微分几何笔记(三)

一般参数下的曲率与挠率

以下先前采用弧长参数研究曲线,下则采用一般参数研究之. 记 $\gamma:(a,b)\to\mathbb{R}^3$, $t\mapsto\gamma(t)$. 为简化符号, 记 $\dot{f}=f(t)'$, $\ddot{f}=f(t)''$, 以此类推.

首先
$$\gamma'(s) = \dot{\gamma} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} \right)$$
. 由此得

$$kec{n}=\gamma''(s)=\ddot{\gamma}igg(rac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}igg)^2+\dot{\gamma}\,igg(rac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}s^2}igg).$$

再有

$$\begin{aligned} &k'(s)\vec{n}-k^2\vec{t}-k\tau\vec{b}=\gamma'''(s)\\ =&\ddot{\gamma}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^3+3\ddot{\gamma}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}s^2}\right)+\dot{\gamma}\left(\frac{\mathrm{d}^3t}{\mathrm{d}s^3}\right). \end{aligned}$$

从而

$$k=|ec{t} imes kec{n}|=|\dot{\gamma} imes \ddot{\gamma}|igg(rac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}igg)^3=rac{|\dot{\gamma} imes \ddot{\gamma}|}{|\dot{\gamma}|^3}.$$

为求挠率,下采用混合积计算,即

$$-k^2 \tau = [\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s)].$$

考虑 $\gamma^{(l)}(t)$ 换元,则上式等于

$$[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma}] \cdot \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^6.$$

因此

$$au = -rac{[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \dddot{\gamma}]}{k^2 \dot{s}^6} = rac{[\dddot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \dot{\dot{\gamma}}]}{|\dot{\gamma} imes \ddot{\gamma}|^2}.$$

空间挠曲线与球

空间挠曲线指曲率与挠率不为零的曲线, 其曲率代表的偏离值与挠率代表的偏离值应满足一定的关系. 设 $\gamma(s)$ 在某球面上, 则存在向量 γ_0 与常数R使得

$$\|\gamma - \gamma_0\|^2 = R^2.$$

求导得 $\left<ec{t},\gamma-\gamma_0\right>=0$. 不妨设 $\gamma-\gamma_0=\lambdaec{n}+\muec{b}$, 则求导得

$$ec{t} = -\lambda k ec{t} + (\lambda' + \mu au) ec{n} + (-\lambda au + \mu') ec{b}.$$

故
$$\lambda k=-1$$
, $\lambda'=-\mu\tau$, $\mu'=\lambda\tau$. 解得 $\lambda=-rac{1}{k}$, $\mu=rac{1}{\tau}rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}rac{1}{k}$. 回代得

$$\frac{1}{k^2} + \frac{1}{\tau^2} \left(\frac{\mathrm{d}k^{-1}}{\mathrm{d}s}\right)^2 = R^2.$$

因此空间挠曲线γ在任一点处所在的球的半径为

$$R(s) = \sqrt{rac{1}{k^2} + rac{1}{ au^2}igg(rac{\mathrm{d}k^{-1}}{\mathrm{d}s}igg)^2}.$$

反之, 若空间挠曲线满足R(s)为恒常数, 则该曲线为常曲率曲线或球面上的曲线.

由于 $ec{t}$ 光滑,若将 $ilde{r}(s)=ec{t}(s)$ 视作三维单位球上的正则曲线,则其曲率为

$$ilde{k}(s) = rac{|\gamma''(s) imes\gamma'''(s)|}{|\gamma''(s)|^2} = \sqrt{k^2+ au^2}.$$

注: 此处s并非f的弧长参数, 故仍作一般参数情形计算.

挠率为 $ilde{ au}(s)=rac{[\gamma'''',\gamma''',\gamma'']}{|\gamma'' imes\gamma'''|^2}$. 此处可通过 $ilde{\gamma}$ 之弧长参数表示 $ilde{ ilde{t}}=ec{n}$. 从而

$$ilde{ au} = rac{[ec{n}''(s),ec{n}'(s),ec{n}(s)]}{|ec{n}(s) imesec{n}'(s)|^2} = rac{ au k' - k au'}{k^2 + au^2} = rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}rctanrac{k}{ au}$$

从而 γ 的曲率与挠率由其切向量导出的曲线决定。换言之, \vec{n} 导出 γ 的曲率与挠率。

曲线基本定理

给定正则曲线 $\gamma:(a,b)\to\mathbb{R}^3$, 曲率函数k(s)>0, 挠率函数 τ , 则在同余意义下存在唯一的 γ 满足给定条件.

证明: 注意到

$$rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} egin{pmatrix} ec{t} \ ec{n} \ ec{b} \ ec{\gamma} \end{pmatrix} = egin{pmatrix} 0 & k & 0 & 0 \ -k & 0 & - au & 0 \ 0 & au & 0 & 0 \ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} egin{pmatrix} ec{t} \ ec{n} \ ec{b} \ ec{\gamma} \end{pmatrix}$$

若限定初值 $(\gamma(s_0), \vec{t}(s_0), \vec{n}(s_0), \vec{b}(s_0))$,则根据解的存在唯一性定理得到唯一可能之解 γ^* .注意到 \vec{t}^* , \vec{n}^* , \vec{b}^* 三者两两内积构成了六元常微分方程组(初值条件已给出),根据解的存在唯一性定理易知其唯一解为 $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \equiv 0$ ($x \neq y$), $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \equiv 0$. 从而 $(\vec{t}^*, \vec{n}^*, \vec{b}^*)$ 均为符合要求的解.

实际上, 我们未限定初值条件; 但对于一切可能的初值条件, 所求得的曲线总能通过平移或旋转得到上述 γ^* . 证明是显然的.