Torus上的测地线

$\mathbb{R}^n$中测地线的等价定义

注意到第一基本形式为$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j$. 记曲线$\gamma(t) = (u(t))$, 则记$\gamma : [t_1, t_2] \to C$, 则$C$长度为

$$l[u, C] = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}u_s^i u_s^j}\mathrm{d}t.$$

若$l[u, C]$局部极小, 即$l[u, \delta C + C] - l[u, C] = o(\delta u)$时,

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i,j=1}^n g_{ij}u_s^i u_s^j\mathrm{d}t$$

应当为0. 限定两端变分为0, 从而

$$\begin{aligned}
0 =& \delta\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i,j=1}^n g_{ij}u_s^i u_s^j\mathrm{d}t \\
=& \int_{t_1}^{t_2}\sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \partial_k g_{ij}\delta u^k\right)u_s^i u_s^j + g_{ij}(u_s^j\delta u_s^i + u_s^i\delta u_s^j)\mathrm{d}t \\
=& \int_{t_1}^{t_2}\sum_{i,j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \partial_k g_{ij}\delta u^k\right)u_s^i u_s^j\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} g_{ij}(u_s^j\mathrm{d}\delta u^i + u_s^i\mathrm{d}\delta u^j) \\
=& \sum_{i,j,k=1}^n\int_{t_1}^{t_2} g_{ij,k}u_s^i u_s^j\delta u^k\mathrm{d}t - 2\sum_{i,j,k=1}^n\int_{t_1}^{t_2} g_{ij,k}u_s^k u_s^i\delta u^j\mathrm{d}t \\
&- 2\sum_{i,j=1}^n\int_{t_1}^{t_2} g_{ij}u_{ss}^i\delta u^j\mathrm{d}t \\
=& \sum_{k=1}^n\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^n\left(-2u_{ss}^i g_{ik} + \sum_{j=1}^n (g_{ij,k} - g_{jk,i} - g_{ki,j})u_s^i u_s^j\right)\delta u^k\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

两侧左乘$(g^{ij})_{n\times n}$, 从而对任意k都有

$$u_{ss}^k - \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k u_s^i u_s^j = 0.$$

从物理意义考虑, 以下为测地线的等价定义:

1. 若轨线$\gamma(t)$的二阶导数垂直于$\vec{n}$, 即弧长参数曲线$\gamma(s)$的加速度平行于N.
2. 测地曲率为0, 即$\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$, 即切向量$\vec{t}$在$\gamma$上平行移动.
3. $u_{ss}^k - \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k u_s^i u_s^j = 0$.

根据常微分方程解的存在唯一定义, 测地线由起点与初速度唯一确定. 换言之, 同向相切的两条测地线必然相等.

Torus上的测地方程

考虑Torus的参数表示

$$X(u,v) = ((c + a\cos v)\cos u, (c + a\cos v)\sin u, a\sin v).$$

从而度量$g = \mathrm{diag}((c + a\cos v)^2, a^2)$. 考虑测地线$(\gamma(s))$, 从而

$$\begin{aligned} u_{ss}^1 g_{11} + u_{ss}^2 g_{21} &= \sum_{i,j=1}^2 \frac{g_{ij,1} - g_{j1,i} - g_{1i,j}}{2} u_s^i u_s^j \\ u_{ss}^1 g_{12} + u_{ss}^2 g_{22} &= \sum_{i,j=1}^2 \frac{g_{ij,2} - g_{j2,i} - g_{2i,j}}{2} u_s^i u_s^j \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} u_{ss} &= \frac{2a\sin v}{c + a\cos v} u_s v_s \\ v_{ss} &= -\frac{\sin v(c + a\cos v)}{a} u_s^2 \end{aligned}$$

从而

$$[\frac{a v_{ss}}{\sin v(c + a\cos v)}]_s = -2u_s u_{ss} = \frac{-4a\sin v}{c + a\cos v} u_s^2 v_s = v_s v_{ss} \frac{4a^2}{(c + a\cos v)^2}$$

解得$v_s^2 = \dfrac{-A^2}{a^2(c + a\cos v)^2} + B$, $u_s = \dfrac{A}{(c + a\cos v)^2}$. 令$\eta = \dfrac{A}{\sqrt{B}\sqrt{E}}$, 则

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = \pm\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}} \frac{\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}}.$$

测地线存在时, 有

$$u(v) - u(v_0) = \pm\int_{v_0}^{v} \frac{A/\sqrt{B}}{(c + a\cos v)\sqrt{(c + a\cos v)^2 - A^2/B}}.$$

其中η为X_v到γ'的角度的余弦, $\eta \cdot \sqrt{E}$为定值. 从而:

1. $\eta\cdot\sqrt{E}=0$时, 测地线为经圆.

2. $\eta\cdot\sqrt{E}\in(0,c-a)$时, 测地线能延伸至无穷(包含闭合情形). 若且仅若

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{A/\sqrt{B}}{(c+a\cos v)\sqrt{(c+a\cos v)^2-A^2/B}}\in\mathbb{Q}.$$

时闭合.

3. $\eta\cdot\sqrt{E}=c-a$时, 若测地线经过$v=\pi$, 则其只能为$v=\pi$. 若经过其他点, 则v至多含于一个2π周期. 不妨设$v_0\in(-\pi,\pi)$, 则$v\to\pi^-$或$v\to-\pi^+$时测地线逼近圈$v=\pi$.

4. $\eta\cdot\sqrt{E}\in(c-a,c+a)$时, 测地线族被限定于区域

$$\left(\arccos\left(\frac{-A/\sqrt{B}-c}{a}\right),\arccos\left(\frac{A/\sqrt{B}-c}{a}\right)\right)$$

内. 注意到$v=\pm\arccos\left(\frac{-A/\sqrt{B}-c}{a}\right)$时$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=0$, $\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}u^2}\neq0$, 故测地线与两圆$v=\pm\arccos\left(\frac{-A/\sqrt{B}-c}{a}\right)$相切. 测地线可无限延伸(包含闭合情形). 测地线闭合若且仅若

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\arccos\left(\frac{-A/\sqrt{B}-c}{a}\right)}^{\arccos\left(\frac{-A/\sqrt{B}-c}{a}\right)}\frac{A/\sqrt{B}}{(c+a\cos v)\sqrt{(c+a\cos v)^2-A^2/B}}\in\mathbb{Q}.$$

5. $\eta\cdot E=c+a$时, 仅有解$v=0$.