Classification of groups with order 105

G有5阶或7阶的正规子群

对任意105阶群G. $N(3)=3k+1\mid 35$, 从而$N(3)$可取1或7. 同理$N(5)$可取1或21, $N(7)$可取1或15. G不可能既无5阶正规子群与7阶正规子群, 反之5阶元与7阶元之总和大于105, 矛盾.

G的35阶子群为循环群

首先, 35阶群必为循环群, 因为$5\nmid 7-1$. 不妨设5阶正规子群$H_5\lhd G$, 则对任意7阶子群$G_7\leq G$, H_5G_7为循环群. G有7阶正规子群时亦然.

G有唯一的35阶子群, 从而5阶正规子群和7阶正规子群

若G的35阶子群不唯一, 则至少有15个(因为$\min(N(5),N(7))=15$). 由于每个35阶子群有$\varphi(35)=24$个生成元, 故G至少有$15\times 24>105$个35阶元, 矛盾.

G的仅有两种结构

设$\langle a\rangle$为G的35阶正规子群, b为三阶元, 从而$b^{-1}ab=a^i$. 注意到$a=b^{-3}ab^3=b^{-2}a^ib^2=b^{-1}a^{i^2}b=a^{i^3}$, 故36 $\mid i^3-1$. 从而$i=1,13,25$. 其中, a^{25}非生成元, 舍去.

综上, $G=\left\langle a,b,c\mid a^3=b^5=c^7=1\right\rangle$, 或$G=\left\langle a,b,c\mid a^3=b^5=c^7=1,a^{-1}ba=b^3,a^{-1}ca=c^{-1}\right\rangle$.