图谱论导引(第四期)

笔者于第二期文章中着手介绍邻接矩阵的特征多项式. 本期文章中, 我们仍以特征多项式为主要工具, 对各式的图扩张与图组合进行探究.

图之聚合

添边图

试回忆前文归纳证明P_n谱之方法. 试问, 若在G的某一点j上增添一条边(另一端点不在$V(G)$中), 新图G_j之特征多项式如何变化?

设$A=A(G)$, $u=(0,1,0,\ldots,0)$. 考虑$\begin{pmatrix}0 & u^T\\ u & A\end{pmatrix}$之特征多项式, 有

$$P_{G_j}(x)=xP_G(x)-P_{G-j}(x).$$

特殊地, 在P_{n+1}的一端添上一条边, 则$P_{P_{n+2}}(x)=xP_{P_{n+1}}(x)-P_{P_n}(x)$.

定义树(tree)为无圈的连通的简单图. 易知树的特征多项式总能通过迭代P_1与P_2之特征多项式计算.

添边图最大特征值之上确界

下引入图的指标(index, pl. indices), 即最大特征值λ_1. 据Rayleigh商定义,
$\lambda_1=\max\dfrac{v^TAv}{v^Tv}=\max_{\|v\|=1}v^TAv$. 由于$G$由$G_j$删去一点得到, 故可不妨设$A(G)=A$,
$A(G_j)=\begin{pmatrix}A & u\\ u^T & 0\end{pmatrix}$. 对任$\mathbb{R}^{|V(G_j)|}=\mathbb{R}^{|V(G)|}\times\mathbb{R}$中单位向量$y=(x,c)$总有

$$\lambda_1(G_j)\geq y^TA(G_j)y\geq x^TAx.$$

取x为$\lambda_1(G)$对应的特征向量, 则$\lambda(G)<\lambda(G_j)$.

记G_j^n为在G上j处添加P_n所得的图, $\lambda_1^{(n)}$为相应的最大特征值. 从而得单调递增的序列$\{\lambda_1^{(n)}\}_{n\geq 0}$. 注意到$\lambda_1=\max_{\|v\|=1}v^TAv\leq\|v\|^2\|A\|_\infty=\Delta(G)$, 这里$\Delta(G)$为$\max_{v\in V(G)}\deg(v)$. 而$\Delta(G_j^n)=\Delta(G)+1$, 故序列$\{\lambda_1^{(n)}\}$存在上确界. 下将求得该上确界.

类比$\Delta(G)$之定义, 可作$\delta(G):=\min_{v\in V(G)}\deg(v)$. 同理有结论$\delta(G)\leq\lambda_1\leq\Delta(G)$. 从而$\{\lambda_1^{(n)}\}$在某一项后不小于2. 记

$$\begin{aligned}f_0(x)&=P_G(x)\\ f_1(x)&=xP_G(x)-P_{G-j}(x)\\ f_{n+2}(x)&=xf_{n+1}(x)-f_n(x),\quad n\in\mathbb{N}.\end{aligned}.$$

由$\begin{pmatrix}x & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}:(f_{n+1},f_n)\mapsto(f_{n+2},f_{n+1})$与

$$\begin{pmatrix}x & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\sim\operatorname{diag}\left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2},\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right):=\operatorname{diag}(a(x),b(x))$$

可知

$$\begin{aligned}(a-b)(x)f_n(x)=&[a(x)P_G(x)-P_{G-j}(x)]a(x)^n\\ &-[b(x)P_G(x)-P_{G-j}(x)]b(x)^n\end{aligned}$$

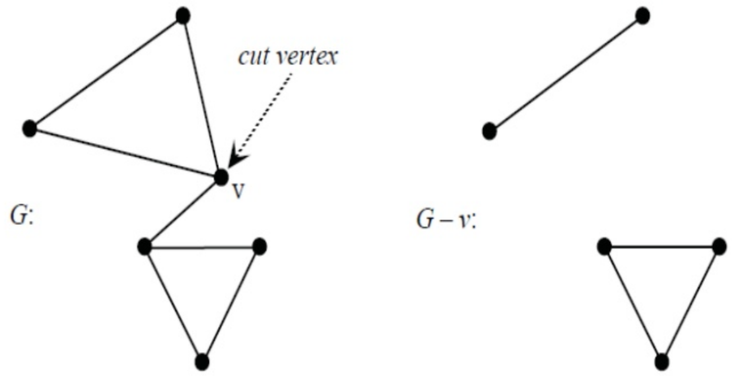
其中$b(x) \to 0$. 因此$\lim_{n\to\infty} \lambda_1^{(n)}$之极限为

$$\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2} P_G(x) = P_{G-j}(x)$$

之最大(正实)根.

割点图

v为G的割点(cut vertex), 若且仅若G在删去v及其相连边后分为两部分, 即剩余部分为两(多)个图的无交并. 例如P_{n+2}有n个割点, C_n无割点. 如下图所示



一种构造割点图的方法是在两(多)张图中各选取一点, 随后将选出的点重合, 记$G \cdot H$为合并$u \in G$与$v \in H$所得的图. 不妨设$G \cdot H$的邻接矩阵为

$$\begin{pmatrix} A' & r & O \\ r^T & 0 & s^T \\ O & s & B' \end{pmatrix}$$

其中$\begin{pmatrix} A' & r \\ r^T & 0 \end{pmatrix}$为$G$之邻接矩阵, $\begin{pmatrix} 0 & s^T \\ s & B' \end{pmatrix}$为$H$之邻接矩阵. 易验证

$$\begin{aligned} P_{G\cdot H}(x) =& \begin{vmatrix} xI-A' & -r & O \\ -r^T & x & -s^T \\ O & -s & xI-B' \end{vmatrix} \\ =& \begin{vmatrix} xI-A' & -r & O \\ -r^T & x & -s^T \\ O & \mathbf{0} & xI-B' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} xI-A' & \mathbf{0} & O \\ -r^T & x & -s^T \\ O & -s & xI-B' \end{vmatrix} . \\ & - \begin{vmatrix} xI-A' & \mathbf{0} & O \\ -r^T & x & -s^T \\ O & \mathbf{0} & xI-B' \end{vmatrix} \\ =& P_G(x)P_{H-v}(x) + P_{G-u}(x)P_H(x) - xP_{G-u}(x)P_{H-v}(x) \end{aligned}$$

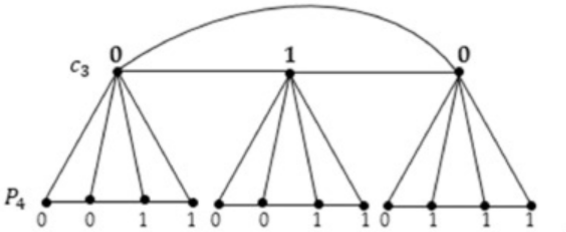
连边图

连边图形式简单, 即在两个不交图间添加一条边使其相连. 如$GuvH$表示$G\dot\cup H$在$u(\in G)$与$v(\in H)$间添加一条边生成的图. 其特征多项式为

$$\begin{aligned} P_{GuvH}(x) =& P_{G_u}(x)P_{H-v}(x) + P_G(x)P_H(x) - xP_G(x)P_{H-v}(x) \\ =& [xP_G(x) - P_{G-u}(x)]P_{H-v}(x) + P_G(x)P_H(x) - xP_G(x)P_{H-v}(x). \\ =& P_G(x)P_H(x) - P_{G-u}(x)P_{H-v}(x) \end{aligned}$$

晕图

晕(音同"蕴", 注音: ㄩㄣˋ)图(corona graph), 为一类非对等的两元图之复合, 其中主图为体, 辅图为饰, 环而晕之: 是谓晕图. 例如下图为如$C_3 \circ P_4$



C_3中每一顶点与对应的P_4组成$\{v_i\} \bigtriangledown P_4$, 饰于主图各点上. 对一般的$G \circ H$而言, 记$A$为$G$之邻接矩阵, B为H之邻接矩阵, 从而

$$\begin{aligned} P_{G\circ H}(x) &= \det\begin{vmatrix} xI-A & -J_1 & -J_2 & \cdots & -J_n \\ -J_1^T & xI-B & & & \\ -J_2^T & & xI-B & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -J_n^T & & & & xI-B \end{vmatrix} \\ &= \det\begin{vmatrix} xI-A-\dfrac{m}{x-r}I & -J_1 & -J_2 & \cdots & -J_n \\ \mathbf{0} & xI-B & & & \\ \mathbf{0} & & xI-B & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & xI-B \end{vmatrix} \\ &= P_G\left(x-\frac{m}{x-r}\right)(P_H(x))^n \end{aligned}$$

删点图

我们曾推导删点图$G-j$特征多项式之递推式, 即

$$P_{G_j}(x) = xP_G(x) - P_{G-j}(x).$$

其形式虽简, 但无以直截了当地给出P_{G-j}与P_G的显然联系. 考虑

$$\operatorname{adj}(xI-A) = (\det(xI-A))(xI-A)^{-1} = P_G(x)\sum_{i=1}^{r}\frac{P_i}{x-\mu_i}.$$

考虑$\operatorname{adj}(xI-A)$中(j,j)位置之元素, 则

$$P_{G-j}(x) = P_G(x)\sum_{i=1}^{r}\frac{\alpha_{ij}^2}{x-\mu_i}$$

明所欲证. 同时有

$$P_{G_j}(x) = P_G(x)\left(x-\sum_{i=1}^{r}\frac{\alpha_{ij}^2}{x-\mu_i}\right).$$

回顾上文对添边图最大特征值之分析, 即最大特征值上界为

$$\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}P_G(x) = P_{G-j}(x)$$

之最大实根. 化简之即有

$$\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}-\sum_{i=1}^{r}\frac{\alpha_{ij}^2}{x-\mu_i}=0.$$

(再话)步生成函数

本小节前, 应先澄清path与walk之定义分歧. path指路图, 也指图中包含的路图, 因此不允许点与线段之重复. 例如C_4包含长为4条长为3的path, 但不包含长为4的path; walk指一段足迹, 例如C_4包含8段长为1的walk. 简而言之, path不允许交叉, 不考虑方向; walk考虑交叉, 强调起始点与终点.

由于图论领域分支繁多, 且中译教材未能有统一标准. 职是之故, 不乏将walk与path同时译作"路"者. 先前笔记业已提及之二概念, 笔者自以为表意明晰, 悉不再更正. **后文统一将walk译作含"走""步"二字的词汇, path仍译作"路".**

生成函数定义

类似数理统计中母函数之定义, 步生成函数(walk generating function)定义为

$$H_G(t)=\sum_{t=1}^{\infty}N_kt^k=n\sum_{i=1}^{r}\frac{\beta_i^2}{1-t\lambda_i}.$$

其中, N_k为图中所包含的长为k的走步数量. 比较前文中$P_{\overline{G}}(x)$之表达式

$$P_{\overline{G}}(x)=(-1)^nP_G(-1-x)\left(1-\frac{H_G\left(-\frac{1}{x+1}\right)}{1+x}\right).$$

从而

$$H_G(1/t)=t\left((-1)^n\frac{P_{\overline{G}}(-1-t)}{P_G(t)}-1\right).$$

此外, 有下列结论

1. $H_{\overline{G}}(t)=\dfrac{H_G(-t/(1+t))}{1+t-tH_G(-t/(1+t))}.$
2. $H_{G_1\dot{\cup}G_2}(t)=H_{G_1}(t)+H_{G_2}(t).$
3. $H_{G_1\triangledown G_2}=\dfrac{H_{G_1}(t)+H_{G_2}(t)+2tH_{G_1}(t)H_{G_2}(t)}{1-t^2H_{G_1}(t)H_{G_2}(t)}.$

部分公式化简

读者可对特定情形构造特殊的步生成函数, 如记$H_j^G(t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{jj}^{(k)}t^k$为$j$点处闭合走步的生成函数. 同前文符号所记, $A(G)^k:=(a_{ij}^{(k)})_{n\times n}$. 因此

$$H_j^G(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{r}\alpha_{ij}^2\mu_i^kt^k=\sum_{i=1}^{r}\frac{\alpha_{ij}^2}{1-\mu_it}.$$

结合前文结论

$$P_{G-j}(x)=P_G(x)\sum_{i=1}^{m}\frac{\alpha_{ij}^2}{x-\mu_i}.$$

故

$$P_{G-j}(x) = \frac{1}{x} P_G(x) H_j^G(1/x).$$