图谱论导引(第十八期)

再论Moore图

往期推文留有一则疑问: 为何Moore图的所有可能度数为$\{2,3,7,57\}$? 本期将文章将解答之. 回顾Moore图的定义: 图G为直径为d的Moore图若且仅若围长(girth, 即最小圈)为$2d+1$. 下先证明: Moore图为正则图.

Moore图正则性

不妨设u与v为相距d的两点, 因此存在唯一一条连接u与v的长为d的路$P(u,v)$. 现取$N(v)\setminus P(u,v)$上的一点w, 从而w与u的距离不大于d; 若w与u的距离为$d-1$, 则有两条u至w的长为d的路, 矛盾; 若w与u的距离为$d-2$乃至更小, 则与u与v距离为d矛盾. 综上w与u距离为d. 注意到每一$N(u)\setminus P(u,v)$中的点对应了一条$N(v)\setminus P(u,v)$中的电至u的路, 反之亦然. 从而$\deg u=\deg v$, 即G中所有相距d的两个点有相同的度数.

对任意$C_{2d+1}\subset G$, 取$x,y\in C_{2d+1}$. 若$x\sim y$, 则存在$z\in C_{2d+1}$使得$d(x,z)=d(y,z)=d$, 从而C_{2d+1}中所有点有相同度数. 对于某选定C_{2d+1}之外的点q, 记$d(q,C_{2d+1})=k$. 取C_{2d+1}与上与q相距k的点z_1, 再取$z_2\in C_{2d+1}$使得$d(z_2,q)=d$即可(一定可取到). 由此可知$\deg z_2=\deg z_1=\deg q$.

归纳可知, G为正则图.

Moore图为等距正则图

设G为半径为d的连通图. 对$i=1,2,\ldots,d$, 记$\Gamma_i(u)$为一切与u相距i长度之点集合. 称G为等距正则的(distance-regular)若且仅若存在非负整数$b_0,b_1,\ldots,b_{d-1}$与$c_1,c_2,\ldots,c_d$使得对任意相距i的两点u,v都有

$$\begin{aligned}b_i&=|\Gamma_{i+1}(u)\cap\Gamma_1(v)|\\ c_i&=|\Gamma_{i-1}(u)\cap\Gamma_1(v)|\end{aligned}.$$

例如Petersen图等距正则, 其系数$\{b_0,b_1;c_1,c_2\}=\{3,2;1,1\}$.

对Johnson图$J(n,m)$(等价的, $J(n,n-m)$)而言, 直径为$\min\{m,n\}$. 系数

$$\begin{aligned}b_i&=(m-i)(n-m-i)\\ c_i&=i^2\end{aligned}.$$

对Moore图而言, 设等点度为k, 则$b_0=k$, $b_1=b_2=\cdots=b_{d-1}=k-1$, $c_1=c_2=\cdots=c_d=1$. 特殊地, 等距正则图为Moore图若$c_d=1$且$b_{d-1}=k-1$.

k的可能取值

一般地, Moore图$G(k,d)$决定了

$$n=1+k\sum_{i=0}^{d-1}(k-1)^i.$$

当$k=2$时, G无非为C_{2d+1}. 一般地, 围长为5的强正则图(Moore图)$G(n,k,0,1)$的邻接矩阵满足

$$A^2+A-(k-1)I=J.$$

从而$\tau,\theta=\dfrac{1}{2}(-1\pm\sqrt{4r-3})$. 此外, 重数满足

$$\begin{cases} m_\tau + m_\theta = r^2 \\ \tau m_\tau + \theta m_\theta = -r \end{cases}$$

令$r = \dfrac{1}{4}(s^2+3) \in \mathbb{N}^*$, 则在以上方程中消去$m_\theta$得

$$s^5 - s^4 + 6s^3 - 2s^2 + (9 - 32m_\tau)s - 15 = 0.$$

由于s为整数, 故s为15之因数. 从而$s \in \{1,3,5,15\}$, 即

$$r \in \{3,5,7\} \quad (r \neq 1).$$

特殊正则图顶点数量上界

承上文, 自然有如下疑问: 围长为5的k-正则图至少有对少顶点? 本问题较为简单, 选定点v及其邻点$N(v)$, 所欲求者至少有$|N(N(v)) \cup N(v)| = k^2+1$个邻点. 下将证明: 围长为5的$k$-正则图不可能含有$k^2+2$个零点.

不妨设G为有$n = k^2+2$个顶点的围长为5的k-正则图, 易知k为偶数. 有k-正则性可知距离$\forall v \in V(G)$距离为3的点唯一存在, 记作v^*. 由唯一性知$v^{**} = v$. 由已知有

$$A^2 + A - kI = J - B - I.$$

其中$B = \oplus_{i=1}^{n/2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$为直和, 上式等号两边为$K_n - \dfrac{n}{2}K_2$之邻接矩阵. 由于$B$的谱为$(n-2, 0^{n/2}, -2^{n/2-1})$, 从而$A$有半数特征根满足方程$\lambda^2+\lambda-k=0$, 有$\dfrac{n}{2}-1$个特征根满足$\lambda^2+\lambda-k+2=0$, 即

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{4k+1})$$
$$\lambda_{3,4} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{4k-7})$$

下讨论三种可能情形:

1. $\sqrt{4k+1}$与$\sqrt{4k-7}$均为有理数. 此时$k=2$, G为C_6, 矛盾.
2. $\sqrt{4k+1}$与$\sqrt{4k-7}$均为无理数. 若此时$(4k+1)(4k-7) = (4k-3)^2 - 16$为平方数, 则$k=2$, 矛盾(同上); 从而$\sqrt{4k+1}$与$\sqrt{4k-7}$在$\mathbb{Q}$上线性无关. 注意到$\lambda_{3,4}$成对出现, 而$\lambda_{3,4}$为奇数, 从而矛盾.
3. $\sqrt{4k+1}$无理而$\sqrt{4k-7}$有理, 则一切$\dfrac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{4k+1})$和为整数, 即$-\dfrac{n}{4}$为整数. 由于$n = k^2+2 \equiv 2 \mod 4$, 矛盾.
4. $\sqrt{4k+1}$有理而$\sqrt{4k-7}$无理, 则$\dfrac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{4k-7})$成对出现, 和为$-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}$. 不妨设$\dfrac{1}{2}(-1+\sqrt{4k+1})$重数为$m$, 由$\operatorname{trace}(A)=0$知

   $$k + m \cdot \frac{1}{2}(-1+s) + \left(\frac{n}{2} - m\right)\frac{-1-s}{2} - \frac{n}{4} + \frac{1}{2} = 0.$$

   其中$s = \sqrt{4r+1}$. 化简得

   $$s^5 + 2s^4 - 2s^3 - 20s^2 + (33 - 64m)s + 50 = 0.$$

   从而s为50约数, 验证得$s=5$或25合理. 该情形下, $\operatorname{trace}(A^3) \neq 0$, 即图中有三角形, 舍去.

综上, 围长为5的k-正则图不可能含有k^2+2个零点.