图谱论导引(第一期)

咕了一段时间, 重新发文吧. 近期文章将以图论为主.

笔者近期在看*Dragoš Cvetković*的*An Introduction to the Theory of Graph Spectra*, 往后几期推文将主要参照此书进度, 顺便再加些有趣的谈资.

关于本文: 原书第一章堆积了许多概念, 但笔者还是保持"不用不提"的原则吧.

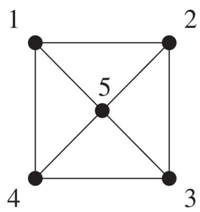
关于图谱

图谱(spectrum, pl. spectra)描绘了图的特征值(eigenvalue)及其重数(multiplicity), 其一般形式为 $(\lambda_1^{n_1}, \lambda_2^{n_2}, \ldots, \lambda_s^{n_s})$. 鉴于Cvetković之书偏重简单图之结构, 兹约定近期推文中的"图"具备以下条件:

1. 所有点(vertex, pl. vertices)视为等同的对象, 一条边(edge)反应了两个点间的关系.
2. 边仅相异之两点连接(无环, loopless), 且任意一对点仅限以一条边相连(无重边, without multiple edge).
3. 边无权重(unweighted), 无定向(undirected).

储存图结构的不二方式为邻接矩阵. 以图G之邻接矩阵A为例: 记点集$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 邻接矩阵$A_{n\times n}$中元素$a_{ij}$反应了$v_i$与$v_j$间的连接情况. 特别地, 若$v_i$与$v_j$相连(记作$v_i \sim v_j$, 约定$v_i \nsim v_j$蕴含$i \neq j$), 则$a_{ij}=1$; 反之$a_{ij}=0$. 容易见得$A$为$n$阶实对称矩阵.

以下图为例



依编号, 作邻接矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

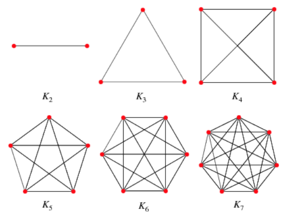
根据实对称矩阵之谱分解定理, 存在$Q \in O_n$使得$Q^TAQ=\Lambda$, 此处Λ为以A之一切特征值为对角元的矩阵. 据特征多项式$\det(xI-A)=x^2(x+2)(x-2x-4)$可取 $\Lambda=\mathrm{diag}(-2, 1-\sqrt{5}, 0, 0, 1+\sqrt{5})$. 因此图谱为$(-2, 1-\sqrt{5}, 0^{(2)}, 1+\sqrt{5})$.

需要知晓一点, 不同的图或有相同的谱, 例子留与读者探索.

下介绍一系列特殊图, 并对其特征值及特征向量给予计算.

完全图(K_n)

完全图(complete graph)指一类相异点对间全部连边之图. 例如以下



容易见得边数$|E(K_n)| = \dfrac{n(n-1)}{2}$. 其邻接矩阵为

$$A(K_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^T - I_n.$$

计算其特征多项式

$$\det(xI_n - A(K_n)) = \det((1+x)I_n - \mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^T) = (1+x)^{n-1}(x-n).$$

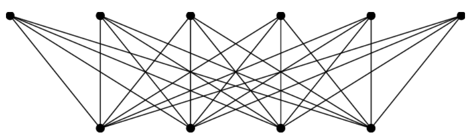
其中援用了结论$x^m \det(xI_n - AB) = x^n \det(xI_m - BA)$.

故计算知其图谱为$(-1^{(n-1)}, n)$.

完全二分图($K_{m,n}$)

二分图(bipartite graph), 或曰二部图, 指一类在某种顶点双染色方式下同色点定不相连的图. 其等价定义如是: G为二部图, 若且仅若存在一种顶点划分$V(G) = V_1 \dot\cup V_2$使得V_1内与V_2内部无边.

完全二部图是指一类在保持其二部图属性的前提下, 无法再度添边的图. 例如下图为完全二部图$K_{4,6}$, 意即4顶点集与6顶点集生成的完全二部图.



$K_{m,n}$之邻接矩阵具有一般形式$A(K_{m,n}) = \begin{pmatrix} O_{m\times m} & \mathbf{1}_{m\times n} \\ \mathbf{1}_{n\times m} & O_{n\times n} \end{pmatrix}$. 从而

$$\begin{aligned}\det(xI_{m+n} - A(K_{m,n})) &= \det\begin{pmatrix} xI_n - \dfrac{1}{x}\mathbf{1}_{n\times m}\mathbf{1}_{m\times n} & O \\ -\mathbf{1}_{m\times n} & xI_m \end{pmatrix} \\ &= \det(xI_n - \frac{m}{x}\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^T) \cdot \det(xI_m) \\ &= (\frac{m}{x})^n x^m (\frac{x^2}{m})^{n-1}(\frac{x^2}{m} - mn^2) \\ &= x^{m+n-2}(x-mn)(x+mn)\end{aligned}$$

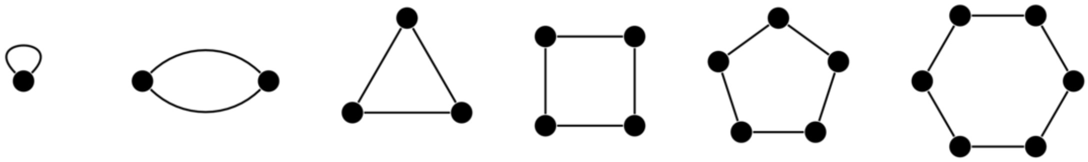
因此其谱为$(0^{m+n-2}, mn, -mn)$.

另一类方法是观察$A(K_{m,n})$之kernel, 容易见得其维度为$n+m-2$. 同时$(\sqrt{n}\mathbf{1}_m, \sqrt{m}\mathbf{1}_n)$及$(\sqrt{n}\mathbf{1}_m, -\sqrt{m}\mathbf{1}_n)$分别对应了特征值$\sqrt{mn}$.

依相似定义, 读者可构造完全k部图. 上述观察根子空间之方法仍然适用, 此处留与读者自行验证.

圈图(C_n)

圈图即首尾相连之图. 如下图所示(依前文限定故, C_1与C_2悉不予讨论).



C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 C_6

圈图之邻接矩阵为$A(C_n) = Z + Z^{-1}$, 其中$Z = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n-1} & I_{n-1} \\ 1 & \mathbf{0}_{n-1}^T \end{pmatrix}$满足$Z^n = I_n$.

由于Z对应根$(1, \omega, \cdots, \omega^{n-1})$, 其中$\omega = e^{2\pi i/n}$. ω^j对应之特征向量无非$v_k = (1, \omega^j, \omega^{2j}, \ldots, \omega^{(n-1)j})$. 从而$Z + Z^{-1}$对应根$2\cos\dfrac{2\pi j}{n}$, 其中$2\cos\dfrac{2\pi j}{n} = \omega^j + \overline{\omega^j}$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$. 对应的特征向量亦无非$\Re(v_k) = \dfrac{v_k + \overline{v_k}}{2}$.

路图(P_n)

路图P_n即圈图C_n去掉任意一边. 其形似路, 故是谓也. 下图为P_6.

根据递推关系, 对任意$n \in \mathbb{N}_+$均有

$$\det(xI_{n+2} - A(P_{n+2})) = x\det(xI_{n+1} - A(P_{n+1})) - \det(xI_n - A(P_n))$$

注意到$\det(xI_2 - A(P_2)) = x^2 - 1$, 根据第二类Чебышёв多项式之性质, 易知$\det(xI_n - A(P_n)) = U_n(x/2)$. 从而根为$2\cos[(2k+1)\pi/2]$, 其中$k = 0, 1, \ldots, n-1$.

相应的特征向量不难从$\ker(\lambda I - A)$递推得到, 此处从略.

n阶矩(nth moment)

n阶矩指矩阵特征值的n次方和, 如1阶矩即$A(G)$之迹(trace), 当然也就是0了. 2阶矩阵即$\mathrm{trace}(A(G)^2)$, 其值恰为$2|E(G)|$. 3阶矩恰为图中三角形数量之六倍. 以下将从n次矩阵的角度加以阐释.

我们记$A^k = (a_{ij}^{(k)})_{n\times n}$.已知$a_{ij}$因$i$与$j$之相邻与否取1或0, 那么

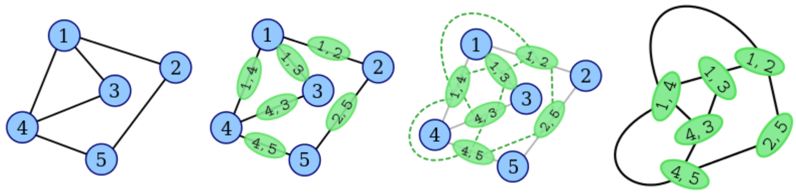
$$a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}$$

恰恰表示了从i至j的步长为二的连接之数量, 即从i恰走两步即至j的方式. 同理, a_{ij}^k为从i至j的步长为k的连接之数量. 以上关于二阶矩, 三阶矩之结论自然成立了.

线图(line graph)

图论研究中常有这一类情况: 某些定理对图的点成立(如染色问题), 那是否对于其边成立? 从而自然有以下疑问, 能否将图的边转化成点再加以研究?

为研究G的边, 不待思索即知需要一张点集与$E(G)$对应的图$L(G)$. 其中$L(G)$中两点相连对应G中两边公用顶点. 下图为由G构造$L(G)$之方式.



对一般图直接作出线图大抵是令人望而却步的. 但借用先前构造A^k之想法, 姑认定由边走向一端顶点为"半步". 是故可做导出矩阵(induced matrix)为$B := (b_{ve})_{|V|\times|E|}$, $b_{ve} = 1$若且仅若点v与边e相连, 反之$b_{ve} = 0$. 从而B^TB记录了边与边的相邻关系, B^TB中非对角元素为1若且仅若两边相连, 反之为0; 其对角元素为2, 因为从边至自身的两个"半步"移动仅有两种可能, 即经由两个顶点后折返. 从而$B^TB - 2I_{|E|}$即为G线图之邻接矩阵$A(L(G))$. 由于B^TB半正定, $L(G)$之特征值至少为2.

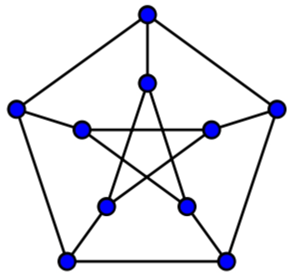
同理, 记d_i为顶点i相连边的数量, 一般称之度(degree). 记$D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$为度矩阵, 则$BB^T - 2D = A(G)$. 因此对于各顶点相同的图而言, $\det(xI - A(G)) = (2+x)^{|V|-|E|}\det(xI - L(A(G)))$.

正则图与强正则图

上文所提的度相同的图即为正则图(regular graph), 如K_8, $K_{3,3}$等均为正则图. 强正则图(strongly regular graph)G满足以下条件:

1. G为正则图.
2. G中任意相邻的两点的公共邻点数量相同.
3. G中任意不邻的两点的公共邻点数量相同.

以Petersen图为例(如下图所示)



Petersen图共有10顶点, 每一顶点度为3. 其中, 相邻两点的公共邻点数量为0, 不邻连点的公共邻点数量为1. 我们称$(v, k, \lambda, \mu) = (10, 3, 0, 1)$为强正则图之参数(parameters).

强正则图一直是复杂的研究对象, 由参数判定强正则图存在性之充要条件尚未明了; 但必要条件仍是有的, 例如$(v-k-1)\mu = k(k-\lambda-1)$, 证明如下:

1. 任取$v_0 \in V(G)$, 记V_1为v_0邻点之集合, V_2为$V \setminus (\{v_0\} \cup V_1)$.
2. V_1中的k个点共连出k条边, 其中k条边连至v_0, λ条边于V_1内部相连, 从而连至V_2之边为$k(k-\lambda-1)$.
3. V_2中任意一点向外部连出的边数为μ, 从而连至V_1之边数为$(v-k-1)\mu$.

综上有$k(k-\lambda-1) = (v-k-1)\mu$.

对一般强正则图而言, $\mathbf{1}_v$总为其以k为特征值的特征向量. 下仅需求得$\mathbf{1}_v^T$中特征向量所对应之特征值即可.

考虑A^2及强正则图之定义, $a_{ij}^{(2)}$在$i \sim j$时为λ, 在$i \nsim j$时为μ, 在$i = j$时为k. 因此

$$A^2 = kI + \lambda A + \mu(\mathbf{1}_{v\times v} - I_v - A).$$

对任意$x \in \mathbf{1}_v^\perp$有$A^2x = kx + \lambda Ax - \mu Ax - \mu x$, 从而得零化多项式$[A^2 + (\mu-\lambda)A + (\mu-k)I_v]x = \mathbf{0}_v$. 非$k$之特征值为

$$\begin{cases}\tau = \frac{1}{2}\left[(\lambda-\mu)+\sqrt{(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu)}\right],\\ \theta = \frac{1}{2}\left[(\lambda-\mu)-\sqrt{(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu)}\right].\end{cases}$$

重数m_τ与m_θ满足$\mathrm{trace}(A)=\tau m_\tau+\theta m_\theta+k=0$, 以及$m_\tau+m_\theta+1=n$. 从而

$$\begin{cases}m_\tau = \frac{1}{2}\left[v-1-\frac{2k+(v-1)(\lambda-\mu)}{\sqrt{(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu)}}\right],\\ m_\theta = \frac{1}{2}\left[v-1+\frac{2k+(v-1)(\lambda-\mu)}{\sqrt{(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu)}}\right].\end{cases}$$

图的角(angle)

根据对称矩阵之谱分解定理, 对任意邻接矩阵A均存正交矩阵Q使得Q^TAQ为对角矩阵$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)$. A的谱分解(spectra decomposition)为$A=Q^T\Lambda Q=\sum_{i=1}^r\lambda_i\cdot Q^TE_iQ$, 其中$E_i$在$\Lambda$中$\lambda_i$所在位置上取1, 于其余处取0. 记$P_i:=Q^TE_iQ$为投影矩阵. $Q=(e_1,e_2,\ldots,e_n)$为一组基底.

图之角(angle)为矩阵$(\alpha_{i,j})_{r\times n}$, 其中$\alpha_{ij}:=\|P_ie_j\|=\sqrt{e_j^TP_ie_j}$. 容易验证角度满足以下性质:

1. $\sum_{j=1}^n\alpha_{ij}^2=\dim\ker(\lambda_iI-A)$. 实际上,

$$\sum_{j=1}^n\alpha_{ij}^2=\sum_{j=1}^n e_j^TP_ie_j=\mathrm{trace}(Q^TP_iQ)=\mathrm{trace}(P_i).$$

2. $\sum_{i=1}^r\alpha_{ij}^2=1$. 实际上,

$$\sum_{i=1}^r\alpha_{ij}^2=\sum_{i=1}^r e_j^TP_ie_j=\mathrm{trace}(e_j^TIe_j)=1.$$

3. $A^k=\sum_{i=1}^r\lambda_i^kP_i$. 进而图中长为$k$的walk总数为

$$N_k=\mathbf{1}_n^TA^k\mathbf{1}_n=\sum_{i=1}^r\lambda_i^k\|P_i\mathbf{1}_n\|.$$

关于习题

章后习题选题精辟, 只可惜难度参差不一. 笔者大致总结了三点.

1

许多题目基于书上未提及的Gershgorin circle定理, 该定理阐述了矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$在复平面内的特征值的位置. 具体而言, 圆盘之并集$\cup_{i=1}^nD(a_{ii},\sum_{j\neq i}|a_{ij}|)$包含了$A$的所有特征值.

证明不难. 先选定任意特征向量v与其对应的特征值λ, 再不失一般性地假设$|v_m|=\|v\|_\infty(\neq 0)$, 从而$\lambda v_m=\sum_i a_{mi}v_i$. 是故

$$|\lambda-a_{mm}|\leq\frac{1}{|v_m|}\left|\sum_{i\neq m}a_{mi}v_i\right|\leq\sum_{i\neq m}|a_{mi}|$$

定理得证.

2

对"好"图的特征值计算完全考察高等代数能力. 比如第四题是计算$L(K_{4,4})$之谱, 计算如下:

The incidence matrix (r.f. Proposition 1.2.2.) of $K_{4,4}$ is

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0\\
0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\
0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1\\
1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1
\end{pmatrix}$$

Set $C=(1\,1\,1\,1)$, the incidence matrix of $K_{4,4}$ equals

$$\begin{pmatrix} C\otimes I_4 \\ I_4\otimes C \end{pmatrix}$$

The line graph of $K_{4,4}$, $A(L(K_{4,4}))$, equals $\begin{pmatrix} C\otimes I_4 \\ I_4\otimes C \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} C\otimes I_4 \\ I_4\otimes C \end{pmatrix} - 2I_{16}$.

Consider the eigenvalues of $\begin{pmatrix} C\otimes I_4 \\ I_4\otimes C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\otimes I_4 \\ I_4\otimes C \end{pmatrix}^T$.

Since $(A_1\otimes B_1)(A_2\otimes B_2)=(A_1A_2)\otimes(B_1B_2)$, the product

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} C\otimes I_4 \\ I_4\otimes C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\otimes I_4 \\ I_4\otimes C \end{pmatrix}^T =&\begin{pmatrix} C\otimes I_4 \\ I_4\otimes C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C^T\otimes I_4 & I_4\otimes C^T \end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix} 4I_4 & C^TC \\ C^TC & 4I_4 \end{pmatrix}\\
=&4I_8+\begin{pmatrix} O & J_4 \\ J_4 & O \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

> Lemma. the spectrum of $\begin{pmatrix} O & J_4 \\ J_4 & O \end{pmatrix}$, or $K_{4,4}$, is $(0^6,4,-4)$.
>
> Proof. Since $\operatorname{rank}(A(K_{4,4}))=2$, the multiplicity of eigenvalue 0 is 6. Whereas, the summation of other two eigenvalues equals the trace of $A(K_{4,4})$, that is, zero. We observe that the all-one vector is an eigenvector of $A(K_{4,4})$ with corresponding eigenvalue 4. Thus -4 is also one eigenvector.
> We deduce that the spectrum of $K_{4,4}$ is $(0^6,-4^1,4^1)$.

In view of the lemma, the spectrum of $\begin{pmatrix} C\otimes I_4 \\ I_4\otimes C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\otimes I_4 \\ I_4\otimes C \end{pmatrix}^T$ is $(4^6,0^1,8^1)$. Hence the spectrum of $\begin{pmatrix} C\otimes I_4 \\ I_4\otimes C \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} C\otimes I_4 \\ I_4\otimes C \end{pmatrix}$ is $(4^6,0^9,8^1)$, and the spectrum of $A(L(K_{4,4}))$ is $(6^1,2^6,(-2)^9)$.

当然, 前文早已计算过$K_{m,n}$的谱, 故此条答案可以更简; 只是笔者在完成习题时尚未总结特殊图的谱.

3

第17题难度颇大, 笔者仅能google到一篇与其相关的冗长论文; 但还是在几经尝试后给出了较trivial的解答, 分享如下.

原题: Show that if G is a strongly regular graph then each vertex-deleted subgraph $G-v(v \in V(G))$ has exactly two main eigenvalues.

名词注释:

- 书中用$G-v$表示在图G中删去点v以及与v相连之边后的图, 例如$C_{n+1}-v=P_n$.
- 主特征值(main eigenvalue)定义如是: λ为主特征值若且仅若$\ker(A-\lambda I) \not\subset \mathbf{1}_n^T$. 例如$K_4$之主特征值为$3$, 0并非其主特征值.

证明: Let $P_G(x)$ be the characteristic polinomial of G, that is, $\det(xI_n - A(G))$. Consider the derivation of $P_G(x)$.

$$
\begin{aligned}
P_G'(x) = & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(v_1(x) \quad v_2(x) \quad \cdots \quad v_n(x)) \\
= & \sum_{i=1}^{n} \det\left(v_1(x) \quad \cdots \quad v_{i-1}(x) \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} v_i(x) \quad v_{i+1}(x) \quad v_n(x)\right) \\
= & \sum_{i=1}^{n} \det(xI_{n-1} - A(G \setminus \{v_i\})) \\
= & \sum_{i=1}^{n} P_{G \setminus \{v_i\}}(x)
\end{aligned}
$$

(这里用到了结论: 所有删点图的特征多项式之和即原图特征多项式之导数.)

Suppose that G is a strong regular graph with parameters (n,k,λ,μ), and G is not complete (otherwise, the statement is trivial since $G \setminus \{v_i\}$ is strong regular). Thus we have

$$A(G)^2 = kI + \lambda A(G) + \mu(J - I - A(G))$$

Hence $A(G)^2 + (\mu-\lambda)A(G) + (\mu-k)I = \mu \mathbf{1}\mathbf{1}^T$. Since k is an eigenvalue of G with multiplicity 1, the other two eigenvalue (denoted as τ and θ, $\tau > \theta$) with corresponding multiplicities (m_τ and m_θ) satisfies:

$$
\begin{aligned}
\tau, \theta = & \frac{\lambda - \mu \pm \sqrt{(\mu-\lambda)^2 + 4(k-\mu)}}{2} \\
0 = & \tau m_\tau + \theta m_\theta + k \ = \mathrm{trace}(A(G)) \\
n = & 1 + m_\tau + m_\theta = \dim A(G)
\end{aligned}
$$

Hence $P_G(x) = (x-k)(x-\tau)^{m_\tau}(x-\theta)^{m_\theta}$. By virtue of the symmerty of G, let G' be any vertex-deleted graph of G. We have

$$
\begin{aligned}
P_{G'}(x) =& \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_{G\backslash\{v_i\}}(x) \\
=& \frac{1}{n}P_G' \\
=& \frac{1}{n}(x-\tau)^{m_\tau}(x-\theta)^{m_\theta} + \frac{1}{n}m_\tau(x-k)(x-\tau)^{m_\tau-1}(x-\theta)^{m_\theta} \\
&+ \frac{1}{n}m_\theta(x-k)(x-\tau)^{m_\tau}(x-\theta)^{m_\theta-1} \\
=& (x-\tau)^{m_\tau-1}(x-\theta)^{m_\theta-1}\Big[x^2-(\lambda-\mu+k)x \\
&+ \frac{\mu-k+k^2+k(n-1)(\lambda-\mu)}{n}\Big]
\end{aligned}
$$

Since $k(k-\lambda-1)=(n-k-1)\mu$,

$$
\begin{aligned}
P_{G'} =& (x-\tau)^{m_\tau-1}(x-\theta)^{m_\theta-1}\Big[x^2-(\lambda-\mu+k)x \\
&+ \frac{\mu-k+k^2+k(n-1)(\lambda-\mu)}{n}\Big] \\
=& (x-\tau)^{m_\tau-1}(x-\theta)^{m_\theta-1}[x^2-(\lambda-\mu+k)x+\mu] \\
=& (x-\tau)^{m_\tau-1}(x-\theta)^{m_\theta-1}(x-\theta')(x-\tau')
\end{aligned}
$$

where $\tau', \theta' = \dfrac{\lambda-\mu+k\pm\sqrt{(\lambda+\mu+k)^2-4\mu}}{2}$.

We now prove that the eigenvalue τ and θ are non-main, i.e. $\mathcal{E}_{G'}(\tau)\subset\mathbf{j}^\perp$ and so is $\mathcal{E}_{G'}(\theta)$. Since $\ker(A(G')-\tau I)\subset\mathbf{j}^\perp \Leftrightarrow \mathbf{j}\in\operatorname{Im}(A(G')-\tau I)$, we only need to prove that

$$
\mathbf{j}\in\operatorname{Im}[A(G')-\tau I)(A(G')-\theta I)] = \operatorname{Im}[A(G')^2+(\mu-\lambda)A(G')+(\mu-k)I]
$$

WLOG, set $A(G)$ as $\begin{pmatrix} 0 & g^T \\ g & A(G') \end{pmatrix}$. Since

$$
G^2 = \begin{pmatrix} k & g^TA(G') \\ A(G')g & A(G')^2+gg^T \end{pmatrix}
$$

We deduce that $\operatorname{Im}[A(G')-\tau I)(A(G')-\theta I)] = \operatorname{Im}(gg^T-J)$, r.f. $A(G)^2 = kI+\lambda A(G)+\mu(J-I-A(G))$.

Since we suppose that G is not complete, $gg^T\neq J$,

$$
\begin{aligned}
(gg^T-J)(\mathbf{1}-g) =& gg^T\mathbf{1}-J\mathbf{1}-gg^Tg+Jg \\
=& gk-(n-1)\mathbf{1}-gk+k\mathbf{1} \\
=& (k-n-1)\mathbf{j} \\
\neq& \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

Therefore $\mathbf{j}\in\operatorname{Im}(A(G')-\tau I)\cap\operatorname{Im}(A(G')-\theta I)$, implying that τ and θ are non main eigenvalues of G'. We claim that τ' and θ' are main eigenvalues since they are conjungate, otherwise $\mathcal{E}(\tau')\subset\mathbf{j}^\perp \Leftrightarrow \mathcal{E}(\theta')\subset\mathbf{j}^\perp$.

强正则图$G=(n,k,\lambda,\mu)$有主特征值k与非主特征值τ, θ. 删去一点的强正则图保留了τ与θ兹二非主特征值, 但其主特征值"对称地"分裂为了τ'与θ'.