Patchworking 方法在 Hilbert 16 问题中的应用

张陈成, 519071910019
致远学院, 上海交通大学.

日期：2022 年 6 月 2 日

摘　要

本文旨在介绍 Oleg Viro 为解决 Hilbert 问题所特创的 Patchworking 方法.

1　Hilbert 16th 问题简介

1.1　问题提出

Harnack 于 1876 年对平面实代数曲线的亏格估计 [5] 系 Hilbert 16th 问题之肇端. 其核心定理叙述如下:

定理 1.1. 考虑实射影平面 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ 中的非奇异实代数曲线 $\mathbb{R}A$. 记 m 为 $\mathbb{R}A$ 的度, $\kappa := H_0(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}A)$ 为 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}A$ 的连通度, 则有如下不等式

$$\frac{1-(-1)^m}{2} \leq \kappa \leq \binom{m-1}{2} + 1. \tag{1}$$

特别地, 称 $\mathbb{R}A$ 为 $\mathcal{M}$-曲线若且仅若 $\kappa = \binom{m-1}{2} + 1$.

尔后, 大批数学家试图明确 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ 在 $\mathcal{M}$-曲线划分下的连通分支之相对位置, 即 $\mathcal{M}$-曲线之卵形结构的相对排列位置. 此后依照 [10] 中记号描述卵形结构, 即

- 以 $k(\in \mathbb{N})$ 表示无交集的 k 个圈;
- $a \amalg b$ 表示取 a 与 b 之无交并, a, b 为集合;
- $\langle a \rangle$ 表示置 a 于 1 内.

实例见图 1.

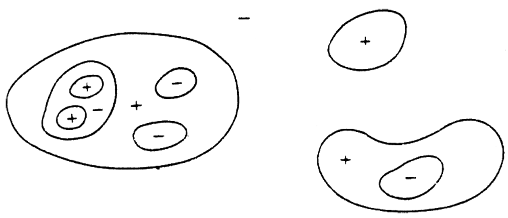

图 1: $\langle 1 \amalg 1\langle 1\rangle \amalg 1\langle 2 \amalg 1\langle 2\rangle\rangle\rangle$ 所对应的卵形结构.

定义偶 (奇) 圈为外接卵形所套层数为偶 (奇) 数的圈, 例如图图 1 中有 3 个 0 层圈 (外圈), 4 个一层圈, 2 个二层圈. 记 p (n) 为偶 (奇) 圈之总数, 则图图 1 中 $(p, n) = (5, 3)$.

Hilbert 于 1900 年将实代数曲线之卵形结构问题及其衍生问题提炼为如下四问 [1]:

- **问题甲.** 非奇异 m 次代数曲线的卵形何以排列?
- **问题乙.** 对任一给定的 m 次 Hamilton 系统, 其极限环数量是否有限?
- **问题丙.** 若对 **问题乙.** 给出肯定作答, 则一切 m 次 Hamilton 系统之极限环数量是否存在一致上界 $H(m)$?
- **问题丁.** 若对 **问题丙**给出肯定作答, 则 $H(m)$ 取达之情形对应的极限环何以排列?

1.2 问题第一部分早期发展

$\mathcal{M}$-曲线的卵形排列问题系 Hilbert 16 问题的重要议题, 纪事如下:

- 1876 年, Harnack 提出原始定理, 且给出一类 $\mathcal{M}$-曲线之可行构造方式 [5], 即 Harack 曲线.
- 1891 年, Hilbert 给出另一类 $\mathcal{M}$-曲线之可行构造方式 [6], 即 Hilbert 曲线, 且断言所有 $\mathcal{M}$-曲线无外乎 Hilbert 曲线或 Harnack 曲线.[2].
- 1900 年, Hilbert 16th 问题正式提出.
- 1969 年, Gudkov 就 Hilbert 之断言给出反例, 并证明度为 6 的 $\mathcal{M}$-曲线的所有 (三种) 卵形排列 [4]. 同时就 $\mathcal{M}$-曲线提出猜想:

$$p - n \equiv k^2 \mod 8. \tag{2}$$

- 1972 年, Rokhlin 证明了 Gudkov 之猜想.[14]
- 1982 年, Viro 对 $m = 7$ 时的 $\mathcal{M}$-曲线进行分类, 并首创 Patchworking 方法. [16] [3]
- 1996 年, Viro 利用 Patchworking 方法证伪了 Ragsdale 猜想 [4]. [9]

1.3 第二部分早期发展

相较 Hilbert 16th 问题的第一部分, 问题的第二部分侧重研究二元多项式函数导出的向量场

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y). \end{cases} \tag{3}$$

其中, $P(x, y), Q(x, y)$ 为次数不大于 d 次的多项式, 记方程 3 为导出的 d 次向量场. 记 $\mathscr{S}(V)$ 为向量场 V 中极限环之集合, 定义 Hilbert 数为 $\min\{\#\{\mathscr{S}(V) : \deg V = d\}\}$. 早期研究成果如下

- 1987 年, [17] 与 [7] 中证明了任一给定的 d 次向量均有限极限环. [5]
- 1980 年前后, Andronova, Żołądek 等人给出了有 4 个极限环的两次向量场 [10], 以及有 11 个极限环的三次向量场 [18].
- [12] 给出有 $\dfrac{d^2 + 5d - 14}{2}$ 个极限环的 d 次向量场.

[1] Second International Congress of Mathematicians, Paris, in 1900.

[2] Rohn 与 Gudkov 对该构造提出优化, Hilbert 之构造方式现可称 Hilbert-Rohn-Gudkov 方法

[3] 引用文献系原作者自译的英文版本.

[4] Ragsdale 依照 Harnack 曲线与 Hilbert 曲线之特性猜想度为 $2k$ 的实代数曲线始终满足 $p \leq 3\binom{k}{2} + 1$ 与 $n \leq 3\binom{k}{2}$. [13]

[5] 即证明**问题乙**.

- [2] 构造了一类具有 $(1/2)d^2\log_2 d + O(d^2)$ [6] 个极限环的 $d = 2^k - 1$ 次向量场.
- 对 $d = 2^k - 1$, Hilbert 数之下界为

$$2^{2k-1}(k-3) + 3(2^k - 1) = \frac{(d+1)^2}{2}(\log_2(d+1) - 3) + 3d. \tag{4}$$

2 Patchworking 方法的早期应用

本节旨在介绍 Patchworking 方法与 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ 中一类实代数曲线之拓扑等价性, 系 Patchworking

2.1 多项式的子式逼近

为研究代数曲线拓扑性质, 自然的想法是将其连续变换到更易于研究之形式 (例如单纯复形). 对 $y = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ 而言, 对数坐标可将其在无穷远处的渐进性质极好地线性化, 因此将代数曲线在各象限内取对数坐标不失为策.

考虑多项式 $a(x, y) = 8x^3 - x^2 + 4y^3$, 任取象限 $Q_{\varepsilon,\delta}$ [7], 作各象限内同胚映射

$$l : Q_{\varepsilon,\delta} \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (u, v) := (\log|x|, \log|y|). \tag{5}$$

例如图 2 给出 $a(x, y) = 8x^3 - x^2 + 4y^2$ 之零点集在各象限内的 $\log\log$ 映射.

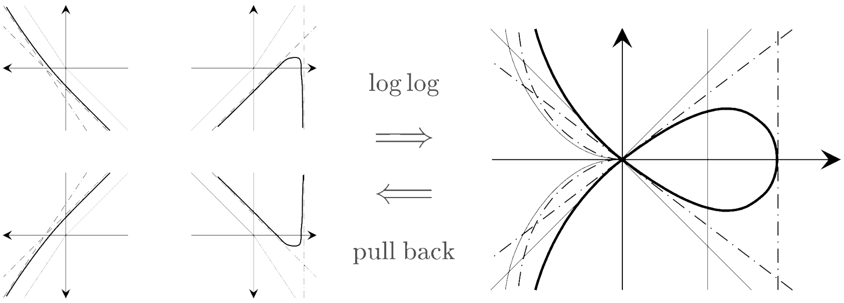

图 2: $a(x, y) = 8x^3 - x^2 + 4y^2$ 于各象限内的 $\log\log$ 图.

可见零点集 $V_{Q_{\varepsilon,\delta}}(a)$ 与之在 $\log\log$ 映射下的像同胚, 且 $a(x, y)$ 于坐标轴附近及无穷远处存在幂函数的渐进表示, 渐进幂函数即 $\log\log$ 图中渐近线之原像. 易见 a 在特定区域 $(x, y) \in \Omega$ 中渐近函数取决于 Ω 中取值较大的单项式. 以含参多项式函数 $y = p(x) = 1 + x^2 + \alpha x$ 为例, 端详图 3 可察觉 α 与渐进幂函数之联系 (象限 Q_{++} 内): 给定区段内的渐进幂函数恰为 $y = \max\{1, x^2, \alpha x\}$, 即局部取值极大之单项式.

一般地, 考虑 Q_{++} 内正系数一元多项式

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad a_k = e^{b_k} > 0, 0 \le k \le n. \tag{6}$$

记 $\Gamma_{L_p(u)}$ 为对数图

$$L_p(u) = \ln\left(\sum_{k=0}^n e^{ku+b_k}\right) \tag{7}$$

---

[6] [2] 给出的下界为 $(1/8)d^2\log_2 d$.

[7] 此处 $Q_{\varepsilon,\delta} := \{(\varepsilon s, \delta t) : s, t > 0\}, \varepsilon, \delta \in \{\pm 1\}$.

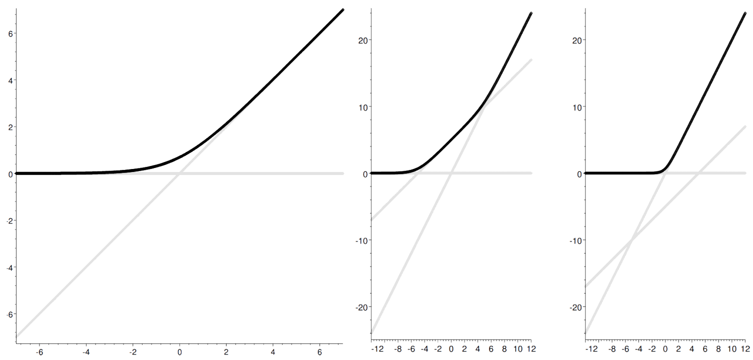

图 3: $y = 1 + x^2$ 及 $y = 1 + e^{\pm 5}x + x^2$ 在 Q_{++} 内的 $\log\log$ 图.

之图像. 定义极大单项式函数 ($\log\log$ 映射下)

$$M_p(u) = \max_k \{ku + b_k\}_{k=0}^n. \tag{8}$$

可见 M_p 为间断点有限的分段连续折线. 由渐进形态可得估计式

$$L_p(u) \leq M_p(u) = L_p(u) + R(u), \tag{9}$$

其中 $\lim_{u\to\infty} R(u) = 0$.

2.2 Maslov 之降幂分析

估计式 $L_p \sim M_p$ 导出以下问题:

1. 是否存在从 L_p 到 M_p 的连续变换[8]?
2. 该连续变换于某一截面 $t = t_0 \in [0, 1)$ 上是否存在同构于原多项式环的加法与乘法的运算?

对问题 1, 有如下定理:

定理 2.1. 仍取 $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ 为 Q_{++} 内正系数多项式. 对常数 $C > 0$, 做变换

$$(u, v) \mapsto (Cu, Cv), (y = ax^k) \mapsto (y = a^C x^k), \Gamma_f \mapsto \Gamma_f^{1/C}. \tag{10}$$

记 $p_h(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{1/h} x^k$, 从而有 C^0 逼近

$$\lim_{h\to 0} \Gamma^h_{L_{p_h(u)}} \to \Gamma_{M_p(u)}. \tag{11}$$

证明. 注意到 $\Gamma^h_{M_{p_h}(u)} \equiv \Gamma_{M_p(u)}$. 同时

- $\Gamma_{L_{p_h}(u)}$ 连续对任意 $u \in \mathbb{R}$ 成立,
- 根据极限 $\lim_{h\to 0^+} (|a|^{1/h} + |b|^{1/h})^h = \max\{|a|, |b|\}$ 可知 $L_{p_h}(u/h) \to M_{p_h}(u/h)$ 为单调递减的逐点收敛,
- 极限函数连续.

由 Dini 定理知任意有界闭子区间 $[-M, M]$ 上存在一致收敛 $\Gamma^h_{L_{p_h}(u)} \to \Gamma_{M_p(u)}$. 今任取 $\varepsilon > 0$, 则存在 $M_0 > 0$ 使得

[8] 即存在完备空间 $(C^0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ 中的连续变化 $\{f_t\}_{t\in[0,1]}$ 使得 $f_0 = L_p$ 且 $f_1 = M_p$

- 根据 $\lim_{u\to\infty} R(u)=0$ 可知存在 $M>0$ 使得对任意 $x\in[-M,M]$ 总有
$$\sup_{|u|>M} |L_{p_h}(u/h)-M_{p_h}(u/h)|\le\varepsilon, h\in(0,1)$$
.
- 存在 $h_0\in(0,1)$ 使得对一切 $h\in[0,h_0)$ 总有 $\sup_{u\in[-M,M]} |L_{p_h}(u/h)-M_{p_h}(u/h)|\le\varepsilon$.

收敛性得证. □

$y=x^2-2x+2$ 向其极大子式的 C^0 逼近如图 4 所示.

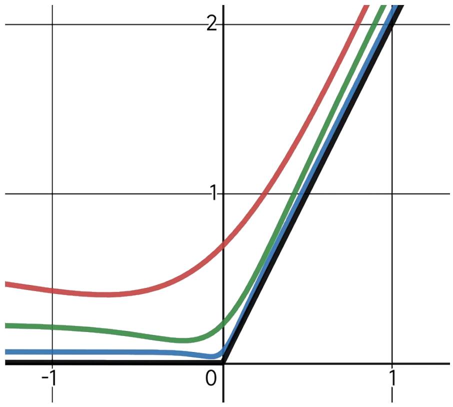

图 4: $h\ln(e^{2u/h}-2e^{u/h}+2)$ 在 $h\to0$ 时的 C^0 逼近.

对问题 2, 定义一族以 $h\in[0,\infty)$ 为指标集之同态[9]:
$$D_h:\mathbb{R}[x_1,x_2,\ldots]\to\{\log\log\ \text{papers}\}, p\mapsto M_{p_h}(u/h). \tag{12}$$
其中 $D_h(a+b)=D_h(a)\oplus_h D_h(b)$, $D_h(a\cdot b)=D_h(a)\odot_h D_h(b)$. 故半环 $(S_h,\oplus_h,\odot_h)$ 之运算求解如下:
$$a\odot_h b=a+b,\quad a\oplus_h b=\begin{cases} h\ln(e^{a/h}+e^{b/h}) & h>0,\\ \max(a,b) & h=0.\end{cases} \tag{13}$$

实际上, 对给定的 a,b, 值 $a\otimes_h b$ 与 $a\oplus_h b$ 均连续依赖于 h. 若将 a,b 视作数组或函数即可直接对应 ℓ^p, L^p 等空间. 此类以一族偏序集上的同态定义加法运算之降格的分析方式称 Maslov 降幂分析, 是以有兴致者移步 [11]. 另需留意 $h\to\infty$ 之情形导出诸如下表中的对应:

$(\mathscr{F},+,\cdot)$	$(\mathscr{F}_0,\oplus_0,\odot_0)$
$p(x)=\sum_k a_k x^k$	$M_p(u)=\max_k\{ku+\ln a_k\}$
积分 $\int_X f$	本性上界 $\operatorname{ess\,sup}_X\{f(x)\}$
Fourier 变换 $\tilde f(\xi)=\int e^{ix\xi}f(x)\mathrm{d}x$	Legendre 变换 $\tilde f(\xi)=\operatorname{ess\,sup}\{x\cdot\xi-f(x)\}$
线性问题	凸优化问题

2.3 平面多项式的连续逼近

前小节采用 Maslov 降幂法分析多项式 $p(x)-y$ 的拓扑结构, 其核心系构造一些列多项式环到分段光滑多项式的 C^0 逼近. 对 $\Gamma_{a(x,y)}$ 之 C^0 逼近类似 Q_{++} 内, 操作如下:

[9]实际上, $h>0$ 时为同构关系.

- 对任给定多项式 $a(x,y)=\sum_{(i,j)\in I}^{n} a^{ij}(x,y)$, 记 $a_+(x,y):=\sum_{(i,j)\in I}\dfrac{a^{ij}+|a^{ij}|}{2}$ 为正项部分, $a_-:=a_+-a$ 为负项部分 $(a=a_+-a_-)$.
- 定义 C^0 逼近至目标函数

$$M_{a_+}(u,v)=\sup_{(i,j)\in I_+}\{a^{ij}x^iy^j\}. \tag{14}$$

- 考虑 $\Gamma_{L_{a_+}(u,v)}$ 之零点集至分段线性曲面 $\Gamma_{M_{a_+}(u,v)}$ 的 C^0 逼近, 同理作 $\Gamma_{L_{a_-}(u,v)}z, \Gamma_{M_{a_-}(u,v)}$.
- 作 $\Gamma_{M_{a_+}(u,v)}\cap\Gamma_{M_{a_-}(u,v)}$ 于平面 $z=0$ 上之投影即可, 如图 5 所示.

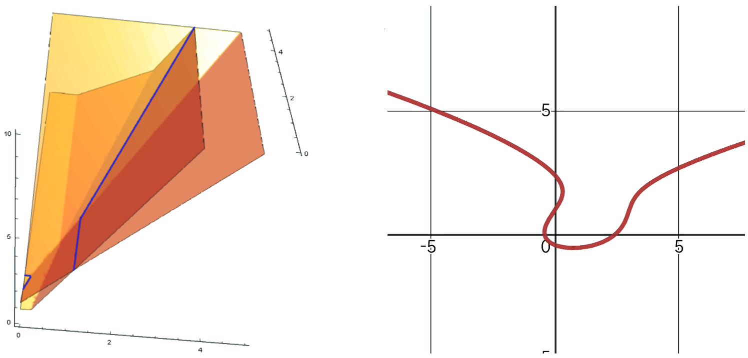

图 5: $a(x,y)=x^3+2y+x+xy-(3x^2+y^2+1)=0$ 拓扑之复现

2.4 坐标卡

定义准齐次多项式为具有以下类型的多项式

$$\sum_{(k_1,k_2,\dots,k_n)=:\vec{k}\in I} c_k\prod_{t=1}^{n}x_t^{k_t},\quad I \text{ 为线段}. \tag{15}$$

易见其 Newton 凸包 Δ [10] 为一维单纯形 (线段) 或单点. 考虑最简单的准齐次二项式 $\alpha x^p+\beta y^q$, 其中不妨假定 $\gcd(p,q)=1$. 易知 $l(V_{\mathbb{RR}^2}(a))$ 为垂直于 $\Delta(a)$ 的线段.

对一般形式的准齐次二项式

$$a(x,y)=\sum_{0\le k+l\le m} a_{k,l}x^ky^l. \tag{16}$$

记 (w_1,w_2) 为法向量, 其中 $\gcd(w_1,w_2)=1$. 则由对称性可知 $S_{(-1)^{w_1},(-1)^{w_2}}=S_{1,1}$, 记 Δ_* 为 Δ 经坐标轴对称所得. 称 (Δ_*,v) 为 a 的坐标卡若 $\kappa(v\cap\Delta_{\varepsilon,\delta})=\kappa(V_{Q_{\varepsilon,\delta}}(a))$ [11], 且 $v=v_{(-1)^{w_1},(-1)^{w_2}}$. 例如图 6 中黑点 (右) 为准齐次多项式曲线 (左) 的某一可行之坐标卡.

对一般的二元准齐次多项式 $f=\sum_{i=0}^{k}\alpha_ix^{pi+p_0}y^{q(k-i)+q_0}$, $\gcd(p,q)=1$, 由代数基本定理知其可分解为若干单项式与二项式之乘积. 从而 f 为若干准齐次二项式与准其次三项式之积, 后者不存在 $\mathbb{RR}^2$ 上的零点. 因此准齐次多项式 $l|_{\mathbb{RR}^2}$ 下的像为若干平行或重合直线之并. 不妨假定该多项式不含奇点因子 (如 $(\alpha x^p+\beta y^q)^2$), 从而排除" 重合" 之情形.

一般地, 可在 Newton 凸包的平整边缘处找到准其次多项式, 取 Γ_i 为任一边缘. 记 $DC^-_\Delta(\Gamma_i)$ 为垂直于 Γ 向外的法向量, 显然 $V(a)$ 在 $DC^-_\Delta(\Gamma_i)$ 处的走向与 $V(a_i^\Gamma)$ 一致.

[10] 定义多项式 $a(x,y)=\sum_{(i,j)\in I}a^{ij}x^iy^j$ 之 Newton 凸包为 $\Delta:=\mathrm{Conv}\{a^{ij}\neq 0:(i,j)\in I\}$, 高维情形同理.

[11] κ 为道路连通分支数.

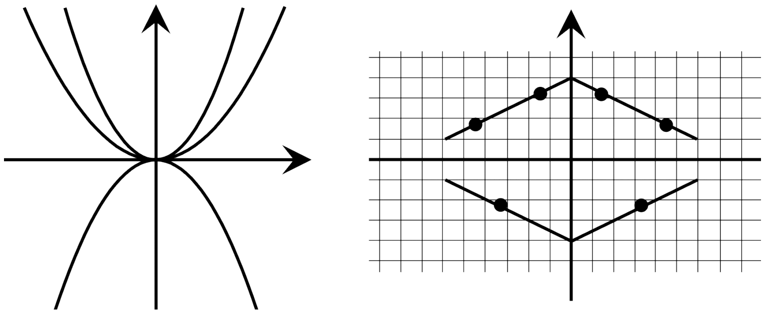

图 6: $a=(x^2-y)(x^2+y)(2x^2-y)y$ 之坐标卡.

一般地考虑非退化情形 [12]. 称曲线 $v\subset\Delta_*$ 为坐标卡若且仅若:

- 任意选定 Newton 凸包之直边界 $\Gamma_i\in\partial\Delta$, 记 a^{Γ_i} 为原多项式在 Γ_i 上截断生成的准齐次多项式. $(\Gamma_{i*},\Gamma_{i*}\cap v)$ 为 a^{Γ_i} 的坐标卡.
- 记 $D\subset\mathbb{R}^2$ 为原点附近足够小的邻域, l 任给定 $\varepsilon,\delta\in\{\pm1\}$, 存在同胚 $h_{\varepsilon,\delta}:D\to\Delta$ 使得

$$v\cap\Delta_{\varepsilon,\delta}=S_{\varepsilon,\delta}\circ h_{\varepsilon,\delta}\circ l(V_{l^{-1}(D)\cap Q_{\varepsilon,\delta}}(a)). \tag{17}$$

  换言之, a 在给定象限中的局部 l-图像于 (ε,δ)-反射下与 $v\cap D_{\varepsilon,\delta}$ 同胚. 此时, 在同胚映射 17 下, a 的外端点应落在 Γ_i 上.

一般地, 非准齐次多项式的坐标卡计算可分解为以下两步骤:

1. 将多项式之 Newton 凸包 (第一象限内) 剖分为若干格点三角形之不交并, 其中每一三角形不含内格点. 将上述三角剖分经坐标轴反射后, 计算每一三角形及其对称相内的坐标卡.
2. 容许修改原多项式系数, 使得所有三角形内坐标卡粘合所得的曲线 [13] 对应某一类多项式.

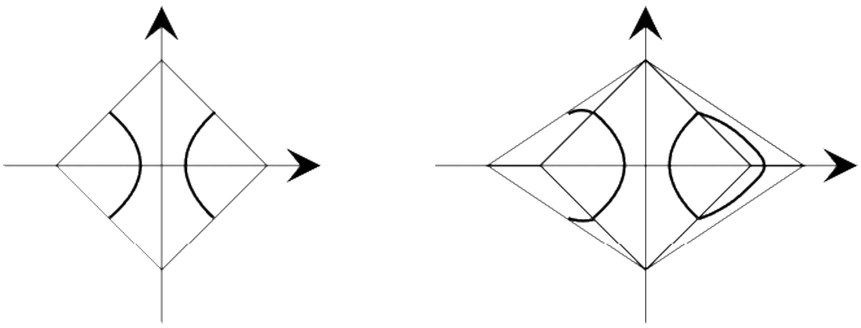

图 7: 将 $8x^3-x^2+4y^2$ 之坐标卡粘合于 $4y^2-x^2+1$.

2.5 平面代数曲线的 Patchworking 定理

对一般的非准其次多项式 $a(x,y)=\sum_{(i,j)\in I}a^{ij}x^iy^j$ 对应的 Patchworking 方法, 引理 2.2, 2.3 给出” 分而治之” 的处理方式:

[12] 即确保 $\overline{\mathrm{Int}(\Delta)}=\Delta$.

[13] 此处不妨假定坐标卡与三角形边界交于中点.

引理 2.2. 对非准齐次二元三项式

$$a(x,y)=\sum_{i=1}^{3}a_k x^{i_k}y^{j_k},\quad \det\begin{pmatrix} i_1-i_2 & i_2-i_3\\ j_1-j_2 & j_2-j_3\end{pmatrix}\neq 0. \tag{18}$$

坐标构造如下:

1. 记 *Newton* 凸包 (三角形) Δ 中顶点 (i,j) 处符号为 $\sigma_{ij}:=\operatorname{sgn}(a^{ij})$.
2. 记 $(\varepsilon i,\delta j)\in\Delta_*$ 为 Δ 中顶点对称所得, 令其符号 $\sigma_{\varepsilon i,\delta j}$ 为
$$\sigma_{\varepsilon i,\delta j}=\begin{cases}\sigma_{i,j} & \|(i,j)-(\varepsilon i,\delta j)\|_1=4k,\\ -\sigma_{i,j} & \|(i,j)-(\varepsilon i,\delta j)\|_1=4k+2.\end{cases} \tag{19}$$
3. 在每一三角形内做分离顶点符号的中位线[14]; 若无, 则不作.

记所得的分段折线为 L, 则存在多项式零点集实现 *Patchworking* (Δ_*,L) 给出的拓扑. 记 $(\overline{\Delta_*},L)$ 为 $\mathbb{PR}^2$ 中的 *Patchworking*.

证明. 归纳即可, 细节待补充.... $\square$

引理 2.3. 对有限个多项式 $\{a_i\}_{i\in I<\infty}$, 若其满足

- $\operatorname{Int}(\Delta(a_i))\cap\Delta(a_j)$, 即 *Newton* 凸包两两至多交于边界.
- 若存在边界 $\Gamma_{ij}=\Delta(a_i)\cap\Delta(a_j)$, 则 $a_i^{\Gamma_{ij}}=a_j^{\Gamma_{ij}}$, 即两多项式在 Γ_{ij} 的截断上相等.
- $\cup_{i\in I}\Delta(a_i)$ 为凸多边形.

记 $(\Delta_*(a_i),L(a_i))$ 为 *Patchworking*, 则 $(\cup_{i\in I}\Delta(a_i),\cup_{i\in I}L(a_i))$ 为一类代数曲线的 *Patchworking*. 该定理称作粘合定理.

证明. 不妨设 a_i 均为三项式, 从而 $\mathbb{T}:=\{\Delta(a_i)\mid i\in I\}$ 为 $\Delta:=\cup_{i\in I}\Delta_i$ 的三角剖分. 定义三角剖分 $(\Delta,\mathbb{T})$ 上的凸化多项式 $\nu:\Delta\to\mathbb{R}$, 其满足

- ν 在每一三角 $\Delta_i\in\mathbb{T}$ 上关于 x,y 线性.
- 对任意 $i\neq j$, ν 在 $\Delta_i\cup\Delta_j$ 上不线性.
- ν 为上凸函数, 即 $\{(s,t,\nu(s,t))\mid(s,t)\in\Delta\}$ 为上凸曲面
- 对任意 $(i,j)\in\mathbb{Z}^2\cap\Delta$, $\nu(i,j)\in\mathbb{Z}$.

考虑曲线 $b(t,x,y):=\sum_{(i,j)\in\Delta}a^{ij}x^iy^jt^{\nu(i,j)}$. 对任意选定的 k, 记 $l_k(i,j)=\alpha_k i+\beta_k j+\gamma_k$ 为 $\nu|_{\Delta_k}$ 于 Δ 上自然的线性延拓, 记 $\nu_k:=\nu-l_k$. 考虑坐标变换

$$M_k(x,y)=(xt^{\alpha_k},yt^{\beta_k}). \tag{20}$$

记 $b_k(t,x,y)=\sum_{(i,j)\in\Delta}a^{ij}x^iy^jt^{\nu_k(i,j)}$, 由于 t^{ν_k} 在 Δ_k 上取值非小量, 故

$$b_k(t,x,y)=t^{-\gamma_k}b(t,\cdot)\circ M_k(x,y). \tag{21}$$

从而当 $t\to 0$ 时, $b_k(t,x,y)$ 主部趋向 $V_{(\mathbb{R}-0)^2}a_k$ 之坐标卡, 余项中拓扑 (卵形结构等) 趋向坐标轴或无穷远处. 换言之, 对于任意小的 $\epsilon>0$, 定义紧集 $\Omega_\epsilon:=\{(x,y):|x|,|y|\in(\epsilon,\epsilon^{-1})\}$, 则总存在足够小的 $t_0>0$ 使得对任意 $t\in(0,t_0)$ 总有 $M_k^{-1}(\Omega_\epsilon)$ 两两不交. 同时, $b_k(t,x,y)$ Ω_ϵ 上的零点集同胚于坐标卡 $(\Delta_*(a_k),L(a_k))$.

实际上, 对固定的 $t\in(0,t_0)$, 上述同胚对 Δ_k 的某一小邻域成立, 即 $(\Delta_*(a_k),L(a_k))$ 与 $(\Delta_*(a_l),L(a_l))$ 相连若且仅若 $\Delta(a_k)\cap\Delta(a_l)\neq$. 粘合定理证毕. $\square$

[14] 三角形 $\triangle ABC$ 中, 边 AB 对应的中位线为 $\dfrac{A+C}{2}$ 与 $\dfrac{B+C}{2}$ 之线段.

根据 Patchworking 引理, 2.2, 2.3 不难直接总结出一套构造 d 次实平面代数曲线之拓扑的方式, 下将之提炼为定理 2.4

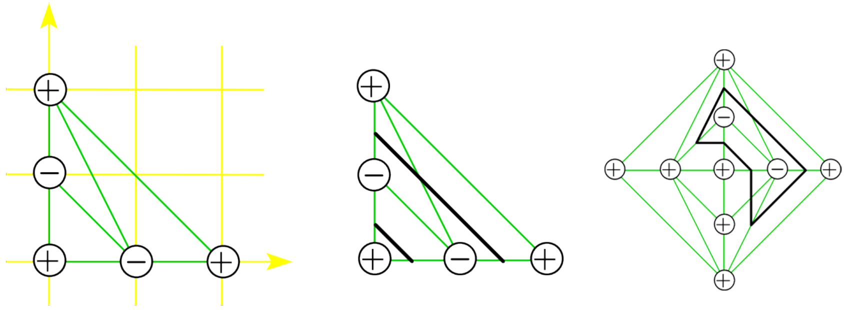

图 8: Patchworking 方法之构造过程一览.

定理 2.4. *以下步骤的 Patchworking 对应一类 d 次实平面代数曲线之拓扑:*

1. *输入初值: 次数 d, Newton 凸包 Δ, 三角剖分 $\mathbb{T}$, 凸化多项式 ν, 顶点符号 $\sigma_{i,j}$ (见 8 左).*
2. *作 $(\Delta, \mathbb{T})$ 在四个象限内的对称像, 依照 19 定义 Δ_* 上的符号 (见 8 中).*
3. *在每一剖分与反射所得三角形内做分离顶点符号的中位线; 若无, 则不作 (见 8 右).*

从而存在足够小的 t_0, 使得对任意 $t \in (0, t_0)$, 多项式

$$b(t,x,y) = \sum_{(k,l)\in\mathcal{V}(\tau)} \sigma_{k,l} \cdot t^{\nu(k,l)} \cdot x^k y^l. \tag{22}$$

之零点集 $c(t)$ 具有 Patchworking 方法构造出的拓扑结构. 换言之, (Δ_*, L) 与 $(\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}, c(t))$ 同胚.

考虑 $b(t,x,y)$ 在 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ 上的形式

$$B(t,x_0,x_1,x_2) = \sum_{(k,l)\in\mathcal{V}(\tau)} \sigma_{k,l} \cdot t^{\nu(k,l)} \cdot x_0^{d-k-l} x_1^k x_2^l. \tag{23}$$

记其零点集对应的曲线为 $C(t)$. 同理, $(\overline{\Delta}_*, \overline{L})$ 与 $(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}, C(t))$ 同胚.

证明. 由 2.2 与 2.3 直接推得. □

3 构造实例

3.1 度为 6 的 M-曲线

章节 1.2 介绍 $d = 6$ 的 $\mathcal{M}$ 曲线的三种. 其中 Harnack 构造如下

4 向量场上的 Patchworking

4.1 极限环与奇点的粘合定理

由定理 [XX] 可见, Pathworking 方法通过构造 Newton 凸包上某类特定的折线段给出一类相应的代数曲线. 进而有以下问题:

能否通过 Patchworking 方法构造向量场中奇点与极限环之拓扑?

实际上, [8] 中给出以下粘合定理 (传统 Patchworking 方法引理 [2])

Harnack 构造步骤:

1. 将示意图中圈与直线之并微扰, 得蓝色曲线.
2. 将所得的蓝色曲线与原直线 (黑) 相并, 再次微扰之得绿色曲线.
3. 如此往复操作可得红色曲线以及更多.

一般地, 度为 $2k$ 的 Harnack 曲线拥有

- 不含 $\langle 1\langle 1\rangle\rangle$, 即三重套叠圈.
- $p = 3\binom{k}{2} + 1$ 个外圈 (偶圈)
- $n = \binom{k-1}{2}$ 内圈 (奇圈)

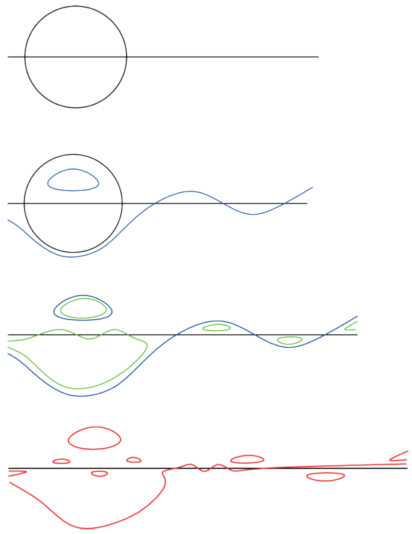

图 9: The idea of Harnack's construction.

鉴于 ∂_x 与 ∂_y 在凸包上的平移作用, 定义

$$\begin{cases} \Delta^x = \mathrm{conv}(\{(i, j-1) \mid (i,j) \in \Delta\mathbb{Z}^2\, j \geq 1\}), \\ \Delta^y = \mathrm{conv}(\{(i-1, j) \mid (i,j) \in \Delta\mathbb{Z}^2\, j \geq 1\}). \end{cases} \tag{24}$$

称系统 3 为相合的若且仅若 $\Delta(P) = \Delta^x$ 且 $\Delta(Q) = \Delta^y$. 易见 Hamilton 系统 [15] 相合. 换言之, 系统 $x\dot{y} = xQ(x,y)$ 与 $y\dot{x} = yP(x,y)$ 拥有相同" 右上边界" 的凸包.

对于相合的 3, 记 $(\Delta, \mathbb{T})$ 为三角剖分 (或更一般的凸多边形剖分), ν 为其上的凸化函数, 令

$$\begin{cases} \nu^x(i,j) = \nu(i, j+1), & (i,j) \in \Delta^x, \\ \nu^y(i,j) = \nu(i+1, j), & (i,j) \in \Delta^y. \end{cases} \tag{25}$$

类比实代数曲线之粘合定理, 一族向量场上存在关于极限环与奇点分布之粘合定理 4.1, 4.2.

记 Λ 为向量场 V 中极限环若且仅若对任意 $(x,y) \in \Lambda$ 存在一致的 $T_0 > 0$ 使得 $(x,y)(t + T_0) = (x,y)(t)$ 对任意 $t \in \mathbb{R}$ 恒成立. 记 $\mathscr{S}(V)$ 为 V 中极限环之集合. 对一般的 $(\Delta, \mathbb{T})$, 有以下极限环之粘合定理:

定理 4.1. *记三角剖分 $(\Delta, \mathbb{T})$. 对一切 $V_i \in \mathbb{T}$ $(1 \leq i \leq N)$, 任取向量场 V_i 与 Δ_i 相合, 则存在与无交并 $\amalg_{i=1}^{N} \mathscr{S}(V_i)$ 结构同等的向量场*

$$V(t): \begin{cases} \dot{x} = \displaystyle\sum_{(i,j)\in\Delta^x} A_{ij} x^i y^j t^{\nu^x(i,j)}, \\ \dot{y} = \displaystyle\sum_{(i,j)\in\Delta^y} B_{ij} x^i y^j t^{\nu^y(i,j)}. \end{cases} \tag{26}$$

其中 $t > 0$ 充分小.

[15] 满足 $\dot{y} = \partial_x H(x,y)$, $\dot{x} = -\partial_y H(x,y)$ 之向量场.

证明. 延拓向量场为如下形式

$$V(t):\begin{cases}\dot{x}y=\sum\limits_{(i,j)\in\Delta_k}A_{i,j-1}x^iy^jt^{\nu(i,j)},\\ \dot{y}x=\sum\limits_{(i,j)\in\Delta_k}B_{i-1,j}x^iy^jt^{\nu(i,j)}.\end{cases}\tag{27}$$

采用 2.5 中对 l_k,ν_k 及 M_k 之构造, 从而当 t 足够小时 $t^{\nu-l_k}$ 仅在 Δ_k 上非小量, 故向量场化为

$$\begin{aligned}\dot{x}y&=t^{\alpha_k+\beta_k+\gamma_k}\sum_{(i,j)\in\Delta}A_{i,j-1}x^iy^jt^{\nu_k(i,j)}=t^{\alpha_k+\beta_k+\gamma_k}((V_k)_x+O(t)),\\ \dot{y}x&=t^{\alpha_k+\beta_k+\gamma_k}\sum_{(i,j)\in\Delta}B_{i-1,j}x^iy^jt^{\nu_k(i,j)}=t^{\alpha_k+\beta_k+\gamma_k}((V_k)_y+O(t)).\end{aligned}\tag{28}$$

记 Ω 为包含一切 V_k 中极限环的紧集 [16], 满足 $\amalg_{i=1}^N\mathscr{S}(V_i)\subset\Omega\subset(\mathbb{R}-0)^2$. 注意到当 t 足够小时有总有 $\{M_k^{-1}(\Omega)\mid 1\le k\le N\}$ 两两不交. 综上, 存在 $t_0>0$ 使得对任意 $t\in(0,t_0)$, $\mathscr{S}(V(t))=\amalg_{i=1}^N\mathscr{S}(V_i)$. □

同理, 存在奇点粘合定理. 此处称 $z_0=(x_0,y_0)$ 为向量场 3 之奇点若且仅若 $P(x_0,y_0)=Q(x_0,y_0)=0$. 称奇点非退化若且仅若 $(\nabla P)\wedge(\nabla Q)\neq 0$. 记 c_i 为 E_j-类型的极限点之数量, 其中 $j\in J$ 为指标集. 记 $\bar{c}=(c_j,j\in J)$, 则有以下奇点之粘合定理

定理 4.2. *存在 $t_0>0$, 使得对任意 $t\in(0,t_0)$ 总有 $c_j(V(t))\ge\sum_{k=1}^N c_j(V_k)$, $\forall j\in J$.*

定理 4.2 证明从略, 其证明思路几乎等同于 4.1.

特别地, 若 $\sum_{j\in J}\sum_{k=1}^N c_j(V_k)=2\text{Volume}(\Delta^x\cup\Delta^y)$, 则 $\bar{c}(V(t))=\sum_{k=1}^N\bar{c}(V_k)$, 即 $V(t)$ 给出诸 V_k 中奇点总数与类型之加和. 实际上, 向量场中奇点数量之上界恰为 $2\text{Volume}(\Delta^x\cup\Delta^y)$ [1], 从而不等号取等.

4.2 应用: Hilbert 数之下界估计

[3] 给出的估计式 4 当且仅当对 $d=2^k-1$ 之情形生效, 而 Patchworking 方法对一般多项式之 Newton 凸包进行切分, 从而利用粘合定理 4.1 进行 Hilbert 数之估计. [8] 中的估计结果为 $H(d)\ge(d^2/2)\log_2 d+(d^2/8)\log_2 d$, 其中 $d\ge 3$. [3] 中结论 4 所给的 Newton 凸包实际为 $\{(1,1),(1,1+2^k),(1+2^k,1)\}$, 而在对一般 $\Delta=\{(1,1),(1,d+1),(d+1,1)\}$ 之估计中, 参与粘合 Newton 凸包不乏形如 $\{(2^k+1,1)(1,1+2^k),(1+2^k,1+2^k)\}$ 者, 故须援引以下引理:

引理 4.3. *凸包 $\{(2^k+1,1)(1,1+2^k),(1+2^k,1+2^k)\}$ 中对应向量场的极限环数量仍符合 4, 即极限环数量上界至少为*

$$2^{2k-1}(k-3)+3(2^k-1)=\frac{(d+1)^2}{2}(\log_2(d+1)-3)+3d.$$

证明. 记

$$\tilde{V}:\quad \tilde{P}_k(x,y)=xyP_k(x,y)+xp_k(x),\quad \tilde{Q}_k(x,y)=xyQ_k(x,y)+yq_k(y).\tag{29}$$

[16] 每一 V_k 中均有至多有限个极限环, 见 [17] 与 [7].

此处, 对向量场乘以 xy 不改变 $(\mathbb{R}-0)^2$ 中极限环结构, p 与 q 为取值较小 [17] 的 2^k 次一元多项式. 故 $(xy)^{2^k}\cdot\tilde{V}(1/x,1/y)$ 即为所得. □

[8] 对 $d\geq 3$ 时 Hilbert 数之下界估计如下.

定理 4.4. 对任意 $d\geq 3$, 总有

$$H(d)\geq (d^2/2)\log_2 d+(d^2/8)(d^2)\log_2 d. \tag{30}$$

证明. 不妨设 $d\geq 36$, 记 $d'=\lfloor d-6\log_2 d\rfloor$. 考虑二进制分解 $d'=\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k}2^{i_j}$ 导出的 Newton 凸包 $\mathrm{conv}\{(1,1),(1,1+2^k),(1+2^k,1)\}$ 上的三角剖分 10. 实际上, 考虑 0 次项的存在以及重叠

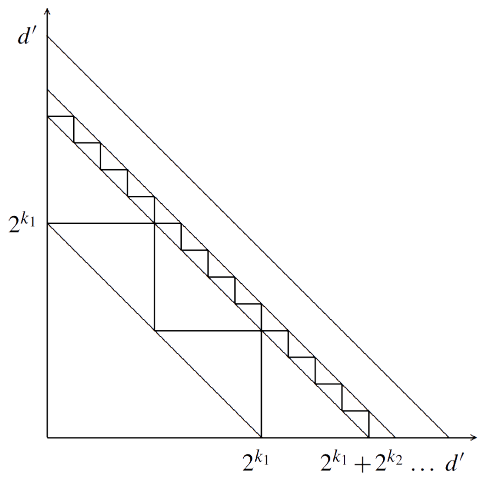

图 10: 二进制分解导出的理论三角剖分.

出之兼容, 每一三角形实际占据空间大小应当为三角形本身的 1-网 [18]. 职是之故, 定义 d' 之用意即为构造 d 在兼顾 1-网时的近似二进制划分 11. 考虑 11 中第二斜行未溢出的三角形, 每一边长为 2^k 的内部三角形 (虚线处) 可容许存在

$$2^{2k-1}(k-3)+3(2^k-1)=(k-3)2^{2k-1}$$

个极限环, 第二斜行中未溢出之三角形大小 $k\geq\log_2 d-\log\log_2 d-3$, 取 $\mathbb{T}'$ 为只记录上述三角形的不完全三角剖分. 加和知

$$\begin{aligned}\sup|\mathscr{S}| &\geq (s-3)\cdot|\cup_{\Delta\in\mathbb{T}'}\Delta|\\ &\geq (\log_2 d-\log\log_2 d-6)\cdot\frac{1}{2}\left(d'-\frac{2d'}{\log_2 d}\right)^2\\ &\geq (\log_2 d-\log\log_2 d-6)\cdot\frac{1}{2}\left(d-\frac{2d}{\log_2 d}-6\log_2 d\right)^2\\ &\geq \frac{1}{2}d^2\log_2 d-\frac{1}{8}d^2\log\log_2 d.\end{aligned} \tag{31}$$

□

[17] 取值较小相对 Ω 而言, Ω 为覆盖极限环的某一紧区域.

[18] 集合 S 的 ε-网定义为 $S_\varepsilon:=\cup_{x\in S}B_\varepsilon(x)$.

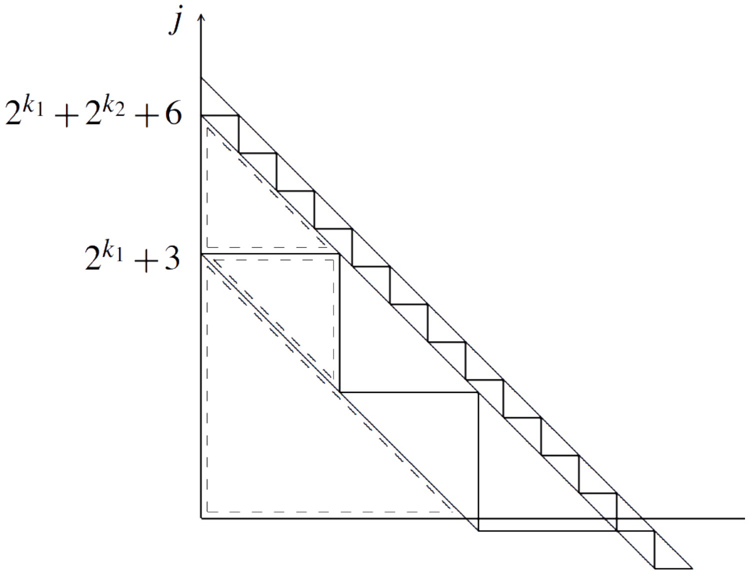

图 11: 考虑 1-网时二进制分解导出的实际三角剖分.

4.3 Patchworking 与向量场拓扑

非退化实奇点的局部线性化矩阵所对应的像图包括如下三类: 吸引子 (Σ_1), 反吸引子 (Σ_2), 鞍点 (Σ_3). 其中, 称向量场子集 S 为吸引子若且仅若

- 对任意 $z=(x,y)\in S$ 以及一切 $t>0$, $\varphi_t(z)\in S$,
- 存在 $\overline{S}$ 的邻域 S', 使得对任意 $z\in S'-\overline{S}$, 总存在 $t_z>0$ 使得 $\varphi_{t_z+t}(z)\in S$ 对一切 $t\geq 0$ 成立,
- S 的任一真子集不同时满前两条性质, 即任何吸引子不真包含于其他吸引子.

反吸引子由吸引子颠倒箭头所得.

若某非退化实奇点之局部线性化矩阵拥有相异的特征值, 则称之强非退化. 强非退化奇点有五类拓扑:

- 汇点 (S_1), 满足 $\lambda_1<\lambda_2<0$.
- 源点 (S_2), 满足 $\lambda_1>\lambda_2>0$.
- 虚汇点 (S_3), 满足 $\mathrm{Re}\lambda_1=\mathrm{Re}\lambda_2<0$.
- 虚源点 (S_4), 满足 $\mathrm{Re}\lambda_1=\mathrm{Re}\lambda_2>0$.
- 鞍点 (S_5), 满足 $\lambda_1<0<\lambda_2$.

其中, Σ_i 与 S_i 均为集合, 且满足 $(S_1\cup S_3)\subset\Sigma_1$, $(S_2\cup S_4)\subset\Sigma_2$, $\Sigma_3=S_5$. 例如奇异吸引子 12 非 S_1 或 S_3.

记 Σ_i (S_i) 中的奇点数量为 σ_i (s_i), s_0 为上半平面内虚奇点之数量. [8] 中使用类似的粘合定理证明了

定理 4.5. 对任意 $d\geq 0$, 若 $\{s_i\}_{i=0}^5$ 满足

$$2s_0+s_1+s_2+s_3+s_4+s_5=d^2,\quad |s_1+s_2+s_3+s_4-s_5|\leq d, \tag{32}$$

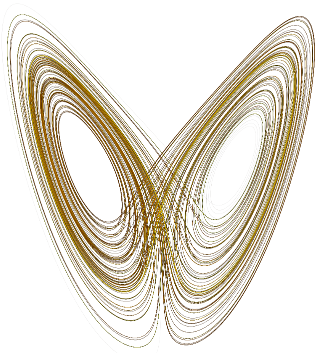

图 12: Lorenz 奇异吸引子

且

$$
s_1+s_2 \geq \begin{cases} 1, & d \text{ 为奇数}, s_1+s_2+s_3+s_4-s_5 \geq 3, \\ 1, & d \text{ 为偶数}, (d-1)(d-2) \leq 2s_0 < d^2, s_1+s_2+s_3+s_4-s_5 \geq 0, \\ 2, & d \text{ 为偶数}, 2s_0 \leq (d-1)(d-2), s_1+s_2+s_3+s_4-s_5 \geq 0. \end{cases} \tag{33}
$$

则存在满足上述拓扑的平面给向量场.

定理 4.6. 对任意 d, s_0, $\sigma_i \geq 0$, 若满足

$$
2s_0+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3 = d^2, \quad |\sigma_1+\sigma_2-\sigma_3| \leq d^2. \tag{34}
$$

则存在满足上述拓扑的平面给向量场.

5 致谢

...

参考文献

[1] D. N. Bernshtein. "The number of roots of a system of equations". In: *Functional Analysis and Its Applications* 9.3 (July 1975), pp. 183–185. ISSN: 1573-8485. DOI: 10.1007/BF01075595. URL: https://doi.org/10.1007/BF01075595.

[2] C. J. Christopher and N. G. Lloyd. "Polynomial Systems: A Lower Bound for the Hilbert Numbers". In: *Proceedings: Mathematical and Physical Sciences* 450.1938 (1995), pp. 219–224. ISSN: 09628444. URL: http://www.jstor.org/stable/52668 (visited on 05/31/2022).

[3] C. J. Christopher and N. G. Lloyd. "Polynomial systems: a lower bound for the Hilbert numbers". In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences* 450.1938 (1995), pp. 219–224. DOI: 10.1098/rspa.1995.0081. eprint: https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rspa.1995.0081. URL: https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspa.1995.0081.

[4] M. Gudkov. "Construction of a new series of M-curves." In: *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 200 (1971), pp. 1269–1272. URL: http://mi.mathnet.ru/dan36483.

[5] Harnack. "Ueber die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven". ger. In: *Mathematische Annalen* 10 (1876), pp. 189–198. URL: http://eudml.org/doc/156719.

[6] D. Hilbert. “Ueber die reellen Züge algebraischer Curven.” In: *Mathematische Annalen* 38 (1891), pp. 115–138. URL: http://dml.mathdoc.fr/item/GDZPPN002252945.

[7] Yu. Ilyashenko. In: *Uspekhi Mat. Nauk* 45 (1990), pp. 143–200. URL: http://mi.mathnet.ru/umn4718.

[8] Ilia Itenberg and Eugenii Shustin. “Singular points and limit cycles of planar polynomial vector fields”. In: *Duke Mathematical Journal* 102.1 (2000), pp. 1–37. DOI: 10.1215/S0012-7094-00-10211-6. URL: https://doi.org/10.1215/S0012-7094-00-10211-6.

[9] Ilia Itenberg and Oleg Viro. “Patchworking algebraic curves disproves the ragsdale conjecture”. In: *The Mathematical Intelligencer* 18.4 (Sept. 1996), pp. 19–28. ISSN: 0343-6993. DOI: 10.1007/BF03026748. URL: https://doi.org/10.1007/BF03026748.

[10] Jibin Li. “Hilbert’s 16th Problem and bifurcations of Planar Polynomial Vector Fields”. In: *Int. J. Bifurc. Chaos* 13 (2003), pp. 47–106.

[11] G. L. Litvinov. *The Maslov dequantization, idempotent and tropical mathematics: A brief introduction*. 2005. DOI: 10.48550/ARXIV.MATH/0507014. URL: https://arxiv.org/abs/math/0507014.

[12] N. F. Otrokov. “On the number of limit cycles of differential equations in a neighbourhood of a singular point”. Russian. In: *Mat. Sb. (N.S.)* 34 (), pp. 127–144.

[13] V. Ragsdale. “On the Arrangement of the Real Branches of Plane Algebraic Curves”. In: *American Journal of Mathematics* 28.4 (1906), pp. 377–404. ISSN: 00029327, 10806377. URL: http://www.jstor.org/stable/2370070 (visited on 05/29/2022).

[14] V. A. Rokhlin. “Proof of Gudkov’s hypothesis”. In: *Functional Analysis and Its Applications* 6.2 (Apr. 1972), pp. 136–138. ISSN: 1573-8485. DOI: 10.1007/BF01077517. URL: https://doi.org/10.1007/BF01077517.

[15] O. Ya. Viro. “Curves of degree 7, curves of degree 8, and the Ragsdale conjecture”. In: *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 254.6 (1980), pp. 1306–1310. URL: http://mi.mathnet.ru/dan43983.

[16] Oleg Viro. *Patchworking real algebraic varieties*. 2006. DOI: 10.48550/ARXIV.MATH/0611382. URL: https://arxiv.org/abs/math/0611382.

[17] Jean-Christophe Yoccoz. “Non-accumulation de cycles limites”. fre. In: *Séminaire Bourbaki* 30 (1987), pp. 87–103. URL: http://eudml.org/doc/110104.

[18] H. Zoladek. “Eleven small limit cycles in a cubic vector field”. In: *Nonlinearity* (1995).