图论&组合学讨论讲义(I)

大致内容

- 主要工具: root system.
- 待解决问题: $\lambda_{\min} = -2$简单图之分类.
- 补充内容: $\lambda_{\min} = -2$之srg.

一些启发

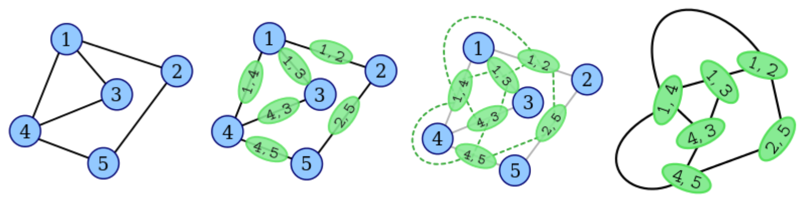
启发I: $\lambda_{\min} = -2$为何重要?

线图(line graph)

图论有时研究边关系, 但研究边较研究点困难. 假设我们需要研究简单图G之边集$E(G)$, 则自然想到构造出某一张简单图$L(G)$使得:

- $V(L(G))$与$E(G)$一一对应, 即存在双射$\pi : E(G) \to V(L(G))$.
- $\forall x, y \in V(L(G)), x \sim y$等价于$\pi(x)$与$\pi(y)$有公共顶点.

对任意给定的G, 可构造$L(G)$. 点对应边, 保留相邻关系.



但对一般图直接作出线图大抵是令人望而却步的. 但回想到

> 图G中从点i到j的步数为k的行走方式有$a_{ij}^{(k)}$种, 其中a_{ij}^k为矩阵$A(G)^k$的(i,j)个元素.

我们认定由边走向一端的顶点为"半步". 由此可做导出矩阵(induced matrix)
$B := (b_{ve})_{|V|\times|E|}$, 满足:

- $b_{ve} = 1$若且仅若点v与边e相连.

- 其余$b_{ve}=0$.

从而B^TB记录了边与边的相邻关系, B^TB中元素即对应边的公共顶点数量. 可以观察到:

- B^TB对角元素为2, 从而$B^TB-2I_{|E|}$即为G线图之邻接矩阵$A(L(G))$.
- 由于B^TB半正定, $L(G)$之特征值至少为-2.

广义线图(generalised line graph)

在G的某点多连出一条半固定的边, 得G'. 可见

$$A(L(G'))=\begin{pmatrix}0 & u^T\\ u & A(L(G))\end{pmatrix}.$$

若在同一顶点上再连出半固定的边, 得G''. 可见

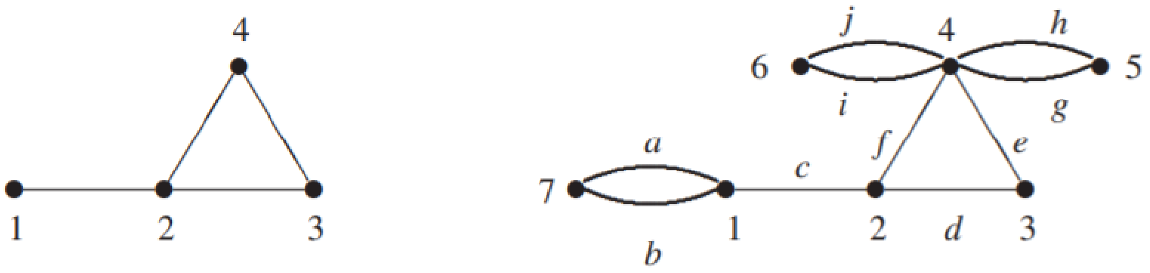
$$A(L(G''))=\begin{pmatrix}0 & 1 & u^T\\ 1 & 0 & u^T\\ u & u & A(L(G))\end{pmatrix}.$$

删去$(1,2)$与$(2,1)$元素后, 矩阵的最小特征值仍不会超过-2. 因此, 一些线图的邻接矩阵是"特征值下限过大的". 我们希望存在图G^*使得

$$A(L(G''))=\begin{pmatrix}0 & \color{red}{0} & u^T\\ \color{red}{0} & 0 & u^T\\ u & u & A(L(G))\end{pmatrix}.$$

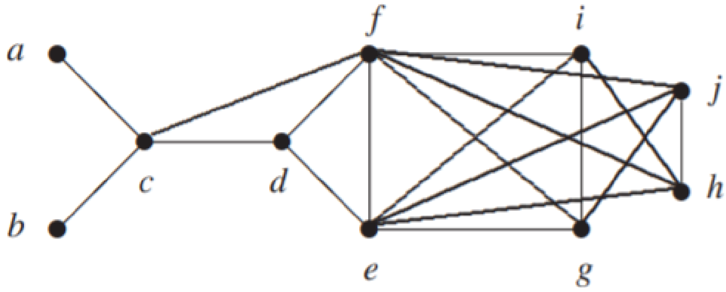
G^*是否为简单图? 显然不是, 可以自己画画.

假设读者已熟悉G^*之大貌, 我们称附加上G^*中花瓣结构*(pendant)*的简单图为广义线图(generalised line graph). 构造广义线图的一般步骤如下:



H $\qquad\qquad$ $\hat{H} = H(1,0,0,2)$

$L(\hat{H})$:



1. 在简单图H的部分顶点处添加若干片花瓣*(pendant)*, 即有偶数条重边的添边. 例如$\hat{H}$由H于点1上添加一片花瓣, 由点4上添加两片花瓣所得到.
2. 仿照线图的定义, 对$\hat{H}$中边进行编号. 其中, 两边相邻若且仅若仅有一个公共顶点. 例如, $i \sim h$, $c \sim a$; 但$i \nsim j$.
3. 根据连边关系作线图$L(\hat{H})$.

例如, 由含有n片花瓣的花导出的广义线图为$K_{2n} - nP_2$, 也称cocktail party graph.

启发II: Borsuk猜想的证伪

Borsuk猜想如是

> 能否将$\mathbb{R}^d$中的含有至少两点的紧集拆分成至多$d+1$个直径更小的子集?

例如, 对平面$\mathbb{R}^2$中的任意紧集K, 一定总存在一种划分$K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$使得$\operatorname{diam}(K) > \operatorname{diam}(K_i)$, $i \in \{1,2,3\}$. Borsuk猜想之二维情形正确.

实际上, $d = 65$之情形已被证伪. 构造反例之灵感来源于此:

> 某日, 某数学家(可能是一个高中生)意外发现了强正则图, 满足:
>
> - $(n,k,\lambda,\mu) = (416, 100, 36, 20)$.
> - 该强正则图不含有子图K_6.
> - (计算可知) 谱为$(100^1, 20^{65}, (-4)^{350})$.

通过关系$A^2=16A+80I+20J$, 定义

$$Z:=(A-\lambda_2 I)(I-n^{-1}J)=A+4I-\frac{1}{4}J.$$

由$\ker Z=\ker(A-\lambda_2 I)+\operatorname{span}(\mathbf{1})$可知$\operatorname{rank}(Z)\le 65$. 记$\{Z_i\}$为$Z$的所有行向量, 则$\{Z_i\}$可嵌入$\mathbb{R}^{65}$.

下计算距离$\|Z_i-Z_j\|$. 注意到

$$\langle Z_i,Z_j\rangle=z_{ij}^{(2)}=\begin{cases}90 & i=j\\ 18 & v_i\sim v_j.\\ -6 & v_i\nsim v_j\end{cases}$$

故$\|Z_i-Z_j\|\le\operatorname{diam}(\{Z_i\})=8\sqrt{3}$. 当子集$\{Z_j\}\subset\{Z_i\}$之直径等于$8\sqrt{3}$时, $\{Z_j\}$一定包含两个距离为$8\sqrt{3}$的向量.

若$\{Z_i\}$能分成66个子集$\dot\bigcup_{i=1}^{66}\{A_i\}$, 且$\operatorname{diam}(A_i)<8\sqrt{3}$恒成立, 则根据鸽笼原理, $|A_i|\le 5$恒成立; 与$5\times 66>416$矛盾!

> 该反例之构造核心是: 我们选取了一组很有规律的$\{Z_i\}$, 使得其中元素彼此之距离仅能取两个值.

启发的意义

上述两则例子给予了我们启发:

1. 最小特征值为-2的简单图具有一定的意义, 其本质似乎就是是线图, 广义线图一类的东西.
2. 图论可以引导我们构造出某些不大显然的向量集合$\{Z_i\}$, 使得$\langle Z_i,Z_j\rangle$仅能取很少一部分的值.

似乎就是四字已被刻意加粗, 这暗示我们不妨检验反例之源: Petersen图.

注意到Petersen图中任意相邻的两点v,u, $N(u)\ne N(v)$: 从而Petersen图并非广义线图. 假设存在H使得$L(H)$为Petersen图, 则由于Petersen图中相邻两点没有公共邻点, 故H中不含度为3的点. 检验知H为若干圈, 散点, 路之无交并: 矛盾.

因此, 我们自然问:

1. 能否找出所有最小特征值为-2的简单图, 并为此分类?
2. 能否主动利用这些$\{Z_i\}$, 反过来研究图?

例外图

根系之引入

我们称例外图为(像Petersen图一般)拥有最小特征值-2但非线图或广义线图的图. 不妨设A为某一例外图的邻接矩阵, 则有分解$A+2I=QQ^T$, 其中

$$Q=(q_1|q_2|\cdots|q_{n-1}|q_n).$$

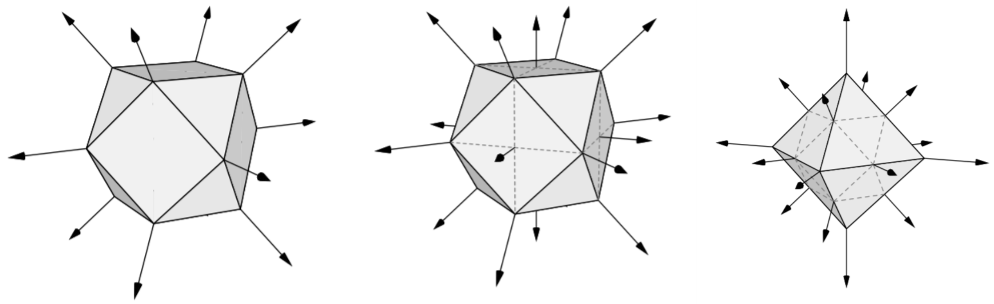
此外, $\|q_i\|^2=2$为$A+2I$的对角元. 对$i\sim j$, q_i与q_j夹角为$\pi/3$; 反之$q_i\perp q_j$.

上述$\{q_i\}$比较乱. 为在某一等价关系下定位$\{q_i\}$, 应当做所谓的完备化. 自然:

1. 若视q_i为向量, 则所有$-q_i$应被包括在完备系中.
2. 若存在$q_i,q_j\in Q$ 使得q_i与q_j代表的直线夹角为$\pi/3$, 则可以添加q_k使得q_i,q_j,q_k各自所在的直线分别夹角$\pi/3$.

完备化过程中, 自然保证所有元素长度均为$\sqrt{2}$, 不同元素的内积取值应也被限定为$\{0,\pm 1\}$. 实际上一般的理论中, 元素长度未作特别苛刻的限定, 但不同元素之的夹角θ需满足$4\cos^2\theta\in\{1,2,3\}$.

这些完备系长什么样? 可以体会下图.



在尝试中, 我们需弥补一严重漏洞: 图未必连通. 研究线图与例外图之无交并显然没有意义, 我们应投身这些例外图的最小组成单元. 对不连图而言, 其根系应当能分为全体正交的两部分. 我们称完备根系Φ为不可约的, 若且仅若Φ对任意Φ_1,Φ_2, 不存在同时满足以下条件之情形:

1. $\Phi_1\neq\emptyset,\Phi_2\neq\emptyset$.
2. $\Phi_1\cap\Phi_2=\emptyset,\Phi_1\cup\Phi_2=\Phi$.
3. $\forall(\alpha,\beta)\in\Phi_1\times\Phi_2,\langle\alpha,\beta\rangle=0$.

由于我们研究的是组合, 因此并不需要像分析一样讨论完备的空间; 尚且Φ中向量太多, 我们可以在不改变信息熵的情形下删除若干者.

由于根系的本质是有限维度欧式空间上的一组向量, 则对任意Φ, 存在向量α使得$\forall x \in \Phi$, $\langle \alpha, x\rangle \neq 0$. 记$\Phi_+(\alpha) := \{x \in \Phi : \langle x, \alpha\rangle > 0\}$. 其次, 称根系$\Phi'$为单的若且仅若

1. Φ'由某一个半不可约空间$\Phi_+(\alpha)$导出
2. 且Φ'中任意向量无法用$\Phi_+(\alpha)$中某两个向量之加和表示.

显然:

> 任意不可约根系可通过删减若干向量化作某一单的新根系, 且新根系之完备化仍为原来的不可约根系.

再有结论: $\forall x, y \in \Phi'$, 都有$\langle x, y\rangle \leq 0$. 反之设$\langle x, y\rangle > 0$, 即成交$\pi/3$, 则$x-y$与$y-x$有一者于$\Phi_+(\alpha)$中. 不妨设$x - y \in \Phi_+(\alpha)$, 则$x-y+y=x$, 与$x$为单的之假定矛盾!

对任意不可约根系Φ', 将其中向量视作点, 定义Dynkin图为一类容许重边的简单图. 其中$\beta_1, \beta_2 \in \Phi'$, v_1与v_2相连之边数为$4\cos^2\theta \in \{0, 1, 3\}$.

依Dynkin图分类例外图

显然Φ'与Φ秩相同, 故Φ'中向量线性独立且张成全空间, 同时对任意$i \neq j$均有$(u_i, u_j) \leq 0$, $4\cos^2\theta \in \{0, 1, 3\}$. 注意到

$$\begin{aligned} 0 &< \left(\sum_i v_i, \sum_i v_i\right) \\ &= \sum_i \|v_i\|^2 + 2\sum_{i<j}(v_i, v_j) \\ &\leq n - |E| \end{aligned}.$$

其中, Dynkin图边数$|E|$小于顶点数, 从而为树. 由于代求之Dynkin图由不可约根系推出, 从而连通. Dynkin图无外乎以下情形:

1. 无重边的树.
2. 仅有一条三重边的树.

再者, Dynkin图顶点度数不应大于3. 不妨设c有邻点$\{v_1, \ldots, v_k\}$, 由于图中无圈, 故$\{v_1, \ldots, v_k\}$两两正交. 设v_0为$c - \sum_{i=1}^k (c, v_i)v_i$对应的标准向量, 则$v_0 = \sum_{i=1}^k (c, v_i)v_i$. 从而

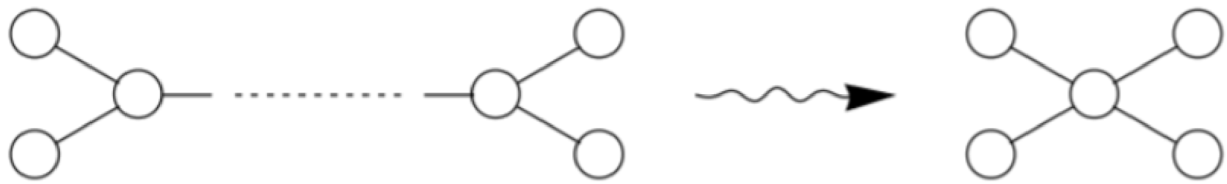
$$1 = (c, c) = (c, v_0)^2 + \sum_{i=1}^k (c, v_i)^2 > \sum_{i=1}^k (c, v_i)^2.$$

从而$\deg c = \sum_{i=1}^k 4(c, v_i)^2 < 4$. 因此, 仅有一条三重边的树只能为$G_2$.

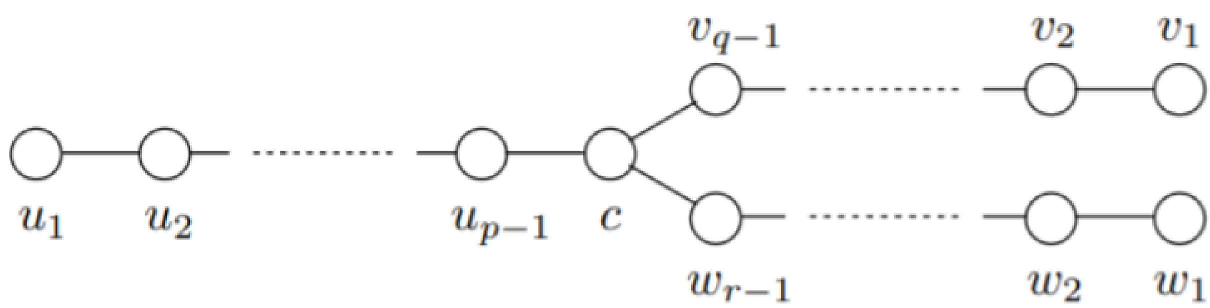
显然, Dynkin图以一列由单边构成的链条为主体. 不妨设$v_1 - v_2 - \cdots - v_n$为链, 记$v := \sum_{i=1}^{k} v_i$, 则

$$(v, v) = \sum_{i=1}^{k} +2\sum_{i<j} (v_i, v_j) = k - (k-1) = 1.$$

对$\{v_i\}_{i=1}^{k}$以外的点u而言, u至多与$\{v_i\}_{i=1}^{k}$中一点v_l相交(由于无圈性), 从而$2(u, v) = 2(u, v_l) \in \{-1, -\sqrt{3}\}$. 因此, 可将链等价于一点! 由是可剔除以下情形:



从而Dynkin图或为直线, 或为以下形式:



若链无分支, 则构造容易: 只需在n维上半平面作n个两两成角$2\pi/3$的向量$S_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$, 再研究

$$\pm[S_n \cup \{x_i + x_j : (x_i, x_j \in S_n) \wedge (i \neq j)\}]$$

即可构造出A_n类图.

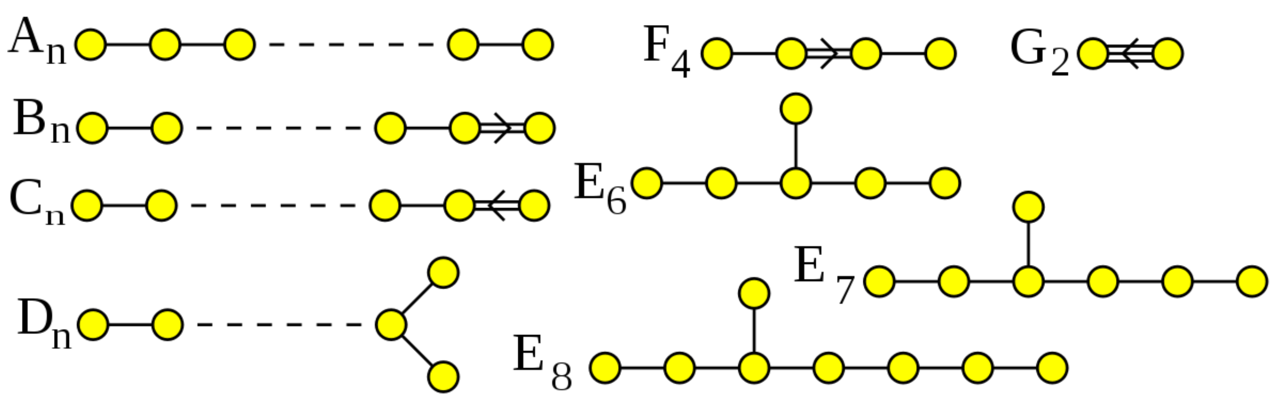
对上图所示情况, 令$u = \sum_{i=1}^{p-1} i \cdot u_i$, 同理作$v, w$. 由于$\{u, v, w\}$彼此正交, 且其线性组合不为$c$, 故

$$1 = (c, c) > \sum \frac{(c, u)^2}{\|u\|^2} = \sum \frac{1 - p^{-1}}{2}$$

从而$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} > 1, p, q, r \geq 2$. 从而解得以下所有可能的$(p, q, r)$:

- $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, q = r = 2$. 对应$D_n$.
- $p \in \{3, 4, 5\}, q = 3, r = 2$. 分别对应$E_6$, E_7与E_8.

实际上, 不可约的Dynkin图仅有以下形式. 证明见附录.



我们求得的Dynkin图(A_n, D_n, E_6, E_7或E_8)导出一切$\lambda_{\min} = -2$之图. 包括线图, 广义线图, 以及例外图. 其中

- $A_n = \{e_i - e_j : e_i, e_j \in \mathbb{R}^{n+1}, i \neq j\}$.
- $D_n = \{\pm e_i \pm e_j : e_i, e_j \in \mathbb{R}^{n+1}, i \neq j\}$.
- $E_8 = D_8 \cup \{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} \epsilon_i e_i : \epsilon_i = \pm 1, \prod_{i=1}^{8} \epsilon_i = 1\}$.
- 同构意义下, 选定$v \in E_8$, $E_7 = \{x \in E_8 : x \perp v\}$.
- 同构意义下, 选定E_8中星状图(v_1, v_2, v_3构成),
  $E_6 = \{x \in E_8 : x \perp v_i, i = 1, 2, 3\}$.

一切以-2为最小特征值的简单图对应的直线系统$\mathcal{L}$在星状闭包下仅可能为A_n, D_n, E_i($i = 6, 7, 8$). 下将证明:

- 图G有A_n表示若且仅若G为某一顶点数为$n+1$的二分图之线图.
- 图G有D_n表示若且仅若G为某一广义线图.

注意到广义线图$L(G, a_1, \ldots, a_m)$即线图$L(G)$上添加点

$$\{(i, \pm l) : i = 1, \ldots, m, l = 1, \ldots, a_i\}$$

所得. 记$e_i + e_j$为$L(G, a_1, \ldots, a_m)$中点ij对应的向量, $e_i \pm e_{(i,l)}$分别对应点$(i, \pm l)$即可得广义线图之D_n表示. 若G为二分图, 将边ij记作$e_i - e_j$即可得A_n表示.

从而所有例外图均有E_8表示. 由于$|E_8| = 240$, 故例外图有限.

根系理论

稍后.