微分几何笔记(五)

平面闭曲线的宏观性质

谈及曲线的宏观性质, Jordan定理与Hopf's Umlaufsatz一类直观自然而不容轻易证明的定理. 下仅叙述之, 证明略去.

Jordan定理

称$\mathbb{R}^2$上无自交的闭合曲线为简单闭曲线. 则简单闭曲线$\gamma \subset \mathbb{R}^2$将$\mathbb{R}^2$划分为$\mathrm{int}(\gamma)$与$\mathrm{ext}(\gamma)$两区域, 其中

- 存在$R(\gamma) < \infty$使得$\mathrm{int}(\gamma) \subset B(0; R(\gamma))$.
- $\mathrm{ext}(\gamma)$半径无穷大.
- 对任意两点$x_1, x_2 \in \mathrm{int}(\gamma)$, 存在曲线$\gamma(x_1, x_2) \subset \mathrm{int}(\gamma)$使得$x_1, x_2 \in \gamma(x_1, x_2)$. 区域$\mathrm{ext}(\gamma)$同理. 但任意连接$\mathrm{int}(\gamma)$与$\mathrm{ext}(\gamma)$的曲线一定与$\gamma$相交.

Hopf's Umlaufsatz(Gauß-Bonnet定理之简化)

简单闭曲线的符号曲率和为$\pm 2\pi$. 该定理阐释了简单闭曲线为何"恰好绕了一圈".

等周不等式

笔者已在前期推文采用Fourier分析证明之, 今不赘述.

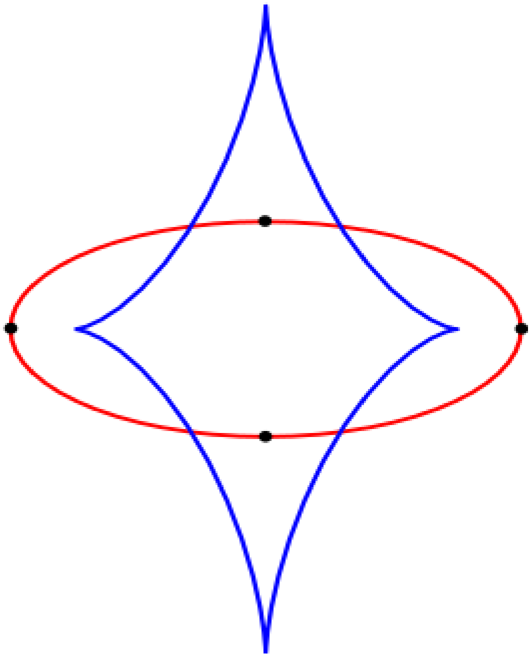
值得注意, 设$\gamma : [0, T) \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (x(t), y(t))$为简单闭曲线, 则面积

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\gamma) &= \int_{\mathrm{int}(\gamma)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathrm{int}(\gamma)} \left(\frac{\partial(x/2)}{\partial x} - \frac{\partial(-y/2)}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathrm{int}(\gamma)} \frac{1}{2}(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x) \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T (x\dot{y} - \dot{x}y)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

极坐标下, $x\dot{y} - \dot{x}y = r^2\dot{\theta}$.

四点定理

四点定理阐述如是: 每条光滑的简单闭曲线的曲率有至少四个局部极值. 例如下图



设$\gamma:[0,T)\to\mathbb{R}^2$为具有弧长参数的简单闭曲线, 考虑

$$R_M:=\inf\{R:\exists z_0\in\mathbb{R}^2\text{ s.t. }\gamma\subset D(z_0;R)\}$$

从而R_M为外接圆半径. 外接圆存在性显然, 下考虑其唯一性: 不妨设存在$z_1,z_2\in\mathbb{R}^2$使得$\gamma\subset D(z_1;R_M)\cap D(z_2;R_M)$, 则

$$\gamma\subset D\left(\frac{z_1+z_2}{2};\frac{\sqrt{4R_M^2-(z_1-z_2)^2}}{2}\right)$$

与R_M之最小性矛盾. 此外, 外接圆上的任意一段优弧(长度过半周长的弧)一定与γ有交点. 证明过易, 略去.

不妨设γ于$\gamma(s_0)$处与外接圆相切, 则切点附近Taylor展开得

$$\gamma(s_0+\Delta s)=\gamma_0+\Delta s\cdot\vec{t}_0+\frac{\Delta s^2}{2}k_0\vec{n}_0+o(\Delta s^3).$$

从而$k(s_0)>1/R$时, γ于s_0处的邻域于外接圆内, $k(s_0)=1/R$时为临界状况, 不影响讨论. 下考虑两个外接圆与γ的相邻交点$\gamma(s_1),\gamma(s_2)$, 其中$0\le s_1<s_2<T$, 则$k(s_1)\ge 1/R$且$k(s_2)\ge 1/R$. 显然存在$s'\in(s_1,s_2)$使得$k(s')<1/R$; 反之可将γ在$[0,s_1)\cup(s_2,T)$上段替换做圆弧且保持$\gamma((s_1,s_2))$不动, 则新曲线$\tilde{\gamma}$之符号曲率和严格大于2π(或严格小于-2π), 与Hopf's Umlaufsatz矛盾.

据此, 若光滑曲线γ与其外接圆有n个交点, 则曲率的局部极值点至少有$2n$个.

空间曲线的Frenet标架

考虑有单位弧长参数的正则曲线$\gamma(s)=(x_1(s),\dots,x_n(s))\subset\mathbb{R}^n$. 从而$\gamma$关于$s$的前$n$阶导数线性无关, 且$\dfrac{\mathrm{d}^k\gamma}{\mathrm{d}s^k}$在$1\le k\le n$时不等于0. 故考虑Gram-Schmidt正交化即可构造Frenet标架$\tau(s)=(\tau_1(s),\tau_2(s),\cdots,\tau_n(s))$. 可以发现$\dfrac{\mathrm{d}\tau_1}{\mathrm{d}s}=k_2\tau_2$. 注意到$\tau_k$由$(\gamma'(s),\gamma''(s),\cdots,\gamma^{(k)}(s))$张成, 从而关系式

$$(\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_n)'_t=X(\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_n)$$

中, X具有形式

$$X=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n}\\ 0 & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n}\\ 0 & 0 & a_{43} & \cdots & a_{4,n-1} & a_{4n}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn}\end{pmatrix}$$

考虑正交变换矩阵$A(s)$使得$\tau(s)=A(s)\cdot\tau(0)$, 从而$X=A'(0)$. 由于$AA^T=A^TA\equiv I$, 故对任意向量x,y均有$\langle A(s)x,A(s)y\rangle=\langle x,y\rangle$为常数. 进而

$$\langle A(s)x,A(s)y\rangle'|_{s=0}=\left(A(s)+A(s)^T\right)\langle x,y\rangle\equiv 0.$$

因此X为反对称矩阵, 即

$$X=\begin{pmatrix}0 & k_2 & & & \\ -k_2 & 0 & k_3 & & \\ & -k_3 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & k_n\\ & & & -k_n & 0\end{pmatrix}.$$

$\mathbb{R}^n$中的基本形式

第一基本形式

依笔者见(或与数学史相悖), 引入第一基本形式的直接目的即方便计算局部框架下的曲面几何量, 包括长度与面积等. 同时该类物理量不应依赖于曲面所在的空间, 例如展平圆柱面之动作并未改变曲面的面积与其上线段周长.

考虑$\mathbb{R}^n$上$n-1$维的子流形(co-dimension为1的超平面)U, 及向径函数

$$\vec{r}:U\to\mathbb{R}^n,(u^1,u^2,\dots,u^n)\mapsto\vec{r}(u^1,u^2,\dots,u^n).$$

不妨设$x^i=x^i(u^1,u^2,\dots,u^n)$, 则$\mathbb{R}^n$上的欧式度量

$$\mathrm{d}\vec{r}^2=\sum_{i=1}^n(\mathrm{d}x^i)^2.$$

该欧式度量限制在U上的度量可表示为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\vec{r}^2|_U&=\sum_{i=1}^n\sum_{j,k=1}^{n-1}[(\partial_{u^j}x^i)(\partial_{u^k}x^i)\mathrm{d}x^j\mathrm{d}x^k]\\ &=\sum_{j,k=1}^{n-1}\left[\sum_{i=1}^n(\partial_{u^j}x^i)(\partial_{u^k}x^i)\right]\mathrm{d}x^j\mathrm{d}x^k\\ &:=\sum_{j,k=1}^{n-1}g_{jk}(u)\mathrm{d}x^j\mathrm{d}x^k\end{aligned}$$

其中$g_{jk}(u)=\left\langle\partial_{u_j}\vec{r},\partial_{u_k}\vec{r}\right\rangle$. 兹规定

$$\mathrm{d}s^2|_U=\sum_{j,k=1}^{n-1}g_{jk}\mathrm{d}u^j\mathrm{d}u^k$$

为$\mathbb{R}^n$中余维度为1的平面的第一基本形式, 其中$g_{jk}(u)=\left\langle\partial_{u^j}\vec{r},\partial_{u^k}\vec{r}\right\rangle$. 注意到$G:=(g_{ij})_{n-1,n-1}$为$\{\partial_{u^j}\vec{r}\}_{j=1}^{n-1}$生成的Gram矩阵. 由诸$\partial_{u^k}\vec{r}$之线性无关性可知$G$满秩, 同时据内积性质有$G=G^T$.

注意到$\mathrm{d}u^TG\mathrm{d}u=\mathrm{d}\vec{r}^2$, 即线素长度之平方. 单位体积元

$$|\wedge_{k=1}^{n-1}(\Delta u^k\cdot\partial_{u^k}\vec{r})|=\sqrt{G}\prod_{k=1}^{n-1}\Delta u^k.$$

例如对曲面$U=(u^1(t),\ldots,u^{n-1}(t)), t\in(a,b)$时, $\gamma(t)$之长度为

$$\int_a^b\sqrt{\langle\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle}\mathrm{d}t=\int_a^b\sqrt{u'^TGu'}\mathrm{d}t.$$

$(u^1,\ldots,u^{n-1})\in\Omega$时的曲面面积为

$$\int_\Omega\sqrt{G}\mathrm{d}u^1\cdots\mathrm{d}u^{n-1}.$$

实际上, $f(x^1,\ldots,x^{n-1})-x^n=0$形式的曲面较为常见. 计算得

$$g_{jk}=\delta_{jk}+(\partial_{x^j}f)(\partial_{x^k}f).$$

再若曲面由隐函数$F(x^1,\ldots,x^n)$决定, 且不妨设某点处$\partial_{x^n}F\neq 0$, 则根据隐函数存在定理知存在局部函数$x^n=f(x^1,\ldots,x^{n-1})$且

$$0=\partial_{x^k}F=\partial_{x^k}F+(\partial_{x^n}F)(\partial_{x^k}f).$$

因此

$$g_{jk}=\delta_{jk}+\frac{(\partial_{x^j}F)(\partial_{x^k}F)}{(\partial_{x^n}F)^2}.$$

值得一提的是, 映射$\vec{r}:U\to\mathbb{R}^n$导出的切映射$\mathrm{d}\vec{r}$将TU映射至$T\mathbb{R}^n$. 特别地, 对任意$p\in U$总有

$$(\mathrm{d}\vec{r})_p:T_pU\mapsto T_p\mathbb{R}^n.$$

注意到$\mathrm{d}\vec{r}=\sum_{i=1}^{n-1}(\partial_{u^i}\vec{r})\mathrm{d}u^i$, 映射$\mathrm{d}u^j:\sum_i c_i\partial_{u^i}\vec{r}\mapsto c_j\partial_{u^j}\vec{r}$, 从而对任意$\sum_i(c_i\partial_{u^i}\vec{r})\subset TU$, 总有

$$\mathrm{d}\vec{r}:\sum_i(c_i\partial_{u^i}\vec{r})\mapsto\sum_i(c_i\partial_{u^i}\vec{r}).$$

因此$\mathrm{d}\vec{r}$为恒同映射.

第二基本形式

上小节中, 笔者就引入第一基本形式之必要性作出些许说明:

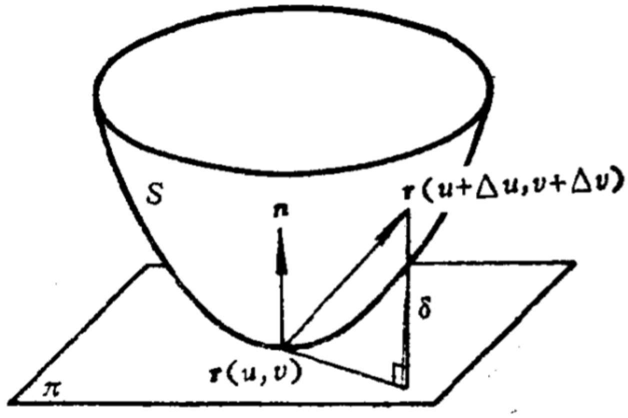
> 引入第一基本形式的直接目的即方便计算局部框架下的曲面几何量, 包括长度与面积等. 同时该类物理量不应依赖于曲面所在的空间, 例如展平圆柱面之动作并未改变曲面的面积与其上线段周长.

若需研究曲面与某一给定空间中的弯曲程度, 第一基本形式固然无用.

考虑$\vec{r}(u^1,\ldots,u^{n-1})$临近点$\vec{r}(u^1+\Delta u^1,\ldots,u^{n-1}+\Delta u^{n-1})$到密切平面$\{x:(x-\vec{r})\cdot\vec{n}=0\}$之有向距离

$$
\begin{aligned}
\delta(\Delta u) =&[\vec{r}(u^1+\Delta u^1,\ldots,u^{n-1}+\Delta u^{n-1})-\vec{r}(u^1,\ldots,u^{n-1})]\cdot\vec{n}\\
=&\vec{n}\cdot\sum_{i=1}^{n-1}\partial_{u^i}\vec{r}(u)\Delta u^i+\frac{\vec{n}}{2}\cdot\sum_{i,j=1}^{n-1}\partial_{u^iu^j}\vec{r}(u)\Delta u^i\Delta u^j+o(\|\Delta u\|^2)\\
=&\sum_{i,j=1}^{n-1}(\vec{n}\cdot\partial_{u^iu^j}\vec{r}(u))\Delta u^i\Delta u^j
\end{aligned}
$$

其中二维情形定义可参见下图. 其中$\vec{n}$朝向需确定, 取$\vec{n}=\dfrac{-\partial_u\vec{r}\times\partial_v\vec{r}}{\|\partial_u\vec{r}\times\partial_v\vec{r}\|}$.



定义第二基本形式

$$\langle \mathrm{d}\vec{r},\mathrm{d}\vec{n}\rangle|_U=\sum_{i,j=1}^{n-1}(\vec{n}\cdot\partial_{u^iu^j}\vec{r})\mathrm{d}u^i\mathrm{d}u^j.$$

可观察到其中类似二次型的结构, 类似地记

$$\mathrm{d}u^TQ\mathrm{d}u=\langle \mathrm{d}\vec{r},\mathrm{d}\vec{n}\rangle|_U.$$

为将Q之表现地更为显然, 定义如下映射(易验证$\vec{n}$的变化率与$\vec{n}$垂直)

$$\mathrm{d}\vec{n}:TU\to TU,\partial_{u^i}\vec{r}\mapsto\partial_{u^i}\vec{n}.$$

注意到

$$\vec{n}\cdot\partial_{u^iu^j}\vec{r}=\partial_{u^i}(\vec{n}\cdot\partial_{u^j}\vec{r})-(\partial_{u^i}\vec{n}\cdot\partial_{u^j}\vec{r})=-(\partial_{u^i}\vec{n}\cdot\partial_{u^j}\vec{r}).$$

从而对任意$\partial_{u^i}\vec{r}$与$\partial_{u^j}\vec{r}$都有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{n}(\partial_{u^i}\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{n}(\partial_{u^j}\vec{r}) =&\partial_{u^i}\vec{n}\cdot\partial_{u^j}\vec{n}\\
=&\left(\sum_k c_k\partial_{u^k}\right)\vec{r}\cdot\partial_{u^j}\vec{n}\\
=&\sum_k c_k\partial_{u^ku^j}\vec{r}\cdot\vec{n}\\
=&\sum_k c_k\partial_{u^j}\vec{r}\cdot\partial_{u^k}\vec{n}\\
=&\left(\sum_k c_k\partial_{u^k}\right)\vec{n}\cdot\partial_{u^j}\vec{r}\\
=&\partial_{u^i}\vec{r}\cdot\partial_{u^j}\vec{r}
\end{aligned}
$$

从而$\mathrm{d}\vec{n}$为自伴随算子, 即存在对应的对称矩阵$A=(a_{ij})_{n-1,n-1}$对称, 其中

$$\mathrm{d}\vec{n} : (\partial_{u^1}\vec{r}, \ldots, \partial_{u^{n-1}}\vec{r}) \mapsto A \cdot (\partial_{u^1}\vec{r}, \ldots, \partial_{u^{n-1}}\vec{r}).$$

故

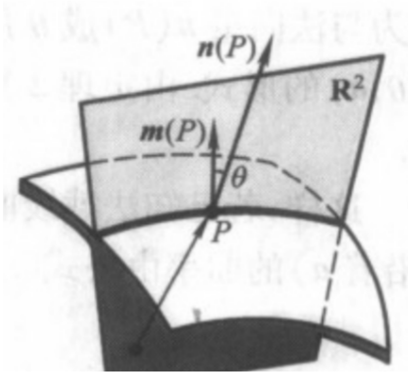
$$Q\mathrm{d}u = \mathrm{d}\vec{n}((\partial_{u^1}\vec{r}, \ldots, \partial_{u^{n-1}}\vec{r})) = AG\mathrm{d}u.$$

因此$Q = AG$. 平均曲率即$\dfrac{\mathrm{trace}(A)}{n-1}$(有处作$\mathrm{trace}(A)$), Gauß曲率即$\det(A)$.

对非退化坐标变换$J : \mathrm{d}u \mapsto \mathrm{d}u'$, 有

$$A' = Q'(G')^{-1} = J^T Q J \cdot J^{-1} G^{-1} (J^T)^{-1} \sim QG^{-1} = A.$$

下介绍截线曲率. 以下, 我们仅关心超曲面上曲线的局部性质, 故将待研究曲线视作密切平面(二维)与超曲面之交线$\gamma(s)$即可.



为避免歧义, 今记具有单位弧长参数的曲线$\gamma(s)$之二阶导为$\gamma''(s) = k(s) \cdot \vec{m}$, 一阶导仍作$\gamma'(s) = \vec{t}$. 定义截面曲率为

$$\vec{t}^T Q \vec{t} = \vec{r}_{\vec{t}\vec{t}} \cdot \vec{n} = \gamma''(s) \cdot \vec{n} = \cos\theta \cdot k.$$

即$\gamma''(s)$于法方向之投影. 对一般参数之曲线$\gamma(t)$而言, 则截面曲率

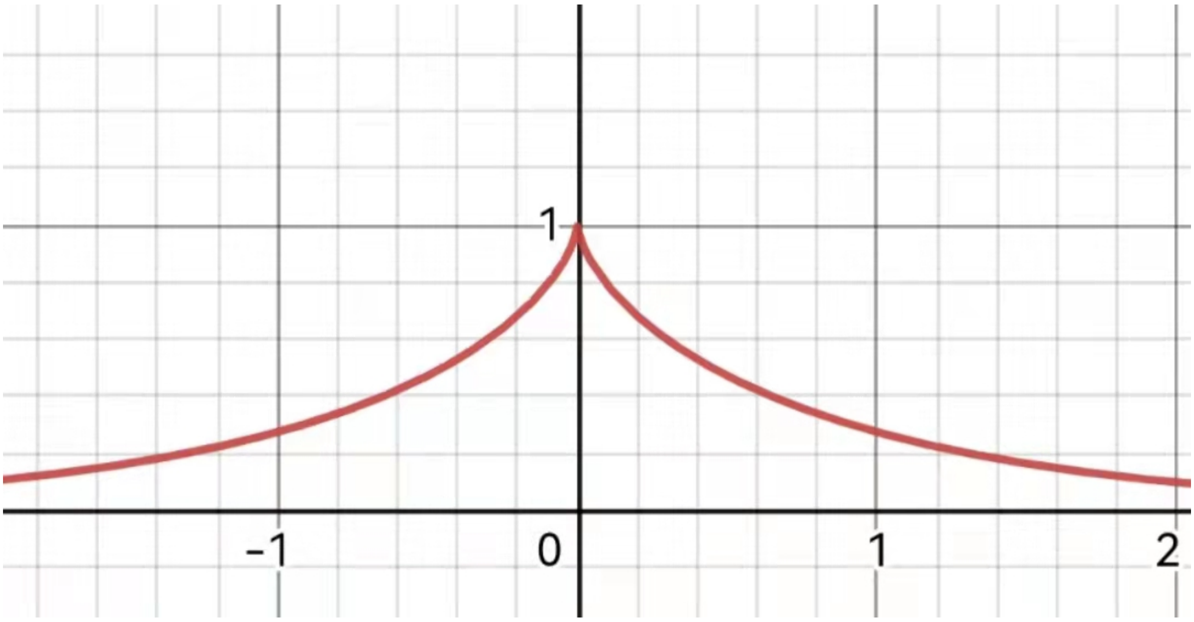
$$\begin{aligned} k\cos\theta &= \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 \cdot \gamma'(t)^T Q \gamma'(t) \\ &= \frac{\gamma'(t)^T Q \gamma'(t)}{\gamma'(t)^T G \gamma'(t)} \end{aligned}.$$

即II形式商去I形式(Meusnier公式). 显然$k\cos\theta$之上下界分别为A之最大特征值与最小特征值.

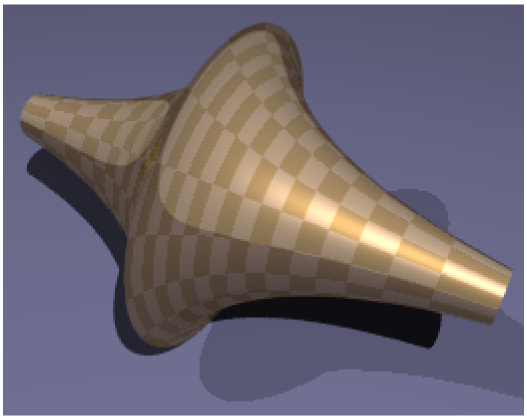
例: 伪三维球面曲率计算

可如是构造三维球面: 将自行车的轮胎视为质点, 车架视为线段. 若将其前轮固定于$\mathbb{R}^3$的某一点中, 同时不附加其余限制条件, 则后轮可遍历的所有区域为三维球面. 此处之所以以自行车为例, 是因为自行车的"某些物理性质"能帮助构造出另一类"球面".

现将自行车置于$\mathbb{R}^2$中, 前轮于$(0,0)$处, 后轮于$(0,R)$处. 现规定前轮可于x轴上自由滑动, 则后轮的轨迹为上半平面上有一处尖点的曲线.



绕x轴旋转之即生成伪球面(如下图所示).



球面的Gauß曲率恒为半径之倒数, 故为常数. 下将证明伪球面的所有光滑面具有相同的Gauß曲率.

首先应先求解自行车轨迹方程$y = y(x)$. 对任意曲线上点(x, y), 自行车长度

$$l \equiv y \cdot \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y'}.$$

从而有微分关系$|y'| = \dfrac{y}{\sqrt{l^2 - y^2}}$. 解得$x \geq 0$处解

$$(x, y) = (lt - l\tanh t, l\mathrm{secht})$$

伪球面与平面$x = lt - l\tanh t$处之交线为半径为$l\mathrm{secht}$之圆γ, 故截面曲率为$\dfrac{1}{l\mathrm{secht}}$. 伪球面于该点的法向量与$x$轴之夹角之正切值为

$$\tan\theta(t) = \left|\frac{y'(t)}{x'(t)}\right| = \frac{\tanh t\mathrm{secht}}{\mathrm{sech}^2 t} = \sinh t$$

从而Gauß曲率为极大曲率与极小曲率之积, 即

$$k = -\sin\theta \cdot l^2\mathrm{secht} = -l^{-2}$$

是故伪球面的Gauß曲率为常数.