群论大作业

张陈成 519071910019

Q1: 试确定互不同构的18阶群

解: 考虑18阶Abel群. 由$18=2\cdot 3^2$知互不同构的18阶Abel群为$\mathbb{Z}_{18}$与$\mathbb{Z}_6\oplus\mathbb{Z}_3$.

当群非Abel时, Sylow定理知$N(9)=3k+1\mid 2$. 故群中有唯一的3阶子群G(故正规). 由于G为p^2群, 因此$G\cong\mathbb{Z}_9$或$G\cong\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$.

当$G\cong\mathbb{Z}_9$时, 设a为G的生成元, b为某一二阶子群之生成元. 由于G正规, 故$bab^{-1}=bab\in G$. 记$bab=a^i\in G$, 其中$i=1,\ldots,8$. 则

$$a=b^2ab^2=ba^ib=a^{i^2}$$

从而$9\mid(i^2-1)$. 由于$i+1$与$i-1$不同为3之倍数, 因此$9\mid(i+1)$或$9\mid(i-1)$, 从而只能有$i=8$. 此时得二面体群D_9.

当$G\cong\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$时, 设$G=\{(x^i,y^j):i,j=0,1,2\}$, 这里$x,y$为$\mathbb{Z}_3$之生成元. 任取某二阶子群之生成元$z$. 有$z(x,y)z^{-1}=(zxz,zyz)=(x^i,y^j)$. 取$x=1$时,

$$y=z^2yz^2=zy^jz=y^{j^2}$$

从而$3\mid j^2-1$, 因此$j=1,2$. 其中$j=1$时$\langle(1,y),z\rangle$为Abel群. 因此(i,j)之所有可取值为$(1,2)$, $(2,1)$, $(2,2)$.

综上, 18阶群及其表示分别为:

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}_{18}&=\langle a\mid a^{18}=1\rangle\\
\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_6&=\langle a,b\mid a^3=b^6=1\rangle\\
D_9&=\langle a,b\mid a^9=b^2=(ab)^2=1\rangle\\
D_3\times\mathbb{Z}_3&=\langle a,b,c\mid a^3=b^2=(ab)^2=c^3=1,\rangle\\
(\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3)\rtimes_\varphi\mathbb{Z}_2&=\langle a,b,c\mid a^3=b^3=c^2=(ac)^2=(bc)^2=[a,b]=1\rangle
\end{aligned}$$

值得一提的是广义二面体群$D(H):=H\rtimes_\varphi\mathbb{Z}_2$, 其中$\varphi_{\bar{0}}(h)=h$, $\varphi_{\bar{1}}(h)=h^{-1}$. 类似二面体群, 对任意$h\in H$与$\bar{1}\in\mathbb{Z}_2$均有$(\bar{1}h)^2=1$.

Q2 试确定互不同构的20阶群

解: 考虑20阶Abel群. 由$20=2^2\cdot 5$知互不同构的20阶Abel群为$\mathbb{Z}_{20}$与$\mathbb{Z}_{10}\oplus\mathbb{Z}_2$.

当群非Abel时, Sylow定理知$N(5)=5k+1\mid 4$. 故群中有唯一的5阶子群G(故正规). 由于G为p阶群, 因此$G\cong\mathbb{Z}_5$. 原群关于G之商群H同构于$\mathbb{Z}_4$或$\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$.

当$H\cong\mathbb{Z}_4$时, 设a, b分别为G, H之生成元. 由5阶子群之正规性设$bab^{-1}=a^i$, 其中$i=0,1,2,3,4$. 因此

$$a=b^4ab^{-4}=b^3a^ib^{-3}=a^{i^4}$$

故$5\mid i^4-1$. 由于群非Abel, 故$i=2,3,4$. 由于b^3亦为H之生成元, 且

$$b^3ab^{-3}=a^{i^3}=\begin{cases}a^3 & i=2,\\ a^2 & i=3,\\ a^4 & i=4.\end{cases}$$

因此只需关注$i=2,4$之情形.

当$H\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$时, 不妨设$H\cong\{1,x,y,xy\}$, 其中$x^2=y^2=(xy)^2=1$. 同设$a$为$G$之生成元, 则设$xax=a^i\in G$. 因此$a=x^2ax^2=a^{i^2}$. 解得$i=1$或4符合. 其中$a=1$亦即$ax=xa$. 从而$H$与$G$之乘法限定无外乎以下二者(考虑对称性):

1. $xax=a$, $yay=a^4$. 此时$\forall c\in\langle a,x\rangle\cong\mathbb{Z}_{10}$, $ycy=c^9$, 因而群为D_{10}.
2. $xax=yay=a^4$. 此时$(xy)a(xy)=a^{16}=a$, 故可化为上一条情形.

综上, 20阶群及其表示分别为:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Z}_{20} &= \langle a \mid a^{20} = 1 \rangle \\
\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{10} &= \langle a, b \mid a^2 = b^{10} = 1 \rangle \\
D_{10} &= \langle a, b \mid a^{10} = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle \\
D_5 \times \mathbb{Z}_2 &= \langle a, b, c \mid a^5 = b^2 = (ab)^2 = c^2 = 1, \rangle \\
\mathbb{Z}_5 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_4 &= \langle a, b \mid a^5 = b^4 = 1, ab = ba^2 \rangle
\end{aligned}
$$

由$\mathbb{Z}_5 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_4 \cong \mathrm{Hol}(\mathbb{Z}_5) \cong \mathrm{Aut}(D_5)$所想

我们特别关注$\mathbb{Z}_5 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_4$中$\varphi$之具体. 注意到$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_5) \cong \mathbb{Z}_4$, 即$\mathbb{Z}_5$生成元于乘法下自然构成的群. 因此有$\varphi_{\bar{i}}(\bar{j}) = \overline{ij}$. 其半直积之二元运算即

$$(\bar{i}, \bar{j})(\bar{k}, \bar{l}) = (\overline{ijk}, \overline{jl})$$

称$\mathrm{Hol}(G) := G \rtimes_\varphi \mathrm{Aut}(G)$为$G$之共形(holomorph), 若定义$\mathrm{Hol}(G)$中元素乘法

$$(g, n)(h, m) = (gn(h), nm)$$

对一般域有类似定义之仿射群(affine group), 在此从略.

下证明一重要结论: $\mathrm{Hol}(\mathbb{Z}_n) \cong \mathrm{Aut}(D_n)$

考虑同态

$$\pi : \mathbb{Z}_n \to \mathrm{Aut}(D_n), i \mapsto f_i; \quad f_i : \tau \mapsto \sigma^i \tau, \sigma \mapsto \sigma$$

及形式上等同于$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$之映射集

$$\pi^* : \mathbb{Z}_n^* \to \mathrm{Aut}(D_n), i \mapsto g_i, \quad g_j : \tau \mapsto \tau, \sigma \mapsto \sigma^j$$

注意到$\pi(\mathbb{Z}_n) \lhd \mathrm{Aut}(D_n)$, 故

$$\mathrm{Aut}(D_n) \cong \mathrm{hol}(\mathbb{Z}_n) := \mathbb{Z}_n \rtimes \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$$

其阶数为$n\varphi(n)$.

参考文献

[1] 近世代数三百题. 冯克勤, 章璞. 高等教育出版社.

[2] 个人电子笔记.