

偏微分复习(第二部分)

Fourier法

Fourier变换简介

记 \mathbb{R}^n 上的Fourier变换(有处定义不采用 $(2\pi)^{-n/2}$)为

$$\mathcal{F} : f(x) \mapsto \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx.$$

相应地逆变换为

$$\mathcal{F}^{-1} : f(x) \mapsto \check{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i\xi \cdot x} dx.$$

对速降空间(Schwarz space) \mathcal{S} , $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ 为双射. 同时, $\mathcal{F} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ 亦为双射(设函数在相差零测集的意义下相同). 一般地, 对任意 $p \in (1, \infty)$, 有双射关系

$$\mathcal{F} : L^p(\Omega) \rightarrow L^{p^*}(\Omega).$$

其中共轭指标满足 $p^{-1} + (p^*)^{-1} = 1$. 该定理为Riesz-Thorin定理.

当 $p = p^* = \frac{1}{2}$ 时 \mathcal{F} 保距, 即对任意 $f, g \in L^2(\Omega)$ 均有

$$\langle f, g \rangle = \langle \mathcal{F}[f], \mathcal{F}[g] \rangle.$$

简单的Fourier变换

考虑 $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$, 则

- \mathcal{F} 保持线性, 即保持自变量的加和与数乘.
- $\mathcal{F}[f \circ (-x_0)](\xi) = \hat{f}(\xi) \cdot e^{-ix_0 \cdot \xi}.$
- $\mathcal{F}[f \circ (c \cdot)](\xi) = c^{-n} \hat{f}(c^{-1}\xi).$
- (接上条) 对非奇异矩阵 A , $\mathcal{F}[f \circ (A \cdot)] = (\det A)^{-1} \hat{f}(A^{-1}\xi).$
- $\mathcal{F}[f * g] = (2\pi)^{n/2} \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g].$
- $\mathcal{F}[f \cdot g] = (2\pi)^{-n/2} \mathcal{F}[f](\xi) * \mathcal{F}[g](\xi).$
- $\mathcal{F}[\partial_{x_j} f] = i\xi_j \cdot \mathcal{F}[f].$ 常以方便故记 $\mathcal{D}_{x_j} := \frac{\partial_{x_j}}{i}.$
- $\mathcal{F}[(\prod_{\alpha} i^{-k} \xi_k) \cdot f](\xi) = \partial^{\alpha} \mathcal{F}[f].$
- (接上条) 设 $\alpha = (\alpha(1), \alpha(2), \dots, \alpha(n))$ 为指标, 并定义 $\mathcal{D}^{\alpha} = \prod_k \mathcal{D}_{x_k}^{\alpha(k)}, \xi^{\alpha} = \prod_k \xi_k^{\alpha(k)}.$ 则

$$\mathcal{F}[\mathcal{D}^{\alpha} f] = \xi^{\alpha} \mathcal{F}[f].$$

同理, 对关于若干 α 的多项式 $P(\Lambda) = P(\alpha, \beta, \dots, \gamma),$ 有

$$\mathcal{F}[\mathcal{D}^{P(\Lambda)} f] = \xi^{P(\Lambda)} \mathcal{F}[f].$$

- $\mathcal{F}^2 : f(x) \mapsto f(-x).$ \mathcal{F}^4 恒等.

- (广义函数) $\mathcal{F}[\delta](\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}$.

Fourier变换法应用

对以下方程

$$\begin{cases} u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0 \\ t = 0 : u = \varphi(x), u_t = a\psi''(x) \end{cases}$$

关于 x 做Fourier变换得

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt} + a^2 \xi^4 \hat{u} = 0 \\ t = 0 : \hat{u} = \hat{\varphi}(\xi), \hat{u}_t = -a\xi^2 \hat{\psi}(\xi) \end{cases}$$

解得 $\hat{u}(t, \xi) = \hat{\varphi}(\xi) \cos a\xi^2 t - \hat{\psi}(\xi) \sin a\xi^2 t$. 从而

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \mathcal{F}^{-1}[\hat{u}(t, \cdot)](\xi) \\ &= \mathcal{F}^{-1}[\hat{\varphi}(\xi) \cdot \cos at\xi^2] - \mathcal{F}^{-1}[\hat{\psi}(\xi) \cdot \sin at\xi^2] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\varphi * \mathcal{F}^{-1}[\cos at\xi^2] - \psi * \mathcal{F}^{-1}[\sin at\xi^2]) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2at}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi) \left[\cos \frac{(\xi-x)^2}{4at} + \sin \frac{(\xi-x)^2}{4at} \right] d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{2at}} \int_{\mathbb{R}} \psi(\xi) \left[\cos \frac{(\xi-x)^2}{4at} - \sin \frac{(\xi-x)^2}{4at} \right] d\xi \\ &= \frac{1}{2\sqrt{at}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi) \left[\cos \frac{(\xi-x)^2 - at\pi}{4at} \right] d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{at}} \int_{\mathbb{R}} \psi(\xi) \left[\cos \frac{(\xi-x)^2 + at\pi}{4at} \right] d\xi \end{aligned}$$

基本解理论

基本解

记微分算子 $L(\partial_t, \partial_x) = \partial_t^m + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{|x| \leq N_j} a_{j,\alpha}(t, x) \partial_t^j \partial_x^\alpha$

考虑方程 $Lu = f, t > 0, x \in \mathbb{R}^n$, 初值 $\partial_t^j u|_{t=0} = \varphi_j$,

$$\begin{aligned} Lu &= f \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ \partial_t^j u|_{t=0} &= \varphi_j, \quad 1 \leq j \leq m-1 \end{aligned}$$

基本解 $E = E(t, x)$ 满足

$$\begin{aligned} LE &= 0 \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ \partial_t^j E|_{t=0} &= 0, \quad 1 \leq j \leq m-2 \\ \partial_t^{m-1} E|_{t=0} &= \delta(x) \end{aligned}$$

从而

$$u = \sum_{j=0}^{m-1} \partial_t^{m-1-j} [E(t, \cdot) * \varphi_j](x) + \int_0^t [E(t-\tau, \cdot) * f(t, \cdot)](x) d\tau$$

热传导方程的基本解

以热方程为例, 记 $L(\partial_t, \partial_x) : u \mapsto \partial_t u - a^2 \partial_{xx} u$. 则PDE问题转化为

$$\begin{aligned} LE &= 0 \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ E|_{t=0} &= \delta(x) \end{aligned}$$

Fourier变化得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{E}(t, \cdot)(\xi) + a^2 \xi^2 \hat{E}(t, \cdot)(\xi) &= 0 \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ \hat{E}(0, \cdot)(\xi) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \end{aligned}$$

解得 $\hat{E}(t, \cdot)(\xi) = e^{-ta^2 \xi^2}$. Fourier逆变换得

$$\begin{aligned} E(t, x) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ta^2 \xi^2} e^{ix \cdot \xi} d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \prod_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-ta^2 (\xi_k - ix_k/2a^2 t)} \cdot e^{-x_k^2/4a^2 t} d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a^2 t}} \cdot e^{-x^2/4a^2 t} \\ &= \frac{e^{-x^2/4a^2 t}}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \end{aligned}$$

波动方程的基本解

考虑全空间内波动方程基本解

$$\begin{cases} (\partial_{tt} - a^2 \Delta_n) E(t, x) = 0 \\ E(0, x) = 0 \\ E_t(0, x) = \delta(x) \end{cases}$$

Fourier变换得

$$\begin{cases} (\partial_{tt} + a^2 \xi^2) \hat{E} = 0 \\ \hat{E}(0, \xi) = 0 \\ \partial_t \hat{E}(0, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \end{cases}$$

解得 $\hat{E}(t, \xi) = \frac{\sin(a|\xi|t)}{a|\xi|\sqrt{2\pi}^n} = \frac{t}{\sqrt{2 \cdot \pi}^n} \sum_{k \geq 0} \frac{(-a^2 \xi^2 t^2)^k}{(2k+1)!}$. Fourier逆变换得

$$E(t, x) = \frac{t}{(2 \cdot \pi)^n} \sum_{k \geq 0} \frac{(-a^2 t^2)^k}{(2k+1)!} \prod_{d=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{(\xi_d^2)^k} e^{i\xi_d x_d} d\xi_d.$$

对低维简单情形, 可直接求解.

热传导方程

全空间上的热传导方程

对方程

$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta u = f(t, x), t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ t = 0 : u = \varphi(x) \end{cases}$$

考虑对 x 做Fourier变化所得的PDE问题

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u}(t, \xi) + a^2 |\xi|^2 \hat{u}(t, \xi) = \hat{f}(t, \xi) \\ t = 0 : \hat{u}(t, \xi) = \hat{\varphi}(\xi) \end{cases}$$

解ODE问题得

$$\begin{aligned} u(t, x) = & (2a\sqrt{\pi})^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-|x-y|^2/4at}}{\sqrt{t}} \varphi(y) dy \\ & + (2a\sqrt{\pi})^{-n} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-|x-y|^2/4a(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}^n} f(\tau, y) dy d\tau \end{aligned}$$

设基本解 $E(t, x) = \frac{\exp \frac{-|x|^2}{4at}}{(2a\sqrt{\pi t})^n}$, 从而

$$u(t, x) = [E(t, \cdot) * \varphi](x) + \int_0^t [E(t - \tau, \cdot) * f(\tau, \cdot)](x) d\tau.$$

基本解关于 $t \rightarrow 0$ 为光滑的good kernel, 即满足如下性质:

- $E(t, x) \in C^\infty(\{t > 0\})$.
- $t > 0$ 时, $\partial_t E(t, x) = a^2 \Delta_x E(t, x)$.
- $\int_{\mathbb{R}^n} E(t, x) dx = 1$. 注意到 $E(t, x)$ 恒正, 故绝对积分一致有界.
- 对任意 $\delta > 0$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n - B_n(0, \delta)} |E(t, x)| dx = 0$.

从物理角度而言, 热方程之解应当具有以下性质(不难验证):

- 齐次热传导方程之解满足 $u(t, x) \in [\inf \varphi(x), \sup \varphi(x)]$.

再论迭代法

就以下方程为例

$$\begin{cases} u_t - a^2(u_{xx} + 4u_{yy}) = y^2 t^2 \\ t = 0 : u = x^2 y \end{cases}$$

记算子 $P : u \mapsto \partial_t u - a^2(\partial_{xx} + 4\partial_{yy})u$. 注意到

$$\begin{aligned} \frac{t^3}{3} y^2 & \mapsto y^2 t^2 - \frac{8a^2 t^3}{3} \\ \frac{2a^2 t^4}{3} & \mapsto \frac{8a^2 t^3}{3} \\ x^2 y & \mapsto -2a^2 y \\ 2a^2 t y & \mapsto 2a^2 y \end{aligned}$$

从而 $u = x^2 y + 2a^2 t y + \frac{t^3}{3} y^2 + \frac{2a^2 t^4}{3}$.

对较复杂的方程(设 α 与 β 相关加和在定义域内一致收敛)

$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta_n u = \sum_{k \geq 0} \prod_{l=1}^n \alpha_{k,l}(t, x^l) & x \in \Omega, t > 0 \\ t = 0 : u = \sum_{k \geq 0} \prod_{l=1}^n \beta_{k,l}(x^l) \end{cases}$$

则 $u = \sum_{k \geq 0} \sum_{l=1}^n (v_{k,l} + w_{k,l})$, 其中 $v_{k,l}$ 为方程

$$\begin{aligned} \partial_t v_{k,l}(t, x^l) - a^2 \partial_{x^l x^l} v_{k,l}(t, x^l) &= 0 \\ t = 0 : v_{k,l}(t, x^l) &= \beta_{k,l}(x^l) \end{aligned}$$

之解, 即 $v_{k,l} = [\beta_{k,l} * E(t, \cdot)](x)$. $v_{k,l}$ 为方程

$$\begin{aligned} \partial_t v_{k,l}(t, x^l) - a^2 \partial_{x^l x^l} v_{k,l}(t, x^l) &= \alpha_{k,l}(t, x^l) \\ t = 0 : v_{k,l}(t, x^l) &= 0 \end{aligned}$$

之解. 综上

$$u = \sum_{k \geq 0} \sum_{l=1}^n [\alpha_{k,l} * E(t, \cdot)](x^l) + \int_0^t \beta_{k,l}(\tau, \cdot) * E(t - \tau, \cdot)(x^l) d\tau].$$

无量纲量法

考虑热方程

$$\begin{aligned} u_t - a^2 \Delta_n u &= 0 & x \in \Omega, t > 0 \\ \text{some given boundary conditions} \end{aligned}$$

记无量纲量 $\xi = \frac{r}{a\sqrt{t}}$, 则

$$\begin{aligned} u_t &= u_\xi \cdot \xi_t = u_\xi \cdot \frac{-r}{2at\sqrt{t}} \\ \Delta_n u &= r^{1-n} \partial_r (r^{n-1} \partial_r u) = \frac{n-1}{ar\sqrt{t}} u_\xi + \frac{r}{a^2 t} u_{\xi\xi} \end{aligned}$$

从而PDE化为

$$u_\xi((n-1)/\xi + \xi/2) + u_{\xi\xi} = 0.$$

当 $n = 1$ 时, 解得

$$u = u_0 + (u_\infty - u_0) \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2a\sqrt{t}} e^{-s^2} ds.$$

当 $n \geq 2$ 时, 解得

$$u = u_0 + (u_\infty - u_0) \cdot \frac{2}{\Gamma(-n/2)} \cdot \int_0^{x/2a\sqrt{t}} s^{1-n} e^{-s^2} ds.$$

分离变量法

一维闭区域上情形

对热传导方程

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0 \\ t = 0 : u = \varphi(x) \\ \text{some given boundary conditions} \end{cases}$$

Step I: 寻找一个仅满足边值条件的函数 v , 下考虑 $w = u - v$. 分离变量得特征方程

$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2 T} = -\lambda_k$, 考虑正交基 $\{e_k\}_{k \geq 0}$ 使得 $e_k(x)$ 满足边值条件, 且 $e_k''(x) + \lambda_k e_k(x) = 0$. 注意: 当满足Newman条件时应补上0特征值.

Step II: 设解具有一般形式($u(t, x) = 0$ 时 $\theta_k \equiv 0$):

$$\sum_{\exists \lambda=0} \varphi(0) + \sum_{k \geq 1} A_k e^{-\lambda_k t} \sin(\sqrt{-\lambda} x + \theta_k).$$

其中

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin(\sqrt{-\lambda} x + \theta_k) dx.$$

二维矩形上情形

考虑方程

$$\begin{aligned} u_t - \Delta_2 u &= f \\ t = 0 : u &= \varphi(x) \\ x = 0 : u &= \mu_1(y) \quad x = a : u = \mu_2(y) \\ y = 0 : u &= \psi_1(x) \quad y = b : u = \psi_2(x) \end{aligned}$$

同样, 对含源项采用齐次化原理. 无源时, 考虑 $u = T(t)X(x)$, 则

$$\frac{\Delta X(x)}{X} = \frac{T'(t)}{T} = -\lambda.$$

则原问题转化为特征值问题

$$\begin{aligned} \Delta_2 u + \lambda u &= 0 \\ x = 0 : u &= \mu_1(y) \quad x = a : u = \mu_2(y) \\ y = 0 : u &= \psi_1(x) \quad y = b : u = \psi_2(x) \end{aligned}$$

拆分 $u = v + w$, 其中 v 在 $x \in \{0, a\}$ 时取值为0, w 在 $y \in \{0, b\}$ 时取值为0. 考虑

$$\begin{aligned} \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \lambda &= 0 \\ X(0) = X(a) &= 0 \end{aligned}$$

解得 $X(x) \in \text{span}_{k \geq 1}(\sin k\pi x/a)$. 从而

热稳态

(数学物理方法P56-6) 半径为 a 的半圆形平板, 其表面绝热, 在板的周围边界上保持常温 u_0 , 而在直径边界上保持常温 u_1 , 求板的稳恒状态.

解: 稳恒时, 温度分布函数 u 满足 $\partial_t u = 0$, 从而 $\Delta u = 0$. 定解问题为

$$\begin{cases} \partial_{rr} u + \frac{\partial_r}{r} u + \frac{\partial_{\theta\theta}}{r^2} u = 0 \\ u(a, \theta) = u_0, \quad 0 < \theta < \pi \\ u(r, 0) = u(r, \pi) = u_1, \quad 0 \leq r \leq a \end{cases}$$

令 $v = R(r)\Theta(\theta) + u_1$, 从而

$$r^2 \frac{R''}{R} + \frac{rR'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda.$$

由 $\Theta'' + \lambda_k \Theta = 0$ 及 $\Theta(0) = \Theta(\pi) = 0$ 知 $\lambda_k = k^2$. 解Euler方程

$$r^2 R_k'' + rR_k' - \lambda_k R_k = 0$$

得

$$\begin{cases} R_k = B_k r^k + C_k r^{-k} & k > 0 \\ R_0 = C_0 + D_0 \ln r & k = 0 \end{cases}$$

实际上, 由有界性知 $C_k = 0$. 从而解具有形式

$$u = u_1 + \sum_{k \geq 1} B_k r^k \sin(k\theta).$$

故

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(k\theta)(u_0 - u_1) d\theta = B_k a^k.$$

解得 $B_k = \frac{2(u_0 - u_1)}{a^k k \pi} [1 - (-1)^k]$. 故

$$u(r, \theta) = u_1 + \frac{4(u_0 - u_1)}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\sin[(2n-1)\theta]}{2n-1} \cdot \left(\frac{r}{a}\right)^{2n-1}.$$

极值原理

无释热源的极值原理

考虑 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界区域, $\forall T > 0$, $\Omega_T := (0, T) \times \Omega$. 定义抛物边界

$$\partial' \Omega := \{(t, x) : t = 0 \vee x \in \partial \Omega\}.$$

若 $u \in C^0(\overline{\Omega_T}) \cap C^{1,2}(\Omega)$, 则 u 在 Ω_T 可取到最大值. 若 u 在 Ω_T 内部满足 $\partial_t u - a^2 \Delta u \leq 0$, 则根据物理学意义, u 最大值在抛物边界取到.

实际上, 若 u 在非抛物点 (t_0, x_0) 上取到最大值, 则

1. $\partial_t u(t_0, x_0) \geq 0$, 取大于若且仅若 $t_0 = T$.

2. 对固定的 t_0 , u 局部次调和, 即 $\Delta u \leq 0$.

因此 $(\partial_t - a^2 \Delta)u \geq 0$. 取等若且仅若 $\Delta u \equiv 0$, 即 u 为常函数.

热方程的极值原理

极值定理的导出

考虑有界区域 Ω 上的热方程

$$Lu = \partial_t u - \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x^i, x^j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x^i} + cu \right) \quad x \in \Omega, t > 0$$

Some given initial and boundary conditions

其中 a_{ij} , b_i , c 均为关于 x , t 的连续函数, (a_{ij}) 恒正定, c 恒非负. 则对任意 $T > 0$, u 在

$$\Gamma_T := \partial(\Omega \times T) - \Omega^\circ \times \{T\}$$

上取非负最大值. 不妨设最大值点 $(t_0, x_0) \in (\Omega \times T)^\circ$, 即 $\Omega \times T$ 内部取得最大值 M . 设 m 为 u 在抛物边界上的最大值, 则 $M > m$. 考虑函数

$$v := u + \varepsilon(\|x - x_0\|)^2$$

其中 ε 可取得充分小使得 v 在 Γ_T 上取值不超过 $v(t_0, x_0) = M$. 注意到

$$\begin{aligned} Lv &= \partial_t v - \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x^i, x^j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x^i} + cu \right) \\ &= -\varepsilon \left(2 \sum_i (a_{ii} + b_i x_i + c(x^i - x_0^i)^2) \right) \end{aligned}$$

而 v 在内部取最大值, 从而最大值点处 Lv 为负. 而当 v 取得非负最大值时, Lv 应非负数, 矛盾.

从而 u 在边界上取得非负最大值及非正最小值.

解的稳定性分析

为方便起见, 以下讨论标准形式的热方程.

Dirichlet条件

考虑一般热方程

$$\begin{aligned} (\partial_t - a^2 \Delta)u &= f(t, x) \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t > 0 \\ t = 0 : u &= \varphi(x) \\ u|_{(0, \infty) \times \partial\Omega} &= \mu(t, x) \end{aligned}$$

方程解至多唯一.

记 $u = \mathcal{S}(f, \varphi, \mu)$ 为解, 则当发生微扰 δf , $\delta\varphi$ 与 $\delta\mu$ 时, 新方程满足

$$\begin{aligned} (\partial_t - a^2 \Delta)u &= f(t, x) + \delta f(t, x) \\ t = 0 : u &= \varphi(x) + \delta\varphi(x) \\ u|_{(0, \infty) \times \partial\Omega} &= \mu(t, x) + \delta\mu(t, x) \end{aligned}$$

记 $\|g\| := \sup_{(t,x) \in \Omega_T} |g|$. 因此对任意 $T > 0$ 均有(对源分析采用齐次化原理)

$$\begin{aligned}
& \|\mathcal{S}(f, \varphi, u) - \mathcal{S}(f + \delta f, \varphi + \delta \varphi, \mu + \delta \mu)\| \\
& \leq \|\delta \varphi\| + \|\delta \mu\| + \int_0^T \|\delta f(\tau, x)\| d\tau \\
& \leq \|\delta \varphi\| + \|\delta \mu\| + T\|\delta f(\tau, x)\|
\end{aligned}$$

即解关于初边值与源稳定.

Robin条件

$$\begin{aligned}
(\partial_t - a^2 \Delta)u &= f(t, x) \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t > 0 \\
t = 0 : u &= \varphi(x) \\
(\sigma u + \partial_n u)|_{\partial\Omega \times (0, \infty)} &= \mu(t, x)
\end{aligned}$$

对任意 $T > 0$, u 在 Γ_T 上取得最大值. 若在 $\partial\Omega \times [0, T]$ 上取得最大值, 则最大值点 x_0 处函数的法向导数应不小于 0, 因此 $u(x) \leq \frac{\|\mu\|}{\sigma}$. 从而

$$\begin{aligned}
& \|\mathcal{S}(f, \varphi, u) - \mathcal{S}(f + \delta f, \varphi + \delta \varphi, \mu + \delta \mu)\| \\
& \leq \|\delta \varphi\| + \sigma^{-1}\|\delta \mu\| + \int_0^T \|\delta f(\tau, x)\| d\tau \\
& \leq \|\delta \varphi\| + \sigma^{-1}\|\delta \mu\| + T\|\delta f(\tau, x)\|
\end{aligned}$$

实际上, 若 $\sigma(x)$ 作为 x 的函数在 $\partial\Omega$ 上有正下界或负上界, 则稳定性仍得证.

Newmann条件

$$\begin{aligned}
(\partial_t - a^2 \Delta)u &= f(t, x) \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t > 0 \\
t = 0 : u &= \varphi(x) \\
(\partial_n u)|_{\partial\Omega \times (0, \infty)} &= \mu(t, x)
\end{aligned}$$

不妨设 O 在 Ω 内部, 令 $v = ue^{-r^2}$. 原方程化为

$$\begin{aligned}
v_t - \left(\Delta v + \sum_i 4x_i v_{x_i} + (2 + 4|\nabla v|^2)v \right) &= f(t, x)e^{-r^2} \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t > 0 \\
t = 0 : v &= \varphi(x)e^{-r^2} \\
(\partial_n u - 2rv)|_{\partial\Omega \times (0, \infty)} &= \mu(t, x)e^{-r^2}
\end{aligned}$$

由于 $(2 + 4|\nabla v|)$ 恒正, $2r$ 有严格大于零的下界, 故

$$\begin{aligned}
& \|\mathcal{S}(f, \varphi, u) - \mathcal{S}(f + \delta f, \varphi + \delta \varphi, \mu + \delta \mu)\| \\
& \leq \|\delta \varphi\| + (\sigma^{-1})_{\min}\|\delta \mu\| + \int_0^T \|\delta f(\tau, x)\| d\tau \\
& \leq \|\delta \varphi\| + r_{\min}^{-1}\|\delta \mu\| + T\|\delta f(\tau, x)\|
\end{aligned}$$

基本解理论

记微分算子 $L(\partial_t, \partial_x) = \partial_t^m + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{|x| \leq N_j} a_{j,\alpha}(t, x) \partial_t^j \partial_x^\alpha$

考虑方程 $Lu = f, t > 0, x \in \mathbb{R}^n$, 初值 $\partial_t^j u|_{t=0} = \varphi_j$,

$$\begin{aligned}
Lu &= f \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\
\partial_t^j u|_{t=0} &= \varphi_j, \quad 1 \leq j \leq m-1
\end{aligned}$$

基本解 $E = E(t, x)$ 满足

$$\begin{aligned}LE &= 0 \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ \partial_t^j E|_{t=0} &= 0, \quad 1 \leq j \leq m-2 \\ \partial_t^{m-1} E|_{t=0} &= \delta(x)\end{aligned}$$

从而

$$u = \sum_{j=0}^{m-1} \partial_t^{m-1-j} [E(t, \cdot) * \varphi_j](x) + \int_0^t [E(t-\tau, \cdot) * f(t, \cdot)](x) d\tau$$

调和方程

Laplace方程

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界区域, 且区域上 $\Delta u(x) \equiv 0$, 且 u 满足相应边界条件. 若满足上述条件的解 $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, 则 u 为调和方程的解. 该类在 Ω 内部求解的方程为内问题.

相应地外问题满足

$$\begin{cases} \Delta u \equiv 0 & x \in (\overline{\Omega})^c \\ \text{some boundary conditions} \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0 \end{cases}$$

Green公式与基本解

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界区域, 且 $\partial\Omega \in C^1$. 设 \vec{n} 为单位外法向量. 则对任意 $u, v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ 都有Green第一公式成立

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \Delta v &= \int_{\Omega} u \nabla \cdot (\nabla v) \\ &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (u \nabla v) - \nabla u \cdot \nabla v \\ &= \int_{\partial\Omega} u \nabla v \cdot \vec{n} \cdot dS - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \\ &= \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} dS - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \end{aligned}$$

Poisson公式(Green第二公式)为

$$\int_{\Omega} u \Delta v - v \Delta u = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}$$

据基本解理论, 今考察 n 维Poisson方程基本解 $E_n(x)$ 满足 $\Delta E_n(x) = \delta(x)$.

显然 E_n 径向对称, 不妨设 $\Delta E_n(r)$ 为径向函数, 相应的Laplace算子为 $r^{1-n} \partial_r r^{n-1} \partial_r$. 解得(假设 E_n 非常数)

$$E_n(r) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} & n=2, \\ \frac{1}{n(n-2)|B_n(0,1)|} \cdot \frac{1}{r^{n-2}} & n \geq 3. \end{cases}$$

从而对任意 $y \in \Omega^\circ$, $\int_{\Omega} u(x) \Delta E_n(y-x) dx = u(y)$. 代入Poisson方程, 解得

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\Omega} \Delta u(y) E_n(x-y) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u(y)}{\partial n} E_n(x-y) - \frac{\partial E_n(y)}{\partial n} u(x-y) dS \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u(y)}{\partial n} E_n(x-y) - \frac{\partial E_n(y)}{\partial n} u(x-y) dS \end{aligned}$$

实际上, 定义 x_0 在 Ω 内的测度:

$$\chi(x_0) = \begin{cases} 1 & x_0 \in \Omega^\circ \\ 1/2 & x_0 \in \partial\Omega \\ 0 & x_0 \in (\overline{\Omega})^c \end{cases}$$

则

$$\chi(x) \cdot u(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u(y)}{\partial n} E_n(x-y) - \frac{\partial E_n(x-y)}{\partial n} u(y) dS.$$

平均值公式与极值定理

置公式

$$\int_{\Omega} u \Delta v - v \Delta u = \int_{\partial\Omega} u \partial_n v - v \partial_n u$$

中 $\Omega = B(x, R)$, u 为调和函数, $v = 1$, 则 $\int_{\partial B(x, R)} \partial_n u = 0$. 据基本解公式

$$u(x) = \int_{\partial B(x, R)} E_n(x-y) \partial_n u(y) - u(y) \partial_n E_n(x-y) dS_y.$$

从而 $u(x)$ 为 $\frac{\int_{\partial B(x, R)} u(y) dS_y}{\int_{\partial B(x, R)} dS_y}$, 即球面上的平均积分.

容易见得, 球面平均与球体平均等价. 设 $\varphi(x)$ 为仅与 $r = |x|$ 相关之函数, 则在积分收敛时有

$$[\varphi * u](x) = u(x) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi.$$

对任意开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上具有局部均值性质的函数 u , 置 φ_ε 为以 $B(0, \varepsilon)$ 为紧支撑的磨光函数, 则可证得 u 在 $\{x : d(x, \partial\Omega) < \varepsilon\}$ 上光滑. 令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 即得 $u \in C^\infty(\Omega)$. 由于

$$\Delta_n u(x) = r^{1-n} \partial_r r^{n-1} \partial_r \int_{B(0, r)} u = 0.$$

从而 u 调和. 因此开集上的调和函数等价于满足局部均值性质的函数.

Green函数

端详公式 Ω 内 Dirichlet 问题解所满足的方程

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u(y)}{\partial n} E_n(x-y) - \frac{\partial E_n(x-y)}{\partial n} u(y) dS.$$

对给定的初边值问题而言, u 与 $\partial_n u$ 不可兼得. 就 Dirichlet 问题而言, 应当消去公式中的 $\partial_n u$ 项. 下推导 Dirichlet 问题的 Green 函数.

考虑函数 $g(x, y)$ 使得对任意给定的 $x \in \Omega$, $g(x, y)$ 在 $\partial\Omega$ 上取值与 $E(x-y)$ 相同. 且 $g(x, y)$ 在 Ω 内部调和. 从而

$$\int_{\Omega} u(y) \Delta g(x, y) - g(x, y) \Delta u(y) = \int_{\partial\Omega} u(y) \partial_n g(x, y) - g(x, y) \partial_n u(y) = 0.$$

令 $G(x, y) = E_n(x-y) - g(x, y)$, 则有

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} G(x, y) \partial_n u(y) - u(y) \partial_n G(x, y) dS_y.$$

其中 $G(x, y)|_{\partial\Omega} \equiv 0$. 从而当 $u(x)|_{\partial\Omega} = \mu(x)$ 时, 解得

$$u(x) = - \int_{\partial\Omega} \mu(y) \partial_n G(x, y) dS_y.$$

对Newman条件, 只需构造满足 $\partial_n [g(x, y) - E_n(y - x)]|_{\partial\Omega} \equiv 0$ 的调和函数 $g(x, y)$ 即可. 记 $G(x, y) = E(x - y) - g(x, y)$, $\partial_n u \equiv \mu(x)$, 则

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \mu(y) G(x, y) dS_y.$$

对Robin条件, 构造 g 满足 $(\partial_n + \sigma \cdot \text{id})[g(x, y) - E_n(y - x)] \equiv 0$ 即可. 下不赘述.

检验得Green函数满足以下性质(以Dirichlet问题对应的Green函数为例)

1. 对给定的 x , $G(x, y)$ 在 $\Omega - \{x\}$ 调和, 在 $x' \rightarrow x$ 时以 $E(x - x') \sim [\|x - x'\|^{n-1}]'$ 速度趋向无穷. 同时 Ω 内有

$$0 < G(x, y) < E(x - y).$$

边界上有 $G(x, y) \equiv 0$.

2. 由于Green函数与 u 无关. 置 $u|_{\partial\Omega} \equiv 1$, 得

$$\int_{\partial\Omega} \partial_n G(x, y) dS_y = -1.$$

3. Green函数 $G(x, y)$ 指标可交换. 任取 $x, y \in \Omega$, $0 < \varepsilon \ll \text{diam}(\Omega)$, 则

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega - B(x, \varepsilon) - B(y, \varepsilon)} G(x, t) \Delta G(y, t) - G(y, t) \Delta G(x, t) dt \\ &= \int_{\partial[B(x, \varepsilon) \cup B(y, \varepsilon)]} G(x, t) \partial_n G(y, t) - G(y, t) \partial_n G(x, t) dS_t \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} G(x, t) \partial_n G(y, t) - G(y, t) \partial_n G(x, t) dS_t \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(x, \varepsilon)} G(x, t) \partial_n G(y, x) dS_t - \int_{\partial B(y, \varepsilon)} G(y, t) \partial_n G(x, y) dS_t \\ &\quad - \int_{\partial B(y, \varepsilon)} G(x, y) \partial_n G(y, t) dS_t - \int_{\partial B(x, \varepsilon)} G(y, x) \partial_n G(x, t) dS_t \\ &= 0 + 0 + (-1)G(x, y) - (-1)G(y, x) \end{aligned}$$

其中 $\int_{\partial B(x, \varepsilon)} G(x, t) dS_t \sim E_n(\varepsilon) \cdot |\partial B(0, \varepsilon)| \sim \varepsilon^1 \rightarrow 0$.

特别地, 对球面 $B(O, R)$ 中点 x , $G(x, y)$ 为点电荷 x 在空球导体内的生成电场. 设 $x' = \frac{R^2}{x^2} \cdot x$, 则

$$G(x, y) = E_n(y - x) - E_n\left(\frac{R}{|x|}(y - x')\right).$$

解得

$$u(x) = \frac{R - \|x\|^2/R}{|\partial B_n(0, 1)|} \cdot \int_{\partial B_n(O, R)} \frac{f(y)}{\|y - x\|^n} dS_y.$$

特别地, 上半平面的Green函数即 $G(x, y) = E_n(y - x) - E_n(y - x')$. 其中 $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$. 解得

$$u(x) = \frac{x_n \Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{f(y)}{\sqrt{(\tilde{x}_{n-1} - y)^2 + (x_n)^2}^n} dy.$$

二维单连通区域的Dirichlet问题

考虑Dirichlet问题

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 \quad x \in \Omega, t > 0 \\ u|_{\partial\Omega} &= \varphi(x)\end{aligned}$$

其中 Ω 可通过全纯函数 f 共形映照至 \mathbb{D} , i.e., $f: \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ 全纯且同胚. 从而原PDE转化为(等同 $g(x, y)$ 与 $g(x + iy)$):

$$\begin{aligned}\Delta u \circ f^{-1} &= 0 \quad x \in \mathbb{D}, t > 0 \\ u|_{\partial\mathbb{D}} &= \varphi \circ f^{-1}(x)\end{aligned}$$

对任意 $f(x_0) \in \mathbb{D}$, 由Poisson积分公式得

$$u(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \frac{1 - |f(x_0)|^2}{|z - f(x_0)|^2} \varphi \circ f^{-1}(z) dz$$

记 $z = f(x)$, 则

$$u(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{1 - |f(x_0)|^2}{|f(x) - f(x_0)|^2} \varphi(x) \frac{\partial f}{\partial t}(x) dx.$$

实际上, $G_\Omega(\xi, \xi_0) = G_\mathbb{D}(f(\xi), f(\xi_0))$. 特别地, 若共形映照

$$\Phi(\cdot, z_0): \Omega \rightarrow \mathbb{D}, z_0 \mapsto 0, \partial\Omega \rightarrow U_1.$$

$$\text{则 } G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|f(z, z_0)|}.$$

可去奇点定理

可去奇点定理本质上反应了调和函数阶数的某种间断性, 其本质仍是解析性. 若 n 维调和函数 u 在

$B(x, r) - \{x\}$ 内调和, 且 $x' \rightarrow x$ 时满足 $\frac{u(x')}{E_n(x - x')} \rightarrow 0$, 则 $u(x)$ 可定义(即奇点可去).

不妨设 $r = 2, x = O$. 依Poisson积分公式延拓 $u|_{\partial B(O, 1)}$ 为函数 $v|_{\overline{B(O, 1)}}$. 作

$w_\varepsilon(x) := u(x) - v(x) + \varepsilon E_n(x)$, 其中 $\varepsilon \in (-1, 1) - \{0\}$. 对足够小的 $\delta(\varepsilon) \ll 1$, $\varepsilon E_n(x)$ 项主导 w_ε . 记 $\delta(|\varepsilon|) := \inf_{t \geq |\varepsilon|} \min\{\delta(t), \delta(-t)\}$ (单调递减至0), 则 $w_{|\varepsilon|}(x)$ 在 $\partial B(O, 1) \cup \partial B(O, \delta(|\varepsilon|))$ 上非负, 即 w_ε 在 $B(O, 1) - B(O, \delta(|\varepsilon|))$ 上非负. 同理 $w_{-|\varepsilon|}$ 在 $B(O, 1) - B(O, \delta(|\varepsilon|))$ 上非正. 令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 即得

$$(u - v)|_{B(O, 1) - B(O, \delta(|\varepsilon|))} \equiv 0.$$

而 $\delta \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$, 故 $u \equiv v$ 在 $B(O, 1)$ 上恒成立.

可采用可去奇点定理可估计定义域为 $B(O, R)$ 外的调和函数的衰减速度. 对任意 $u \in \text{Har}(\overline{B(O, R)^c})$, $u|_{\partial B(O, R)} = \varphi(x)$, 考虑Kevin变换

$$v(x) = \frac{\|x\|^{n-2}}{R^{n-2}} u\left(\frac{R^2}{\|x\|^2} x\right) \quad \|x\| \geq R.$$

从而 $v(x)$ 在 $0 < \|x\| < R$ 时调和, 且边界上取值 $v(x) = u(x)|_{x \in \partial B(O, R)}$. 再若

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0.$$

则

$$\lim_{x \rightarrow 0} v(x) \cdot (E_n(x)) = 0.$$

据可去奇点定理, $v(0)$ 为可取间断点. 据Poisson积分公式得

$$u(x) = \frac{\|x\|^{n-2}}{R^{n-2}} \cdot \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} \frac{R^2 - R^4/\|x\|^2}{(y - xR^2/\|x\|^2)^n} u(y) dS_y.$$

Harnack不等式

由于 $u(x)$ 在 $\overline{B_n(O, R)}$ 内一致有界, 故不妨设 $u|_{\overline{B_n(O, R)}} \geq 0$. 考察Poisson积分公式

$$u(x) = \frac{R - \|x\|^2/R}{|\partial B_n(0, 1)|} \cdot \int_{\partial B_n(O, R)} \frac{f(y)}{\|y - x\|^n} dS_y.$$

注意到 $R - \|x\| \leq \|y - x\| \leq R + \|x\|$, 从而

$$\frac{R^2 - \|x\|^2}{(R + \|x\|)^n} u(O) \leq u(x) \leq \frac{R^2 + \|x\|^2}{(R - \|x\|)^n} u(O).$$

同理, 对外问题有

$$u(x) = \frac{\|x\|^{n-2}}{R^{n-2}} \cdot \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} \frac{R^2 - R^4/\|x\|^2}{(y - xR^2/\|x\|^2)^n} u(y) dS_y.$$

$$\frac{\|x\|^{2n-4}}{R^{2n-4}} \cdot \frac{\|x\|^2 - R^2}{(\|x\| + R)^n} u(O) \leq u(x) \leq \frac{\|x\|^{2n-4}}{R^{2n-4}} \cdot \frac{\|x\|^2 - R^2}{(\|x\| - R)^n} u(O)$$