图谱论导引(第十九期)

Laplace谱简介

前文已介绍矩阵A的Laplace矩阵$L:=D-A$. 本节将重点研究矩阵的Laplace谱.

Laplace矩阵重有以下定义方式: 将G所有边任意定向得图$\vec{G}$, 定义点与边的导出矩阵$R_{|V|\times|E|}$, 其中

$$r_{ie}=\begin{cases}-1 & i\text{为起点},\\ 0 & i,e\text{不相邻},.\\ 1 & i\text{为终点}.\end{cases}$$

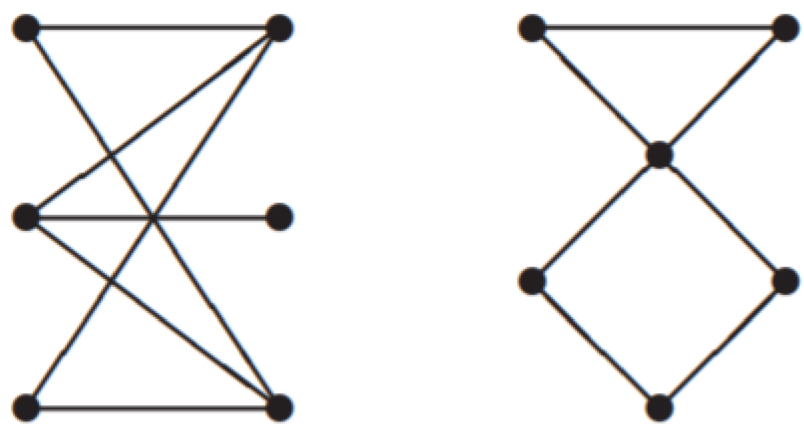
则$L=RR^T$. 先前已提及: L在$\mathbf{1}^T$中的$n-1$个特征向量线性独立. 注意到$L_{\overline{G}}=nI-L_G-J$, 计算得$\lambda_n(\overline{G})=0$, $\lambda_i(\overline{G})=n-\lambda_{n-i}(G)$.

注意到L必含有特征值0, 注意到

$$x^TLx=\sum_{(u,v)\in E}(x_u-x_v)^2=0$$

时, 每一连通部件都至少包含一重特征值0. 对连通图而言, $\ker L=\langle\mathbf{1}\rangle$. 因此, 0的重数对应了图的连通部件数.

上文已例证: 邻接矩阵谱相同的两个图未必同构, 例如$K_1\dot{\cup}C_4$与$K_{1,4}$. 实际上, Laplacian谱相同的两个图亦未必同构, 例如以下两者.



$\forall e\in E(G)$, $L(G-e)$相当于$L(G)$减去秩为1的半正定矩阵$\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$. 从而由特征值插值定律知

$$0=\lambda_n(G-e)=\lambda_n(G)\le\lambda_{n-1}(G)\le\lambda_{n-1}(G-e)\le\cdots\le\lambda_1(G-e)\le\lambda_1(G).$$

图变换与Laplace谱

记$C_G(x)=\det(xI-L(G))$, 则有以下结论:

无交并

对无交并$G=\dot\bigcup_{i=1}^k G_i$, $C_G(x)=\prod_{j=1}^k C_i(x)$.

补图

注意到$L_{\overline{G}}=nI-L_G-J$, 计算得$\lambda_n(\overline{G})=0$, $\lambda_i(\overline{G})=n-\lambda_{n-i}(G)$. 进而

$$C_{\overline{G}}(x)=(-1)^{n-1}\frac{x}{n-x}C_G(n-x).$$

连接图

注意到

$$G_1\bigtriangledown G_2=\overline{\overline{G_1}\dot\cup\overline{G_2}}$$

故

$$C_{G_1\bigtriangledown G_2}(x)=\frac{x-n_1-n_2}{(x-n_1)(x-n_1)}C_{G_1}(x-n_2)C_{G_2}(x-n_1).$$

生成树定理

本小节旨在解决如下问题: 任意图G中包含多少树?

生成树定理

注意到$L\operatorname{Adj}(L)=I\det L=O$, 故$\operatorname{Adj}(L)$各列均为$L$之0-特征向量. 实际上, 不妨设$L$连通, 则$\ker L=\langle\mathbf{1}\rangle$, 从而$\operatorname{Adj}(L)$为$J$的整数倍. 记$\operatorname{Adj}(L)=\alpha J$. 将$G$各边定向, 得图$\vec{G}$. 令$R=L(\vec{G})$, 下先证明: 若$R$为某一定向树(以某一点为参照, 朝向所有末端)的邻接矩阵, 方阵R'由R删除一行所得, 则$\det R'=\pm1$.

结论对$k=2$之情形显然成立, 不妨设对$k=n-1$之情形均成立, 则记$V(G)=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$, 再不妨设$N(v_n)=v_{n-1}$. 记$R^*$为$R$将第$n$行加至第$n-1$行, 再删去最末行与最末列所得, 从而$R^*$可视作$\vec{G}^*$的邻接矩阵. 其中, $\vec{G}^*$为将v_n同v_{n-1}某一其他邻点连接v_i, 使得v_i-v_{n-1}与v_n-v_{n-1}反向所得, 因而是良定义的定向树(即便可能不连通). 将R^*删去任意一行得R'', 据归纳假设有

$$|\det R'|=|\det R''|=1.$$

先前已证明: 对任意简单图G, $\operatorname{Adj}(L(G))=\alpha J$. 实际上, 根据Binet-Cauchy定理, $\operatorname{Adj}(L)$的第i个对角元素l_{ii}为$\det(R_iR_i^T)$, 其中R_i为R删去第i行所得. 注意到

$$\alpha=l_{ii}=\det(R_iR_i^T)=\sum_T\det(R_i(T))^2$$

其中T为所有导出生成树, 从而G导出树的数量为α.

带权生成树计数

倘若给生成树每条边带上权重, 则有类似结论

$$\alpha=\sum_T\left(\prod_{e\in T}w_e\right).$$

生成树与特征多项式

对图G, 记α为$\mathrm{Adj}(L(G))$中任一元素, 则

$$\alpha=\frac{(-1)^{n-1}}{n}C_G'(0)=\frac{1}{n}\prod_{i=1}^{n-1}\lambda_i.$$

对k-正则图而言

$$\alpha=\frac{1}{n}P_G'(k)=\frac{1}{n}\prod_{i=2}^{n}(r-\lambda_i).$$

对完全图而言, 其生成树之数量$\alpha=\det(nI_{n-1}-J)=n^{n-2}$. 常称之为Cayley定理. 下图列举了$K_4$导出的所有树.