从Riemann曲面到Poincaré引理

前言

由于笔者将在下学期修读微分几何(differential geometry), 故最近在阅览相关书籍. 本文承接单复变函数课程, 以介绍Riemann曲面为主, 最终证明Poincaré引理(并非某猜想).

Riemann曲面: 一类特殊的微分流形

微分流形之引入

研究曲面总是复杂的工作. 例如许多人不知道, 北京到纽约的最近航线是经由北极的, 即便在地图上看来很不直观; 但宁波栎社到上海虹桥的航线(确实有过)大致是一条合乎直觉的小线段, 因为华东地区可近似看作一块平地($\mathbb{R}^2$中区域), $\mathbb{R}^2$上的Euclidean度量还是比较直观的. 试想, 能否借用若干组映射, 使得其将复杂曲面的局部"较好地"映射到相对简单的$\mathbb{R}^n$上? 同时, 度量函数也就可一并转移了.

对所研究的空间M(例如球面S^2), 我们必须规定其是Hausdorff的(T2). 唯有空间可分, 才能定义度量于其上; 或等价地, M有可数个拓扑基. 若$\forall x \in M$, 存在x的邻域U_x使得U_x同胚于$\mathbb{R}^m$中某一开集, 则称M为m维流形.

这里的同胚映射指$\varphi_x : U_x \to \varphi_x(U_x)$, 其中同胚要求$\varphi_x$, φ_x^{-1}均为连续双射. 称(U_x, φ_x)为一个坐标卡, 因此, 流形可用一组由至多可数的坐标卡所组成的图册来描述. 应当注意, φ_x之连续性业已道明U_x为开集, 从而极可能存在不同坐标卡之交集, 即存在非空开集$U_{x,y} := U_x \cap U_y$. 是故φ_x与φ_y应当在某些方面保持兼容, 该兼容方式于Riemann曲面上之展现可参见以下定义.

Riemann曲面之定义

Riemann曲面定义如是: 对满足Hausdorff性之拓扑空间Σ, 若存在Σ之开覆盖$\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$以及相应的同胚映射$\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{C}$, 同时

- 若$U_{\alpha,\beta} := U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, 则$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_{\alpha,\beta}) \to \varphi_\alpha(U_{\alpha,\beta})$为$\mathbb{C}$内的全纯映射.

则Σ为Riemann曲面.

Riemann曲面之案例不胜枚举, 如$\mathbb{C}$中一切区域均为Riemann曲面. 下证明S^2亦为Riemann曲面. 这里采用直角坐标表示S^2, 其中

$$S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

整个S^2自然无法与$\mathbb{C}$同胚, 毕竟挖去一点的S^2与$\mathbb{C}$同胚, 而挖去一点的$\mathbb{C}$确不再是单连通的; 但可以由此选取$U_1 = S^2 - \{(0,0,-1)\}$, $U_2 = \{(0,0,1)\}$. 令

$$\begin{aligned}\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{C}, (x,y,z) &\mapsto \frac{x-iy}{1+z},\\ \varphi_2 : U_2 \to \mathbb{C}, (x,y,z) &\mapsto \frac{x+iy}{1-z}.\end{aligned}$$

则$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \zeta \mapsto \dfrac{1}{\zeta}$为区域$\mathbb{C}^*$上的全纯映射.

$\mathbb{C}$中的全纯映射容易理解, 但Rieamnn曲面间的全纯映射何以判别? 细端详下交换图表

$$
\begin{tikzcd}
\Sigma_1 \arrow[d, "f"] & \ni U_1 \arrow[r, "\varphi_1"] & \varphi_1(U_1) \arrow[d, "(\varphi_2\circ f\circ\varphi_1^{-1})|_{\varphi_1(U_1)}"] & \in \mathbb{C} \\
\Sigma_2 & \ni U_2 \arrow[r, "\varphi_2"] & \varphi_2(U_2) & \in \mathbb{C}
\end{tikzcd}
$$

若对一切满足$U_2 \cap f(U_1) \neq \emptyset$之坐标卡, $(\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1})|_{\varphi_1(U_1)}$均为$\mathbb{C}$中的全纯映射, 则$f$为$\Sigma_1$至$\Sigma_2$间之全纯映射.

若存在全纯映射$f : \Sigma_1 \to \Sigma_2$, $g : \Sigma_2 \to \Sigma_1$使得$f \circ g = \mathscr{I}_{\Sigma_2}$与$g \circ f = \mathscr{I}_{\Sigma_1}$成立, 则$M$与$N$全纯同构. 例如, $\mathbb{C}P^1$表示$\mathbb{C}$中所有方向, 则其与S^1同构. 下给出Riemann环面(torus)间的同构关系.

Riemann环面之分类

对$\mathbb{C}$中的秩为2的$\mathbb{R}$线性无关量w_1, w_2, 考虑具有双周期的点列

$$\Lambda := \langle w_1, w_2 \rangle := \{mw_1 + nw_2 : m, n \in \mathbb{Z}\}$$

则商空间

$$\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda, \zeta \mapsto \zeta + \Lambda =: [\zeta]$$

同胚于$S^1 \times S^1$(逆命题暂未论证), 即某一形似游泳圈的图形. 通过仿射变换可知$\mathbb{C}/\langle w_1, w_2\rangle$, $\mathbb{C}/\langle 1, w_2/w_1\rangle$, $\mathbb{C}/\langle w_1/w_2, 1\rangle$三者全纯同构. 为对Riemann环面进行分类, 下仅需考虑$\mathbb{C}/\langle 1, \tau_1\rangle$与$\mathbb{C}/\langle 1, \tau_2\rangle$同构之情形.

全纯同构$f : \mathbb{C}/\langle 1, \tau_1\rangle \to \mathbb{C}/\langle 1, \tau_2\rangle$有一般形式$f([\zeta]_1) = [C\zeta]_2, \forall \zeta \in \mathbb{C}$. 特别地,

$$[C]_2 = f([1]_1) = [0]_2 = f([\tau_1]_1) = [C\tau_1]_2$$

从而存在系数矩阵P使得$P(1, \tau_2) = (C, C\tau_1) = C(1, \tau_1)$. 同理, 考虑$f^{-1}$知存在整系数矩阵$Q$使得$Q(1, \tau_1) = (1, \tau_2)/c$. 相乘得$PQ(1, \tau_1) = (1, \tau_1)$. 由于$1, \tau_1$线性无关, 故$|\det P| = |\det Q| = 1$.

由$Q(1, \tau_1) = (1, \tau_2)/c$知存在$a, b, c, d \in \mathbb{Z}$使得$\tau_2 = \dfrac{a + b\tau_1}{c + d\tau_1}$. 同时$ad - bc \in \{\pm 1\}$. 计算得$\Im(\tau_2) = (ad - bc)|c + d\tau_1|^{-2}\Im(\tau_1)$. 这里可利用模形式中"$\Im$权为2"的结论. 据假设, $\Im(\tau_1), \Im(\tau_2) > 0$, 从而$ad - bc = 1$, 或曰, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$.

由于τ可取遍$\mathbb{H}$, 是故有推论: 上半平面$\mathbb{H}$之全纯自同构有一般形式$\zeta \mapsto \dfrac{a + b\zeta}{c + d\zeta}$, 其中$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$.

切空间与余切空间

考虑(光滑)流形中一点$x \in M$, 定义$C^\infty(p)$为M上p邻域内光滑函数全体的商空间(或称函数芽, 英文为germ), $f \sim g$若且仅若f与g在某一更小邻域内相同(为便于理解故, 读者可姑妄认同$f \sim g \Leftrightarrow \nabla(f - g)|_{x=p} = 0$). 定义切向量$V_p$为线性算子$V_p : C^\infty(p) \to \mathbb{R}$, 满足

$$V_p(fg) = f(p)V_p(g) + V_p(f)g(p).$$

定义切空间T_pM为流形M上p处全体切向量生成之线性空间(基域$\mathbb{R}$). 而依直觉有

$$T_pM = \operatorname{span}(\partial_{x_1}|_p, \partial_{x_2}|_p, \ldots, \partial_{x_m}|_p), \quad m = \dim M.$$

下以步骤验证之:

1. $\partial_{x_i}|_p x_j = \delta_i^j$. 从而诸$\partial_{x_i}$线性独立.
2. 对一切满足$\partial_{x_i}|_p(f) \equiv 0 (\forall i)$之函数$f$, $V_p(f) \equiv 0$. 实际上, 不妨设(U_p, φ_p)为覆盖p某一邻域的坐标卡, φ_p光滑. 任取$x \in (\varphi_p(U_p))^*$, 有

$$\begin{aligned} f \circ \varphi_p^{-1}(x) - f \circ \varphi_p^{-1}(0) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \varphi_p^{-1}(tx))\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \sum_{k=1}^m x_k \partial_{x_k}(f \circ \varphi_p^{-1}(tx))\mathrm{d}t. \\ &= \sum_{k=1}^m x_k h_k \end{aligned}$$

   此处h_k为U_p内的某光滑函数. 将$\partial_{x_k}|_p$作用于左式知$h_k(p) \equiv 0$. 从而p处任意切向量作用于f上亦为0.
3. 对一般切向量V_p, 考虑$V_p - \sum_{k=1}^m V_p(x_k)\partial_{x_k}|_p$即可.

实际上, 我们于上式第三步考察$\partial_{x_k}|_p$之分量时, 自然希望存在某一泛函L_k使得$L_k(V_p) = V_p(x_k)$. 此处记L_k为$\mathrm{d}x_k|_p$, 可见$\{\mathrm{d}x_k|_p\}$构成切空间对偶空间之基底, 称之余切空间(T_p^*M).

记$\phi : M \to N$为光滑流形间的光滑映射, 定义ϕ在p处切映射之微分为

$$\phi_{*p} : T_pM \to T_{f(p)}N, V_p \mapsto \phi_{*p}(V_p).$$

其中, $\forall g \in C^\infty(f(p))$, $\phi_{*p}(V_p)(g) = V_p(g \circ \phi)$. 容易验证链式法则:

对光滑映射链$M_0 \xrightarrow{\phi_1} M_1 \xrightarrow{\phi_2} \cdots \xrightarrow{\phi_k} M_k$, 有

$$(\phi_k \circ \cdots \phi_2 \circ \phi_1)_{*p_0} = \phi_{k,*p_k} \circ \cdots \circ \phi_{2,*p_2} \circ \phi_{1,*p_1}.$$

其中$M_0 \ni p_0 \xrightarrow{\phi_1} p_1 \xrightarrow{\phi_2} \cdots \xrightarrow{\phi_k} p_k$.

对Riemann曲面而言, 记$z = x + iy$在p的某邻域内, 记$w = f(z) = x' + iy'$, $f = u + iv$. 则

$$\phi_{*p}\begin{pmatrix} \partial_x|_p \\ \partial_y|_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_{x'}|_{f(p)} \\ \partial_{y'}|_{f(p)} \end{pmatrix}$$

其中, 当f为全纯映射时, 转换矩阵行列式值为$u_x v_y - u_y v_x = \nabla^2 u = 0$. 从而$\phi_{*p}$或为$0$, 或线性同构.

de Rham上同调群引入

本节所讲并非系统化的de Rham上同调群, 仅为Poincaré引理证明用, 徒代数拓扑学之一隅尔.

前文所提及的切空间T_pM与余切空间T_p^*M均为局部定义. 对于光滑流形者, 可定义切丛$TM := \cup_{p\in M} T_pM$为M上一切其空间之并集, 余切丛$T^*M := \cup_{p\in M} T_p^*M$为$M$上一切余切空间之并集.

记$f : U \to \mathbb{R}$为定义于$U \subset M$上的光滑函数. 则对任意$p \in U$, $\mathrm{d}f(p) \in T_p^*M$存在. 定义余切丛后, 方可议论有一次微分形式$\mathrm{d}f$. 其中$(\mathrm{d}f)(p) = \mathrm{d}(f(p))$. 对任意的$f \in V_p$, 总有$\mathrm{d}f(p)(V_p) = V_p(f)$. 此处$\mathrm{d}f$亦可视作$f$之外微分.

而后可推广有多次微分形式. 由于Riemann曲面上的三次及以上微分形式均为0(因为$\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}=2$), 下仅给出二次微分形式之介绍.

$$\wedge^2 T_p^* M := \{\psi : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R} : \psi\text{反对称且偏线性}\}$$

即可. 其中$(\omega_p \wedge \eta_p)(V_p, W_p) = \omega_p(V_p)\eta_p(W_p) - \omega_p(W_p)\eta_p(V_p)$. 外积(wedge)运算也可定义在一次微分形式上, 如$(\omega_1+\omega_2)\wedge\eta = \omega_1\wedge\eta + \omega_2\wedge\eta$, $\omega\wedge\eta = -\eta\wedge\omega$.

设$f : M \to N$为Riemann曲面间的光滑映射, 定义拉回映射$f^* : N \to M$使得

- f^*将N中的k形式转为M中k形式.
- f^*作用在0形式上无非复合, 如$f^*g = g\circ f$.
- f^*作用在k形式ω上为$f^*\omega_p(V_p^{(1)},\ldots,V_p^{(k)}) = \omega_{f(p)}(f_{*p}V_p^{(1)},\ldots,f_{*p}V_p^{(k)})$.
- $f^*(\omega\wedge\eta) = f^*(\omega)\wedge f^*(\eta)$.
- $\mathrm{d}(f^*(\omega)) = f^*(\mathrm{d}\omega)$.

由外微分运算可知$\mathrm{d}^2=0$. 称ω为闭形式若且仅若$\mathrm{d}\omega=0$, 称ω为恰当形式若且仅若存在η使得$\omega=\mathrm{d}\eta$. 容易见得对任意k, k次闭形式为向量空间, k次恰当形式亦然. 从而定义de Rham上同调群为商空间

$$H_{\mathrm{dR}}^q = \{q\text{次闭形式}\}/\{q\text{次恰当形式}\}.$$

从而f^*在商空间下诱导的映射$\tilde{f}^* \in \hom(H_{\mathrm{dR}}^q, H_{\mathrm{dR}}^q)$.

Poincaré引理如是说: $\mathbb{C}$上的闭形式必为恰当形式.

1. ω为2形式时, 不妨设$\omega = F(x,y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$. 注意到
$$\mathrm{d}\left[\left(\int_0^x F(t,y)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y\right] = \omega.$$
2. ω为1形式时, 不妨设$\omega = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$. 由于$\mathrm{d}\omega=0$, 故
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$
考虑$\eta = \int_0^x P(t,y)\mathrm{d}t + \int_0^y Q(x,t)\mathrm{d}t$即可得$\mathrm{d}\eta=\omega$.

另一个有趣的结论是$H_{\mathrm{dR}}^1(\mathbb{C}^*) = \mathbb{R}$, 或同理地, $H_{\mathrm{dR}}^1(\mathbb{D}^*) = \mathbb{R}$. 证明如下:

对任意$[\omega]\in H_{\mathrm{dR}}^1(\mathbb{C}^*)$, 由于恰当形式在环路积分下为0, 故有良定义的映射

$$\phi : H_{\mathrm{dR}}^1(\mathbb{C}^*) \to \mathbb{R}, [\omega] \mapsto \int_{S^1}\omega.$$

注意到$\int_{S^1}\mathrm{d}\theta = 2\pi \neq 0$, 从而$\phi$为满射. 此处$\theta$在$\mathbb{C}^*$上未能够整体定义, 但$\mathrm{d}\theta = \dfrac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$确乎为闭形式. 下证明$\phi$为单射.

直觉告诉我们$H_{\mathrm{dR}}^1(\mathbb{C}^*) \cong \{c[\mathrm{d}\theta] : c\in\mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}$, 因此我们只需尝试将一切含$\mathrm{d}r$之项化作恰当形式即可. 不妨设闭形式$\omega = f\mathrm{d}r + g\mathrm{d}\theta$. 据闭形式之定义, $\dfrac{\partial f}{\partial\theta} = \dfrac{\partial g}{\partial r}$. 故

$$\omega = \mathrm{d}\int_1^r f(t,\theta)\mathrm{d}t - \left(\int_1^r \frac{\partial f(t,\theta)}{\partial\theta}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\int_1^r f(t,\theta)\mathrm{d}t + g(1,\theta)\mathrm{d}\theta.$$

从而由$\int_{S^1}\omega = 0$可推得$\int_0^{2\pi} g(1,\theta)\mathrm{d}\theta = 0$. 从而

$$\omega = \mathrm{d}\left(\int_1^r f(t,\theta)\mathrm{d}t + \int_0^\theta g(1,s)\mathrm{d}s\right)$$

为恰当形式. 最后, 结论$H^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{C}^*) = H^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{C}^*) = 0$是显然的.