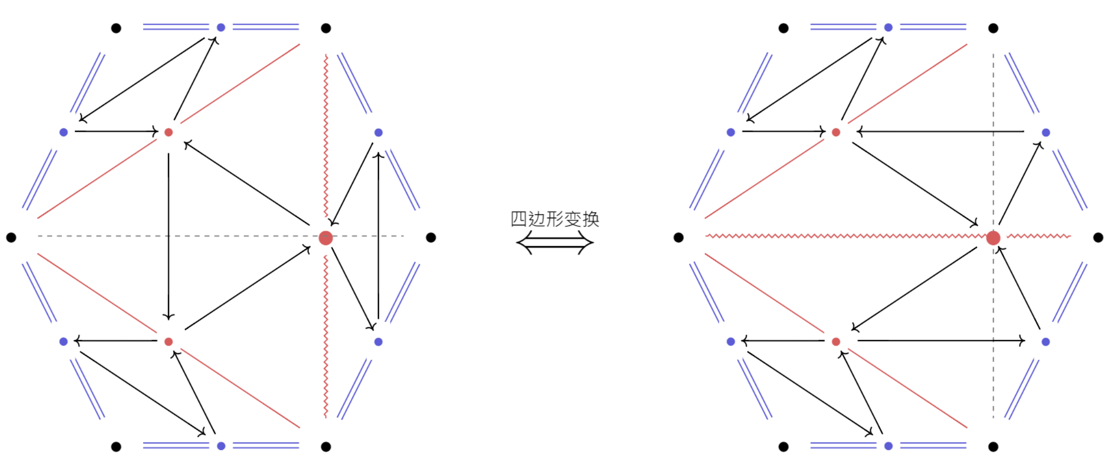
🔗link

此处, 丛代数 $A(1 \to 2)$ 即二元有理式环 $\mathbb{C}(x_1, x_2) := \mathrm{frac}(\mathbb{C}[x_1, x_2])$ 的子环, 生成元为

$$\chi = \left\{ x_1, x_2, \frac{1+x_1}{x_2}, \frac{1+x_2}{x_1}, \frac{1+x_1+x_2}{x_1 x_2} \right\}.$$

一般地, 丛代数定义为多项式环 $\mathbb{C}[\chi, x_{n+1}, \ldots, x_m]$. 其中 χ 为可迁点在有限步运动下可能生成的所有 Laurant 多项式, $\{x_{n+1}, \ldots, x_m\}$ 为固定点.

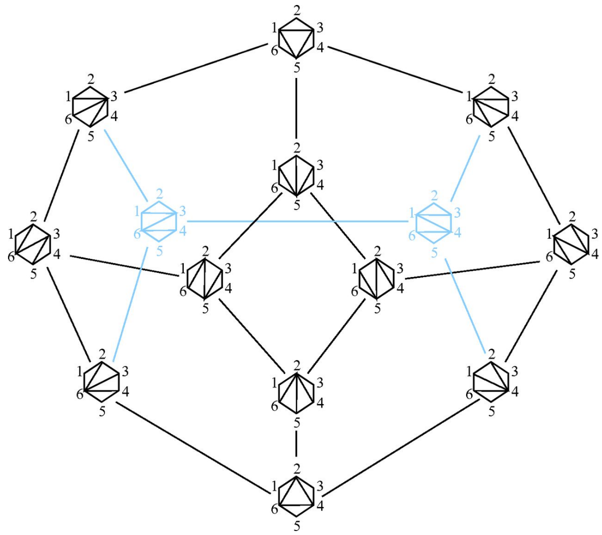
Example 2.6 正多边形三角剖分间的转化关系如下, 其中丛变量为对角线, 常量为多边形的边,



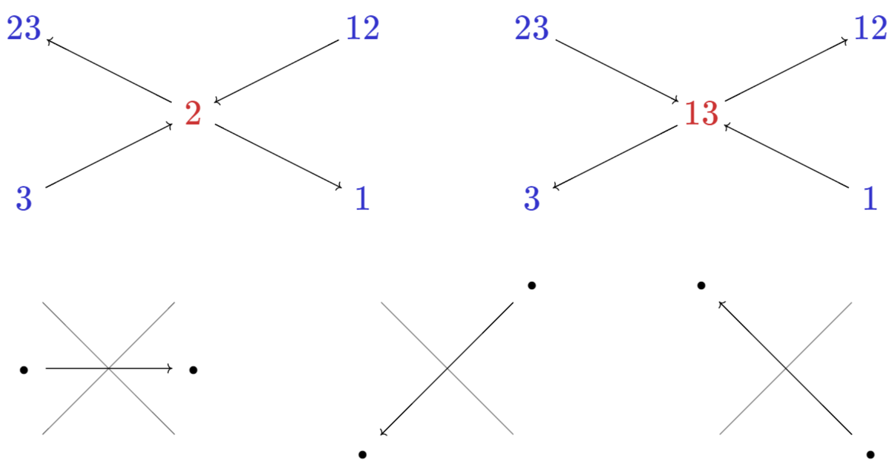
🔗链接

其中任意三角形中的**小三角统一呈逆时针相接**, 任意变量处的箭头"**两进两出, 方向相对**".

以下是对六边形间三角化的转化关系(区分顶点), 边表示一次运动(由于运动变换对合, 故图无向).



Example 2.7 Example 1.13 中的变换可表示如下, 其中下行表示连接规则.

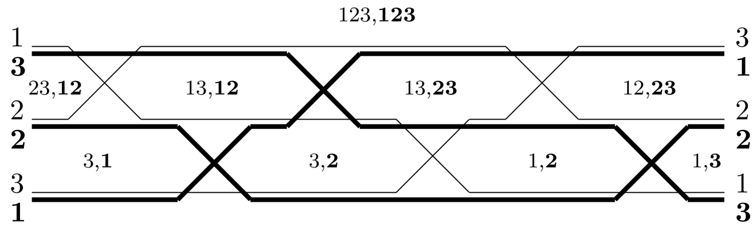


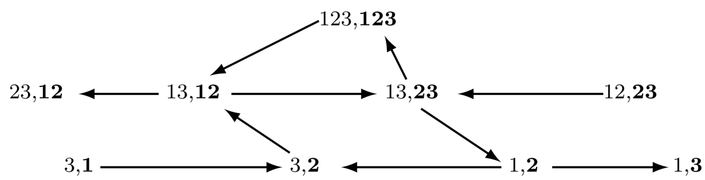
🔗链接

对于 **Example 1.15** 中的双写, 可简化规则为如下. 称存在区域间的连边 $c \to c'$ 以下一者成立

$$\begin{array}{ccccc} c'\mathrm{X}c & \begin{matrix} c \\ \mathrm{L}<c'>\mathbf{R} \end{matrix} & \begin{matrix} c' \\ \mathbf{L}<c>\mathrm{R} \end{matrix} & \begin{matrix} \forall<c'>\mathbf{R} \\ \mathbf{L}<c>\forall \end{matrix} & \begin{matrix} \forall<c>\mathbf{R} \\ \mathbf{L}<c'>\forall \end{matrix} \\ c\mathbf{X}c' & \begin{matrix} \mathrm{L}<c'>\mathbf{R} \\ c \end{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{L}<c>\mathrm{R} \\ c' \end{matrix} & \begin{matrix} \mathrm{L}<c'>\forall \\ \forall<c>\mathrm{R} \end{matrix} & \begin{matrix} \mathrm{L}<c>\forall \\ \forall<c'>\mathrm{R} \end{matrix} \end{array}.$$

从而转化 **Example 1.15** 如下.





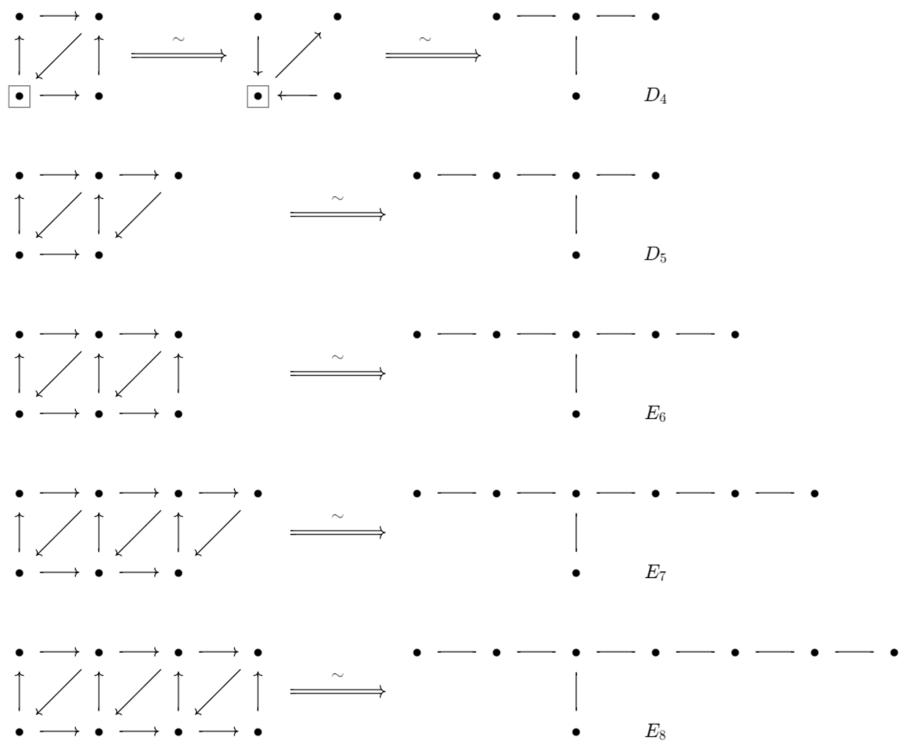
Definition 2.8 称 Q 与 Q' **运动等价**, 若他们能通过有限步运动相转化. 记等价类为 $[Q]$.

Definition 2.9 称 Q 与 Q' 由相同的**型**, 若他们在相差若干个固定点与固定边的意义下运动等价. 换言之, 他们的**可迁部分运动等价**.

Example 2.10 假定树上所有顶点可迁, 则可以通过源与汇处的运动实现所有定向图之间的转变.

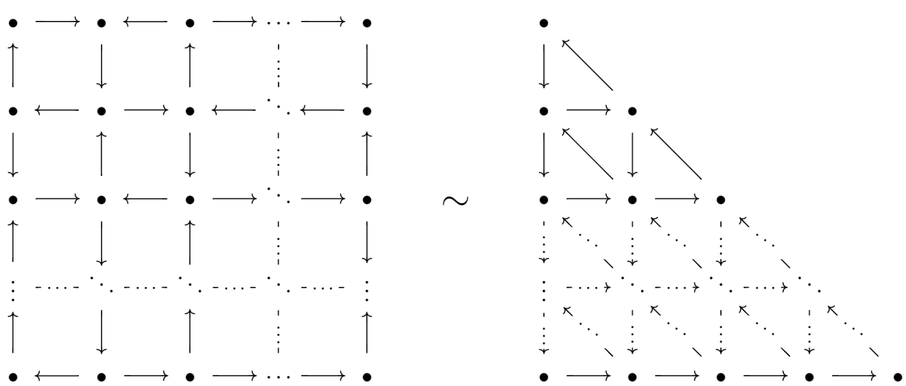
> 💡 **Remark** 职是之故, 树即等价类.

Example 2.11 依照第一行, 类似得到格 quiver 与特殊 Dynkin 图间的转化关系.



🔗链接

类似地, 还有 $k \times (2k+1)$-型方格 quiver 与 $\binom{2k}{2}$-型三角格 quiver 间的等价关系



矩阵表示

Definition 3.1 quiver Q 的矩阵表示为 $\tilde{B}(Q) := (b_{i,j})_{m\times n}$, 其中 $b_{i,j}$ 为 $i \to j$ 的连边数. 其中 m 行对应所有顶点, n 列对应可迁顶点. 记可迁顶点诱导的 n 阶子方阵为 $B(Q)$, 则 $B(Q)$ 反对称.

Proposition 3.2 μ_k 对应的矩阵变换为

$$
b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij}, & (i = k) \vee (j = k); \\ b_{ij} + b_{ik}b_{kj}, & (b_{ik} > 0) \wedge (b_{jk} > 0); \\ b_{ij} - b_{ik}b_{kj}, & (b_{ik} < 0) \wedge (b_{jk} < 0); \\ b_{ij}, & \text{otherwise}. \end{cases}
$$

Proposition 3.3 以下结论对 B 与 $\tilde{B}$ 均成立: $\mu_k^2 = \mathrm{Id}$, μ_k 和转置可易, μ_i 与 μ_j 可易即 $b_{ij} = 0$.

Definition 3.4 称 n 阶矩阵 B 为**可反对称化矩阵**, 若且仅若存在正整数 $\{1, \ldots, d\}$ 使得 $d_i b_{ij} + d_j b_{ji} = 0$ 对一切 $1 \le i, j \le n$ 成立. 定义 B 的反对称化为 $S(B) = (\mathrm{sgn}(b_{ij})\sqrt{|b_{ij}b_{ji}|})_{n\times n}$.

Proposition 3.5 S 与一切 μ_k 可对易.

Definiton 3.6 根据 **Proposition 3.5**, 定义

$$
\Gamma : \text{可反对称化矩阵} \to \text{quivers}, B \mapsto (\mathrm{sgn}(b_{ij}) \cdot |b_{ij}b_{ji}|)_{n\times n}.
$$

例如 $\Gamma\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \Gamma\left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{smallmatrix}\right) = (i \mathrel{\substack{\longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow}} j)$.

Proposition 3.7 矩阵在运动中的不变量包括

- $\mathrm{rank}(\tilde{B})$ 与 $\mathrm{rank}(B)$ 在任意有限个 μ_k 的作用下不变;
- 任意可反对称化的矩阵在运动下行列式不变;
- B 中任意一横行(或纵列)中非零元的最大公约数在运动中不变.

丛的 Laurant 现象

Definition 4.1 对 $m \ge n$, 定义

- $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ 为线性独立的变量, 其中 $\mathcal{F} = \mathbb{F}(x_1, \ldots, x_m)$ 为基域(有理多项式域);
- $\tilde{B} = (b_{ij})_{m\times n}$, 其中限制在前 n 列上的方阵 B 反对称;

称 $\tilde{x}$ 为广义丛, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ 为丛. 注意到有对应

$$
\{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m\} \iff \{\text{可迁点}, \text{固定点}\}.
$$

Definition 4.2 定义对易关系(规定空的乘积为 1)

$$
x'_k x_k = \prod_{b_{ik}>0} x_i^{b_{ik}} + \prod_{b_{ik}<0} x_i^{-b_{ik}}.
$$

Definition 4.3 Quiver 上运动 $\{\mu_k\}_{1\le k\le n}$ 生成的自由群在商去对合关系 $\mu_k^2 = \mathrm{Id}$ 下生成数 $\mathbb{T}_n$, 如

$$\mathbb{T}_1 \qquad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, dash, "1"] & \bullet \end{tikzcd}$$

$$\mathbb{T}_2 \qquad \begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, dash, "1"] & \bullet \arrow[r, dash, "2"] & \bullet \arrow[r, dash, "1"] & \bullet \arrow[r, dash, "2"] & \cdots \end{tikzcd}$$

$$\mathbb{T}_3 \qquad \begin{tikzcd} \vdots \arrow[d, dash, "1"] & \vdots \arrow[d, dash, "2"] & & \vdots \arrow[d, dash, "1"'] & \vdots \arrow[d, dash, "1"'] \\ \bullet \arrow[r, dash, "3"] \arrow[d, dash, "2"'] & \bullet \arrow[r, dash, "1"] & \bullet \arrow[r, dash, "2"] \arrow[d, dash, "3"] & \bullet \arrow[r, dash, "3"] & \bullet \arrow[d, dash, "2"] \\ \vdots & \cdots \arrow[r, dash, "1"'] & \bullet \arrow[r, dash, "2"] & \cdots & \vdots \end{tikzcd}$$

🔗链接

💡 **Remark** 如 $(\mu_1\mu_2)^{10} : [x_1 \to x_2] \mapsto [x_1 \to x_2]$, 对应群 $\langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^{10} = 1\rangle$.

Definition 4.4 定义

- 丛变量集 $\mathcal{X}$ 为 $\{x_i\}_{1\le i\le n}$ 在经 $\mathbb{T}_n$ 每条边(交换关系)生成的 Laurant 多项式族;
- $R = \mathbb{F}[x_{n+1}, \dots, x_m]$ 为固定点生成的基环;
- R 上丛代数为 $\mathcal{A} := R[\mathcal{X}]$;
- 基域 $\mathcal{F} = \mathbb{F}(x_1, \dots, x_n)$.

Example 4.5 回顾判断旗恒正矩阵一段所考虑的空间 $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) / \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & \\ * & 1 & \\ * & * & 1 \end{pmatrix} \right\}$, 则

- 固定点为 p_1, p_3, p_{12} 与 p_{23};
- 可迁点为 p_2 与 p_{13};
- 对易关系 $p_2p_{13} = p_1p_{23} + p_3p_{12}$.

从而丛变量集 $\mathcal{X} = \{p_2, p_{13}\}$ (其余为常量) $R = \mathbb{F}[p_1, p_3, p_{12}, p_{13}]$, $\mathcal{F} = \mathbb{F}(p_1, p_2, p_3, p_{12}, p_{13})$.

Example 4.6 $\mathbb{T}_1$ 给出的丛代数中, $\mathcal{X} := \{x_1, x_1'\}$, 起始矩阵 $\tilde{B}_0 = (0, *, \dots, *)_{m\times 1}$, 从而对易关系为 $x_1x_1' = M_1 + M_2$ 形式, 其中 M_1 与 M_2 为互素的单项式. 例如 **Example 4.5**.

Example 4.7 $\mathbb{T}_2$ 给出的丛代数稍许复杂, 暂时考虑所有顶点可迁的情形可反对称化矩阵 $\pm\begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix}$. 其中, $b = c = 0$ 表明 μ_1 与 μ_2 可交换, 故以下考虑 b 与 c 同为正数之情形即可.

> 💡 **Remark** 以下丛变量的生成由均矩阵变换给出. 先前已证明一切可反对称化矩阵上的变换与对称化 S 可交换, 对非反对称之情形暂不考虑 quiver.

此时, 丛无非 (x_1,x_2), (x_1',x_2), (x_1,x_2') 与 (x_1',x_2'), 丛变量无非 $\{x_1,x_2,x_1',x_2'\}$, 对易关系

$$x_1x_1'=M_1+M_2,\quad x_2x_2'=M_3+M_4;\qquad M_i \text{ 均为 } x_{n+t} \text{ 生成的首一单项式.}$$

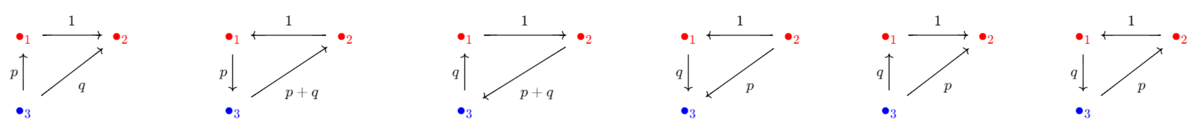
待定 $\mathcal{X}$ 中元素为 z_k 等, 即如下图所示

$$\begin{array}{cccccccccccc} & & & (z_1\ \ z_0) & & (z_1\ \ z_2) & & (z_3\ \ z_2) & & (z_3\ \ z_4) & & \\ \mathbb{T}_2 & \cdots & \overset{1}{\text{———}} & \begin{pmatrix}0&-b\\c&0\end{pmatrix} & \overset{2}{\text{———}} & \begin{pmatrix}0&b\\-c&0\end{pmatrix} & \overset{1}{\text{———}} & \begin{pmatrix}0&-b\\c&0\end{pmatrix} & \overset{2}{\text{———}} & \begin{pmatrix}0&b\\-c&0\end{pmatrix} & \overset{1}{\text{———}} & \cdots \end{array}$$

链接

从而 k 为偶数时有 $z_{k-1}z_{k+1}=z_k^c+1$, k 为奇数时有 $z_{k-1}z_{k+1}=z_k^b+1$.

Example 4.8 特别地, 在以上例子中令 $b=c=1$, 则有周期现象 $z_{5+s}=z_s$. 今增加一固定点, 则



$$\begin{array}{ccccccccccc} \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\\p&q\end{pmatrix} & \overset{1}{\text{———}} & \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\\-p&p+q\end{pmatrix} & \overset{2}{\text{———}} & \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\\q&-p-q\end{pmatrix} & \overset{1}{\text{———}} & \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\\-q&-p\end{pmatrix} & \overset{2}{\text{———}} & \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\\-q&p\end{pmatrix} & \overset{1}{\text{———}} & \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\\q&p\end{pmatrix} \\ (z_1\ \ z_2) & & (z_3\ \ z_2) & & (z_3\ \ z_4) & & (z_5\ \ z_4) & & (z_5\ \ z_6) & & (z_7\ \ z_6) \end{array}$$

链接

计算得 $z_3=\dfrac{z_2+y^p}{z_1}$, $z_4=\dfrac{z_2+y^{p+q}z_1+y^p}{z_1z_2}$, $z_5=\dfrac{y^q+1}{z_2}$, $z_6=z_1$, $z_7=z_2$. 周期性不变.

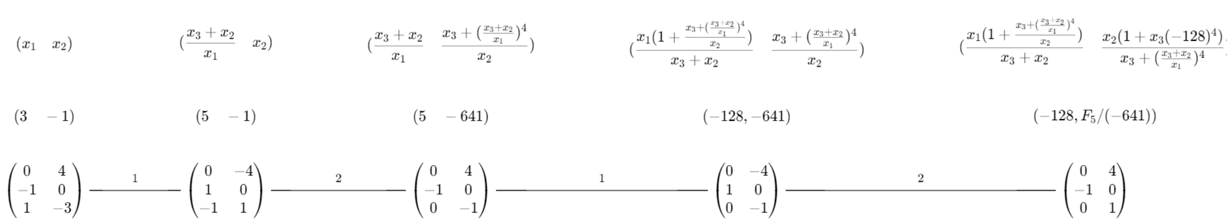
> 💡 **Remark** 记 **Example 4.7** 中代数为 $\mathcal{A}(b,c)$, 则 $\mathcal{A}(1,1)$ 5-周期, $\mathcal{A}(1,2)$ 6-周期; 然而 $\mathcal{A}(1,4)$ 不再存在周期现象, 但每项均为正整数, i.e.,
>
> $$1,1,2,3,14,41,937,67,21506,321,493697,1538,\ldots.$$

Theroem 4.9 (Laurant 现象) 丛代数中丛变量集 $\mathcal{X}$ 由整系数 Laurant 多项式组成; 广义丛中 Laurant 多项式的分母均不含 $\{x_i\}_{n+1\le i\le m}$.

Example 4.10 证明 $F_5 = 2^{32}+1$ 非素数. 考虑 A_3 型丛结构

$$\tilde{x} = ({\color{red}x_1}, {\color{red}x_2}; {\color{blue}x_3}) \qquad \tilde{B}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

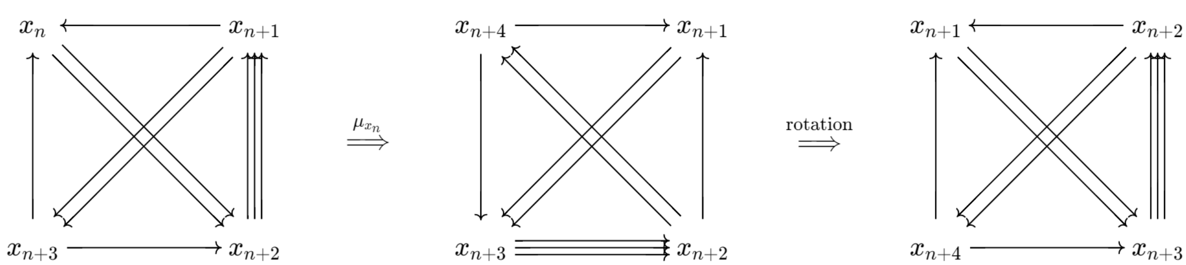
取 $(x_1,x_2,x_3)=(3,-1,16)$, 则 $x_1' = \dfrac{x_2+x_3}{x_1} = 5$. 根据 Laurant 现象, 数组在 $\{\mu_1,\mu_2\}$ 不断作用下的结果一定是 $\dfrac{\mathbb{Z}}{3^q\cdot 5^q}$ 的形式. 注意到



[🔗链接]

结合 $3\nmid 641$ 与 $5\nmid 641$, 从而 F_5 有约数 641.

Example 4.11 $\{x_{n+4} = x_n^{-1}(x_1x_3+x_2^2), x_0=x_1=x_2=x_3=1\}$ 的各项为正整数. 该序列即 Simon-4 序列. 实际上, 注意到以下变换即可.



[🔗链接]

Example 4.12 对关系 $x_0x_5 = x_1x_4 + x_2x_3$ 及初值 $x_{0,1,2,3,4}=1$, 则

$$\tilde{B} = B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ -1 & -p_{12} & 0 & p_{23} & p_{24} \\ -1 & -p_{13} & -p_{23} & 0 & p_{34} \\ 1 & -p_{14} & -p_{24} & -p_{34} & 0 \end{pmatrix}$$

我们希望矩阵在 μ_1 作用下等同于作用一个行列置换, 不妨考虑方程

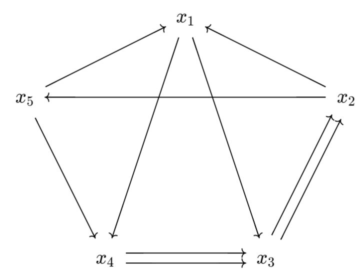
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & p_{12}+1 & p_{13}+1 & p_{14} \\ 1 & -p_{12}-1 & 0 & p_{23} & p_{24}-1 \\ 1 & -p_{13}-1 & -p_{23} & 0 & p_{34}-1 \\ -1 & -p_{14} & -p_{24}+1 & -p_{34}+1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -p_{14} & -p_{24} & -p_{34} \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ p_{14} & 1 & 0 & p_{12} & p_{13} \\ p_{24} & -1 & -p_{12} & 0 & p_{23} \\ p_{34} & -1 & -p_{13} & -p_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

解以及对应的 quiver 如右图所示.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

同样地, Laurant 现象保证序列各项为整数.



🔗链接

Definition 4.13 (y 换元) 考虑

$$\hat{y} = (\hat{y}_i)_{1\le i\le n}, \quad \hat{y}_j = \prod_{i=1}^{m} x_i^{b_{ij}}.$$

不难计算 μ_k 带来如下形式的变换

$$\hat{y}_j' = \begin{cases} \hat{y}_k^{-1} & j = k, \\ \hat{y}_j(\hat{y}_k+1)^{-b_{kj}} & j \neq k, b_{kj} \le 0, \\ \hat{y}_j(\hat{y}_k^{-1}+1)^{-b_{kj}} & j \neq k, b_{kj} \ge 0. \end{cases}$$

Definition 4.14 定义 $\mathcal{F}$ 中的 n 阶 Y-种子为配对 (Y, B), 其中

- Y 为 $\mathcal{F}$ 的 n 元组;
- B 为 $n \times n$ 大小的可反对角化矩阵.

定义 $\mu : (Y, B) \mapsto (Y', B')$, 其中 $B \mapsto B'$ 为前文所言的矩阵变换, 而

$$Y_j' = \begin{cases} Y_k^{-1} & j = k, \\ Y_j(Y_k + 1)^{-b_{kj}} & j \neq k, b_{kj} \leq 0, \\ Y_j(Y_k^{-1} + 1)^{-b_{kj}} & j \neq k, b_{kj} \geq 0. \end{cases}$$

Example 4.15 考虑 2 阶 Y-种子间的转化(对照 $\mathbb{T}_2$)如下

$$\cdots \overset{2}{—} (Y(0), B(0)) \overset{1}{—} (Y(1), B(1)) \overset{2}{—} (Y(2), B(2)) \overset{1}{—} \cdots.$$

若限定 $B(t) = (-1)^t \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, 则可得以下关系

$$\begin{aligned} &t \text{ 为偶数:} \quad Y(t+1) = \mu_1(Y(t)), \quad Y_1(t+1) = \frac{1}{Y_1(t)}, \quad Y_2(t+1) = \frac{Y_2(t)}{1 + Y_1(t)^{-1}}; \\ &t \text{ 为奇数:} \quad Y(t+1) = \mu_2(Y(t)), \quad Y_2(t+1) = \frac{1}{Y_2(t)}, \quad Y_1(t+1) = \frac{Y_1(t)}{1 + Y_2(t)^{-1}}. \end{aligned}$$

从而 Y 有如下 10 周期结构(半周期处为对换)

$t:$	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
$Y_1(t):$	y_1	y_1^{-1}	$\dfrac{y_2}{1+y_1+y_1y_2}$	$\dfrac{1+y_1+y_1y_2}{y_2}$	y_2^{-1}	y_2	$\dfrac{y_1y_2}{1+y_1}$	$\cdots$
$Y_2(t):$	y_2	$\dfrac{y_1y_2}{1+y_1}$	$\dfrac{1+y_1}{y_1y_2}$	$\dfrac{1}{y_1(y_2+1)}$	$y_1(y_2+1)$	y_1	y_1^{-1}	$\cdots$

> 💡 **Remark** 结合 **Example 4.8** 与 **Example 4.15** 展示的周期现象, 以及 Simon 序列与 $\mathcal{A}(1,4)$ 的非周期现象, 我们很自然地想到为有限型的 (Y, B) 进行分类. 这似乎与 Dynkin graph 有关(丛代数本身即作为一种研究Lie 理论的工具而被提出(Zelevinsky, 2000 年)).