Prop. Gauß 曲率为 **-1** 的渐近曲线网为 **Чебышёв** 参数网

证明. 取渐进曲线下曲面 $X(u,v)$ 的第一基本形式 $E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2$. 注意到 $N \perp X_u, N_u$, $N_u \cdot X_u = -e = 0$, 从而 $\{N, N_u, X_u\}$ 两两正交, $\{N, X_v, N_v\}$ 同理. 记

$$(N_u \quad N_v) = (X_u \quad X_v)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

其中 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & f \\ f & 0 \end{pmatrix} = \dfrac{f}{EG-F^2}\begin{pmatrix} F & -G \\ -E & F \end{pmatrix}$. 从而代入 $K = \dfrac{-f^2}{EG-F^2} = -1$ 得:

$$N \times N_u = \frac{f}{EG-F^2} \cdot N \times (FX_u - EX_v) = N \times \frac{FX_u - EX_v}{f}.$$

记 $X_u = \sqrt{E}e_1$, $X_v = \dfrac{F}{\sqrt{E}}e_1 + \sqrt{\dfrac{EG-F^2}{E}}e_2$, 从而 $e_1 \times e_2 = N$. 计算得

$$N \times \frac{FX_u - EX_v}{f} = \frac{\sqrt{EG-F^2}}{f} \cdot \sqrt{E}e_1 = X_u.$$

从而 $N \times N_u = X_u$, 同理 $-N \times N_v = X_v$.

一方面,

$$(N \times N_u)_v - (N \times N_v)_u = 2N_v \times N_u = 2X_v \times X_u.$$

另一方面,

$$(N \times N_u)_v - (N \times N_v)_u = 2X_{uv}.$$

从而 $X_{uv} = X_v \times X_u$, 从而 X_{uv} 与 N 平行. 故 $E_v = G_u = 0$, 命题得证.