微分几何笔记(一)

本章节之目的时推导曲线密切平面之方程.

> 符号说明: $\langle x,y\rangle$为x与y之内积, $[x,y,z]$为x,y,z之混合积.

正则曲线

定义空间(不妨记作$\mathbb{R}^2$或$\mathbb{R}^3$)中的曲线为可微映射

$$\gamma:(a,b)\to\mathbb{R}^3, t\mapsto(x(t),y(t),z(t)).$$

称γ为正则曲线若且仅若$\gamma\in D(a,b)$且$\gamma'(t)$恒不为零. 换言之, γ上任意一点均有切向量.

此处注意如下几点:

1. a,b可取无穷大, 因此可取$(a,b)=\mathbb{R}$.
2. $(a,b)=\mathbb{R}$时, 曲线$x(t)=t^2, y(t)=t^3$非正则曲线, 因为$|\gamma'(0)=0|$. 实际上, 曲线$x=\sqrt[3]{y^2}$在原点处有一尖点(可自行画图感受).
3. 正则性与曲线是否(自)相交无关. 例如曲线$x(t)=t^3-t, y(t)=t^2$仍为正则曲线, 尽管$t=\pm1$时取值相同.

> 注: 假定以下研究的曲线满足性质:
>
> 1. 正则.
> 2. 至少三次可微.

弧长参数

直白地说, 是用弧长作为曲线方程中的唯一自变量. 对曲线

$$\gamma:(a,b)\to\mathbb{R}^3, t\mapsto(x(t),y(t),z(t))$$

取定点$t_0\in(a,b)$, 计算t_0至t的弧长函数为

$$s(t)=\int_{t_0}^{t}|\gamma'(w)|\mathrm{d}w.$$

其中$|\gamma'(w)|:=\sqrt{\langle\gamma'(w),\gamma'(w)\rangle}=\sqrt{\sum_{j\in\{x,y,z\}}j'(w)^2}$. 由于正则性, $s'(t)=|\gamma'(t)|\neq0$, 从而s关于t严格单调递增. 显然, γ作为$\mathbb{R}^3$中曲线可由s作为参数. 注意到

$$\left|\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right|\cdot\left|\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right|=|\gamma'(t)|\cdot\frac{1}{|\gamma'(t)|}=1.$$

使用弧长参数后, 切向量$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s}$均为单位长度.

正交框架

记向量$\vec{t}:=\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s}$为单位切向量, 记

$$(0\neq)\frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s}=k(s)\cdot\vec{n}(s).$$

其中$k(s)$为$\dfrac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s}$之长度(大于零), $\vec{n}$为主法向, 亦为单位向量. 注意到

$$(\vec{n},\vec{t})=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\left\langle\vec{t},\vec{t}\right\rangle}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}1}{\mathrm{d}s}=0$$

从而$\vec{n}\perp\vec{t}$. 定义$\vec{b}(s):=\vec{t}(s)\times\vec{n}(s)$为第三个正交基, 是故可在曲线任一点处作出"活动的坐标系"(原点$\gamma(t_0)$, 基$\vec{t}(t_0)$, $\vec{n}(t_0)$, $\vec{b}(t_0)$). 试问: $\vec{t}'$, $\vec{n}'$, $\vec{b}'$如何表示?

据定义, $\dfrac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s}=k\vec{n}$. 注意到

$$\begin{cases}\left\langle\dfrac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}s},\vec{t}\right\rangle=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\langle\vec{n},\vec{t}\right\rangle-\left\langle\dfrac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s},\vec{n}\right\rangle=-k\\ \left\langle\dfrac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}s},\vec{b}\right\rangle=:-\tau\\ \left\langle\dfrac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}s},\vec{n}\right\rangle=\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\langle\vec{n},\vec{n}\right\rangle=0\end{cases}.$$

> 注: Carmo教材中$\tau:=-\left\langle\dfrac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}s},\vec{b}\right\rangle$, 其他教材或有反向.

从而$\dfrac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}s}=-k\vec{t}-\tau\vec{b}$.

根据混合积之性质有

$$\begin{cases}\left\langle\dfrac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}s},\vec{t}\right\rangle=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\langle\vec{b},\vec{t}\right\rangle-\left\langle\dfrac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s},\vec{b}\right\rangle\\ \qquad\qquad=0-k\left\langle\vec{n},\vec{b}\right\rangle=0\\ \left\langle\dfrac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}s},\vec{b}\right\rangle=\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\langle\vec{b},\vec{b}\right\rangle=0\\ \left\langle\dfrac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}s},\vec{n}\right\rangle=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\langle\vec{b},\vec{n}\right\rangle-\left\langle\vec{b},\dfrac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}s}\right\rangle=\tau\end{cases}.$$

从而$\dfrac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}s}=\tau\vec{n}$.

整合得方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix}\vec{t}\\ \vec{n}\\ \vec{b}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&k&0\\ -k&0&-\tau\\ 0&\tau&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\vec{t}\\ \vec{n}\\ \vec{b}\end{pmatrix}.$$

该框架称作Frenet框架, $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$分别对应切向, 主法向, 次法向.

密切平面

Taylor展开知

$$
\begin{aligned}
&\gamma(s+\Delta s)-\gamma(s)\\
=&\gamma'(s)\Delta s+\frac{1}{2}\gamma''(s)\Delta s^2+\frac{1}{6}\gamma'''(s)\Delta s^3+o(\Delta s^3)\\
=&\vec{t}\Delta s+\frac{k}{2}\vec{n}\Delta s^2+\frac{k}{6}(-k\vec{t}-\tau\vec{b})\Delta s^3+o(\Delta s^3)
\end{aligned}
$$

密切平面定义为最接近曲线局部的平面. 为使精度最高, 平面上点X显然应满足

$$
\left\langle(X-\gamma(s_0)),\vec{b}\right\rangle=0.
$$

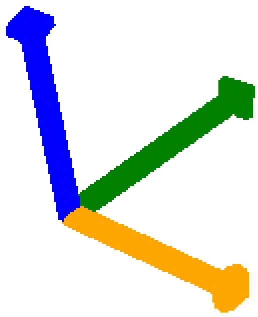
同理定义

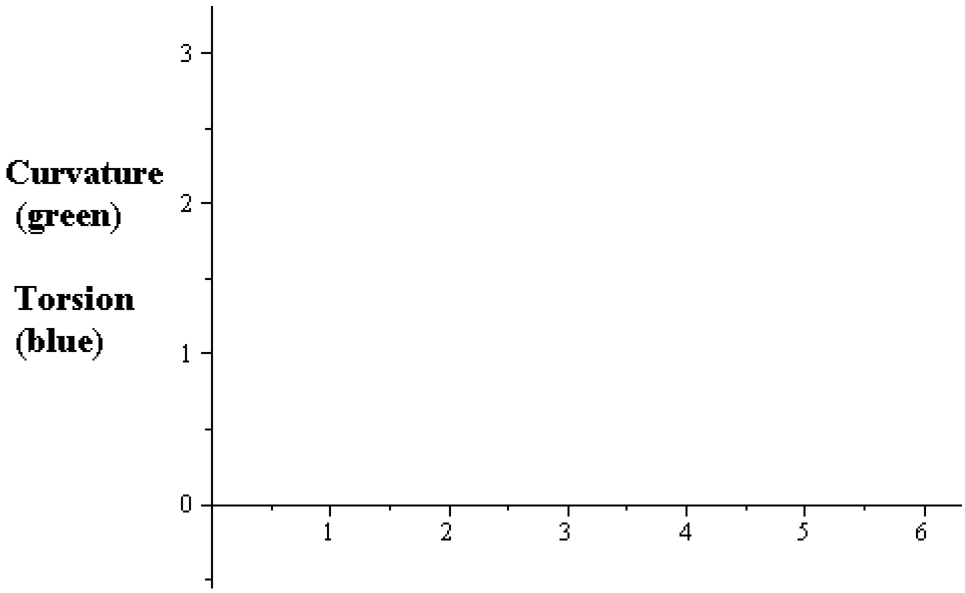
$$
\begin{aligned}
&\text{法平面} && \left\langle(X-\gamma(s_0)),\vec{t}\right\rangle=0\\
&\text{从切平面} && \left\langle(X-\gamma(s_0)),\vec{n}\right\rangle=0\\
&\text{密切平面} && \left\langle(X-\gamma(s_0)),\vec{b}\right\rangle=0
\end{aligned}
$$

挠率与曲率

挠率$\tau(s)$度量l了次法矢量在$\gamma(s)$处旋转的速度, 能较好度量曲线偏离平面曲线之程度. 曲率$k(s)$度量了切向量在$\gamma(s)$处的旋转速度, 能较好度量曲线偏离切向之程度. 下图中(函数图中, 绿线为曲率, 蓝线为挠率)

Torus knot with tangent vector (brown), normal vector (green) and binormal vector (blue)





由上文可推得弧长参数的曲率与挠率公式. 具体下回分解.