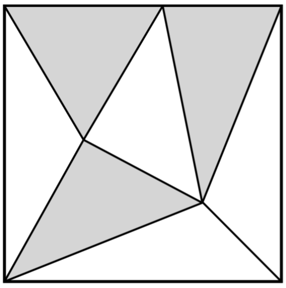
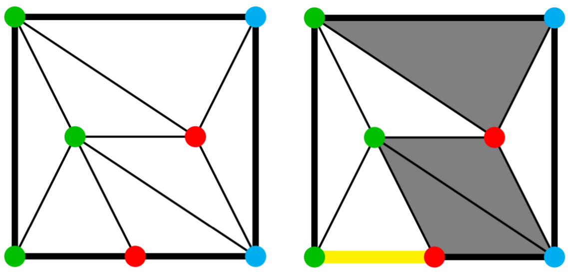
能否将正方型分成奇数个三角形?

> *这里，分成的三角形要求边上没有顶点，如不包括含有180°顶点的四边形。有效的分法如下图所示：*
>
> 

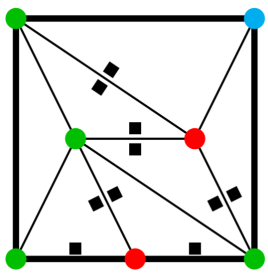
解决这一问题，我们需要引入Sperner's lemma与p-adic number.

（Sperner's lemma）假设对正方形进行三角划分，同时对所有顶点进行3-染色，即用三种颜色（红、蓝、绿）对所有顶点进行唯一地染色，如下图所示



则正方形边周上“红-绿染色”的线段的数量与顶点异色的三角形数量奇偶性相同。这里我们认定线段上不含有其他顶点，计数所定的边周线段顶点颜色相异即可，如可以将“红-绿染色”的线段等价地换成“红-蓝染色”或“蓝-绿染色”的线段。

证明：证明十分容易。我们只需对“红-绿染色”的线段在正方形内部的一侧进行标记，再用两种不同的方式统计标记数量即可。下图所用标记为正方形黑块：



据标记方式，所有正方形内的“红-绿染色”的线段两侧均标有黑块，边周的“红-绿染色”的线段仅在正方形内侧有黑块标记。不难发现：

1. 三角形内部标记数量为奇数，当且仅当三角形顶点两两异色。
2. 线段两侧的标记数量为奇数，当且仅当线段为“红-绿染色”的且位于边周。

因此，Sperner's lemma是显然的。

下面介绍第二个工具：p-adic number。

域$\mathbb{Q}$上的拓扑结构通常源于绝对值所给出的度量，数论上通常记作$||_\infty$，即

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, \qquad d_\infty(x, y) := |x-y|_\infty = |x-y|$$

我们定义x与y足够接近当且仅当$|x-y|_\infty \ll 1$。绝对值可以视作一种valuation，满足：

1. $|x|_\infty = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $|xy|_\infty = |x|_\infty |y|_\infty$
3. $|x+y|_\infty \leq |x|_\infty + |y|_\infty$

今给定素数p，定义$\mathbb{Q}$上的valuation：$|a|_p := p^{-\sup\{n\in\mathbb{Z}, a\in p^n\mathbb{Z}\}}$。换言之，由于任意非零有理数可表示为$p^k \cdot \dfrac{m}{n}$形式，其中$m$和$n$为不含因子$p$的互素整数，则可记$|a|_p := p^{-k}$，同时定义$|0|_p = 0$是十分自然地。

新定义的$||_p$具有$||_\infty$满足的如上三条性质。同时还有如下性质

$$|x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_q\}$$

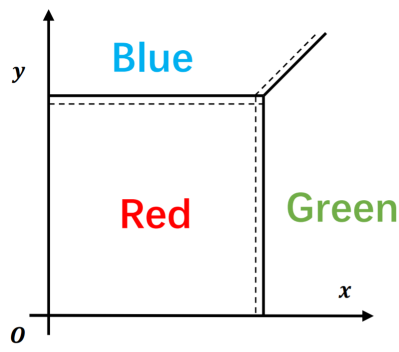
设x，y为$p^k \cdot \dfrac{m}{n}$形式即可通过定义证明。我们可以在$\mathbb{R}$上无歧义地定义$||_p$valuation，证明如下，读者可略过。

> *特别地，$||_\infty$是non-Archimedean的。Archimedean性是指$\forall a, b, \exists n \in \mathbb{N}\ \text{s.t.}\ |a| > |nb|$；而$|nb|_p \leq b$却是始终成立的。实际上，$||_p$所定义的拓扑结构明显异于$\mathbb{Q}$上自然的拓扑结构，在此暂不做对$\mathbb{F}_p$代数的深究。*
>
> *我们注意到$|p^n|_p = p^{-n}$，因此可通过性质$|xy|_p = |x|_p|y|_p$将$||_p$延拓至代数数（域）$\mathbb{F}$上（实际上，$||_p$运算已在$\mathbb{F}$上封闭），例如$|\sqrt{2}|_2 = \sqrt{|2|_2} = 2^{-1/2}$。注意到代数数域是代数闭域$\mathbb{C}$的子域，因此可以找到一组由$1$及非代数数组成的基，对$\mathbb{C}$进行代数数域上的划分。简单而言，若$x-y$为代数数，则$x \sim y$，如此得到的等价关系$\sim$是良定义的，比如$\mathbb{F}$与$e+\mathbb{F}$是两个等价类。*
>
> *对本题而言，将$||_p$运算延拓至实数域上足矣。显然$\mathbb{F}\cap\mathbb{R}$为域，现使用指数运算$\exp$将域映射至$\mathbb{R}_+\cap\mathbb{F}$上，相应的加法、乘法、逆元等都能可通过指数对数变换重新良定义。*
>
> *在新定义的域结构下，使用$\mathbb{R}_+$子域$\mathbb{R}_+\cap\mathbb{F}$对$\mathbb{R}_+$进行划分，即$\mathbb{R} = \bigoplus_{x\in R} x\cdot\mathbb{F}$。这里$R$是所有陪集代表元之集合。根据选择公理，$\forall x \in R$, $|x|_p$存在。实际上，根据代数数域之封闭性，$x \notin |y|_p, \forall y \in \mathbb{F}$，我们甚至可以直接取$x = |x|_p$。但凡承认选择公理，我们可在$\mathbb{R}_+$上无歧义地定义$||_p$，从而自然地在$\mathbb{R}$上定义$||_p$。*

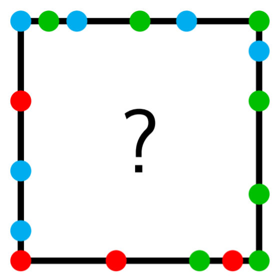
我们对$[0,1]\times[0,1]$正方形中每个点(x,y)进行染色，规则如下：

1. 染红当且仅当$|x|_2<1$且$|y|_2<1$；
2. 染绿当且仅当$|x|_2\geq 1$且$|x|_2\geq|y|_2$；
3. 染红当且仅当$|y|_2\geq 1$且$|x|_2<|y|_2$。

下图为$(|x|_p,|y|_p)$与对应染色的关系



将正方形点染色后，边周颜色如下：



其中$(0,0)$、$(0,1)$、$(1,0)$及$(1,1)$四个顶点分别为红、蓝、绿、绿四色，每条边上可能出现颜色如上图所示。由于$(0,0)$与$(1,0)$异色，边周上“红-绿染色”的线段数量一定为奇数。

可求得三角形面积在$||_2$下的valuation，即

$$|S|_2=\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{vmatrix}\right|_2=2\left|\begin{vmatrix}x_2-x_1&x_3-x_1\\y_2-y_1&y_3-y_1\end{vmatrix}\right|_2$$

根据Sperner's Lemma，一定存在一个顶点两两异色的三角形。选定该三角形，不妨设(x_1,y_1)染色为红，则$(x,y)-(x_1,y_1)$染色亦为红，因为不等式

$$|x+y|_2\leq\max\{|x|_2,|y|_2\}\quad\text{equality holds iff }|x|_2\neq|y|_2$$

在计算面积的valuation时，我们不妨设$(x_1,y_1)=(0,0)$，则

$$|S_\triangle|_2=2|x_2y_3-x_3y_2|_2=2\cdot\max\{|x_2y_3|_2,|x_3y_2|_2\}\geq 2$$

因为（不妨设）(x_2,y_2)与(x_3,y_3)分别为蓝色与绿色时，

$$|x_2y_3|=|x_2|_2|y_3|_2<|y_2|_2|x_3|_3=|x_3y_2|_2$$

设正方形能分为n个面积相等的三角形，则$|S_\triangle|_2=|1/n|_2$。故当n为奇数时，$|S_\triangle|_2=1<2$，因而正方形不可能划分成奇数个面积相等的三角形。

n维Sperner's lemma阐述：将一个n维棱锥（n-simplex）划分为若干更小的n维棱锥，并对每个顶点染色。若原n维棱锥顶点两两异色，则存在一个顶点两两异色的划分所得的n维棱锥。

类似地有推论（留作习题）：

- （Mead）n维超立方体能被分成m个体积相等的n维棱锥（n-simplex）当且仅当$n! \mid m$。
- （Kasimatis）正n边形（$n \geq 5$）能被分为n个面积相等的三角形当且仅当$n \mid m$。
- 一些多边形永远无法被分为若干面积相等的三角形。如顶点分别为$(0,0)$、$(0,1)$、$(1,0)$及$(a,1)$的梯形。
- KKM定理及其相关应用

  （KKM定理）设Δ^{n-1}被n个闭集覆盖（$\Delta^{n-1} \subset \cup_{k=1}^{n} C_k$）。记$\Delta^{n-1}$顶点集为$\{P_1, P_1, \ldots, P_n\}$，若对任意$I := \{i_1, i_2, \ldots, i_m\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$，$\Delta_I^m \subset \cup_{i \in I} C_i$，则$\cap_{k=1}^{n} C_k \neq \emptyset$。这里$\Delta_I^m$指$\{P_i : i \in I\}$生成的$m$维棱锥，即

  $$\Delta_I^m = \left\{ \sum_{i \in I} c_i P_i : \sum_{i \in I} c_i = 1, c_i \in [0,1] \right\}$$

  例如，若四棱锥$OABC$被闭集C_O、C_A、C_B及C_C覆盖，同时满足所有形如“$\triangle ABC$被C_A、C_B、C_C覆盖”“线段OA被C_O和C_A覆盖”“点B被C_B覆盖”的条件，则闭集C_O、C_A、C_B及C_C四者交集非空。

Brouwer fixed point theorem 与 Sperner's lemma

Brouwer fixed point theorem 叙述：凸紧集到自身的连续映射$f : K \to K$存在不动点x_0使得$f(x_0) = x_0$。

Brouwer fixed point theorem 证明方式繁多，如：

同胚于$K \subset \mathbb{R}^n$的单位开球B_n中不存在不动点的连续自映射$F \in C^1(B)$一定会导致矛盾

$$0 < \int_{\partial B} \omega = \int_{\partial B} F(\omega) = \int_B F(\mathrm{d}\omega) = \int_b F(0) = 0$$

但显然这种证明是晦涩的。Sperner's lemma可用于该定理的证明，证明如下：

我们只需证明在n维棱锥中Brouwer fixed point theorem成立。视n维棱锥为砍掉$n+1$维立方体一角时的截面，不失一般性地，记维棱锥

$$\Delta^n : \left\{ P = (P_0, P_2, \ldots, P_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{n=0}^{n} P_i = 1, P_i \geq 0 \, (\forall i) \right\}$$

Δ^n到自身的映射f满足$\sum_{n=0}^{\infty} f(P)_i = 1 \, (\forall P \in \Delta^n)$。根据抽屉原理，

$$\exists j \text{ s.t. } f(P)_j \leq P_j$$

我们据此对Δ^n进行染色。记$c_0, \dots c_n$为两两不同的颜色，设点P颜色为$c_{i(P)}$，

$$i(P) = \inf_k f(P)_j \leq P_j$$

根据之前推论，染色方案存在；我们将第$P_i = 1$的点（某顶点）染色为c_i。显然可将Δ^n划分为若干个相似于自身而长度为自身一半的n维棱锥，据Sperner's lemma，存在一个棱锥Δ_1使得其顶点两两异色。以此类推，可取得序列$\{\Delta_k\}$。根据闭集套定理，可以找到不动点$\{x_0\} = \cap_{k=1}^{\infty} \Delta_k$。

实际上，由Sperner's lemma 可知：设每一步迭代存在m_i个可选的Δ_i，则映射存在至少$\sum_{i \geq 1}(m_i - 1)$个不动点。
