黎曼曲面笔记(二)

子流形

称$M \subset \mathbb{R}^n$为k维子流形若且仅若$\forall x \in M$, 存在邻域$U_x \subset \mathbb{R}^n$, 开集$U \subset \mathbb{R}^k$, 光滑映射$\xi : U \to M \cap U_x \subset \mathbb{R}^n$为同胚映射, 且对任意$y \in U$总有$D_y\xi$单射. 其中, 前者保证了形状一致, 后者保证无尖点.

例如$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (t^2, t^3 - t)$在$t \in \{\pm 1\}$时对应了相等的点, 故非单射.

再例如, $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (t^2, t^3)$非正则曲线($\gamma'(0) = \vec{0}$). 观察知$t = 0$处$D_0\xi$非单射(有尖点).

根据映射特点, M为k维子流形若且仅若存在满足$M \to \mathbb{R}^n$的embedding. 读者可同时回顾反函数定理: 取$x \in \mathbb{R}^n$, U_x为某一邻域, 若存在光滑函数$F : U_x \to \mathbb{R}^n$使得D_xF为单射, 则存在包含x的开邻域A与包含$F(x)$的开邻域B使得$F|_A$为A与B间的微分同胚.

Whitney嵌入定理

一维紧流形并不总能嵌入在一维空间中, 例如S^1无法嵌入$\mathbb{R}^1$, Möbius环无法嵌入$\mathbb{R}^2$中. 回顾对embedding与immersion之定义, 线性映射$f : M \to N$为immersion若且仅若$\mathrm{d}f : T_pM \to T_pN$为单射. 特别地, immersion被加强为embedding若且仅若M与$f(M) \subset N$在映射f下同胚. 下自然有问: 确保一切n维紧流形可被embedded进实空间$\mathbb{R}^{\theta(n)}$至少多大? 取等情况何以对应?

先证明弱化的结论: 对任意n均有$\theta(n) < \infty$. 不妨设M为n维紧流形, 据紧性, 可以找到一组元素数有限的图册$\mathcal{A} = \{(U_x, \varphi_x)\}$使得

- $\varphi_x(U_x) \supset B_n(0, 2)$对任意局部图成立.
- $\{\varphi_x^{-1}(B_n(0, 1))\}$开覆盖$M$.

> 其中$B_n(x_0, r)$为开球$\{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$.

构造光滑算子σ_x使得$\sigma_x : \overline{U_x} \to \{1\}$且$\mathrm{supp}(\sigma_x) \subset \varphi_x^{-1}(B_n(0, 1.5))$. 令$\psi_x := \sigma(x)\varphi_x$, 考虑光滑映射

$$f : M \to \mathbb{R}^{k(n+1)}, x \mapsto (\psi_1(x), \ldots, \psi_k(x), \sigma_1(x), \ldots, \sigma_k(x)).$$

下将证明, f为单射且为immersion.

1. 当$f(x) = f(y)$时, $\psi_i(x) = \psi_i(y)$与$\sigma_i(x) = \sigma_i(y)$对一切$1 \leq i \leq k$成立. 不妨设$\psi_t(x) \neq 0$, 则由$\sigma_t(x) = \sigma_t(y) \neq 0$知$\varphi_t(x) = \varphi_t(y)$, 由$\varphi_t$单射知$x = y$.
2. 为证明f为immersion, 任取点p. 不妨设$p \subset \varphi_l^{-1}(B_n(0, 1))$, 考虑

   $$\mathrm{d}f(p) : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R}^{k(n+1)}.$$

   p点附近$f(x) = (\psi_1(x), \ldots, \varphi_l(x), \ldots, \psi_k(x), \sigma_1(x), \ldots, 1, \ldots \sigma_k(x))$. 观察微分同胚映射$\varphi_l$项可知$\mathrm{d}f$满秩, 进而$f$给出了$M$到$f(M)$的微分同胚.

Whitney给出的一般结论为: Any compact manifold M of dimension n can be embedded in $\mathbb{R}^{2n+1}$ and immersed in $\mathbb{R}^{2n}$. 下证明之.

可构造上述映射f使得$f(M) \subset \mathbb{R}^N$, 其中不妨设$N > 2n + 1$. 将$f(M)$视作$\mathbb{R}^N$上的子流形, 下将逐级证明$f(M)$为$\mathbb{R}^{N-1}$之子流形, 直到停止于$2n + 1$. 为此, 对任意向量$v \subset \mathbb{R}^N$, 记投影映射

$$P_v:\mathbb{R}^N\to v^{\perp}, x\mapsto x-\frac{(x,v)}{(v,v)}v.$$

考虑

$$\pi_1:(M\times M)\setminus\ D(M)\to\mathbb{R}P^{N-1},(v_1,v_2)\mapsto[p_1-p_2].$$

其中$D(M):=\{(v,v):v\in M\}$. 对一切使得$P_v\mid_M$非单射的v, $[v]\in\Im(\pi_1)$. 注意到$(M\times M)\setminus D(M)$为$M^2$中开集, 从而其维度$2n<N-1$. Sard定理指出光滑映射间极值点的像Lebesgue零测, 从而σ_1之像在$\mathbb{R}^{N-1}$中Lebesgue零测.

下寻找一切使得P_v非单射的v点. 由于存在$p\in M$使得$\mathrm{d}P_v(p)$非满秩, 且p线性, 故$\mathrm{d}P_v=P_v$. 易知$\ker P_v=\operatorname{span}(v)$. 考虑非零切丛上的映射

$$\pi_2:TM\setminus\{0\}\to\mathbb{R}P^{N-1},(p,v)\mapsto[v].$$

$\Im(\pi_2)$包含了一切使得P_v非immersion的v构成之集合. 注意到$TM\setminus\{0\}$为TM中开集, 故维度为$2n$. 由Sard定理知$\Im(\pi_2)$在$\mathbb{R}^{N-1}$中Lebesgue零测. 从而对几乎所有v, P_v为单的immersion, 从而为M上的embedding. 往复归纳即可.

主定理得证, 另需说明存在immersion $g:M\to\mathbb{R}^{2n}$. 考虑

$$TM':=TM\cap B_{2n-1}(0,1)\subset TM\setminus\{0\}$$

再次使用Sard定理知$\pi_2(TM')\subset\mathbb{R}P^{2n}$零测. 从而对几乎所有$v$, P_v为M上的immersion.

> 注: Sand定理叙述如是: 定义光滑映射
>
> $$f:M(\subset\mathbb{R}^m)\to N(\subset\mathbb{R}^n).$$
>
> 称p为critical point若且仅若$(\mathrm{d}f_p)(T_pM)\neq T_{f(p)}N$. 则一切cirtical points之像零测.

定向

称流形M可定向, 若且仅若存在图册$\mathcal{A}$, 对任意转换映射$\varphi_1\circ\varphi_2^{-1}$, $\det D(\varphi_1\circ\varphi_2^{-1})$均为正. 因此, 所有流形至多有两种定向, 即可定向流形有两种定向(如S^2). 下给出不可定向流形之案例.

构造Möbius环$\mathbb{R}^2/\sim$, 其中$(s,t)\sim(s+1,-t)$. 不妨记

$$\begin{aligned}\varphi_1:&(0,1)\times\mathbb{R}/\sim\to(0,1)\times\mathbb{R}\\ \varphi_2:&(0.5,1.5)\times\mathbb{R}/\sim\to(0.5,1.5)\times\mathbb{R}\end{aligned}$$

为自然的嵌入. 从而

$$\varphi_1\circ\varphi_2^{-1}(s,t)=\begin{cases}(s,t) & ,s\in(0,0.5)\\ (s,-t) & ,s\in(0.5,1)\end{cases}.$$

显然Möbius环不可定向.