张量积

$\otimes$ 函子

Definition 1.7.1 可通过双模范畴 ${}_S\mathcal{M}_T$ 类比得 $\mathcal{M}_R\mathcal{M}$, 即 $f : M_R \times {}_R N \to G$ (Abel 群), 满足双可加性, i.e.,

- $f(m+m',n) = f(m,n) + f(m',n)$;
- $f(m,n+n') = f(m,n) + f(m,n')$;
- $f(m,rn) = f(mr,n)$.

称上述 f 为 R-平衡映射, f 系集合范畴内定义的映射.

> 💡 **Remark** 例如 $\mathbb{Q} \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ 上的 $\mathbb{Z}$ 平衡映射 f 一定为零映射, 因为
>
> $$f(r,d) = f(r/n, nd) = f(r/n, 0) = 0.$$

Definition 1.7.2 称 $h : A_R \times {}_R B \to A \otimes_R B$ 为张量积若且仅若对任意 R-平衡映射 $f : A \times B \to G$, 总有唯一的同态 $f' : A \otimes_R B \to G$ 使得 $f = f'h$.

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend right, "{f(,)}"'] & A \otimes_R B \arrow[r, "\exists! f'"] & G \end{tikzcd}$$

🔗链接

> 💡 **Remark** 此处 R-平衡映射系集合范畴内的映射, f' Abel 群间的同态.

Theorem 1.7.3 张量积在同构的意义下唯一.

▼ **Proof of the theorem**

考虑 $f: A\otimes_R B\to A\otimes'_R B$ 与 $g: A\otimes'_R B\to A\otimes_R B$, 显然 fg 与 gf 只能是恒等映射.

Theorem 1.7.4 A_R 与 ${}_RB$ 的张量积存在.

▼ **Proof of the theorem**

记 F 为以 $A\times B$ 中元素为基的自由群, 记商群 $F/\sim$, 其中

- $(a+a',b)\sim(a,b)+(a',b)$;
- $(a,b+b')\sim(a,b)+(a,b')$;
- $(ar,b)\sim(a,rb)$.

从而 $A\otimes_R B$ 无非 $F/\sim$.

> 💡 **Ramark** 该定义是自然的, 即便自由字商取去约化关系, 参考自由群以及自由模相关定理.

Theorem 1.7.5 $f\in\mathrm{Hom}_R(A_R,A'_R)$, $g\in\mathrm{Hom}_R({}_RB,{}_RB')$, 则存在唯一的同态

$$A\otimes_R B\to A'\otimes_R B', a\otimes b\mapsto f(a)\otimes g(b).$$

▼ **Proof of the theorem**

对 $\alpha: A\times B\to A'\otimes_R B', (a,b)\mapsto f(a)\otimes_R g(b)$, 存在唯一的 α' 使得有交换图

$$\begin{tikzcd}
A\times B \arrow[r, "\otimes"] \arrow[rr, bend right, "\alpha"'] & A\otimes_R B \arrow[r, "\exists!\alpha'"] & A'\otimes_R B'
\end{tikzcd}$$

🔗链接

记 $\alpha' =: f\otimes_R g$. 可见该定理相当于 $(f\otimes g)(a\otimes b)=f(a)\otimes g(b)$.

Theorem 1.7.6 特别地, 若同态 $f'\circ f$ 与 $g'\circ g$ 均可定义, 则有以下交换图

$$
\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[rrr, "\otimes_R"] \arrow[dr, "f \times g"] \arrow[dd, dashed, "(f' \circ f) \times (g' \circ g)"'] & & & A \otimes_R B \arrow[dl, "\exists ! f \otimes_R g"'] \arrow[dd, dashed, "\exists ! (f' \circ f) \otimes_R (g' \circ g)"] \\
& A' \times B' \arrow[r, "\otimes_R"] \arrow[dl, "f' \times g'"] & A' \otimes_R B' \arrow[dr, "\exists ! f' \otimes_R g'"] & \\
A'' \times B'' \arrow[rrr, "\otimes_R"] & & & A'' \otimes_R B''
\end{tikzcd}
$$

🔗链接

张量积的泛性质保证右边虚线处的映射唯一, 从而

$$(f' \circ f) \otimes_R (g' \circ g) = (f' \otimes_R g') \circ (f \otimes_R g).$$

> 💡 **Remark** 注意到函子 $\otimes_R : {}_S\mathcal{M}_R \times {}_R\mathcal{M}_T \to {}_S\mathcal{M}_T$, 满足
>
> - 对象层次上, $(A, B) \mapsto A \otimes_R B$;
> - 态射层次上, $(f, g) \mapsto f \otimes_R g$.

Example 1.7.7 对双模而言, 有以下显然事实.

1. 对 $A_R \otimes_R {}_R B_S$ 而言, 有右模结构 $(a \otimes b)s = a \otimes (bs)$;
2. 对 ${}_S A_R \otimes_R {}_R B$ 而言, 有左模结构 $s(a \otimes b) = (sa) \otimes b$;
3. 对 ${}_S A_R \otimes_R {}_R B_T$ 而言, 有双模结构 $s(a \otimes b)t = (sa) \otimes (bt)$;
4. 有同构 $A_R \otimes_R R \xrightarrow{\sim} A, a \otimes r = ar \otimes 1 \mapsto ar$;
5. 有同构 $R \otimes_R {}_R B \xrightarrow{\sim} A, r \otimes b = 1 \otimes rb \mapsto rb$.

▼ **Proof**

以证明 3️⃣ 为例, 观察以下良定义的 R-平衡映射

$$f_s : A \times B \to A \otimes_R B, (a, b) \mapsto (sa) \otimes b.$$

由张量积的泛性质, 存在唯一的 $g_s : A \otimes_R B \to A \otimes_R B$ 使得 $g_s(a, b) = (sa) \otimes b$. 容易验证, ${}_S A_R \otimes_R {}_R B_T$ 的左模结构由左作用

$$g_- : S \to \mathrm{End}_S(A \otimes_R B), s \mapsto g(s)$$

保证, **泛性质保证 g_- 为良定义的映射**. 右模结构同理. 双模结构是自然的, 因为

$$(s(a \otimes b))t = (sa \otimes b)t = sa \otimes bt = s(a \otimes bt) = s((a \otimes b)t).$$

Theorem 1.7.8 $\otimes$ 导出的函子具有如下性质.

1. 函子 $[A_R \otimes_R -] : {}_R\mathcal{M} \to \mathbb{A}G$ 为右正合加性共变函子;
2. 函子 $[- \otimes_R {}_R B] : \mathcal{M}_R \to \mathbb{A}G$ 为右正合加性共变函子;
3. 函子 $[{}_S A_R \otimes_R -] : {}_R\mathcal{M} \to {}_S\mathcal{M}$ 为右正合加性共变函子;
4. 函子 $[- \otimes_S {}_S A_R] : \mathcal{M}_S \to \mathcal{M}_R$ 为右正合加性共变函子.

▼ **Proof of the theorem**

此处仅证明 1️⃣, 其他命题同理.

1️⃣ 对列 ${}_R M \xrightarrow{f} {}_R N \xrightarrow{g} {}_R L \to 0$, 下证明

$$A \otimes M \xrightarrow{\mathrm{Id}_A \otimes f} A \otimes N \xrightarrow{\mathrm{Id}_A \otimes g} A \otimes L \to 0.$$

- $\mathrm{Id}_A \otimes g$ 为满射. 任取 $a \otimes l \in A \otimes L$, 由于存在 $n \in N$ 使得 $g(n) = l$, 故 $(\mathrm{Id}_A \otimes g)(a \otimes n) = a \otimes l$.
- $\mathrm{im}(\mathrm{Id}_A \otimes f) = \ker(\mathrm{Id}_A \otimes g)$. 任取 $a \otimes n \in \mathrm{im}(\mathrm{Id}_A \otimes f)$, 注意到

  $$(\mathrm{Id}_A \otimes g)(a \otimes n) = a \otimes g(n) = a \otimes 0 = 0.$$

  从而 $\mathrm{im}(\mathrm{Id}_A \otimes f) \subseteq \ker(\mathrm{Id}_A \otimes g)$. 另一方面, 任取 $a \otimes n \in \ker(\mathrm{Id}_A \otimes g)$, 则 $a \otimes g(n) = 0$. 因此存在 A 中可逆元 r 使得 $rn \in \ker(g) = \mathrm{im}(f)$. 取 $m \in M$ 使得 $f(m) = rn$, 从而

  $$(\mathrm{Id}_A \otimes f)(ar^{-1} \otimes m) = ar^{-1} \otimes rn = a \otimes n.$$

因此 $\operatorname{im}(\mathrm{Id}_A \otimes f) \supseteq \ker(\mathrm{Id}_A \otimes g)$.

从而 $\operatorname{im}(\mathrm{Id}_A \otimes f) = \ker(\mathrm{Id}_A \otimes g)$ 得证.

💡 **Remark** $\operatorname{Hom}_R(-, M)$ 与 $\operatorname{Hom}_R(M, -)$ 均是左正合的.

Theorem 1.7.9 对于 $\{{}_R B_i\}_{i\in I}$ 与 A_R, 有 Abel 群同构

$$\begin{aligned} A \otimes_R \bigoplus_{i\in I} B_i &\xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i\in I}(A \otimes_R B_i), \\ a \otimes (b_i) &\mapsto (a \otimes b_i). \end{aligned}$$

特别地, 若 A 与 B_i 为双模, 则该同构也是模同构. 等价地, 还有

$$\begin{aligned} \bigoplus_{i\in I} A_i \otimes_R B &\xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i\in I}(A_i \otimes_R B), \\ (a_i) \otimes b &\mapsto (a_i \otimes b). \end{aligned}$$

对直积而言仅有嵌入映射, 例如对双模 $\{{}_S A^i{}_R\}_{i\in I}$ 与 $\{{}_R B^j{}_T\}_{j\in J}$ 而言, 有

$$\begin{array}{ccc} \left(\prod\limits_{i\in I} {}_S A^i{}_R\right) \otimes_R \left(\prod\limits_{j\in J} {}_R B^j{}_T\right) & \hookrightarrow & {}_S\left(\prod\limits_{i\in I, j\in J} A^i \otimes_R B^j\right)_T, \\ \cup & & \cup \\ \left(\bigoplus\limits_{i\in I} {}_S A^i{}_R\right) \otimes_R \left(\bigoplus\limits_{j\in J} {}_R B^j{}_T\right) & \xrightarrow{\sim} & {}_S\left(\bigoplus\limits_{i\in I, j\in J} A^i \otimes_R B^j\right)_T. \end{array}$$

▼ **Proof of the theorem**

我们关注最后一行同构. 根据 **Yoneda 引理**, 只需证明对一切 $M \in \mathsf{Ob}({}_S\mathcal{M}_T)$, 总有

$$\operatorname{Hom}\left(\left(\bigoplus_{i\in I} {}_S A^i{}_R\right) \otimes_R \left(\bigoplus_{j\in J} {}_R B^j{}_T\right), {}_S M_T\right) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}\left({}_S\left(\bigoplus_{i\in I, j\in J} A^i \otimes_R B^j\right)_T, {}_S M_T\right).$$

今采用 $\operatorname{Hom}({}_S A_R \| {}_R B_T, {}_S C_T)$ 表示保持双模同态的 R-平衡映射, 则容易见得

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}\left(\left(\bigoplus_{i\in I}{}_SA^i{}_R\right)\otimes_R\left(\bigoplus_{j\in J}{}_RB^j{}_T\right),{}_SM_T\right)\\
\cong&\mathrm{Hom}\left(\left(\bigoplus_{i\in I}{}_SA^i{}_R\right)\|\left(\bigoplus_{j\in J}{}_RB^j{}_T\right),{}_SM_T\right)\\
\cong&\prod_{i\in I,j\in J}\mathrm{Hom}\left({}_SA^i{}_R\|{}_RB^j{}_T,{}_SM_T\right)\\
\cong&\prod_{i\in I,j\in J}\mathrm{Hom}\left({}_SA^i\otimes_R B^j{}_T,{}_SM_T\right)\\
\cong&\mathrm{Hom}\left({}_S\left(\bigoplus_{i\in I,j\in J}A^i\otimes_R B^j\right)_T,{}_SM_T\right).
\end{aligned}
$$

其中应用了 Abel 范畴中的 $\mathrm{Hom}(\oplus *,\cdot)\cong\prod\mathrm{Hom}(*,\cdot)$.

Theroem 1.7.10 (结合律) 对双模 ${}_RL_S$, ${}_SM_T$, ${}_TN_U$, 存在唯一的 R-U-双模同构

$$
\begin{aligned}
({}_RL\otimes_S M)\otimes_T N_U &\xrightarrow{\sim}{}_RL\otimes_S(M\otimes_T N_U),\\
(l\otimes_S m)\otimes_T n&\mapsto l\otimes_S(m\otimes_T n).
\end{aligned}
$$

▼ **Proof of the theorem**

对任意 S-平衡映射

$$
\begin{aligned}
f_n: L\times M&\to L\otimes_S(M\otimes_T N),\\
(l,m)&\mapsto l\otimes_S(m\otimes_T n),
\end{aligned}
$$

由张量积 $L\otimes_S M$ 的泛性质得到唯一的 Abel 群同态

$$
\begin{aligned}
g_n: L\otimes_S M&\to L\otimes_S(M\otimes_T N),\\
l\otimes_S m&\mapsto l\otimes_S(m\otimes_T n).
\end{aligned}
$$

从而可定义 T-平衡映射

$$\begin{aligned} h : (L \otimes_S M) \times N &\to L \otimes_S (M \otimes_T N), \\ (l \otimes_S m, n) &\mapsto g_n(l \otimes_S m). \end{aligned}$$

由 $(L \otimes_S M) \otimes_T N$ 的泛性质可知存在唯一的 Abel 群同态

$$\begin{aligned} \varphi : (L \otimes_S M) \otimes_T N &\to L \otimes_S (M \otimes_T N), \\ (l \otimes_S m) \otimes n &\mapsto g_n(l \otimes_S m) = l \otimes_S (m \otimes_T n). \end{aligned}$$

将上述过程以反向复写, 得同态

$$\begin{aligned} \psi : L \otimes_S (M \otimes_T N) &\to (L \otimes_S M) \otimes_T N, \\ l \otimes_S (m \otimes_T n) &\mapsto f'_l(m \otimes_S n) = (l \otimes_S m) \otimes n \end{aligned}$$

R-U-双模同构的唯一性由张量积自同构的唯一性(泛性质推得)保证.

平坦模

$\otimes$-Hom 伴随对