复变函数观点下的模形式 (待完善)

模群

> 模形式研究一类 $\mathbb{H} \to \mathbb{C}$ 的函数全体及其在某些群作用下的变换.
>
> 一个不大成熟但易懂的观点是, 数论中的研究对象为 1×1 的矩阵, 模形式在旨在研究 2×2 矩阵的 "数论".

Def. 记乘法群 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z}) := \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mid ad - bc = 1\}$ 为模群.

Def. 记乘法群 $P(N) := \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z}) \mid a \equiv d \equiv 1, b \equiv c \equiv 0 \mod N\}$.

Example. 称 Γ 为同余子群, 若存在 N 与群 G 使得 $P(N) \le \Gamma \le \mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$. 例如

- $\Gamma_0(N) := \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \mod N\}$,
- $\Gamma_1(N) := \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z}) \mid a \equiv d \equiv 1, c \equiv 0 \mod N\}$

均为主同余子群, 因为 $P(N) \le \Gamma_1(N) \le \Gamma_0(N) \le \mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$.

Thm. $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$ 的生成元为 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ 与 $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Proof. 见一般的线性代数教材.

□

Prop. 模群为有限生成的秩为 2 的群.

> 本文暂不研究同余子群, 仅研究 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$ 上的模形式.

自守因子

Def. 统一定义 $\mathbb{H} := \{z \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ 为上半平面 (开集). 记 τ 为 $\mathbb{H}$ 上的变量.

Example. 考虑 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$ 在 $\mathbb{H}$ 上的作用. 具体地, $\forall \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$, 考虑作用

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

可发现

- $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ 为 $\mathbb{H}$ 上的全纯双射. 特别地, $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.
- $\mathrm{Im}[\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)(\tau)] = |c\tau + d|^{-2} \cdot \mathrm{Im}(\tau)$.

Example. $\forall\gamma,\gamma'\in\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$, 总有 $\gamma(\gamma'(\tau))=(\gamma\gamma')(\tau)$.

Def. 取 $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$. 称 $j(\gamma,\tau):=c\tau+d$ 为自守因子.

Example. 任取 $\gamma,\gamma'\in\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$, 自守因子满足以下性质:

- $j(\gamma\gamma',\tau)=j(\gamma,\gamma'(\tau))\cdot j(\gamma',\tau)$.
- $\dfrac{\mathrm{d}\gamma(\tau)}{\mathrm{d}\tau}=\dfrac{1}{j(\gamma,\tau)}$.

Def. 对任意 $\gamma\in\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$, 任意 $\tau\in\mathbb{H}$, 定义算子 $[\gamma]_k$ 使得

$$(f[\gamma]_k)(\tau):=[j(\gamma,\tau)]^{-k}f(\gamma(\tau)).$$

通俗地, 取 $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$, 则

$$(f[\gamma]_k)(\tau)=(c\tau+d)^{-k}f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right).$$

Example. $\forall\gamma,\gamma'\in\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$, 总有 $[\gamma]_k\cdot[\gamma']_k=[\gamma\gamma']_k$.

Example. 对一切 $\gamma\in\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$, $f[\gamma]_k\equiv f$ 当且仅当 $f[\gamma']\equiv f$ 对生成元 $\gamma'\in\left\{\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\right\}$ 均成立.

模形式

Def. $f\in\mathrm{Hol}(\mathbb{H})$, 若 $\forall\gamma\in\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$ 总有 $f[\gamma]_k=f$, 则称 f 为权 k 关于 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$ 的弱模函数.

Def. 若 f 为权 k 关于 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$ 的弱模函数, $\lim_{z\to\infty}f<\infty$, 则称 f 为权 k 关于 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$ 的模形式.

> 根据可去奇点定理, $\lim_{z\to\infty}f$ 存在.

Def. 若 f 为权 k 关于 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$ 的模形式, 且 $f(\infty)=0$, 则称 f 为尖点形式.

Prop. 关于 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$ 的弱模函数一定为周期函数.

Proof. 取 $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, 则 $f(\tau+1)=f(\tau)$.

□

Example. 令 $f(\tau)=g(e^{2\pi i\tau})$, 容易验证 g 为良定义的, 且 $\mathrm{Im}(\tau)\to\infty$ 时 $f\to f(0)$. 实际上, 函数 $\tau\mapsto e^{2\pi i\tau}$ 给出 $\mathbb{H}\to\mathbb{D}$ 的全纯映照 ($\mathbb{D}$ 为单位开圆盘).

Example. 考虑 $g(z)$ 在 $z=0$ 处的 Laurant 展开, i.e,

$$g(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_nz^n=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_ne^{2\pi i\tau n}.$$

由于 $\mathrm{Im}(\tau)$ 趋向 ∞ 等价于 τ 趋向无穷, 上式给出了 $f(\tau)$ 在无穷远处的 Fourier 展开.

Prop. f 为模形式的充要条件为无穷远处的 Fourier 全纯, 即 $a_{<0}$ 项均为 0. f 为尖点形式的充要条件是 $a_{\le 0}$ 项均为 0.

Example. 对奇数权关于 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$ 的模形式, $f(\tau)=f[-I](\tau)=-f(\tau)$, 从而 $f\equiv 0$.

> 今后研究偶数权的模形式足矣.

Example. 对于权 2 的模形式, 总有

$$f(\gamma(\tau))=j(\gamma,\tau)^2\cdot f(\tau),\quad \gamma'(\tau)=j(\gamma,\tau)^{-2}.$$

从而 $f(\gamma(\tau))\mathrm{d}[\gamma(\tau)]=f(\tau)\mathrm{d}\tau$. 可以发现路径积分在 γ 的作用下不变.

Eisenstein 级数

Not. 以下统一记 f 为偶数权关于 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$ 的模形式.

Prop. 若模形式 f 关于 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$ 权 k, 则

- $[f\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)](\tau)=f(\tau)$, 等价于 $f(\tau+1)=f(\tau)$.
- $[f\left(\begin{smallmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)](\tau)=\tau^{-k}f(-\tau^{-1})$, 等价于 $f(\tau)=\tau^{-k}f(-\tau^{-1})$.

Def. 定义 Eisenstein 级数 $G_k(\tau):=\sum_{(c,d)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}}(c\tau+d)^{-k}$.

> Eisenstein 级数为 Riemann ζ 函数在 $\mathbb{Z}^2$ 上的推广.

Prop. 置 k 为偶数. G_k 在 $k\geq 4$ 时绝对一致收敛到某一全纯函数.

Proof. 注意到 $\dfrac{1}{(c\tau+d)^k}\in \mathrm{Hol}(\mathbb{H})$, 从而对任意分段可微的闭曲线 l 总有

$$\oint_l G_k=\oint_l\sum_{(c,d)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}}\frac{\mathrm{d}\tau}{(c\tau+d)^k}=\sum_{(c,d)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}}\oint_l\frac{\mathrm{d}\tau}{(c\tau+d)^k}=0.$$

根据 Morera 定理, $G_k(\tau)\in\mathrm{Hol}(\mathbb{H})$.

□

Prop. $k\geq 4$ 时, G_k 为权 k 关于 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$ 的模形式.

$$G_k(\tau)=G_k([\gamma]_k)(\tau)=j(\gamma,\tau)^{-k}G_k(\gamma(\tau)).$$

Proof. 首先证明 G_k 为弱模函数. 直接计算得

$$G_k(\frac{a\tau+b}{c\tau+d})=(c\tau+d)^k\sum_{(c',d')\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}}\frac{1}{[(c'a+cd')\tau+(c'b+dd')]^k}.$$

注意到 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$ 中元素可逆, 从而有双射 (记 $\mathbb{Z}^2$ 为列向量集)

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}:\mathbb{Z}^2\to\mathbb{Z}^2,(c',d')\mapsto(c'a+cd',c'b+dd').$$

从而 $G_k(\dfrac{a\tau+b}{c\tau+d})=(c\tau+d)^k\cdot G_k(\tau)$.

其次, $G_k(\infty)=2\zeta(k)$, 从而为模形式.

□

Prop. $G_k(\tau)$ 的 Fourier 展开为

$$G_k(\tau)=2\zeta(k)+\frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!}\cdot\sum_{m\geq 1}\sigma_{k-1}(m)e^{2\pi i\cdot m\tau}.$$

其中 $\sigma_k(m):=\sum_{n|m,\,n>0}n^k$, 即所有正因子的 k 次幂之和.

Proof. 根据复变函数的结论,

$$\pi\cot(\pi\tau)=\frac{1}{\tau}+\sum_{d\geq 1}\left(\frac{1}{\tau-d}+\frac{1}{\tau+d}\right)=\sum_{d\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\tau+d}.$$

另一方面, $\pi\cot(\pi\tau)=(-\pi i)\cdot\dfrac{1+e^{2\pi i\tau}}{1-e^{2\pi i\tau}}=(-\pi i)(2\sum_{n\geq 0}e^{2\pi i\cdot n\tau}-1)$.

求 $k-1$ 次导数得

$$(-1)^{k-1}(k-1)!\sum_{d\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(\tau+d)^k}=-2\pi i\sum_{n\geq 0}(2\pi i n)^{k-1}e^{2\pi i\cdot n\tau}.$$

进而

$$\begin{aligned}G_k(\tau)&=2\sum_{d\in\mathbb{Z}_{\geq 1}}\frac{1}{d^k}+\sum_{c\neq 0}\sum_{d\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(c\tau+d)^k}\\&=2\zeta(k)+\frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{c\geq 1}\sum_{n\geq 1}n^{k-1}e^{2\pi i\cdot nc\tau}\\&=2\zeta(k)+\frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!}\cdot\sum_{m\geq 1}\sigma_{k-1}(m)e^{2\pi i\cdot m\tau}.\end{aligned}$$

其中最后一步计数将 $c,n\geq 1$ 换做 $m\geq 1, cn=d$.

□

模形式的维数

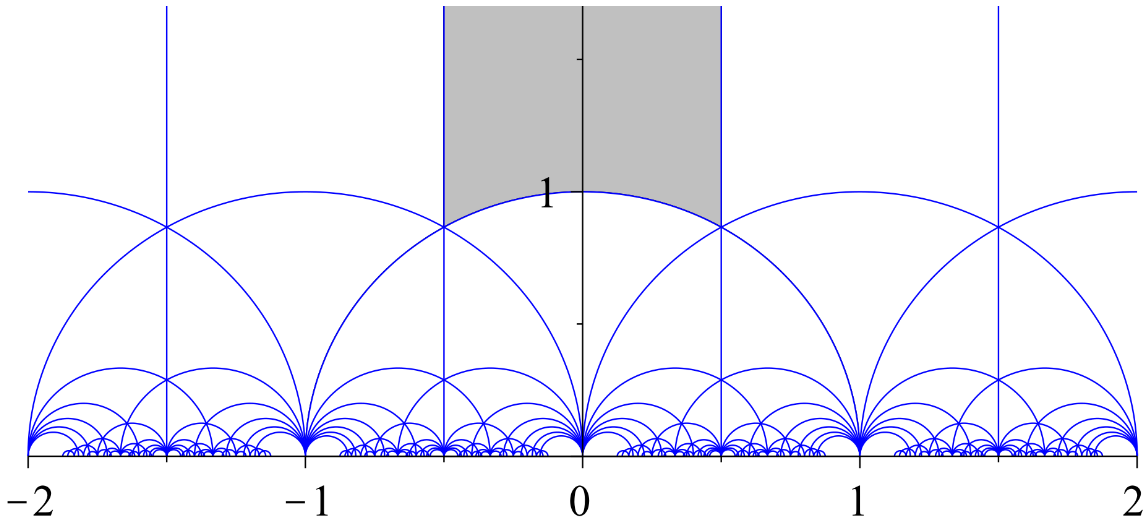
Def. Ω 为 $\mathbb{H}$ 在 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$ 作用下的轨道, 当且仅当存在 $\tau\in\mathbb{H}$ 使得

$$\Omega=\{\gamma(\tau)\mid\gamma\in\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})\}.$$

从而 $\mathbb{H}$ 被轨道划分为若干等价类.

Def. 基本区域为 $D:=\{\tau\in\mathbb{H}\mid|\tau|\geq 1,|\mathrm{Re}(\tau)|\leq 1/2\}$, 即下图灰色区域.

> 实际上, 下图中每一以蓝色曲线为边界的区域都在 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$ 下可相互映照.



Thm. 视 $\mathbb{H}$ 在 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$ 作用下的轨道划分为等价关系, 对应的商空间等价于粘合 D 中关于虚轴对称的点所得的曲面 D'.

Proof. 线性代数内容.

□

Example. 若 f 在 ∞ 处全纯, 则无穷远处可等价为一点, 进而基本区域为紧致曲面. 因此研究其上的模形式可等价于研究基本区域对应的紧 Riemann 曲面上的全纯函数.

Def. 记 $V_p(f)$ 为亚纯函数 f 在 p 处的零点重数, 则

- f 在 p 处有 k 阶零点当且仅当 $V_p(f)=k$,

- f 在 p 处有界且非 0 当且仅当 $V_p(f)=0$.
- f 在 p 处有 k 阶奇点当且仅当 $V_p(f)=-k$.

等价地, $V_p(f)$ 为 f'/f 在 p 处的留数.

Thm. f 为权 k 的非平凡 (不为常函数) 模形式, 则

$$V_\infty(f)+\frac{1}{2}V_i(f)+\frac{1}{3}V_{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}(f)+\sum_{p\in D'}V_p(f)=\frac{k}{12}.$$

Proof. 对 f'/f 在 $\partial D\cup\{\infty\}$ 上使用围道积分即可.

□

Col. $k=0$ 时的非平凡模形式在 D 上非零.

Col. $k=2$ 时不存在非平凡模形式 (这与 $G_2(\tau)$ 不一致收敛相照应).

Col. $k=4$ 时的模形式在 D 上仅有 $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ 处的一阶零点.

Col. $k=6$ 时的模形式在 D 上仅有 i 处的一阶零点.

Def. 记 M_k 为权 k 关于 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$ 的模形式.

Def. 记 S_k 为权 k 关于 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$ 的尖点形式.

Def. 定义 $\Delta(\tau):=[60G_4(\tau)]^3-27\cdot[140G_6(\tau)]^2$.

Prop. $\Delta\in S_{12}$.

Proof. 首先 $\Delta(\tau)\in M_{12}$, 因为 $G_4\in M_4$, $G_6\in M_6$, 从而 $G_4^3,G_6^2\in M_{12}$. 再由于

$$G_4(\infty)=2\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90},\quad G_6(\infty)=2\zeta(6)=\frac{\pi^6}{945}.$$

从而 $\Delta(\infty)=0$.

□

Col. Δ 在 $\mathbb{H}$ 上非零.

Proof. 将 $V_\infty(f)=1, k=12$ 带入下式即可.

$$V_\infty(f)+\frac{1}{2}V_i(f)+\frac{1}{3}V_{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}(f)+\sum_{p\in D'}V_p(f)=\frac{k}{12}.$$

□

Prop. $\dim M_k\neq 0$ 时, $\dim M_k=\dim S_{k+12}=\dim M_{k+12}-1$.

Proof. Δ 在通常意义下的乘法给出 M_k 到 S_{k+12} 的同构. $\dim M_k-\dim S_k=1$ 在 $\dim M_k\neq 0$ 时是显然的.

□

Thm. (维数公式) 对偶数 k, $\dim M_k=\begin{cases}0 & k<0,\\ \left\lfloor\dfrac{k}{12}\right\rfloor & k\equiv 2\mod 12,\\ \left\lfloor\dfrac{k}{12}\right\rfloor+1 & k\not\equiv 2\mod 12.\end{cases}$

Proof. 由 $\dim M_2=0$, $\dim M_4=\dim M_6=\dim M_8=\dim M_{10}=1$ 及递推导出.

□

Col. $G_8 = G_4^2 \cdot \dfrac{\zeta(8)}{2\zeta(4)^2}$. 换言之, 存在常数 C 使得

$$\left(\sum_{(c,d)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(c\tau+d)^4}\right)^2 = C\cdot \sum_{(c,d)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(c\tau+d)^8}.$$

Proof. 因为 $G_8, G_4^2 \in M_8$, 而 $\dim M_8 = 1$.

□

Thm. M_k 的基为 $\{G_4^a \cdot G_6^b \mid 4a+6b=k, a,b\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}$.

Proof. 观察 G_4 与 G_6 的零点分布可知 $G_4^a G_6^b$ 在取不同的 (a,b) 时线性无关. 而 $4a+6b=12$ 解的数量恰好等于 $\dim M_k$.

□

Weierstrass $\wp$ 函数

Def. $\Lambda(\omega_1,\omega_2) = \{m\omega_1 + n\omega_2 \mid (m,n)\in\mathbb{Z}^2\}$ 为格点.

Def. 称 f 为 $\Lambda(\omega_1,\omega_2)$ 上的双周期函数, 若且仅若 $f(z) = f(z+m\omega_1+n\omega_2)$ 对一切 $m,n\in\mathbb{Z}$ 成立.

Not. 为方便起见, 采用区间记号表示复数域上的线段.

Prop. $\forall \tau\in\mathbb{H}$, $\Lambda(1,\tau)$ 上的双周期函数在 $U=[0,1]\times[0,\tau]$ 内有相同数量 (含重数) 的奇点与零点, 其中对边界与角取 $1/2$ 与 $1/4$ 计数.

Proof. 取 f'/f 在 ∂U 上的围道积分即可, 对边上的积分值相抵消. 对边界上的奇点采用同向弯曲道路的方法进行调整.

□

Def. 定义 $\Lambda(1,\tau)$ 上的 Weierstrass $\wp$ 函数为

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Lambda\setminus\{(0,0)\}} \left(\frac{1}{(z+\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right).$$

Prop. $\wp$ 在 Λ 上为双周期函数.

Prop. $\wp(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上任意紧致集上有一致收敛的亚纯函数逼近, 从而为亚纯函数.

Prop. $\wp(z)$ 的奇点落在 Λ 上, 且为二阶奇点.

Thm. $[\wp'(z)]^2 = 4(\wp(z)-\wp(1/2))(\wp(z)-\wp(\tau/2))(\wp(z)-\wp(1/2+\tau/2))$.

Proof. 考虑 $[0,1]\times[0,\tau]$ 中的零点与奇点分布. 右式在 $1/2, \tau/2, (1+\tau)/2$ 上均有二阶零点, 在 Λ 上有六阶奇点. $\wp'(z)$ 亦然. 从而

$$\frac{(\wp(z)-\wp(1/2))(\wp(z)-\wp(\tau/2))(\wp(z)-\wp(1/2+\tau/2))}{[\wp'(z)]^2} = 0.$$

注意到 $\wp(z) = \dfrac{1}{z^2} + \cdots$, $\wp'(z) = \dfrac{-2}{z^3} + \cdots$. 从而确定系数 4.

□

Thm. 一切 $\Lambda(1,\tau)$ 上的双周期函数均由 $\wp$ 与 $\wp'$ 的生成的有理多项式表示.

Proof. 不妨设 f 为 $\Lambda(1,\tau)$ 上的双周期函数. 若 f 为偶函数, 则 $V_0(f)\in 2\mathbb{Z}$, 从而存在 $m\in\mathbb{Z}$ 使得 $V_0(\wp^m f)=0$, 不妨设 $V_0(f)=0$.

由于 f 的零点在关于原点对称的点 $\pm a$ 处成对出现, $\wp(z)-\wp(a)$ 的零点亦然; f 的奇点在关于原点对称的点 $\pm b$ 处成对出现, $1/(\wp(z)-\wp(b))$ 亦然, 从而 $f=\dfrac{\prod(\wp(z)-\wp(a_i))}{\prod(\wp(z)-\wp(b_j))}$.

对一般的 f 考虑奇偶分解 $f(z)=\dfrac{f(z)+f(-z)}{2}+\dfrac{f(z)-f(-z)}{2}$, 注意到 $\dfrac{f(z)-f(-z)}{2\wp'(z)}$ 为偶函数, 使用上述结论即可.

□

Example. 考虑幂级数 $\dfrac{1}{(1-\omega)^2}=\sum_{j\geq 0}(j+1)\omega^j$, 从而

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{k\geq 1}(2k+1)G_{2k+2}(\omega)\cdot z^{2k}.$$

Example. $(\wp')^2=4\wp^3-60G_4(\omega)\cdot\wp-140G_6(\omega)$.

Proof. 注意到

$$\begin{aligned}
\wp'(z)&=\frac{-2}{z^3}+6G_4(\omega)z+20G_6(\omega)z^3+\cdots,\\
(\wp'(z))^2&=\frac{4}{z^6}-\frac{24G_4(\omega)}{z^2}-80G_6(\omega)+\cdots,\\
(\wp(z))^3&=\frac{1}{z^6}+\frac{9G_4(\omega)}{z^2}+15E_6(\omega)+\cdots.
\end{aligned}$$

在零点处消去奇点项即可. 因为 $\mathbb{C}$ 上双周期全纯函数有界, 从而为常数.

□

Jacobi 四平方和问题

主定理

Jacobi 在 1770 年证明了如下结论: 当 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 时,

$$|\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{Z}^4\mid x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=n\}|=8\sum_{d|m,\,4\nmid d,\,d>0}d.$$

即 n 能被四个整数的平方和表示的方法数.

四平方和函数为权 2 关于主同余子群 $\Gamma_0(4)$ 的模形式

Def. 定义 $r(n,k)$ 为 n 的 k 平方和表示数.

> 本节主要关注 $r(n,4)$.

Def. 定义 $\theta:\mathbb{H}\times\mathbb{Z}_{\geq 1}\to\mathbb{C}$, $\theta(\tau,k):=\sum_{n\geq 0}r(n,k)q^n$. 其中 $q=e^{2\pi i\tau}$.

Prop. $\theta(\tau,k)=\theta(\tau+1,k)$, 即 $\theta(\cdot,k)$ 在 $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ 作用下不变.

Prop. 从组合学角度而言, $\theta(\tau,k)$ 给出了自然数 k 可平方和表示的生成函数, 因此

- $\theta(\tau,k_1)\cdot\theta(\tau,k_2)=\theta(\tau,k_1+k_2)$.
- $\theta(\tau,k)=\theta(\tau,1)^k=(\sum_{n\in\mathbb{Z}}q^{n^2})^k$.

Def. 称 f 为 Schwartz 函数 (或称速降函数) 当且仅当 f 满足

- f 光滑.
- f 在无穷远处的衰减速度比多项式倒数快, i.e.,

$$\forall n_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, \lim_{\|x\| \to \infty} \|x\|^{n_0} \cdot |f(x)| = 0.$$

Thm. (Poisson 求和公式) 对 Schwartz 函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 考虑如下 Fourier 变换

$$\mathscr{F} : f(x) \mapsto \mathscr{F}[f](\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} \mathrm{d}x.$$

则 $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathscr{F}[f](k)$.

Proof. 取 $F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n + x)$, 为周期 1 的光滑函数 (各阶导数一致收敛). 从而

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) e^{-2\pi i k x} \mathrm{d}x \right) e^{2\pi i k x} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(x) e^{-2\pi i k x} \mathrm{d}x \right) e^{2\pi i k x} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i k x} \mathrm{d}x \right) e^{2\pi i k x} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathscr{F}[f](k) \cdot e^{2\pi i k x}. \end{aligned}$$

考虑 $F(0)$ 即可.

□

Col. $\theta((-4\tau)^{-1}, 1) = \sqrt{-2i\tau} \cdot \theta(\tau, 1)$.

Proof. 取 $f(x) = e^{-\pi t x^2}$, 则 Fourier 变换为 $\mathscr{F}[f](\xi) = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot e^{\pi \xi^2 / t}$. 从而

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\pi k^2 / t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi t n^2}.$$

注意到 $\theta(\tau, 1) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i n^2 \tau}$, 上式中取 $s = \dfrac{-t}{2i}$, 得

$$\theta(s, 1) = \frac{1}{\sqrt{-2i\tau}} \cdot \theta((-4\tau)^{-1}, 1).$$

此处 f 显然为 Schwartz 函数, $z \mapsto \sqrt{z}$ 在右半平面内良定义.

□

Col. $\theta(\tau/(4\tau+1), 1) = \sqrt{4\tau+1} \cdot \theta(\tau, 1)$.

Proof.

$$\begin{aligned} \theta(\tau/(4\tau+1), 1) &= \theta(-[4(-1-1/4\tau)]^{-1}, 1) \\ &= \sqrt{2i(1+1/4\tau)} \cdot \theta(-1-1/4\tau, 1) \\ &= \sqrt{2i(1+1/4\tau)} \cdot \theta(-1/4\tau, 1) \\ &= \sqrt{4\tau+1} \cdot \theta(\tau, 1). \end{aligned}$$

□

Prop. 四平方和函数 $\theta(\tau,4)$ 满足

- $\theta(\tau,4)=\theta(\tau+1,4)$,
- $\theta(\tau,4)=(4\tau+1)^{-2}\cdot\theta(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\4&1\end{smallmatrix}\right)(\tau))$.

因此 $\theta(\tau,4)$ 为权 2 关于主同余子群 $\Gamma_0(4)=\left\langle\left(\begin{smallmatrix}1&0\\4&1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)\right\rangle$ 的模形式.

$M_2(\Gamma_0(4))$ 的基

Def. 定义 Eisenstein 级数 $G_2(\tau)$ 为条件收敛和

$$\begin{aligned}\sum_{(c,d)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}}\frac{1}{(c\tau+d)^2}\sim\sum_{c\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\sum_{d\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(c\tau+d)^2}+\sum_{d\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{1}{d^2}\\ =2\zeta(2)-8\pi^2\sum_{n\geq1}\sigma(n)e^{2\pi i\tau n}.\end{aligned}$$

其中 $\sigma(m):=\sum_{n|m,\,n>0}n$, $\zeta(2)=\dfrac{\pi^2}{6}$.

Prop. $G_2(\tau)$ 并非模形式, 但

- $(G_2[\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)]_2)(\tau)=G_2(\tau)$,
- $(G_2[\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)]_2)(\tau)=G_2(\tau)-\dfrac{2\pi i}{\tau}$.

Proof. 对第一式, 各项 Fourier 级数在平移 $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ 下不变.

对第二式, 记 $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, 则

$$\begin{aligned}G_2(\tau)&=2\zeta(2)+\sum_{c\neq0}\sum_{d\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(c\tau+d)^2}\\&=2\zeta(2)+\sum_{c\neq0}\sum_{d\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{c\tau+d}-\frac{1}{c\tau+d+1}+\frac{1}{(c\tau+d)^2}\right)\\&=2\zeta(2)+\sum_{c\neq0}\sum_{d\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{(c\tau+d)^2}-\frac{1}{(c\tau+d)(c\tau+d+1)}\right)\\&=\tau^{-2}G_2(-\tau^{-1})-\sum_{c\neq0}\sum_{d\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(c\tau+d)(c\tau+d+1)}\\&=(G_2[\gamma]_2)(\tau)-\lim_{N\to\infty}\sum_{c\neq0}\sum_{d=-N}^{N-1}\frac{1}{(c\tau+d)(c\tau+d+1)}\\&=(G_2[\gamma]_2)(\tau)+\lim_{N\to\infty}\sum_{c\neq0}\left(\frac{1}{c\tau+N}-\frac{1}{c\tau-N}\right)\\&=(G_2[\gamma]_2)(\tau)+\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{\tau}\cdot2\pi\cos\pi\frac{N}{\tau}-\frac{1}{N}\right)\\&=(G_2[\gamma]_2)(\tau)+\frac{2\pi i}{\tau}.\end{aligned}$$

□

Prop. 一般地, 任取 $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$, 总有 $(G_2[\gamma]_2)(\tau)=G_2(\tau)-\dfrac{2\pi ic}{c\tau+d}$.

Proof. 采用数学归纳法, 只需验证:

1. $\gamma_1,\gamma_2\in\{\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&1\end{smallmatrix}\right)\}$ 时, $\gamma=\gamma_1\gamma_2$ 符合假定.
2. 若对某些 $\gamma,\gamma'\in\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$ 结论成立, 则原结论对 $\gamma\gamma'$ 仍成立.

□

Thm. 对任意 $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 总有 $G_{2,N}(\tau) := G_2(\tau) - NG_2(N\tau) \in M_2(\Gamma_0(N))$.

Proof. 取 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ Nc & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$, $\eta = \left(\begin{smallmatrix} a & Nb \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$. 注意到 $N\gamma(\tau) = \eta(N\tau)$. 从而

$$\begin{aligned}(G_{2,N}[\gamma]_2)(\tau) &= (Nc\tau + d)^{-2} \cdot [G_2(\gamma(\tau)) - NG_2(N\gamma(\tau))] \\ &= (Nc\tau + d)^{-2} \cdot [G_2(\gamma(\tau)) - NG_2(\eta(N\tau))] \\ &= G_2(\tau) - \frac{2\pi i Nc}{Nc\tau + d} - N\left(G_2(N\tau) - \frac{2\pi i c}{Nc\tau + d}\right) \\ &= G_2(\tau) - NG_2(N\tau).\end{aligned}$$

可以检验, $G_{2,N}(\tau)$ 为 $\mathbb{H}$ 上的全纯函数.

□

Thm. $\dim M_2(\Gamma_0(4)) = 2$. $\dim M_2(\Gamma_0(N))$ 见 `https://oeis.org/A111248`.

Proof. 参考 `https://arxiv.org/pdf/1311.1460.pdf`.

□

Col. $M_2(\Gamma_0(4))$ 的基底为 $G_{2,2}$, $G_{2,4}$.

Proposition. 计算 $G_{2,2}(\tau) = G(\tau) - 2G(2\tau)$.

$$\begin{aligned}G_{2,2}(\tau) &= G_2(\tau) - 2G_2(\tau) \\ &= \frac{\pi^3}{3} - 8\pi^2 \sum_{n\geq 1} \sigma(n) q^n - \frac{2\pi^2}{3} + 8\pi^2 \sum_{n \geq 1} \sigma(n) q^{2n} \\ &= -\frac{\pi^2}{3}\left(1 + 24 \sum_{n\geq 1} q^n \cdot \sum_{d>0,\, d|n,\, 2\nmid d} d\right) \\ &= -\frac{\pi^2}{3}(1 + 24q + \cdots).\end{aligned}$$

Proposition. 计算 $G_{2,4}(\tau) = G(\tau) - 4G(4\tau)$.

$$\begin{aligned}G_{2,4}(\tau) &= G_2(\tau) - 4G_4(\tau) \\ &= \frac{\pi^3}{3} - 8\pi^2 \sum_{n\geq 1} \sigma(n) q^n - \frac{4\pi^2}{3} + 8\pi^2 \sum_{n \geq 1} \sigma(n) q^{4n} \\ &= -\pi^2\left(1 + 8 \sum_{n\geq 1} q^n \cdot \sum_{d>0,\, d|n,\, 4\nmid d} d\right) \\ &= -\pi^2(1 + 8q + \cdots).\end{aligned}$$

Thm. $\theta(\tau, 4) = -\dfrac{1}{\pi^2} G_{2,4}(\tau)$.

Proof. $\theta(\tau, 4) \in \operatorname{span}(G_{2,2}, G_{2,4})$, 比较前两项系数即可.

□