微分几何笔记(二)

> 时间: 15-Sept-2021
>
> 符号说明: $\langle x, y\rangle$为x与y之内积, $[x, y, z]$为x, y, z之混合积.

上期笔记勘误

上期笔记中, Taylor展开式

$$\begin{aligned}
&\gamma(s+\Delta s)-\gamma(s)\\
=&\gamma'(s)\Delta s+\frac{1}{2}\gamma''(s)\Delta s^2+\frac{1}{6}\gamma'''(s)\Delta s^3+o(\Delta s^3)\\
=&\vec{t}\Delta s+\frac{k}{2}\vec{n}\Delta s^2+\frac{k}{6}(-k\vec{t}-\tau\vec{b})\Delta s^3+o(\Delta s^3)
\end{aligned}$$

的三阶项有误, 原因是遗漏了$k'(s)$项. 笔者急于说明密切平面与$\vec{t}$及$\vec{n}$平行之故, 暂时无用的三阶项草草了事. 实际上, $[k(s)\vec{n}(s)]'$应作

$$k'(s)\vec{n}(s)+k(s)\vec{n}'(s)=-k(s)\vec{t}(s)+k'(s)\vec{n}-\tau(s)\vec{b}(s).$$

整理得

$$\begin{aligned}
&\gamma(s+\Delta s)-\gamma(s)\\
=&\left[\Delta s-\frac{k^2}{6}\Delta s^3+o(\Delta s^3)\right]\vec{t}+\left[\frac{k}{2}\Delta s^2+\frac{k'}{6}\Delta s^3+o(\Delta s^3)\right]\vec{n}\\
&+\left[-\frac{k\tau}{6}\Delta s^3+o(\Delta s^3)\right]\vec{b}\\
=&\left[\Delta s-\frac{k^2}{6}\Delta s^3\right]\vec{t}+\left[\frac{k}{2}\Delta s^2+\frac{k'}{6}\Delta s^3\right]\vec{n}\\
&+\left[-\frac{k\tau}{6}\Delta s^3\right]\vec{b}+o(\Delta s^3)
\end{aligned}$$

由于密切平面法向量与$\gamma(s+\Delta s)-\gamma(s)$之点乘应当足够小, 显然密切平面平行于$\vec{t}$与$\vec{n}$.

曲率之定义

曲率$k(s)$度量了切向量在$\gamma(s)$处的旋转速度, 能较好度量曲线偏离切向之程度. 具体而言, 由可微性知切向量的角度改变量大小

$$|\Delta\theta|\sim|\gamma'(s)-\gamma'(s+\Delta s)|$$

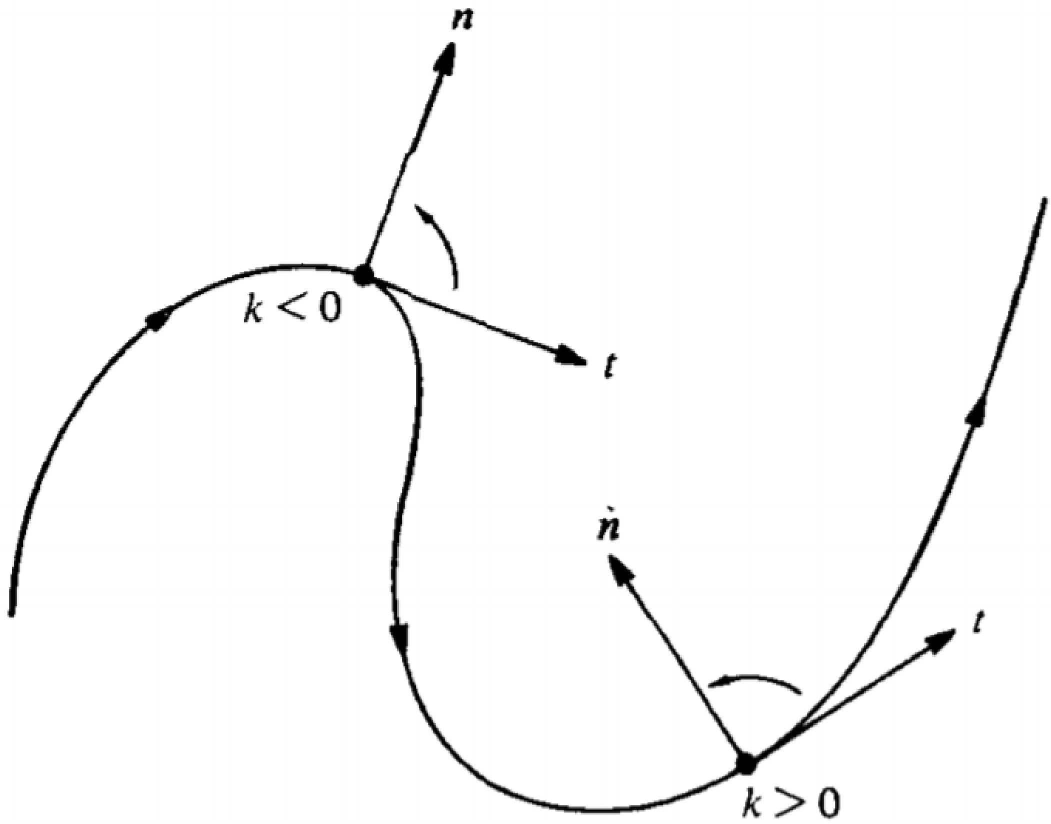
与弧长Δs呈近似线性关系, 其比值定义为曲率大小

$$|k|=\left|\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|.$$

由于坐标系(右手系)的三个正交基满足$\hat{x}\times\hat{y}=\hat{z}$, 从而我们希望$\hat{t}\times\hat{n}=\hat{z}$, 即$\hat{n}$朝向永远为$\hat{t}$左侧. 此时, 曲率$k$应当带有符号, 因为关系式

$$\vec{t}(s)'=k(s)\cdot\vec{n}(s)$$

中不再有$\vec{t}$与$\vec{n}$同向. 例如下图:



关系式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix}\vec{t}\\ \vec{n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & k\\ -k & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\vec{t}\\ \vec{n}\end{pmatrix}$$

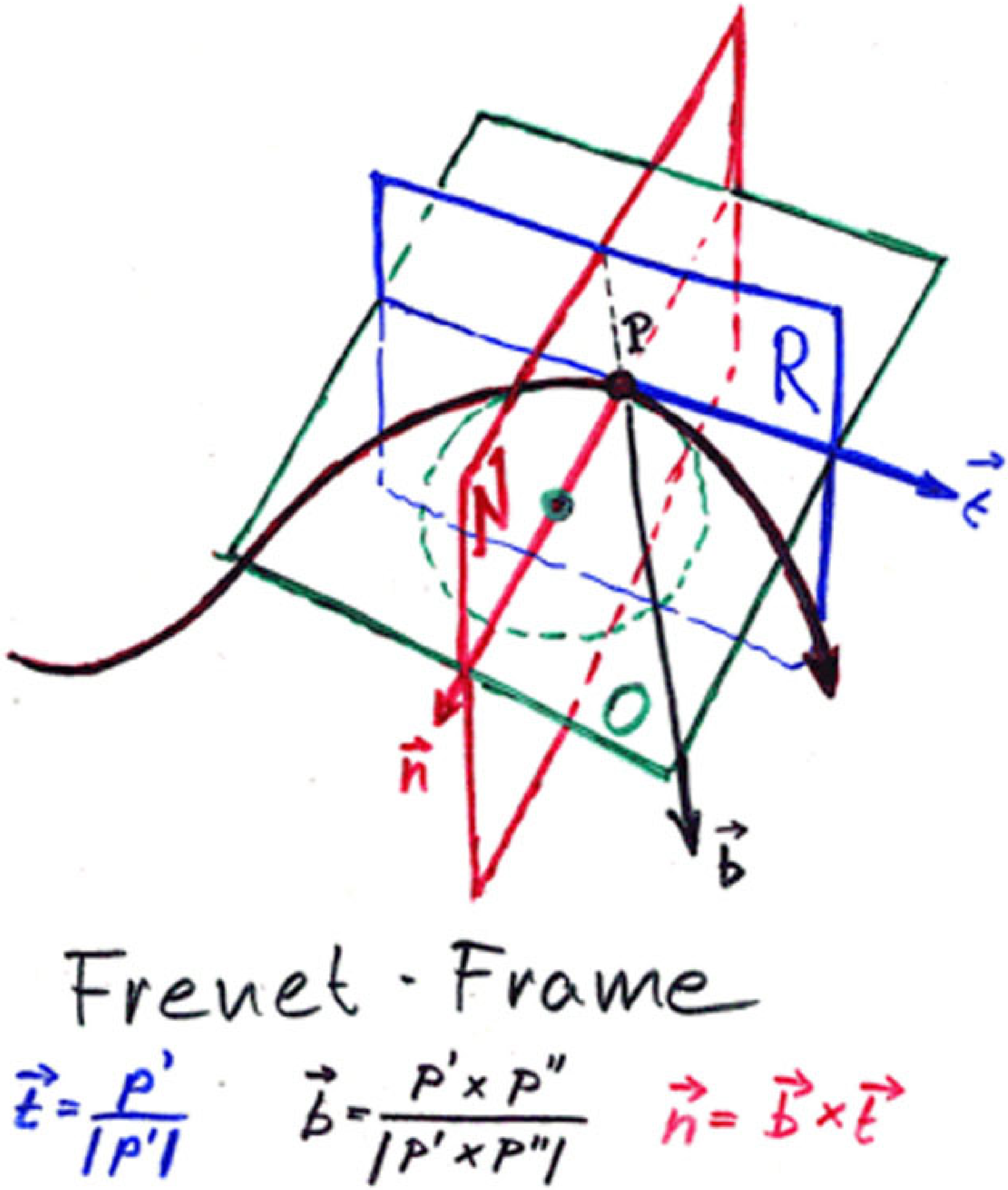
依然成立. 对空间曲线而言, 曲率的符号不再有特别明显的意义: 等距螺线曲率大小处处相等, 再由其曲率函数连续知曲率处处相等, 即与同余变换(平移选装)无关.

Frenet框架下的挠率

在某定点处, 我们将密切平面定义为最贴近曲线之平面, 将法平面定义为垂直于曲线之平面, 将从切平面定义为最远离曲线的切平面. 述诸数学语言即为

$$\begin{aligned}
&\text{法平面} && \left\langle (X-\gamma(s_0)),\vec{t}\right\rangle=0\\
&\text{从切平面} && \left\langle (X-\gamma(s_0)),\vec{n}\right\rangle=0\\
&\text{密切平面} && \left\langle (X-\gamma(s_0)),\vec{b}\right\rangle=0
\end{aligned}$$

下图所示者为三平面于Frenet框架下之态貌. 衡量曲率的圆位于密切平面中.



挠率$\tau(s)$度量了次法矢量在$\gamma(s)$处旋转的速度, 能较好地描述曲线偏离密切平面之程度.

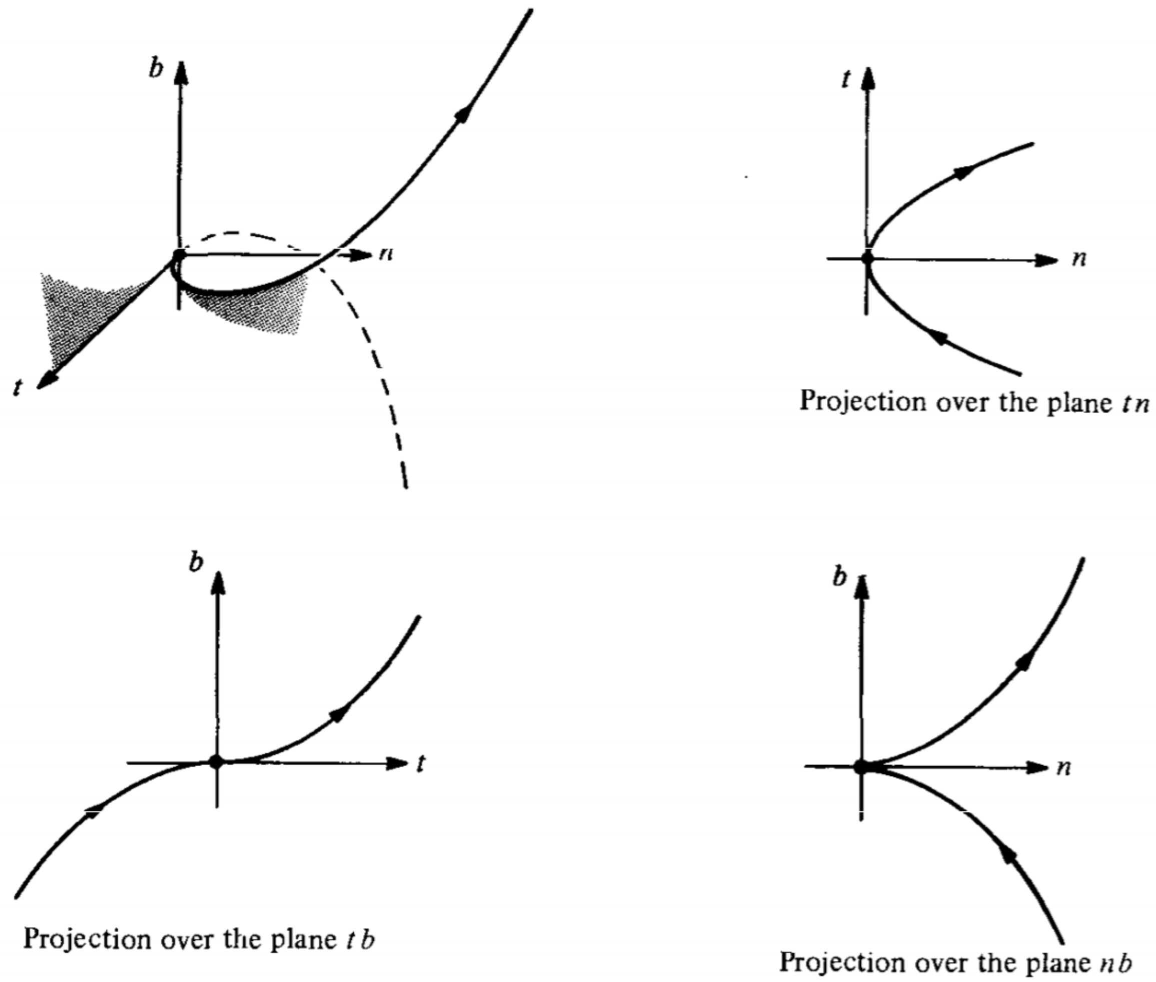
曲线在Frenet框架下的走势

回顾展开式

$$\Delta\gamma(s)=\left[\Delta s-\frac{k^2}{6}\Delta s^3\right]\vec{t}+\left[\frac{k}{2}\Delta s^2+\frac{k'}{6}\Delta s^3\right]\vec{n}-\frac{k\tau}{6}\Delta s^3\vec{b}+o(\Delta s^3)$$

分离变量知:

- 密切平面内投影之图像应近似抛物线$x=\dfrac{k}{2}y^2$($\vec{n}$横向, $\vec{t}$纵向, 开口恒向右).
- 法平面内投影应为$|y|=\dfrac{\sqrt{2}|\tau|}{3\sqrt{k}}x\sqrt{x}$($x\geq 0$, $\vec{n}$横向, $\vec{b}$纵向).
- 从切平面内投影应为$y=-\dfrac{1}{6}k\tau x^3$($\vec{t}$横向, $\vec{n}$纵向). 当$\tau<0$时递增, $\tau>0$时递减($\tau=0$暂不讨论).



由上可见, $\tau<0$时曲线穿越密切平面之方向顺着$\vec{b}$, $\tau>0$时反之.

空间挠曲线

空间挠曲线指曲率与挠率不为零的曲线, 其曲率代表的偏离值与挠率代表的偏离值应满足一定的关系. 设$\gamma(s)$在某球面上, 则存在向量γ_0与常数R使得

$$\|\gamma-\gamma_0\|^2=R^2.$$

求导得$\left\langle\vec{t},\gamma-\gamma_0\right\rangle=0$. 不妨设$\gamma-\gamma_0=\lambda\vec{n}+\mu\vec{b}$, 则求导得

$$\vec{t}=-\lambda k\vec{t}+(\lambda'+\mu\tau)\vec{n}+(-\lambda\tau+\mu')\vec{b}.$$

故$\lambda k=-1,\ \lambda'=-\mu\tau, \mu'=\lambda\tau$. 解得$\lambda=-\dfrac{1}{k}, \mu=\dfrac{1}{\tau}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\dfrac{1}{k}$. 回代得

$$\frac{1}{k^2}+\frac{1}{\tau^2}\left(\frac{\mathrm{d}k^{-1}}{\mathrm{d}s}\right)^2=R^2.$$

因此空间挠曲线γ在任一点处所在的球的半径为

$$R(s)=\sqrt{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{\tau^2}\left(\frac{\mathrm{d}k^{-1}}{\mathrm{d}s}\right)^2}.$$

反之, 若空间挠曲线满足$R(s)$为恒常数, 则该曲线为常曲率曲线或球面上的曲线.