图谱论导引(二十一期)

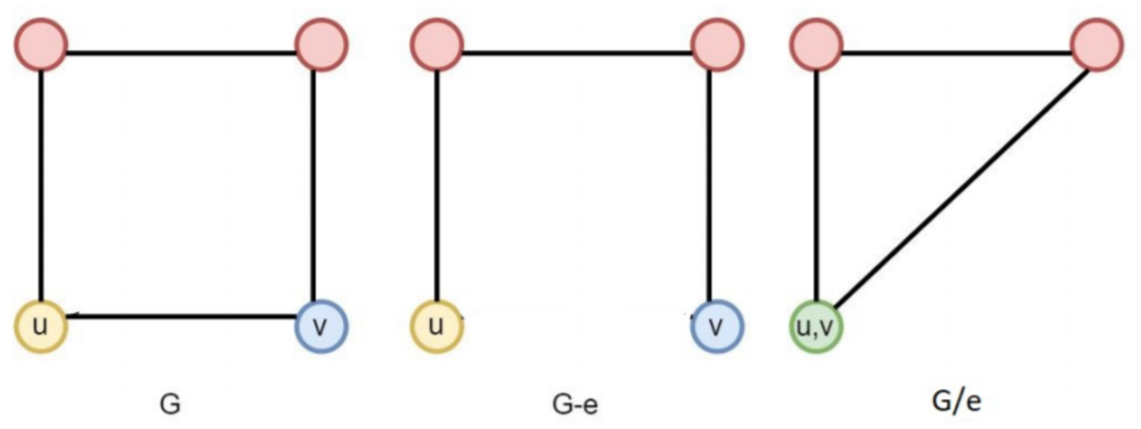
> 本节将介绍染色多项式.

今有如下问题: 若使用k种颜色对简单图G染色, 且确保任一边的顶点异色, 试问可选的染色方案总数? 例如P_n的k色染色方式为$k(k-1)^{n-1}$, K_n的$n+k$色染色方式为$\binom{n+k}{n}$. 若问及Petersen图的6色染色方法数, 求解相对困难. 读者自然会想到递推法求解: 对任一简单图G, 记k染色方法总数为函数$P(G,x)$, 试问如何求解$P(G,x)$?

经尝试, $P(G,x)$为某一多项式函数(此处暂时略去$P(G,x)=0$之情形). George David Birkhoff于1912年首次提出该多项式, 其目的系解决四色猜想, 即证明对任一平面图G均有$P(G,4)>0$. 显然G. D. Birkhooff未能因此解决四色猜想, 但染色多项式之引入确实为组合与图论学科添上浓墨重彩的一笔.

染色多项式之多项式说

首先应当证明$P(G,x)$为多项式. 约定$\forall e\in E(G)$, $G-e$即G删去边e所得, G/e即$G-e$中粘合e两端的点所得.



此处, 虽约定G为简单图, 但点染色确实与重边无关. 由于图G/e未免引入重边, 读者自行约化之为简单图.

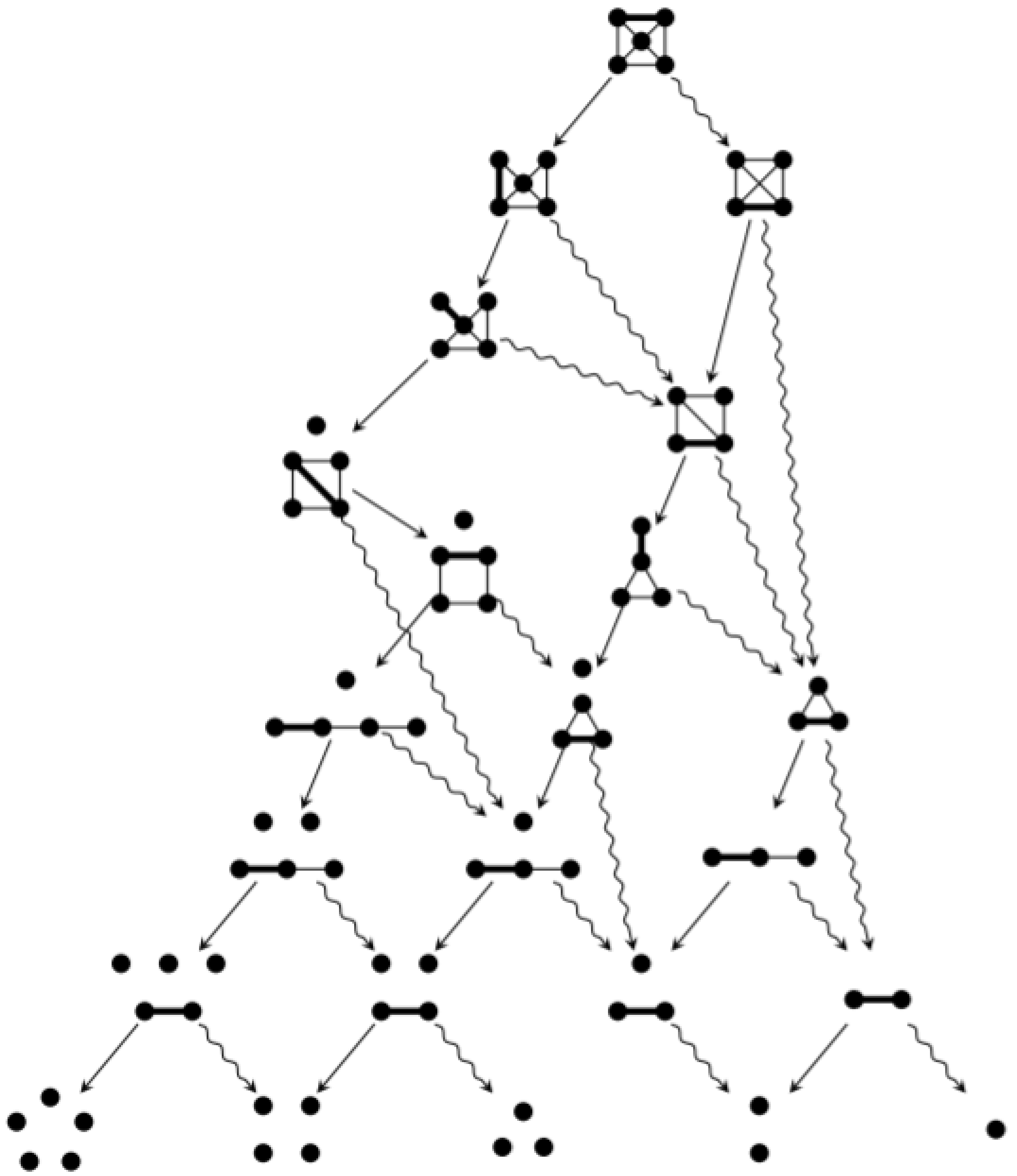
不妨设$E(G)\geq 1$. 对任意$x_0\in\mathbb{N}^+$, $G-e$中u与v同色之染色数为$P(G/e,x_0)$, u与v异色之染色数为$P(G,x_0)$. 因此得递推式

$$P(G-e,x)=P(G,x)+P(G/e,x).$$

从而对任意简单图而言, $P(G,x)$为多项式. 读者可自行证明Petersen图的染色多项式为

$$x(x-1)(x-2)\left(x^7-12x^6+67x^5-230x^4+529x^3-814x^2+775x-352\right)$$

此外, 递推$P(G,x)=P(G-e,x)-P(G/e,x)$表明 $\deg P(G,x)\leq\deg P(G-E,x)=|V(G)|$; 另一方面, 诸$G$删边/删点所得的多项式中, 仅$P(G-E,x)$之度数为极大值$|V(G)|$. 综上, $\deg P(G,x)=|V(G)|$. 归纳如下图所示



构造关系

对有限个不交的简单图$G_0:=\{G_i\}_{i=1}^m$, 有

$$P(G_0,x)=\prod_{i=1}^m P(G_i,x).$$

由群作用关系可知, 若$V(G)\cap V(H)=\{v\}$, 则$P(G\cup H,x)=\dfrac{P(G,x)\cdot P(H,x)}{x}$. 同理, 若$P(G\cap H)$为完全图, 则

$$P(G\cup H,x)=\frac{P(G,x)P(H,x)}{P(G\cap H,x)}.$$

系数性质

最高项系数

对多项式$P(G,x)$, 记$n=|V(G)|$, 则注意到x足够大时有关系

$$x^n \geq P(\overline{K_n},x) \geq P(G,x) \geq P(K_n,x) \geq \binom{x}{n}.$$

故$P(G,x)$最高项系数为1.

次高项系数

使用上述归纳法计算$P(G,x)$时, 注意到所有次高项来自归纳时所有顶点数为$|V(G)|-1$之图. 如此之图出现$|E|$次, 从而次高项系数为$-|E|$.

系数交替性

由递推式$P(G-e,x)=P(G,x)+P(G/e,x)$可知$P(G,x)$系数交替. 注意到

$$P(G,x)=\sum_{i=0}^{|V(G)|} a_i x^i - \sum_{i=0}^{|V(G)|-1} b_i x^i = x^{|V(G)|} + \sum_{i=0}^{|V(G)|-1} (a_i-b_i)x^i.$$

数学归纳法知$P(G,x)$第k项系数符号为$(-1)^{k+1}$, 从而染色多项式系数交替.

此处另需说明一点: 若$P(G,x)$的k次项系数为0, 则对任意$i\leq k$, i次项系数为0. 同样可采用数学归纳法证明之, 此处省略.

最低次非零系数

显然任意染色多项式之常数项为0. 下有一更具普适性的结论: 最低次非零项之次数为图的连通部件数. 欲证明之, 只需验证如是结论: $P'(G,0)\neq 0$若且仅若G连通.

若G为非连通图, 则存在G_1, G_2使得$G=G_1\dot\cup G_2$. 进而多项式$P(G,x)=P(G_1,x)P(G_2,x)$有因子x^2, 从而$P'(G,0)=0$.

若G为连通图, 则不妨设上述结论对$|E(V)|\leq m$之情形成立, 下归纳证明对$|E(V)|=m+1$之情形成立. 仍考虑递推关系

$$P(G,x)=x^{|V(G)|} + \sum_{i=0}^{|V(G)|-1} (a_i-b_i)x^i.$$

显然$a_{|V(G)|}b_{V(G)}\leq 0$, 而对任意$e\in E(G)$, $P(G-e,x)$一次项不为0. 从而$P(G,x)$一次项$a_{|V(G)|}-b_{|V(G)|}\neq 0$.

综上, $P'(G,0)=0$若且仅若G有多个连通分支. 从而$P(G,x)$的最低次非零项之次数为图的连通部件数.

单峰定理

考虑顶点数为n的树T, 易知$G(T,x)=x(x-1)^{n-1}$, 其系数大小$|a_k|=\binom{n-1}{k-1}$于$0\leq k\leq \dfrac{n-1}{2}$时递增, $\dfrac{n-1}{2}\leq k\leq n$时递减. 对任意顶点数为$n$的连通图$G$, 总可通过归纳式$P(G,x)=P(G-e,x)-P(G/e,x)$使得$P(G,x)$为若干树的染色多项式之叠加. 归纳时只需不断选取非割边, 迭代至出现树时停止即可.

最终$P(G,x)$具有一般形式$P(G,x)=\sum_i(-1)^{p(i)}P(G_i,x)$, 其中$p(i):=\deg P(G_i,x)$. 据系数符号之交替律, 对选定的$j$, 任意$(-1)^{p(i)}P(G_i,x)$之$j$次项系数同号. 由于每一树染色多项式$P(G_i,x)$之系数极大项不超过$x^{[n/2]+1}$次, 故

$$1=|a_n|<|a_{n-1}|<\cdots<|a_{\lfloor n/2\rfloor+1}|.$$

据June Huh在论文中结论, 任意图的染色多项式时单峰的, 即存在k使得

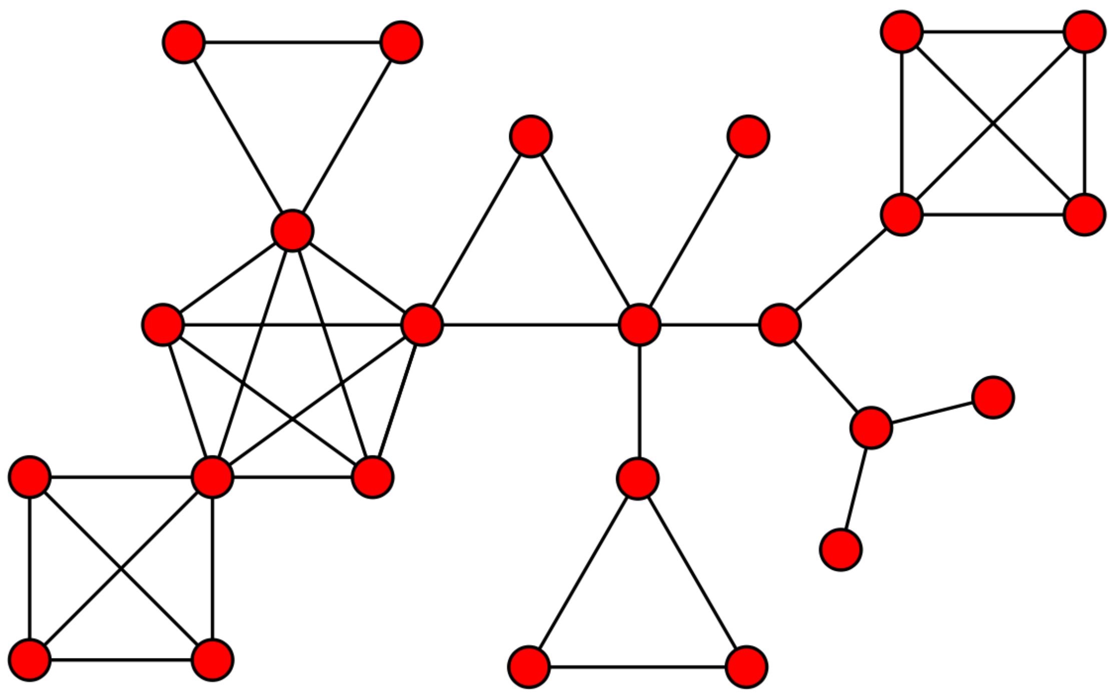
$$1=|a_{|V|}|\leq|a_{|V|-1}|\leq\cdots\leq|a_k|\geq|a_{k+1}|\geq\cdots\geq|a_1|.$$

零点

自然数零点的重数估计

据上文结论, 零点$x=0$之重数为图之连通部件数目. 下初步探究1之重数.

对任意连通图, $P(G,1)=0$. 若图有唯一的割点e, 则不妨设$G=G_1\cap G_2$且$G_1\cap G_2=e$. 故$P(G,x)=\dfrac{P(G_1,x)P(G_2,x)}{x}$. 零点$1$之重数呼之欲出, 但此前应先明确区块之概念: 图的区块定义为极大2-连通子图. 例如下图之区块数为13.



另上图为G, 记所有区块为$\{G_i\}_{i=1}^{13}$, 则

$$P(G,x)=\frac{\prod_{i=1}^{13}P(G,x)}{x^{12}}$$

且每一$P(G_i,x)$或为2-连通的, 或为K_2. 对任一G_i, 不存在一组分割G_i^1,G_i^2使得$G_i^1\cap G_i^2$为单点而$G_i^1\cup G_2^2=G_i$; 等价地, $P(G_i,x)$的零点中仅有一重1. 从而得结论: $P(G,x)$中$(x-1)$因子之次数为区块数.

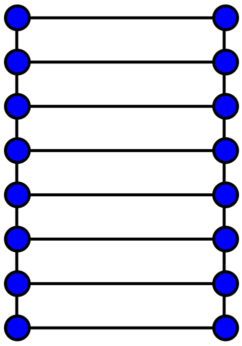
$|P(G,-1)|$的含义较神奇, 其描述了G中不含定向圈的定向方式. 换言之, 对G中边赋予朝向某一顶点的方向且保证图中不含定向的圈, 其可选方法之总数为$|P(G,-1)|$. 实际上, 注意到$|P(G,-1)|=(-1)^nP(G,-1)$, 以及

$$|P(G,-1)|=|P(G-e,-1)|+|P(G/e,-1)|$$

即可证之.

应用: 梯子上的定向问题

给定的梯子, 视每处连接点为顶点, 相邻顶点间的连边(若有)视作边(如下图所示). 现给每条边随机赋予方向, 试问梯子上含有定向环的概率?



不妨设梯子高度为n, 即含有$2(n+1)$个顶点. 设$f_n(x)$为高为n的梯子的染色多项式, 则据递推关系有

$$f_n(x)=\frac{f_1(x)f_{n-1}(x)}{P(K_2,x)}=\frac{f_1(x)^n}{P(K_2,x)^{n-1}}.$$

计算得$f_1(x)=x(x-1)(x^2-3x+3)$, 故

$$f_n(x)=x(x-1)(x^2-3x+3)^n.$$

从而高为n的梯子上随机定向所成的无定向圈图占比

$$\frac{|f_n(-1)|}{2^{E_n}}=\frac{2\cdot 7^n}{2^{3n+1}}=\left(\frac{7}{8}\right)^n$$

零点分布

实质上, G上的正确染色将$V(G)$分作若干部分, 每一部分中的点于G中两两不交. 遂考虑记σ为一种的$V(G)$划分, 使得每一子集中的点于G中两两不相邻. 记$|\sigma|$为划分的区域数量, 则

$$P(G,x)=\sum_{\sigma}\binom{x}{|\sigma|}.$$

因此G之零点至大不过$\max|\sigma|-1=n-1$.

据系数符号交替性, $x<0$时总有$\{a_ix^i\}_{i=1}^n$同号, 因此$P(G,x)$于$\mathbb{R}_-$中无零点.

更深入地, Jackson证明了对任意G, $P(G,x)$于

$$(-\infty,32/27]-\{0,1\}$$

上无零点. Thomassen进而证明了所有$P(G,x)$的实零点之集合于$(32/27,+\infty)$上稠密. 同时, 并非所有的"简单"代数数都为可取之零点, 例如Read与Tutte证明了$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$恒非零点, 等价于任意$P(G,x)$不含因式(x^2-x-1).