「T12」 证明：在连续统假设下，对不可数集合I（不妨设$I=[0,1]$，$|I|=c$），不存在测度μ使得$\mu(I)=1$且$\forall x\in I:\mu(\{x\})=0$。

证明：考虑$\mathcal{S}=\prod_{n\geq 1}\mathbb{Z}$为所有整数序列之集合，易知$|\mathcal{S}|=c$。定义$\{x_n\}\leq\{y_n\}\Leftrightarrow x_n\leq y_n(\forall n)$。下先证明引理：

> Lemma1 在连续统假设下，存在不可数集$\mathcal{F}\subset\mathcal{S}$使得
>
> $$\forall y\in\mathcal{F},|\{x\in\mathcal{F}:x\leq y\}|\leq\aleph_0$$

由于连续统假设成立，$\mathcal{S}$与最小不可数基数ω_1间存在双射。注意到

$$\forall\omega'\in\omega_1,\{a\in\omega_1:a\preccurlyeq\omega'\}$$

是至多可数的，因此存在一个良序$\leqq$使得

$$\forall y\in\mathcal{S},|\{x\in\mathcal{S}:x\leqq y\}|\leq\aleph_0$$

> 值得说明的是，$\leqq$与$\leq$一定是不同的序关系（可显然验证）。就连续统假设于ZFC公理之独立性看来，序关系$\leqq$应当是“不可知”的。我们在这里作了转化：将“可知”域$\mathcal{S}$上“不可知”序关系$\leqq$转化为“不可知域”$\mathcal{F}$上的“可知”序关系$\leq$。**「这将主要矛盾转移到某个同构于$\mathcal{S}$的域$\mathcal{F}$上，同时避免了“两个拳头打人”的“左”倾机会主义错误。」**

对任意$\alpha\in\mathcal{S}$，设函数f_α为$\mathbb{N}$到$\{x:x\leqq\alpha\}$的双射。记$g_\alpha(n)=[f_\alpha(n)]_n+1$，其中$[\{z_n\}]_k:=z_k$，因此得序列$g_\alpha:=\{g_\alpha(n)\}$。

> 设定g_α即是将所有$x(x\leqq\alpha)$以某种方式排开，取对角线元素并加1以组成新列，即$g_\alpha=(x_1^1+1,x_2^2+1,\ldots)$。由此可见，$g_\alpha\leq x$对任意可数多个$x\leqq\alpha$都是不成立的。

记$\mathcal{F}:=\{g_\alpha:\alpha\in\mathcal{S}\}$，下证明$|\mathcal{F}|=c$，同时对任意$g_\alpha\in\mathcal{F}$，$\{x\leq g_\alpha:x\in\mathcal{F}\}$可数。

1. 若$g_\alpha\leq x$，则$\alpha\leqq x$，因此α至多可数。
2. 反设$\mathcal{F}$可数，则其对$\leqq$存在上确界β；注意到g_β与所有$y\leqq\beta$不相同，故矛盾。根据连续统假设，$|\mathcal{F}|=c$。

引理1得证。下给出一种集合构造，即引理2。

> Lemma2 连续统假设下，存在I的子集A_{ij}使得
>
> 1. $\forall i \in \mathbb{N}^+$，$\cup_j A_{ij}$是不交并；
> 2. 对任意正整数列$\{k_n\}$，$\cap_i \cup_{1\le j\le k_i} A_{ij}$至多可数。

设$h:[0,1]\to\mathcal{F}$为一一映射。定义$x\in A_{ij}$若且仅若$j=[h(x)]_i$，下证明其符合引理所限定之条件：

1. 对给定的i，有等价关系$x\sim y$若且仅若$[h(x)]_i=[h(y)]_i$。因此$[0,1]/\sim$对应了所有A_{ij}，故A_{ij}互不相交且并集为$[0,1]$；

2. 对任意数列$\{k_n\}$，

$$h(\cap_i \cup_{1\le j\le k_i} A_{ij})=\{h(x):h(x)\le\{k_n\}\}$$

   至多可数（据引理1）。

引理2得证。

今取$\{k_n\}$使得$\mu(\cup_{j\ge k_i} A_{ij})\le 2^{-1-i}$。由于$\cap_i \cup_{1\le j\le k_i} A_{ij}$至多可数，则$\mu(\cup_i \cup_{j\ge k_i} A_{ij})=1$。注意到

$$\mu(\cup_i \cup_{j\ge k_i} A_{ij})\le\sum_i \mu(\cup_{j\ge k_i} A_{ij})\le\sum_i 2^{-1-i}=2^{-1}$$

矛盾！