张量积

⊗ 函子

平坦模

⊗-Hom 伴随对

⊗ 函子

Definition 1.7.1 可通过双模范畴 $_S\mathcal{M}_T$ 类比得 $\mathcal{M}_R\mathcal{M}$, 即 $f:M_R\times_R N\to G$ (Abel 群), 满足双可加性, i.e.,

- f(m+m',n) = f(m,n) + f(m',n);
- f(m, n + n') = f(m, n) + f(m, n');
- f(m,rn) = f(mr,n).

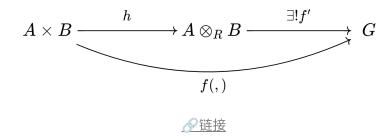
称上述 f 为 R-平衡映射, f 系集合范畴内定义的映射.



Remark 例如 $\mathbb{Q} imes (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ 上的 \mathbb{Z} 平衡映射 f 一定为零映射, 因为

$$f(r,d) = f(r/n, nd) = f(r/n, 0) = 0.$$

Definition 1.7.2 称 $h:A_R\times_R B\to A\otimes_R B$ 为张量积若且仅若对任意 R-平衡映射 $f:A\times B\to G$,总有唯一的同态 $f':A\otimes_R B\to G$ 使得 f=f'h.





Remark 此处 R-平衡映射系集合范畴内的映射, f' Abel 群间的同态.

Theorem 1.7.3 张量积在同构的意义下唯一.

▼ Proof of the theorem

考虑 $f:A\otimes_R B\to A\otimes_R' B$ 与 $g:A\otimes_R' B\to A\otimes_R B$, 显然 fg 与 gf 只能是恒等映射.

Theorem 1.7.4 A_R 与 $_RB$ 的张量积存在.

▼ Proof of the theorem

记 F 为以 $A \times B$ 中元素为基的自由群, 记商群 F/\sim , 其中

- $(a + a', b) \sim (a, b) + (a', b)$;
- $(a, b + b') \sim (a, b) + (a, b');$
- $(ar,b)\sim (a,rb)$.

从而 $A \otimes_R B$ 无非 F/\sim .

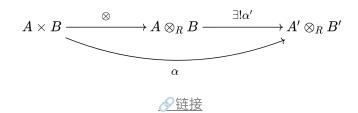


Ramark 该定义是自然的, 即便自由字商取去约化关系, 参考自由群以及自由模相关定理.

Theorem 1.7.5 $f\in \operatorname{Hom}_R(A_R,A_R')$, $g\in \operatorname{Hom}_R(_RB,_RB')$, 则存在唯一的同态 $A\otimes_RB o A'\otimes_RB'$, $a\otimes b\mapsto f(a)\otimes g(b)$.

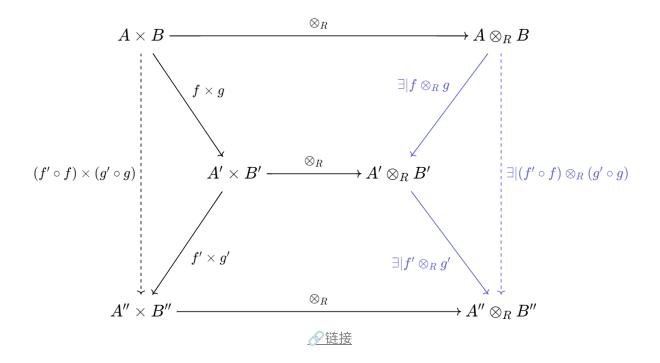
▼ Proof of the theorem

对 $\alpha:A\times B\to A'\otimes_R B', (a,b)\mapsto f(a)\otimes_R g(b)$, 存在唯一的 α' 使得有交换图



记 $\alpha' =: f \otimes_R g$. 可见该定理相当于 $(f \otimes g)(a \otimes b) = f(a) \otimes g(b)$.

Theorem 1.7.6 特别地, 若同态 $f'\circ f$ 与 $g'\circ g$ 均可定义, 则有以下交换图



张量积的泛性质保证右边虚线处的映射唯一,从而

$$(f'\circ f)\otimes_R (g'\circ g)=(f'\otimes_R g')\circ (f\otimes_R g).$$



Remark 注意到函子 $\otimes_R: {}_S\mathcal{M}_R imes {}_R\mathcal{M}_T o {}_S\mathcal{M}_T$, 满足

- 对象层次上, $(A,B) \mapsto A \otimes_R B$;
- 态射层次上, $(f,g) \mapsto f \otimes_R g$.

Example 1.7.7 对双模而言, 有以下显然事实.

- 1. 对 $A_R \otimes_R B_S$ 而言, 有右模结构 $(a \otimes b)s = a \otimes (bs)$;
- 2. 对 $_SA_R\otimes_R B$ 而言,有左模结构 $s(a\otimes b)=(sa)\otimes b$;
- 3. 对 $_SA_R\otimes_R _RB_T$ 而言,有双模结构 $s(a\otimes b)t=(sa)\otimes (bt)$;
- 4. 有同构 $A_R \otimes_R R \overset{\sim}{\to} A, a \otimes r = ar \otimes 1 \mapsto ar;$
- 5. 有同构 $R \otimes_R {}_R B \overset{\sim}{\to} A, r \otimes b = 1 \otimes rb \mapsto rb.$

▼ Proof

以证明 3 为例, 观察以下良定义的 R-平衡映射

$$f_s: A imes B o A \otimes_R B, (a,b) \mapsto (sa) \otimes b.$$

由张量积的泛性质, 存在唯一的 $g_s:A\otimes_R B\to A\otimes_R B$ 使得 $g_s(a,b)=(sa)\otimes b$. 容易验证, $_SA_R\otimes_R _RB_T$ 的左模结构由左作用

$$g_-:S o \mathrm{End}_S(A\otimes_R B), s\mapsto g(s)$$

保证, 泛性质保证 g_- 为良定义的映射. 右模结构同理. 双模结构是自然的, 因为

$$(s(a\otimes b))t=(sa\otimes b)t=sa\otimes bt=s(a\otimes bt)=s((a\otimes b)t).$$

Theorem 1.7.8 \otimes 导出的函子具有如下性质.

- 1. 函子 $[A_R \otimes_R -]:_R \mathcal{M} \to \mathbb{A}G$ 为右正合加性共变函子;
- 2. 函子 $[-\otimes_R RB]: \mathcal{M}_R \to \mathbb{A}G$ 为右正合加性共变函子;
- 3. 函子 $[SA_R \otimes_R -]: RM \to SM$ 为右正合加性共变函子;
- 4. 函子 $[-\otimes_S {}_S A_R]: \mathcal{M}_S \to \mathcal{M}_R$ 为右正合加性共变函子.

▼ Proof of the theorem

此处仅证明 11, 其他命题同理.

11 对列 $_RM\stackrel{f}{
ightarrow}_RN\stackrel{g}{
ightarrow}_RL
ightarrow 0$, 下证明

$$A\otimes M\stackrel{\operatorname{Id}_A\otimes f}{\longrightarrow} A\otimes N\stackrel{\operatorname{Id}_A\otimes g}{\longrightarrow} A\otimes L o 0.$$

- $\mathrm{Id}_A\otimes g$ 为满射. 任取 $a\otimes l\in A\otimes L$, 由于存在 $n\in N$ 使得 g(n)=l, 故 $(\mathrm{Id}_A\otimes g)(a\otimes n)=a\otimes l$.
- $\operatorname{im}(\operatorname{Id}_A \otimes f) = \ker(\operatorname{Id}_A \otimes g)$. 任取 $a \otimes n \in \operatorname{im}(\operatorname{Id}_A \otimes f)$, 注意到

$$(\mathrm{Id}_A\otimes g)(a\otimes n)=a\otimes g(n)=a\otimes 0=0.$$

从而 $\operatorname{im}(\operatorname{Id}_A\otimes f)\subseteq \ker(\operatorname{Id}_A\otimes g)$. 另一方面,任取 $a\otimes n\in \ker(\operatorname{Id}_A\otimes g)$,则 $a\otimes g(n)=0$. 因此存在 A 中可逆元 r 使得 $rn\in \ker(g)=\operatorname{im}(f)$. 取 $m\in M$ 使得 f(m)=rn,从而

$$(\operatorname{Id}_A\otimes f)(ar^{-1}\otimes m)=ar^{-1}\otimes rn=a\otimes n.$$

因此 $\operatorname{im}(\operatorname{Id}_A\otimes f)\supseteq\ker(\operatorname{Id}_A\otimes g).$ 从而 $\operatorname{im}(\operatorname{Id}_A\otimes f)=\ker(\operatorname{Id}_A\otimes g)$ 得证.



Remark $\operatorname{Hom}_R(-,M)$ 与 $\operatorname{Hom}_R(M,-)$ 均是左正合的.

Theorem 1.7.9 对于 $\{_RB_i\}_{i\in I}$ 与 A_R , 有 Abel 群同构

$$egin{aligned} A\otimes_Rigoplus_{i\in I}B_i&\overset{\sim}{ o}igoplus_{i\in I}(A\otimes_RB_i),\ a\otimes(b_i)\mapsto(a\otimes b_i). \end{aligned}$$

特别地, 若 A 与 B_i 为双模, 则该同构也是模同构. 等价地, 还有

$$igoplus_{i\in I} A_i\otimes_R B\stackrel{\sim}{ o} igoplus_{i\in I} (A_i\otimes_R B), \ (a_i)\otimes b\mapsto (a_i\otimes b).$$

对直积而言仅有嵌入映射,例如对双模 $\{_SA^i{}_R\}_{i\in I}$ 与 $\{_RB^j{}_T\}_{j\in J}$ 而言,有

$$\left(\prod_{i\in I}sA^i{}_R
ight)\otimes_R\left(\prod_{j\in J}{}_RB^j{}_T
ight) \quad\hookrightarrow\quad s\left(\prod_{i\in I,j\in J}A^i\otimes_RB^j
ight){}_T, \ \left(\bigoplus_{i\in I}sA^i{}_R
ight)\otimes_R\left(\bigoplus_{j\in J}{}_RB^j{}_T
ight) \quad\stackrel{\sim}{ o}\quad s\left(\bigoplus_{i\in I,j\in J}A^i\otimes_RB^j\right){}_T.$$

▼ Proof of the theorem

我们关注最后一行同构. 根据 Yoneda 引理, 只需证明对一切 $M\in \mathsf{Ob}(_{S}\mathcal{M}_{T})$, 总有

$$\operatorname{Hom}\left(\left(\bigoplus_{i\in I}sA^i{}_R\right)\otimes_R\left(\bigoplus_{j\in J}{}_RB^j{}_T\right),sM_T\right)\stackrel{\sim}{\to}\operatorname{Hom}\left(s\left(\bigoplus_{i\in I,j\in J}A^i\otimes_RB^j\right){}_T,sM_T\right).$$

今采用 $\operatorname{Hom}\left(_{S}A_{R}\|_{R}B_{T},_{S}C_{T}\right)$ 表示保持双模同态的 R-平衡映射, 则容易见得

$$egin{aligned} \operatorname{Hom} \left(\left(igoplus_{i \in I} {}_S A^i{}_R
ight) \otimes_R \left(igoplus_{j \in J} {}_R B^j{}_T
ight), {}_S M_T
ight) \ &\cong \operatorname{Hom} \left(\left(igoplus_{i \in I} {}_S A^i{}_R
ight) \| \left(igoplus_{j \in J} {}_R B^j{}_T
ight), {}_S M_T
ight) \ &\cong \prod_{i \in I, j \in J} \operatorname{Hom} \left({}_S A^i{}_R \|_R B^j{}_T, {}_S M_T
ight) \ &\cong \prod_{i \in I, j \in J} \operatorname{Hom} \left({}_S A^i{}_{\otimes_R} B^j{}_T, {}_S M_T
ight) \ &\cong \operatorname{Hom} \left({}_S \left(igoplus_{i \in I, j \in J} A^i{}_{\otimes_R} B^j
ight), {}_T, {}_S M_T
ight). \end{aligned}$$

其中应用了 Abel 范畴中的 $\operatorname{Hom}(\oplus *, \cdot) \cong \prod \operatorname{Hom}(*, \cdot)$.

Theroem 1.7.10 (结合律) 对双模 $_RL_S$, $_SM_T$, $_TN_U$, 存在唯一的 R-U-双模同构

$$(_RL\otimes_S M)\otimes_T N_U\stackrel{\sim}{ o} _RL\otimes_S (M\otimes_T N_U), \ (l\otimes_S m)\otimes_T n\mapsto l\otimes_S (m\otimes_T n).$$

▼ Proof of the theorem

对任意 S-平衡映射

$$f_n: L imes M o L\otimes_S (M\otimes_T N), \ (l,m)\mapsto l\otimes_S (m\otimes_T n),$$

由张量积 $L\otimes_S M$ 的泛性质得到唯一的 Abel 群同态

$$g_n:L\otimes_S M o L\otimes_S (M\otimes_T N), \ l\otimes_S m\mapsto l\otimes_S (m\otimes_T n).$$

从而可定义 T-平衡映射

$$egin{aligned} h: (L\otimes_S M) imes N &
ightarrow L\otimes_S (M\otimes_T N),\ (l\otimes_S m,n) &
ightarrow g_n(l\otimes_S m). \end{aligned}$$

由 $(L\otimes_S M)\otimes_T N$ 的泛性质可知存在唯一的 Abel 群同态

$$arphi: (L\otimes_S M)\otimes_T N o L\otimes_S (M\otimes_T N), \ (l\otimes_S m)\otimes n\mapsto g_n(l\otimes_S m)=l\otimes_S (m\otimes_T n).$$

将上述过程以反向复写, 得同态

$$\psi:L\otimes_S(M\otimes_TN) o (L\otimes_SM)\otimes_TN, \ l\otimes_S(m\otimes_Tn)\mapsto f_l'(m\otimes_Sn)=(l\otimes_Sm)\otimes n$$

R-U-双模同构的唯一性由张量积自同构的唯一性(泛性质推得)保证.

平坦模

⊗-Hom 伴随对