Gauß映射导出的曲线

决定曲线的方式

大多数情形下, 确定曲线(面)的方式为微分方程解的存在性与唯一性定理. 此处从略.

由曲率$\kappa(s)$决定的平面曲线

记$\theta(s)$为法方向旋转角, 则$\theta(s)=\int\kappa(s)\mathrm{d}s+\varphi$. 自然

$$\gamma(s)=(\int\cos\theta(s)+a,\int\sin\theta(s)+b)$$

为一切符合要求之曲线.

由$b(s)$决定的空间曲线

对非零挠率曲线, $b(s)$决定了曲率与挠率的绝对值. 因为

$$\begin{aligned}b'=&\tau n\\ b''=&\tau'n-\tau(\kappa t+\tau b)\end{aligned}$$

从而$|\tau|=|b'|,\kappa=\sqrt{\dfrac{|b'\times b''|^2-|b'|^6}{|b'|^4}}$.

由$n(s)$决定的空间曲线

对非零挠率曲线, 法向量及$\dfrac{\kappa}{\tau}$初值决定了曲率与挠率的. 因为

$$\begin{aligned}n'&=-\kappa t-\tau b\\ n''&=-\kappa't-\kappa^2n-\tau'b-\tau^2n\end{aligned}$$

从而$|n'|^2=\kappa^2+\tau^2$, 且

$$[n,n',n'']=[n,t,b](-\kappa\tau'+\tau\kappa')=\arctan(\frac{\kappa}{\tau})'\cdot(\kappa^2+\tau^2).$$

因此$\dfrac{\kappa}{\tau}$在初值已知之情形下有解. 因此κ与τ可确定.

注: 在$\dfrac{\kappa}{\tau}$未知之情形下, 解或不唯一. 如螺旋线族

$$\{(a\cos\theta, a\sin\theta, b\theta) : a, b > 0, a^2 + b^2 = 1\}$$

在$\theta = \theta_0$处法向量一致, 但挠率并非一致.

Berstrand侣线

对有正则参数的曲线$\alpha(t)$, 记活动标架为$\{t, n, b\}$. 若存在$\beta(t)$使得$\beta(t) - \alpha(t)$与n始终平行, 证明对任意t, α与β的挠率之积为常数, 并计算.

证明: 不妨以弧长参数记$\alpha = \alpha(s)$. 记$\beta(s) - \alpha(s) = \gamma(s)n(s)$, 则

$$\beta'(s) - t = \gamma' n + \gamma n'.$$

因此n系数为0, 即γ为常数. 记$\beta(s)$与$\alpha(s)$夹角为θ, 则

$$(\cos\theta)' = (T_\beta \cdot t)' = N_\beta \cdot t + T_\beta \cdot kn = 0.$$

从而θ为定值. 注意到$\beta'(s) = t - \gamma(kt + \tau b)$, 则

$$\cos\theta = \frac{\beta'(s) \cdot t}{|\beta'(s)|} = \frac{1 - \gamma k}{\sqrt{(1 - \gamma k)^2 + (\gamma\tau)^2}}.$$

不失一般性地, 记$T_\beta = t\cos\theta + b\sin\theta$. 则

$$B_\beta = T_\beta \times N_\beta = T_\beta \times n = b\cos\theta - t\sin\theta.$$

从而τ_β为B'_β中$-n$的系数, 即$k\sin\theta - \tau\cos\theta$. 注意到$\cot\theta = \dfrac{1 - \gamma k}{\gamma\tau}$, 消$k$得

$$\tau_\alpha\tau_\beta = k\tau\sin\theta - \tau\cos\theta = \frac{\sin^2\theta}{\gamma^2}.$$

注:

1. α具有Berstrand侣线当且仅当θ为定值, 即存在(A, B)使得$A\kappa + B\tau \equiv 1$.
2. 若α有两条Berstrand侣线, 则其有无穷条Berstrand侣线, 当且仅当α为圆柱面.

Jacobi的球面平分定理

定理叙述如下: 令γ可微性足够的挠率不为0的闭合曲线, 则γ的法向量n在单位球面上的轨迹将球面平分为面积相等的两部分(交叉区域需定向).

记$\gamma(s)$与$n(S)$均为弧长参数曲线, 其中$n(s)$即$n(S(s))$. 根据Gauß-Bonnet定理, $n(s)$围成面积D满足

$$\mathrm{Area(D)} = \int_D K \mathrm{d}\sigma = 2\pi - \oint_n \kappa_g(s)\mathrm{d}s.$$

其中$n(S)$的测地曲率满足

$$\begin{aligned}
\kappa_g(S) =& [n'', N(S), n'] \\
=& [-\kappa' t - \tau' b, n, -\kappa t - \tau b] \cdot \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}S}\right)^3 \\
=& (\tau\kappa' - \tau'\kappa) \cdot \frac{1}{\tau^2 + \kappa^2} \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}S} \\
=& \left[\arctan\frac{\kappa}{\tau}\right]' \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}S}
\end{aligned}$$

从而$\mathrm{Area(D)} = 2\pi$.