复变函数基础知识 (上)

Content

全纯函数简介

Def. 复数域 $\mathbb{C}$ 同构于商空间 $\mathbb{R}[x]/(x^2+1\sim 0)$, 其中 $\mathbb{R}[x]$ 为多项式. 复数形如 $a+bx$, 其中 $x^2=-1$. 下记 $i=x$.

Def. 模长 $|\cdot|:\mathbb{C}\to\mathbb{R}, a+bi\mapsto\sqrt{a^2+b^2}$ 为 $\mathbb{C}$ 上的赋值, 从而满足自反性 ($|z|=0\Leftrightarrow z=0$) 且为同态 ($|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$).

Def. 幅角函数 $\mathrm{Arg}:\mathbb{C}^*\to\mathbb{R}/(0\sim 2\pi)$ 为 $\mathbb{C}^*:=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上的多值函数. 之所以无法在 $\mathbb{C}^*$ 上定义 Arg, 是因为 $H^1(\mathbb{C}^*)=\mathbb{R}\neq 0$.

> 定义自然的商映射 $\pi:\mathbb{R}/(0\sim 2\pi)\to[0,2\pi)$. 记 $\arg:=\pi\circ\mathrm{Arg}$ 为 $\mathbb{C}^*$ 到 $[0,2\pi)$ 上的映射, 其为单值函数, 从而不再是同态 (至少值域 $\mathbb{R}$ 中不存在亏格为 1 的区域).

Def. 记 U 为开区域. 称 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 在 $U\subset\mathbb{C}$ 上全纯, 若且仅若 $\forall z_0\in U$, 总有

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=:f'(z_0)$$

成立 . 记作 $f\in\mathrm{Hol}(U)$. 此时也称 f 解析.

Thm. (Cauchy-Riemann equation) 记 U 为开区域. f 在一切 $z_0\in U$ 中可微的充要条件为 f 满足以下微分方程 (可视 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$)

$$u_x=v_y, u_y=-v_x,\quad u=\mathrm{Re}(f), v=\mathrm{Im}(f).$$

> 等价地, $f_{\overline{z}}=\dfrac{1}{2}(f_x+f_y)=0.$

Proof. $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 的 Jacobi 为 $\begin{pmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{pmatrix}$. 由于复数 $z=a+bi$ 在 $\mathbb{C}$ 上相乘之作用等价于矩阵 $\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上的作用. 得证.

□

Col. 记 U 为开区域. f 在 $z_0\in U$ 可微且 $f'(z_0)\neq 0$, 则反函数可微.

Proof. 显然形如 $\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$ 的矩阵与 $\mathbb{C}$ 同构.

□

Col. 记 U 为开区域. f 在 $z_0\in U$ 可微时, f 以及 $\mathrm{Re}(f)$ 与 $\mathrm{Im}(f)$ 调和.

Proof. 注意到 $\Delta=\partial_{xx}+\partial_{yy}=4\partial_z\partial_{\overline{z}}$. $\partial_z(f)=0$ 时总有

$$\Delta f = 4\partial_{\bar{z}}(\partial_z f) = 0, \quad \Delta \overline{f} = 4\partial_z(\partial_{\bar{z}} \overline{f}) = 0.$$

从而 $\mathrm{Re}(f)$ 与 $\mathrm{Im}(f)$ 调和.

□

Example. (从调和函数补全为全纯形式) 若 U 为单连通开区域, u 为 U 上的调和函数, 则 $\Phi := u_x \mathrm{d}y - u_y \mathrm{d}x$ 满足 $\mathrm{d}\Phi = 0$, 即 Φ 为闭形式. 由于 $H^1(U) = 0$, Φ 一定为恰当形式, 即存在 U 上函数 v 使得 $(v_x, v_y) = (-u_y, u_x)$. 不难发现 u 与 v 构成对偶, $u + iv$ 全纯.

Example. 若开区域 U 不为单连通区域, 则对某些 U 上调和函数 u, 不存在 U 上全局良好定义的对偶 v 使得 $u + iv \in \mathrm{Hol}(U)$. 例如 $e^z = e^w$ 若且仅若 $z - w \in (2\pi i)\mathbb{Z}$, 从而 $\mathrm{Re}(\ln z)$ 为 $\mathbb{C}^*$ 上良定义的调和函数. 然而, 观察 $z = |z| \cdot e^{i \cdot \arg(z)}$, 结合 v 的唯一性 (显然) 可知 $\mathrm{Re}(\ln z)$ 的对偶在 $\mathbb{C}^*$ 上的每个邻域内与 $\arg$ 相同. 不难发现, 不存在 $\mathrm{Re}(\ln z)$ 在 $\mathbb{C}^*$ 上全局存在的对偶.

Cauchy’s 积分公式

Thm. (Cauchy-Goursat) $f \in \mathrm{Hol}(U)$, $U \subset \mathbb{C}$ 单连通, 则对任意分段可微的简单闭曲线 $\gamma \subset \overline{U}$, 总有 $\oint_\gamma f = 0$.

Proof. 当 γ 光滑时, 由于调和函数光滑, 故 ($\partial S = \gamma$)

$$\begin{aligned} \oint_\gamma f &= \oint_\gamma (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + i\oint_\gamma (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y) \\ &= \iint_S (-u_y - v_x)\mathrm{d}S + i\iint (-v_y + u_x)\mathrm{d}S \\ &= 0. \end{aligned}$$

对分段可微的 γ, 由调和函数极大值定理以及 γ 的紧致性知 $|f|$ 在 γ 上有上界 $M < \infty$. 通过一列光滑闭曲线 $\{\gamma_n\}_{n\geq 1}$ 逼近 γ 即可.

□

Example. $U \subset \mathbb{C}$ 可剖分为有限个全纯单连通区域, γ_1 与 γ_2 为分段可微简单闭曲线, 且存在 γ_1 到 γ_2 的连续变化, 则 $\oint_{\gamma_1} f = \oint_{\gamma_2} f$ 对一切 $f \in \mathrm{Hol}(U)$ 成立. 特别地, 当 γ_2 为单点时, $\oint_{\gamma_1} f = 0$.

Example. 任意 $w \in B(a,r)^\circ$, $\displaystyle\oint_{\partial B(a,r)} \frac{\mathrm{d}z}{z - w} = 2\pi i$.

Thm. (Cauchy 积分公式) U 为区域, $f \in \mathrm{Hol}(U)$, $\overline{B(a,r) \subset U}$, 对任意 $w \in B(a,r)$,

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial B(a,r)} \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z - w}.$$

Proof. 将 $\partial B(a,r)$ 变换为 $\partial B(w,\varepsilon)$, 显然.

□

Example. 全纯函数 (本质为调和函数) 光滑. 称其为解析函数是因为

$$\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}z^n}\Big|_{z=z_0} = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

其中 $f \in \mathrm{Hol}(B(z_0, r+\varepsilon))$ 对足够小的 $\varepsilon > 0$ 成立.

> 全纯函数一定是 (局部) 解析的, 任意一点的 Taylor 级数可复现函数全貌. 此结论与 $\mathbb{R}$ 上光滑函数不同, 例如定义 $\varphi(x)$ 在 $(-1,1)$ 上为 $e^{1/(x^2-1)}$, 在其余处为 0. 可验证 $\varphi(x)$ 光滑, 但某些单点的 Taylor 级数无以复现函数全貌!
>
> 调和函数与全纯函数均具备该性质, 称之解析性.

Col. $\left|\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}z^n}|_{z=z_0}\right| \le \frac{n!}{r^n} \sup_{z\in\partial B(z_0,r)} |f(z)|$.

Col. (Liouville) $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C})$ 且 f 有界, 则 f 为常函数.

Proof. $\forall z_0 \in \mathbb{C}$, f 在 z_0 处的各阶导数只能为 0.

□

Col. $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C})$. 若 $f(\mathbb{C})$ 不在 $\mathbb{C}$ 中稠密, 则 f 为常函数.

Proof. 若 $B(z_0, \varepsilon)$ 在 $f(\mathbb{C})^c$ 中, 则 $\frac{1}{f - z_0}$ 有上界 z_0, 从而为常函数.

□

Def. 取 U 为 $\mathbb{C}$ 中开区域, $\gamma \subset U$ 为分段连续的简单闭曲线, $z_0 \in U \setminus \gamma$. 记 $I(\gamma, z_0)$ 为 γ 记关于 z_0 的盈数, 即

$$I(\gamma, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0}.$$

通俗地, $I(\gamma, z_0)$ 即 γ 围绕 z_0 之圈数.

> 简单闭曲线不自交, 故盈数恒为 1.

Thm. $f \in \mathrm{Hol}(U)$, $U \subset \mathbb{C}$ 单连通, 则对任意分段可微的闭曲线 $\gamma \subset \overline{U}$, 总有

$$I(\gamma, z_0) \cdot f(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z - w}.$$

零点理论

Thm. $U \subset \mathbb{C}$ 为开区域, $f \in \mathrm{Hol}(U)$. 以下论断等价:

1. $f^{-1}(0)$ 存在聚点,
2. $f \equiv 0$,
3. 存在 $z_0 \in U$ 使得 $f(z)$ 在 z_0 处的各阶导数均为 0,
4. 存在 $z_0 \in U$ 使得 $\frac{f(z)}{(z - z_0)^n} \in \mathrm{Hol}(U)$ 对一切 $n \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$ 成立.

Proof. 对合适的 r, 端详 $B(z_0, r) \subset U$ 中的 Taylor 展开式

$$\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}z^n}|_{z=z_0} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z - z_0)^{n+1}}$$

可知 **3.** 与 **4.** 等价. 再者, **2.** 推出 **1.**, **1.** 推出 **3.** 故只需证明 **3.** 推出 **2.**. 这是显然的, 因为根据全纯函数的解析性, $f(z)$ 在 $B(z_0, \varepsilon)$ 中可以被一切 $|z - z_0|^k$ 限制.

□

> 此后简称孤立零点为零点. 显然零点不孤立时原函数为 0.

Thm. $U \subset \mathbb{C}$ 为开区域, $f \in \mathrm{Hol}(U)$. 若 z_0 为 $f^{-1}(0)$ 中的离散点, 则存在唯一的 $k \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$ 使得 $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$, 其中 $g \in \mathrm{Hol}(U)$ 且 $g(z_0) \ne 0$. 称 k 为零点重数.

Proof. 根据解析性, 显然

$$k = \inf\left\{n \in \mathbb{Z}_{\ge 0} \mid \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z - z_0)^{n+1}} \ne 0\right\} < \infty.$$

□

Example. $U\subset\mathbb{C}$ 为开区域, $f\in\mathrm{Hol}(U)$, 则 z_0 处零点重数为

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\mathrm{d}\ln f(z).$$

其中 γ 为分段可微的简单闭曲线, 且 $|f|$ 在 γ 围成区域的闭包中仅在 z_0 取 0.

Thm. (Rouché) $U\subset\mathbb{C}$ 为开区域, $f,g\in\mathrm{Hol}(U)$. 取 γ 为 U 中分段可微的闭曲线, 且在 γ 上总有 $|f(z)|>|g(z)|$, 则对任意 $t\in[0,1]$, f 与 $f+tg$ 在 γ 围成的区域内有相同的零点数量 (含重数).

Proof. 取 $h_t(z):=\dfrac{f'(z)+tg'(z)}{f(z)+tg(z)}$, 则

$$n(t):=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma h_t(z)\mathrm{d}z$$

对 $t\in[0,1]$ 连续. 而 $n(t)$ 取值为整数, 故 $n(t)\equiv n(0)$.

□

> 该类证明在微分几何中常见, 例如证明 Poincaré index与度量无关时, 只需证明 Poincaré index 为以度量为自变量的连续函数.

Thm. (开映照定理) 设 U 为 $\mathbb{C}$ 中开集. 则非常值全纯函数 $f\in\mathrm{Hol}(U)$ 为开映射.

Proof. $\forall z_0\in U$, $g(z):=f(z)-f(z_0)$ 在 z_0 处有零点. 取足够小的 $r>0$ 使得 g 在 $\overline{B(z_0,r)}\setminus\{z_0\}$ 上无零点, 记 m 为 $|g(z)|$ 在 $\partial B(z_0,r)$ 上的最小值.

注意到对一切 $w\in B(f(z_0),m/2)$, 在 $\partial B(z_0,r)$ 上恒有 $|g(z)|>m>|f(z_0)-w|$. 据 Rouché 定理, $h(z):=g(z)+f(z_0)-w=f(z)-w$ 在 $B(z_0,r)$ 上有零点. 从而 $B(f(z_0),m/2)\subset f(U)$.

□

Thm. (逆映射定理) 设 U 为 $\mathbb{C}$ 中开区域, 取 $f\in\mathrm{Hol}(U)$, 则

- f 为可逆映射或局部可逆时, 总有 $f'(z)\neq 0$ 对 $z\in U$ 恒成立.
- 若 $f'(z_0)\neq 0$ 对一切 $z\in U$ 成立, 则 f 局部可逆.

Proof. 该定理并非复变函数所特有, 对一般向量值函数之证明见数分课本.

□

Example. 特别地, 若 f 为单射, 逆映射全纯, i.e.,

$$g\,(\in\mathrm{Hol}(f(U))): f(U)\to U, f(z)\mapsto z.$$

$\forall w\in f(U)$, γ 为 $f(U)$ 中所围区域包含 w 的分段可微曲线, 则

$$g(w)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{f(\gamma)}\frac{g(\xi)}{\xi-w}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{zf'(z)}{f(z)-w}\mathrm{d}z.$$

奇点理论

Def. 记 $\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n(z-z_0)^n$ 为 Laurant 级数. 其中

- $\sum_{n\in\mathbb{Z}_{n\geq 0}}c_n(z-z_0)^n$ 为全纯部分.
- $\sum_{n\in\mathbb{Z}_{n\geq -1}}c_n(z-z_0)^n$ 为主部分.

Def. 开圆环 $A(z_0,r,R):=\{z\mid |z-z_0|\in(r,R)\}$.

Thm. $A(z_0,r,R)$ 上的全纯函数总有唯一的 Laurant 级数逼近.

Proof. $\forall w \in A(z_0, r, R)$, 总有

$$\begin{aligned}
2\pi i \cdot f(w) &= \oint_{\partial B(z_0,R)} \frac{f(z)}{z-w}\mathrm{d}z - \oint_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(z)}{z-w}\mathrm{d}z \\
&= \oint_{\partial B(z_0,R)} \frac{1}{z-z_0}\sum_{m\geq 0}\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^m \mathrm{d}z \\
&\quad - \oint_{\partial B(z_0,r)} \frac{1}{w-z_0}\sum_{m\geq 0}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^m \mathrm{d}z \\
&= \sum_{n\geq 0}\oint_{\partial B(z_0,R)} \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} + \sum_{n<0}\oint_{\partial B(z_0,r)} \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}.
\end{aligned}$$

根据幂级数收敛性知 Laurant 级数收敛至 f.

> 可根据 Laurant 级数定义 $\mathbb{C}$ 上的 $\sin$, $\exp$, $\arctan$ 等函数. 值得一提的是, $\ln$ 只能局部定义.

Def. 称 z_0 为 f 的孤立奇点, 若且仅若 f 在 z_0 处去心邻域中定义.

- 称 z_0 为可去奇点, 若且仅若 Laurant 级数不含负数次项.
- 称 z_0 为简单奇点, 若且仅若 Laurant 级数包含有限项负次项.
- 称 z_0 为本性奇点, 若且仅若 Laurant 级数包含无穷项负次项.

Col. f 的简单奇点为 $\dfrac{1}{f}$ 的零点. f 的本性奇点为 $\dfrac{1}{f}$ 的本性奇点.

Example. $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C}^*)$, 则

- $f(z) = z$ 时, 0 为可去奇点.
- $f(z) = z^{-1}$ 时, 0 为简单奇点.
- $f(z) = e^{1/z}$ 时, 0 为本性奇点.
- $f(z) = \sin(z^{-1})$ 时, 0 不为孤立奇点.

Thm. (可去奇点定理) U 为开区域, $f \in \mathrm{Hol}(U \setminus \{z_0\})$, 则以下条件等价.

1. z_0 为 f 的可去奇点.
2. f 在 z_0 的邻域内有界.
3. 存在 $\tilde{f} \in \mathrm{Hol}(U)$ 使得 $\tilde{f} \equiv f$ 在 $U \setminus \{z_0\}$ 上恒成立.
4. 对足够小的 ε, f 在 $B(z_0, \varepsilon)$ 上平方可积.

Proof. 考察 Laurant 级数, 这是显然的.

□

> 该定理对调和函数亦然.

Def. $U \subset \mathbb{C}$ 为开区域, 称 f 为 U 上的亚纯函数若且仅若 f 在除去有限个简单奇点上全纯. 记作 $f \in \mathrm{Mer}(U)$.

Prop. 显然 $\mathrm{Mer}(U)$ 为域, 其由交换环 $\mathrm{Hol}(U)$ 生成.

Example. $U \subset \mathbb{C}$ 为开区域, $f \in \mathrm{Mer}(U)$, γ 为分段可微的简单闭曲线且 γ 上不含奇点或零点. 记 f 在 γ 围成区域内的零点数为 N, 奇点数为 P (均包含重数). 则

$$N - P = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(z)\mathrm{d}z}{f(z)}.$$

Thm. (Casorati-Weierstrass, Picard 大定理的弱化形式) $f \in \mathrm{Hol}(U \setminus z_0)$ 在本性奇点 z_0 的任何邻域内的取值在 $\mathbb{C}$ 中稠密.

Proof. 反之, 设 $B(r,\varepsilon)$ 不在取值内, 则 $\dfrac{1}{|f(z)-r|}<\varepsilon^{-1}<\infty$, 从而 f 在 z_0 的某一邻域内亚纯, 矛盾.

□

> Picard 大定理如是说: 全纯函数在本性奇点的任意去心邻域中无穷次取遍 $\mathbb{C}$ 中几乎所有值, 至多略去一个点.