复变函数基础知识 (下)

共形映射

Def. 记 Ω 为 Riemann 曲面, 例如 $\mathbb{C}, \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \mathbb{C}$ 中某些区域等等. 记 $\mathrm{Aut}(\Omega)$ 为 Ω 的全纯子同构群, 即 Ω 至自身的全纯双射所成的群.

Thm. (Schwarz 引理) $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}, 0 \mapsto 0$ 为全纯函数, 则

1. $|f'(0)| \leq 1$,
2. $|f(z)| \leq |z|, \forall z \in \mathbb{D}$.

等号成立当且仅当存在某些 $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ 使得 $f(z) = e^{i\theta_0} z$.

Proof. 定义 $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ 上的全纯函数 $g(z) = \dfrac{f(z)}{z}$, 根据可去奇点定理定义 $g(0) = f'(0)$. 根据极大值原理有 $|g(z)| \leq \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \lim_{r \to 1} |g(re^{i\theta})| \leq 1$.

取等时, 据极大模原理知 g 为常数.

□

Thm. $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ 中元素形如 $\Phi_{z_0} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}, z \mapsto e^{i\theta_0} \cdot \dfrac{z - z_0}{\overline{z_0} z - 1}$.

Proof. $\forall f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, 则 $g(z) := \Phi_{f(0)} \circ f(z) \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. 注意到 $g(0) = 0$, 从而 $|g'(0)| \leq 1$. 由于 $g^{-1} \circ g(z) = z$, 则 $|g^{-1}{}'(0)| \cdot |g'(0)| = 1$. 根据 Schwarz 引理知 $|g^{-1}{}'(0)|, |g'(0)| \leq 1$,故 $g'(0) = 1$.

是以 Schwarz 引理取等, $g \equiv r^{i\theta_0}$ 为常函数. 从而 $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ 中元素形如 Φ_{z_0}.

□

Col. 注意到全纯双射 $\varphi := \mathbb{H} \to \mathbb{D}, z \mapsto \dfrac{z - i}{z + i}$, 从而 $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = \{\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} \mid f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})\}$. 计算得

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = \{z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \mid ad - bc \neq 0, a, b, c, d \in \mathbb{R}\} =: \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}).$$

Example. 同理, $\mathrm{Aut}(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) = \{z \mapsto \dfrac{az + b}{cz + d} \mid ad - bc \neq 0\} =: \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. 实际上, $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 为单超越扩域的 Galois 群.

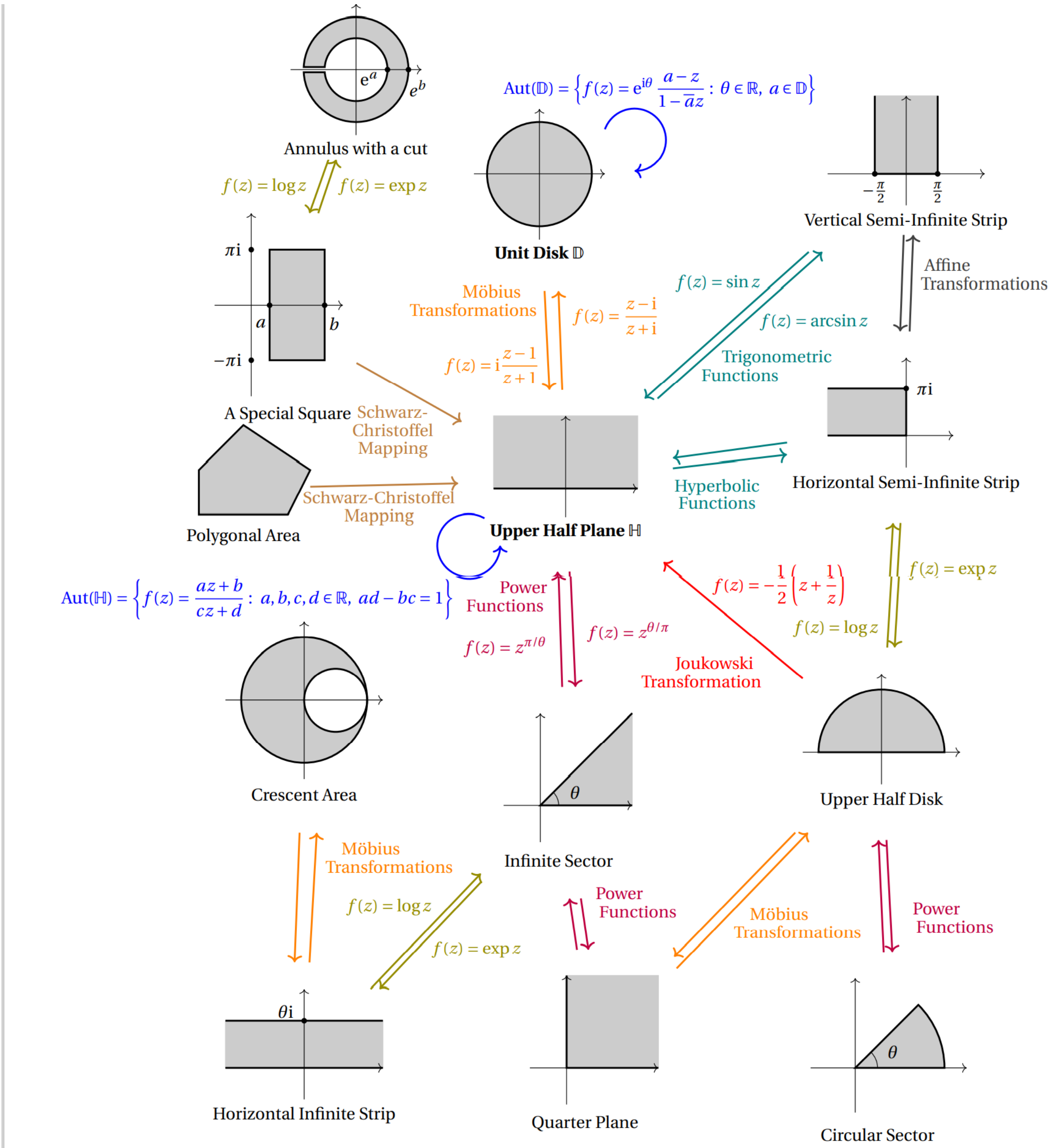
Thm. (Riemann 映照定理) 记 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 为单连通开区域, $\forall z_0 \in \Omega$, 则存在 Ω 到单位圆盘 $\mathbb{D}$ 的双射 $f : \Omega \to \mathbb{D}$ 使得 $f(z_0) = 0$ 且 $f'(z_0) > 0$.

Proof.

从略.

□

Example. 如下为常见区域间的共形映射关系



Example. (Dirichlet 边值问题) 设 Ω 边缘可微的单连通区域, 则如下 PDE 边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = f & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

在 Ω 上有且仅有一解.

Proof. 不妨设 φ 为 Ω 至 $\mathbb{D}$ 的全纯双射, 则原方程化为

$$\begin{cases} \tilde{\Delta}[u\circ\varphi^{-1}] = 0 & \text{in } \mathbb{D}, \\ u\circ\varphi^{-1} = f\circ\varphi^{-1} & \text{on } \partial\mathbb{D}. \end{cases}$$

根据 Poisson 求和公式,

$$u\circ\varphi^{-1}(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|z_0|^2}{|e^{i\theta}-z_0|^2} f\circ\varphi^{-1}(e^{i\theta})\mathrm{d}\theta.$$

从而对任意的 $w_0\in\Omega$,

$$u(w_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{1-|\varphi(w_0)|^2}{|\xi-\varphi(w_0)|^2} f(\xi)\cdot\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)}\mathrm{d}\xi.$$

显然该接存在且唯一.

□

Example. u 为 $\mathbb{H}$ 上的调和函数, u 在 $\mathbb{R}$ 取值 $f(x)$, 则

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(t)}{(t-x)^2+y^2}\mathrm{d}t.$$

解析延拓

Def. U, V 均为 $\mathbb{C}$ 中开集, $U\subset V$. 若存在 $f\in\mathrm{Hol}(\Omega)$, $F\in\mathrm{Hol}(V)$ 使得 $f=F|_U$, 则称 F 为 f 的解析延拓.

Def. U_1, U_2 均为 $\mathbb{C}$ 中开集, 记 $U_3:=U_1\cap U_2\neq\emptyset$. 若存在 f_1, f_2 使得 $f_i\in\mathrm{Hol}(U_i)$ ($i=1,2$), 且 $f_1|_{U_1}=f_2|_{U_2}$, 则称 f_1 与 f_2 互为解析延拓.

Example. 幂级数 $f(z)=\sum_{n\geq 1}z^{n!}$ 在单位圆周 $\partial\mathbb{D}$ 上处处有奇点, 从而不在 $\partial\mathbb{D}$ 上解析; 但 $f\in\mathrm{Hol}(\mathbb{H})$.

Proof. 幂级数收敛半径 $[\limsup|a_n|^{1/n}]^{-1}=1$, 从而 $f\in\mathrm{Hol}(\mathbb{H})$. 由于形如 $e^{p/q\cdot 2\pi i}$ 的点在 $\partial\mathbb{D}$ 上稠密, 从而 $\partial\mathbb{D}$ 上奇点稠密.

□

Thm. (Painlevé) Ω 为 $\mathbb{C}$ 中开区域, $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$ 为分段光滑路径. 若 $f:\Omega\to\mathbb{C}$ 在 Ω 上连续且在 $\Omega\setminus\gamma$ 上全纯, 则 f 在 Ω 上全纯.

Thm. (Schwarz 反射定理) U 为 $\mathbb{H}$ 上开区域, 且存在 $\mathbb{R}$ 上开区间 $I=(a,b)$ 使得 $f:U\cup I\to\mathbb{C}$ 满足

- f 在 $U\cup I$ 上连续,
- f 在 U 上全纯,
- f 在 I 上取实值.

则 f 可被延拓为 $U\cup I\cup U^*$ 上的全纯函数 $U^*:=\{\overline{z}\mid z\in U\}$.

Proof. 定义 U^* 上函数 $z\mapsto\overline{f(\overline{z})}$. 则 f 在 $U\cup U^*$ 上有相同的 Taylor 展开. 根据 Painlevé 定理, f 在 $U\cup I\cup U^*$ 上解析.

□

Prop. (圆盘边缘处的 Schwarz 反射定理) 记 $\Omega_\pm$ 为 $\partial B(z_0,r)$ 的内外 (顺序不影响结论). 取 U 为 Ω_+ 中的开区域使得 $I:=\partial U\cap\partial B(z_0,r)$ 非空. 若 $f:U\cup I\to\mathbb{C}$ 满足

1. f 在 $U\cup I$ 上连续,
2. f 在 U 上全纯,
3. 存在 $w_0,\rho>0$ 使得 $f(I)\subset B(w_0,\rho)$,
4. $w_0\notin f(U)$.

则 f 可被全纯延拓至 $U^*:=\{z_0+r^2/(\overline{z}-\overline{z}_0)\mid z\in U\}$.

Example. 圆环 $A(0,r_1,R_1)$ 与 $A(0,r_2,R_2)$ 存在全纯双射若且仅若 $\dfrac{R_1}{r_1}=\dfrac{R_2}{r_2}$.

Proof. 必要性显然. 反之, 若全纯双射满足 $\partial B(0,r_1)\to\partial B(0,r_2)$, $\partial B(0,R_1)\to\partial B(0,R_2)$, 则根据 Schwarz 反射定理可构造 $A(0,r_1^2/R_1,R_1)$ 至 $A(0,r_2^2/R_2,R_2)$ 的全纯双射. 如是往复, 得 $A(R_i(r_i/R_i)^n,R_i)$ 间的全纯双映射. 令 $n\to\infty$, 得

$$f:B(0,R_1)\to B(0,R_2),0\mapsto 0.$$

由于 $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ 中满足 $0 \mapsto 0$ 的映射一定为 $z \mapsto e^{i\theta_0}z$ 之形式, 从而 $f : z \mapsto \dfrac{R_2}{R_1} \cdot e^{i\theta_0}z$. 根据 $B(0, r_1) \to B(0, r_2)$ 得 $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{r_1}{r_2}$.

若双全纯映射满足 $\partial B(0, r_1) \to \partial B(0, R_2)$, $\partial B(0, R_1) \to \partial B(0, r_2)$, 则考虑上一情形复合上 $A(0, r_1, R_1)$ 的自同构 $z \mapsto \dfrac{r_1 \cdot R_1}{z}$ 即可.

□

Example. $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = az + b$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \{az, b/z \mid a, b \neq 0\}$.

适合深入探讨的关联话题

调和分析相关话题.

划分函数, 模形式等话题.

解析数论相关话题.

共形映射, 复几何等话题.

Riemann 曲面, 代数几何等话题.