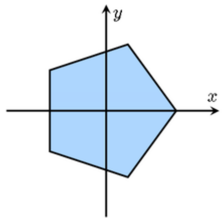
分享：Brunside引理的应用

考虑下列计数问题：n颗柱子串成一圈项链，每颗可选r种颜色，若视翻转与旋转后相同的两条项链为同类的，试问一共可生成几类项链？

设$n=6$、$r=4$，项链类数减一即卤代苯（氟氯溴碘代苯，不考虑存在性及非常规的异构现象）的种数。

自然的想法是将同类的所有项链视为等价类。将n颗珠子串成的项链视为正n边型，我们自然地引入集正n边型所有旋转和翻转的变换的群D_n：



上图的多边形的不变变换包括：旋转$2\pi/n$的变换，记变换为a；沿x轴翻转，记变换为b。则所有变换可由a与b生成，易知变换构成群。记变换群$D_n:=\langle a,b\rangle$。

D_n中元素满足：$a^n=$e，$b^2=e$，$(ab)^2=e$。这里e是单位元。可用半直积对群结构做更清晰的阐述，即

$$D_n\cong\mathbb{Z}_n\rtimes_\varphi\mathbb{Z}_2$$

形式上，D_n元素为$\mathbb{Z}_n$与$\mathbb{Z}_2$的笛卡尔积，前者同构于旋转变换而后者同构于翻转。乘积上，$\forall(g,h),(g',h')\in\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_2$

$$(g,h)(g',h'):=(g\varphi_h(g'),hh')$$

这里设$\mathbb{Z}_2=\{0_2,1_2\}$，则$\varphi_{1_2}:g\mapsto -g$，$\varphi_{0_2}:g\mapsto g$。容易验证半直积构成的群于其上的乘法是良定义的。

回到项链，视Ω为同类合并前的所有项链种数，将变换D_n作用在Ω的所有元素上即为合并操作，记$D_n\curvearrowright\Omega$为群$D_n$在$\Omega$上的作用。合并后的项链类数是集合

$$\{D_n\omega:\omega\in\Omega\}$$

中的元素个数。一般称$D_n\omega$为ω的D_n-轨道，我们只需求所有轨道条数。

Burnside引理是指：设群G作用在集合Ω上，记$F(g)$为Ω中g的不动点个数，即$|\{\omega:g\omega=\omega\}|$。设$t$为轨道的数量，则

$$t=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}F(g)$$

证明比较容易，我们只需通过两种方式计算(G,Ω)中不动点对的数量Γ，即所有满足$g\omega=\omega$的(g,ω)组数：

1. 若固定Ω，考虑每个$g\in G$，则$\Gamma=\sum_{g\in G}F(g)$。
2. 若固定G，考虑每个$\omega\in\Omega$，我们记$G_\omega:=\{g\in G:g\omega=\omega\}$。有如下引理：对任意$x,y\in\Omega$，$Gx\neq Gy\Leftrightarrow Gx\cap Gy=\emptyset$。只证明必要性：不然，设$z\in Gx\cap Gy$，则$\exists g_0\in G$使得$g_0z=x$，故$Gx=Gy$矛盾。因此$\Omega$可看作若干$G\omega_i$的无交并，$1\leq i\leq t$。
   考虑映射

$$\pi: Gx \to G/G_x, gx \mapsto gG_x$$

易知π是双射，因此$|Gx| = |G|/|G_x|$。

$$\Gamma = \sum_{\omega\in\Omega} |G_\omega| = \sum_{\omega\in\Omega} \frac{|G|}{|G\omega|} = \sum_{i=1}^{t} \sum_{\omega\in G\omega_i} \frac{|G|}{|G\omega_i|} = t|G|$$

综上，Burnside引理：$t = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} F(g)$得证。Burnside引理的核心内涵已在证明中体现，即通过两种不同的方式等价地计算不动点对的组数。

回归项链问题，我们将题目数学化地阐述：

将$B = \{1, 2, \dots, n\}$视作珠子集合，$C = \{c_1, c_2, \dots, c_r\}$视作颜色集合。取$y_i \in C$为第$i$颗珠子的颜色，将一串项链看作一个$B$到$C$的映射（每颗珠子赋值一种颜色）。记
$\Omega := C^B : \{f : f : B \to C\}$。

回顾前文，我们需要利用二面体群D_n在Ω上的作用以计数项链的类，首先需要定义$\alpha \in D_n$与$f \in \Omega$的乘法。视α为置换关系，则

$$\alpha \times f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$$

注意到项链类数即轨道条数，根据Burnside引理，只需求$\frac{1}{|D_n|}\sum_{\alpha\in D_n} F(\alpha)$。

$\alpha \times f = f$当且仅当将α写成轮换形式后，每组轮换因子序标对应的y_i相同。一条重要的定理是：任意置换写成两两不交轮换的形式是唯一的。我们设α的轮换形式种长度为i的轮换有m_i种，故
$F(\alpha) = r^{m_1+m_2+\cdots m_n}$。$D_n$中元素一定能写为$a^p b^q$形式，其中$0 \le p \le n-1$，$q = 0, 1$。下计算每个$a^p b^q$对应的不交轮换形式：

$a^i = (12\cdots n)^i$。任意元素轮换$\frac{n}{\gcd(i,n)}$次后总能回到原位，故每个轮换包含了$\frac{n}{\gcd(i,n)}$个元素，共$\gcd(i,n)$个$\frac{n}{\gcd(i,n)}$-轮换。$F(\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} r^{\gcd(i,n)}$。

n为奇数时，经变化$a^i b$后的正n边形有且仅有一个不动点。根据对称性，α可由$\frac{n-1}{2}$个对换（2-轮换）和一个不动点（1-轮换）组成。$F(\alpha) = r^{(n+1)/2}$。

n为偶数时，当i取遍0至$n-1$，有一半的变化由$\frac{n}{2}$个对换组成，一半的变化由$\frac{n}{2}-1$个对换和两个不动点组成。$F(\alpha)$分别为$r^{n/2}$与$r^{(n+2)/2}$。

综上，n颗柱子串成一圈项链，每颗可选r种颜色，项链类数共计

$$t = \frac{1}{2n}\sum_{i=0}^{n-1} r^{\gcd(n,i)} + \begin{cases} \frac{1}{2} r^{(n+1)/2} & n \text{ 为奇数}, \\ \frac{1}{4}\left(r^{n/2} + r^{(n+2)/2}\right) & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

应用：卤代苯一共有几种？

解：即令$n = 6$，$r = 4$。

$$t = \frac{1}{12}(4096 + 4 + 16 + 64 + 16 + 4) + \frac{1}{4}(64 + 256) = 430$$

故共有429种卤代苯。