Picard 小定理简介

定理一览

Thm. (开映射定理) U 为 $\mathbb{C}$ 上开区域, 非常值函数 $f \in \mathrm{Hol}(U)$, 则 f 为开映射.

Thm. (Bloch 定理) 若 $f \in \mathrm{Hol}(\overline{\mathbb{D}})$ 满足

$$|f'(z)|(1-|z|^2) \in C(\overline{\mathbb{D}}),$$

记 $M = \sup_{z\in\overline{\mathbb{D}}} |f'(z)|(1-|z|^2)$, 最大值在 $z=p$ 处取达, 则

$$D(f(p), (3/2-\sqrt{2})M) \subset f(\mathbb{D}).$$

Col. 若 $f \in \mathrm{Hol}(\overline{\mathbb{D}})$ 且 $f'(0)=1$, 则 $f(\mathbb{D})$ 包含半径为 $\frac{3}{2}-\sqrt{2}$ 的圆.

Thm. (Ahlfor) 若非常数值的全纯函数 $f \subset \mathrm{Hol}(\overline{\mathbb{D}})$ 满足

$$|f'(z)|(1-|z|^2) \in C(\overline{\mathbb{D}}).$$

记 $|f'(z)|(1-|z|^2)$ 在 $p \in \mathbb{D}$ 处取得最大值 M, 则 $f(\mathbb{D})$ 包含一个半径为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}M$ 的圆盘且 f 与该圆盘建立双全纯映射.

Thm. (Koebe $\frac{1}{4}$ 定理) 全纯函数 $f \in \mathrm{Hol}(\overline{\mathbb{D}})$, 则

$$D(f(0), |f'(0)|/4) \subset f(\mathbb{D}).$$

Thm. (Picard 小定理) 若整函数 ($\mathbb{C}$ 上的全纯函数) 在 $\mathbb{C}$ 上的值域略去两个点, 则为常函数.

Thm. (Picard 大定理) 任一全纯函数在其本性奇点的邻域内无穷多次地取到 $\mathbb{C}$ 中几乎所有数, 至多可能除去一个例外值.

Bloch

Lemma. (弱 Bloch 定理, 将 $|z|^2$ 换做 $|z|^1$) 若非常值全纯函数 $f \subset \mathrm{Hol}(\overline{\mathbb{D}})$ 满足

$$|f'(z)|(1-|z|) \in C(\overline{\mathbb{D}}).$$

记 $|f'(z)|(1-|z|)$ 在 $p \in \mathbb{D}$ 处取得最大值 M, 则

$$D(f(p), (3/2-\sqrt{2})M) \subset f(\mathbb{D}).$$

Proof. 不失一般性地设 $f(0)=0$. 置 $A(z)=f(z)-zf'(0)$. 则 $\forall r > |z|$, 均有

$$\begin{aligned}
|A(z)| &\le \int_0^1 |f'(zt)-f'(0)| \cdot |z| \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left| \frac{zt}{2\pi i} \oint_{\partial D(a;r)} \frac{f'(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\zeta(\zeta - zt)} \right| \cdot |z| \mathrm{d}t \\
&\le \int_0^1 \frac{|zt| \cdot |f'|_{\max_{\partial D(a;r)}}}{r-|zt|} \cdot |z| \mathrm{d}t \\
&\le \frac{|z|^2 \cdot |f'|_{\max_{\partial D(a;r)}}}{2(r-|z|)}.
\end{aligned}$$

从而 $|f(z)| \geq |f'(0)|\cdot|z| - \dfrac{|z|^2\cdot|f'|_{\max_{\partial D(a;r)}}}{2(r-|z|)}$. 记$r_0 = \dfrac{1-|p|}{2}$, 则对 $\forall z \in D(p;t)$,

$$|f'(z)|(1-|z|) \leq M = 2r_0|f'(p)| \leq 2(1-|z|)\cdot|f'(p)|.$$

等价地, $|f'(z)| \leq 2|f'(p)|$. 今置 $A(z) = f(z) - (z-p)f'(p) - f(p)$, 不妨设$f(p) = 0$, 则对任意 $z \in D(p;r_0)$ 均有

$$\begin{aligned}
|A(z)| \leq& \int_0^1 |f'(tz+(1-t)p) - f'(p)|\cdot|z-p|\mathrm{d}t \\
=& \int_0^1 \left|\frac{(z-p)t}{2\pi i}\oint_{\partial D(p;r_0)} \frac{f'(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-p)(\zeta-zt-(1-t)p)}\right|\cdot|z-p|\mathrm{d}t \\
\leq& \int_0^1 \frac{|z-p|\cdot t\cdot|f'|_{\max_{\partial D(p;r_0)}}}{r_0-|zt|}\cdot|z-p|\mathrm{d}t \\
\leq& \frac{|z-p|^2\cdot|f'|_{\max_{\partial D(p;r_0)}}}{2(r_0-|z-p|)} \\
\leq& \frac{|z-p|^2\cdot|f'(p)|}{2(r_0-|z-p|)},
\end{aligned}$$

以及

$$|A(z)| \geq |f'(p)|\cdot|z-p| - |f(z)|.$$

故

$$\begin{aligned}
\sup_{0\leq r\leq r_0}\inf_{|z-t|=r}|f(z)| \geq& \sup_{|z-p|\in[0,r_0)}\left(|z-p| - \frac{|z-p|^2}{r_0-|z-p|}\right)|f'(p)| \\
=& \sup_{|z-p|\in[0,r_0)}\left[3r_0 - \left(2(r_0-|z-p|) + \frac{r_0^2}{r_0-|r_0-r|}\right)\right]\cdot|f'(p)| \\
=&(3-2\sqrt{2})r_0|f'(p)|, \quad |z-p| = (1-\sqrt{2}^{-1})r_0 \\
=&(3/2-\sqrt{2})(1-|p|)|f'(p)| \\
=&(3/2-\sqrt{2})M
\end{aligned}$$

□

Thm. (Bloch 定理) 若 $f \in \mathrm{Hol}(\overline{\mathbb{D}})$ 满足

$$|f'(z)|(1-|z|^2) \in C(\overline{\mathbb{D}}),$$

记 $M = \sup_{z\in\overline{\mathbb{D}}}|f'(z)|(1-|z|^2)$, 最大值在 $z = p$ 处取达, 则

$$D(f(p),(3/2-\sqrt{2})M) \subset f(\mathbb{D}).$$

Proof. 对满足 Bloch 定理弱性质之解f, 下从族 $\mathcal{F} := \{f\circ\varphi \mid \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})\}$ 寻找解.

由于 φ 具有一般形式 $\varphi(z) = \dfrac{z-z_0}{1-z\overline{z_0}}\cdot e^{i\theta}$, 其中 $|\varphi'(0)| = 1-|z_0|^2$. 因此

$$|h'(0)| = |f'(\omega)|\cdot(1-|\omega|^2), \quad \omega = -z_0e^{i\theta}.$$

不妨设 $f'(\omega)\cdot(1-|\omega|^2)$ 在 $\omega = q$ 时取得最大值 M, 今置

$$F(z) = f\left(\frac{q-z}{1-z\overline{q}}\right), \quad (F: 0 \mapsto f(q)).$$

因此对任意 $r \in (0,1)$ 均有

$$\max_{|z|\le r}|F'(z)| \le \max_{|z|\le r}\frac{M}{1-|z|^2} = \frac{M}{1-r^2}.$$

故 $\max_{z\in\mathbb{D}}|F'(z)|(1-|z|^2)\le M$. 注意到 $\max_{z\in D(0;\sqrt{2}/2)}|F'(z)|\le 2|F'(0)|$, 参考若形式之证明令 $A_0(z)=F(z)-zF'(0)$. 故 $F(D(0,\sqrt{2}/2))$ 包圆盘 $D(F(0),(3/2-\sqrt{2})M)$. 注意到 $F(\mathbb{D})$ 与 $f(\mathbb{D})$ 有相同的相. 因此

$$D(f(q),(3/2-\sqrt{2})M)\subset f(\mathbb{D}).$$

□

Def. 定义 Bloch 函数族如下

$$\mathcal{B} := \{f\in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \mid \sup_{z\in\mathbb{D}}|f'(z)|\cdot(1-|z|^2)<\infty\}.$$

Prop. $\mathcal{B}$ 关于如下范数完备

$$\|f\| := f(0)+\sup_{z\in\mathbb{D}}|f'(z)|(1-|z|^2)\quad \left(\le 2\sup_{z\in\mathbb{D}}|f(z)|\right).$$

Koebe $\frac{1}{4}$ 定理

Lemma. (Grönwall) 若函数 $g(z)=z+\sum_{n\ge 0}b_nz^{-n}$ 在单位圆盘外单叶, 则

$$\sum_{n\ge 1}n|b_n|^2\le 1.$$

Proof. 对 $r>1$, 取围道 $C_r := \{g(z):|z|=r\}$, 取 E_r 为 C_r 所围的紧集. 其面积为

$$\begin{aligned}
A(E_r)=\int_{E_r}\mathrm{d}A=\frac{1}{2i}\int_{C_r}\overline{\omega}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2i}\int_{C_r}(\overline{g}\cdot g')(z)\mathrm{d}z\\
=&\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(re^{-i\theta}+\sum_{n\ge 0}\overline{b_n}r^{-n}e^{in\theta}\right)\cdot\left(1-\sum_{m\ge 0}mb_mr^{-m-1}e^{-i(m+1)\theta}\right)re^{i\theta}\mathrm{d}\theta\\
=&\pi\left(r^2-\sum_{n\ge 1}n|b_n|^2r^{-2n}\right)\\
\xrightarrow{r\to 1^+}&\pi\left(1-\sum_{n\ge 1}n|b_n|^2\right).
\end{aligned}$$

注意到 $|b_1|\le\sum_{n\ge 1}n|b_n|^2\le 1$ 取等时 $|b_1|=1$. 此时 $g(z)=z+b_0+\dfrac{b_1}{z}$.

□

Def. (Schlicht函数) 记 $\mathcal{S}$ 为所有Schlicht函数之集合. 任取 $f\in\mathcal{S}$, 有

- $f\in\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$, 且 f 在 $\mathbb{D}$ 上为单射 (故为单叶映射),
- $f(0)=0$, 且 $f'(0)=1$.

Prop. $f(z)=z+\sum_{\ge 2}c_nz^n$ 为 $f\in\mathcal{S}$ 之一般形式.

Def. (Koebe函数) Koebe 函数为

$$f(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=\sum_{n\ge 1}nz^n.$$

Def. 可通过旋转 Koebe 函数得到广义 Koebe 函数

$$f_\alpha(z)=\frac{z}{(1-\alpha z)^2},\quad |\alpha|=1.$$

Prop. 广义 Koebe 函数为 Schlicht函数.

Lemma. (Bieberbach) 对函数 $f(z)=z+\sum_{n\geq 2}a_nz^n\in\mathcal{S}$, $|a_2|\leq 2$ 若且仅若f为 Koebe 函数.

Proof. 构造平方根变换 (取其中一叶即可)

$$g(z)=\frac{1}{f(z^{-2})^{-1/2}}=z-\frac{a_2}{2}\cdot\frac{1}{z}+\cdots.$$

取等时$g(z)=z-\dfrac{\alpha}{z}$, 此处 $|\alpha|=1$.

回推得 $f(w)=\dfrac{z}{(1-\alpha z)^2}=f_\alpha(w)$ 为 Koebe 旋转函数.

□

Thm. (Koebe $\frac{1}{4}$ 定理) 全纯函数 $f\in\mathrm{Hol}(\overline{\mathbb{D}})$, 则

$$D(f(0),|f'(0)|/4)\subset f(\mathbb{D}).$$

Proof. 不妨取 $f(z)=z+\sum_{n\geq 2}a_nz^n\in\mathcal{S}$. 由于$f(\mathbb{D})$非全空间, 任意取$\omega\in\mathbb{C}\setminus f(\mathbb{D})$. 考虑单叶映射

$$h_\omega(z)=\frac{1}{f(z)}-\frac{1}{\omega}=\frac{\omega f(z)}{\omega-f(z)}=z+(a_2+\omega^{-1})z^2+\cdots.$$

根据 Bieberbach 之引理, $|\omega^{-1}|\leq|a_2|+|a_2+\omega^{-1}|\leq 2+2$, 故 $|\omega|\geq 4$. 由于$\omega\in\mathbb{C}\setminus f(\mathbb{D})$ 之任意性, $f(\mathbb{D})$ 包含半径为 $1/4$ 之圆盘.

□

Prop. Koebe $\frac{1}{4}$ 定理中的 $1/4$ 为最佳系数.

Proof. Koebe 函数 $f(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}$ 将 $\mathbb{D}$ 映射作 $\mathbb{C}\setminus[-\infty,1/4]$. 因此, 存在 f 使得

$$D(f(0),|f'(0)|(1/4+\varepsilon))\not\subset f(\mathbb{D})$$

对一切 $\varepsilon>0$ 成立.

□

Picard 小定理

Thm. (Picard 小定理) 若整函数的值域在 $\mathbb{C}$ 上略去两个点, 则为常函数.

Proof. 下采用反证法证明 Picard 小定理. 不失一般性地, 设整函数 f 在 $\mathbb{C}$ 上取值略过 ±1, 则函数$1-f^2$ 无零点, 从而存在整函数 g 使得 $g^2=1-f^2$.

注意到 $(f+ig)(f-ig)=1$, 故存在整函数 F 使得 $f+ig=e^{i\pi F}$. 于是

$$f=\frac{1}{2}(e^{iF}+e^{-iF})=\cos\pi F.$$

而注意到 F 略去 $\{\pm1\}$ 两点, 故

$$\exists\varphi\in\mathrm{Hol}(\mathbb{C})\ \text{s.t.}\ f=\cos(\pi\cos(\pi\varphi)).$$

对上述 φ, $\varphi(\mathbb{C})$ 不包含某一半径之圆盘. 从而与 Bloch's 定理或 Koebe $\frac{1}{4}$ 定理矛盾.

考虑所有整实数点在$\cos \pi z$下之原像, 构造集合

$$A := \mathbb{Z} + \{\pm i\pi^{-1} \log(n + \sqrt{n^2 - 1})\}.$$

不难验证 $g(\mathbb{C}) \cap A = \emptyset$. 注意到 A 中各点与纵向最近点相隔距离 1 且与横向最近点相隔距离不超过 $2\pi^{-1} \log(2 + \sqrt{3})$. 是以 A 所能容纳圆盘之半径之最大值有限, 导出矛盾. Picard小定理得证.

Prop. $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数若略去三个取值, 则为常函数.

思考题

Ex1. 如何从 Bloch 定理或 Koebe $\frac{1}{4}$ 定理得出以下推论

$$f \in H(\mathbb{C}) \implies \forall r > 0, \exists x_0 \text{ s.t. } D(x_0, r) \subset f(\mathbb{C}).$$

Ex2. 证明 Picard 小定理之等价形式

$$f, g \in H(\mathbb{C}) \text{ and } 1 = e^f + e^g \Rightarrow f, g \text{ are constant}.$$

Ex3. 探索 $f \in H(\mathbb{C})$ 在 $\mathbb{C}$ 上取至所有值之充要条件.

> Hint: 考虑 $f = p \cdot e^g$, 这里p为多项式函数.

Ex4. (不动点定理) 设 $f \in H(\mathbb{C})$, 则 $f \circ f$ 在 $\mathbb{C}$上有不动点, 反之f为平移变换.

> Hint: 设$f \circ f$无不动点, 考虑 $g(z) = \dfrac{f(f(z)) - z}{f(z) - z}$.

Ex5. (2020年丘成桐数学竞赛分析部分) 对 $\forall n \geq 3$, 若整函数 f 与 g 满足$f^n + g^n = 1$, 则f与g为常函数.

> Hint: 本题解法较易, 与费马最后定理无关. 数学 Riemann 曲面相关知识者会认为这是到水题.

Ex6. (上一题加强形式) 若将全纯改至亚纯, 则 f 与 g 的所有pole(s)一一对应.

Ex7. 证明: 存在 $\mathbb{C}$ 上非常值亚纯函数 f, g 使得 $f^3 + g^3 = 1$.

> Hint: 请回忆
>
> $$(\wp'(z))^2 - 4\wp^3(z) + 60G_4\wp(z) + 140G_6 = 0.$$
>
> 以此验证
>
> $$\left(\frac{\Gamma(1/3)^6}{8\pi^2} + \frac{\pi\wp'(z)}{\sqrt{3}\Gamma(1/3)^3}\right)^3 + \left(\frac{\Gamma(1/3)^6}{8\pi^2} - \frac{\pi\wp'(z)}{\sqrt{3}\Gamma(1/3)^3}\right)^3 = \wp^3(z).$$