初探 $\lambda_{\min} \geq -2$ 的简单图

Author: 张陈成, Student ID: 5190171910019

初探 $\lambda_{\min} \geq -2$ 的简单图
- 摘要
- 问题转化
- $\lambda_{\min} \geq -2$ 的简单图所对应的根系类
- 最简根系对应的 Coxeter 图
  - A_n 图
  - D_n 图
  - $E_{6,7,8}$ 图
- $\lambda_{\min} \geq -2$ 简单图之分类
- $\lambda_{\min} = -2$ 的强正则图
- 参考文献
- 附图

摘要

本稿旨在解答课本[3]中的问题: 如何寻找并分类所有 $\lambda_{\min} \geq -2$ 的简单图. 笔者结合前人工作(见参考文献)与个人所学, 整理了以下结论:

1. 一切 $\lambda_{\min} \geq -2$ 的简单图可由有限类标准图直接导出, 且上述标准图与 Coxeter 图直接对应.
2. 一切 $\lambda_{\min} \geq -2$ 的强正则图可被简单分类并列举.

$\lambda_{\min} \geq -2$ 之简单图的分类工作肇端于 19 世纪 60 年代, 其提出者Hoffman已做出具体而微的成果. 而后 Doob, Cvetković 等研究者将根系理论引入该问题中, 基本解决了一般的 $\lambda_{\min} \geq -2$ 之简单图的分类工作.

本文关于广义线图之定义参照[3], 关于根系理论与 Coxeter 图之定义参照[4][5], 关于 Petersen 图为例外图之证明参阅[1]. 一般 $\lambda_{\min} \geq -2$ 之简单图的根系分类系笔者自行推导, 强正则图相关部分整理自[2][5].

问题转化

任取 $G(V,E)$ 为顶点数为 n 的简单图, 记 A 为其邻接矩阵. 当 $\lambda_{\min}(G)\ge 2$ 时, $A+2I$ 半正定, 则存在实数矩阵 Q 使得 $Q^TQ=A$. 记列向量 $Q=(q_1\,q_2\,\cdots\,q_n)$, a_{ij} 为 A 中第 ij 个元素, 则 $i\ne j$ 时有 $a_{ij}=\langle q_i,q_j\rangle$. 实际上

$$\langle q_i,q_j\rangle=\begin{cases}0 & i\nsim j,\\ 1 & i\sim j,\\ 2 & i=j.\end{cases}$$

视 $\{q_i\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中以原点为起点的向量, 则诸 q_i 模长均为 2 , 且两两成角为 $\pi/3$ 或 $\pi/2$.

由是可知, 任一满足 $\lambda_{\min}\ge -2$ 的简单图与某组两两成角为 $\pi/2$ 或 $\pi/3$ 的单位向量集可建立一一对应. 实际上, 可采用根系 (root system) 理论研究一般欧式空间高度对称的向量系统, 关于根系理论的公理化叙述可参见[4].

$\lambda_{\min}\ge -2$ 的简单图所对应的根系类

沿用上节记号, 令 $\mathrm{c}(Q):=\{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}q_i\}$ 为所有列向量对应的方向. 若$\mathrm{c}(Q)$中存在夹角为 $\pi/3$ 的两个向量 $\{x,y\}$, 则 $\{x-y\}$ 与 $\mathrm{c}(Q)$ 中所有向量的夹角余弦值仍为 $\{0,\pm 1/2,\pm 1\}$ 中一者. 某种意义上, 在 $\mathrm{c}(Q)$ 中为成角为 $\pi/3$ 的二元向量组添加差向量之操作可视作一种完备化. 依照以上步骤有限扩充 $\mathrm{c}(Q)$ 可直接导出更大的图$\tilde{G}$, 且原图 G 为 $\tilde{G}$ 的删点子图. 由于每一 $c(Q)$ 有唯一对应的 $c(\tilde{Q})$, 下仅需研究所有可能的 $c(\tilde{Q})$, 即满足以下条件的向量集 Φ :

1. $\forall q\in\Phi$, $\|q\|_2=1$. $\pm q\in\Phi$.
2. $\forall x,y\in\Phi$, $\langle x,y\rangle\in\{0,\pm 1/2,\pm 1\}$.
3. 若 $\exists x,y\in\Phi$ 使得 $\langle x,y\rangle=1/2$, 则 $\pm(x-y)\in\Phi$.
4. 为研究方便, 不妨设图连通(等价地称 Φ 连通), 即不存在非空划分 $\Phi=\Phi_1\dot{\cup}\Phi_2$ 使得 $\forall(x,y)\in(\Phi_1,\Phi_2)$, $\langle x,y\rangle\equiv 0$.

下对 Φ 删除若干元素以简化, 同时保证每一简化后的集合 Φ' 与原集合 Φ 唯一对应.

1. 选择 $\mathrm{span}(\Phi)$ 中半空间(开集)使得Φ中恰有一半元素落在该半空间中. 例如选择 $\alpha\in\mathrm{span}(\Phi)$ 使得 $\forall x\in\Phi$, $\langle\alpha,x\rangle\ne 0$. 记 $\Phi_\alpha^+:=\{x:\langle\alpha,x\rangle>0\}$.
2. 若存在 $x,y\in\Phi$ 使得 $\langle x,y\rangle=-1/2$, 则删去 $x+y$, 如是重复直至不可再操作得 Φ' . 实际上, 分步操作等价于同时操作, 且最终对应的 Φ' 唯一且连通.

下证明第二步中所述之论断. 视 Φ 中元素为顶点集 $V(\Phi)$, 构造带权重 ± 1 的边集 $E(\Phi)$, 其中权重定义为 $\langle v_i,v_j\rangle$ (权重为0即不连边). 依对Φ之构造, 图 $G(\Phi)$ 满足以下性质: 任意权重为 -1 的边含于唯一的三角形, 且该三角形其余两边权重均为 1 .

实际上, $G(\Phi')$ 由 $G(\Phi')$ 删去一切边权重为 $\{-1,-1,1\}$ 的三角形中权为 -1 之边所对的顶点所得. 由于该些顶点确定, 故删除方式存在且唯一. 下考虑连通性: 若子图 $\triangle ABC$ 中 A 点连接了 $\triangle ABC$ 中两条权重为 -1 的边, 且 A 的度数大于 2 , 则不妨设 $A\sim D$. 由于 $1=|\langle A,D\rangle|=|\langle B,D\rangle+\langle C,D\rangle|\ne 0$, 从而 D 与 B 或 C 存在连边. 从而删除顶点 A 不会造成连通度的增加. 综上, 原论断正确.

自 Φ' 补全为 Φ 之方式更为简单, 只需确保一切权重为 -1 的边含于唯一的三角形, 且该三角形其余两边权重均为 1 . 下称 Φ' 为最简根系.

最简根系对应的 Coxeter 图

Coxeter 图之定义见附录. 本文中的 $G(\Phi')$ 即一类特殊的 Coxeter 图.

$G(\Phi')$ 满足如下性质:

1. 对任意 $\{x,y\}\subset\Phi'$, $\langle x,y\rangle\le 0$.

   实际上, 若存在夹角为 $\pi/3$ 的 $\{x,y\}$, 则 $\{\pm(x-y)\}\subset\Phi$, 从而简化 $\Phi\to\Phi'$ 之时 x 或 y 应被消除. 上以证明简化过程存在且唯一, 故矛盾.

2. $G(\Phi')$ 中边数 e 严格小于顶点数 n .

   据上条结论, 注意到

   $$0\le\left\langle\sum_{x\in\Phi'}x,\sum_{x\in\Phi'}x\right\rangle=\sum_{x\in\Phi'}\langle x,x\rangle+2\sum_{i<j}\langle x_i,x_j\rangle\le n-e.$$

   取等时要求 Φ' 中不等的向量间夹角恒为 $\pi/3$, 即 Φ' 由转化完全图之Φ所得. 而 $2I+A(K_n)$ 满秩, 从而一切满足 $Q^TQ=QQ^T=(2I+A(K_n))$ 的方阵满秩. 注意到一切对应 Φ 的 $\mathrm{c}(Q)$ 的包含了某一等距同构于 Φ' 的子集, 反之 $\mathrm{c}(Q)$ 无法补全至 Φ . 而 $\sum_{x\in\Phi'}x=0$ 说明 Φ' 含有线性无关项, 从而 $\mathrm{c}(Q)$ 并非线性无关. 矛盾.

3. (已证明) $G(\Phi')$ 连通.

从而 $G(\Phi')$ 为树. 下推导该类树的性质.

1. $G(\Phi')$ 中顶点度数不超过 3 . 设 $\{x_i\}_{i=1}^k$ 为 y 的邻点, 由于 $G(\Phi')$ 无圈, 则 $\{x_i\}_{i=1}^k$ 两两不交. 从而

   $$1=\langle y,y\rangle\ge\left\langle\sum_{i=1}^k\langle x_k,y\rangle x_k,\sum_{i=1}^k\langle x_k,y\rangle x_k\right\rangle\ge\sum_{i=1}^k\langle x_k,y\rangle^4=\frac{k}{4}.$$

   实际上, 第一处等号无法取到 (即 y 与 $\{x_i\}_{i=1}^k$ 线性无关) ; 反之设 $y=\sum_{i=1}^k c_ix_i$, 则 $\langle y,y\rangle=\sum_{i=1}^k c_i^2=1$. $c_i=\langle x_i,y\rangle\in\{-1/2,0\}$, 从而 y 与至少四个元素夹角为 $2\pi/3$. 从而 y 在 $G(\Phi)$ 中含于某一三角形, 且 y 在该三角形中连边均为 1 , 从而 y 应被消除. 矛盾.

2. $G(\Phi')$ 中路可视作单点. 如取 $x_1-x_2-\cdots-x_k$ 为 $G(\Phi')$ 中一条路 (即 P_n 子图), 记 $x_0=\sum_{i=1}^k x_i$, 则

   $$\langle x,x\rangle=\sum_{i=1}^k\langle x_i,x_1\rangle+2\sum_{i<j}\langle x_i,x_j\rangle=k-(k-1)=1.$$

   由于任意路外点 (如取 y) 与路至多有一个交点, 从而 $\langle x,y\rangle\in\{0,-1/2\}$.

结合上述两点论断, 任意链有至多一个分叉点, 即 $G(\Phi')$ 有至多三个末端.

为方便, 约定 $\mathbb{B}^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的标准正交基.

A_n 图

若 $G(\Phi')=P_n$, 考虑

$$A_n\sim\{\pm(e_i-e_j):e_i,e_j\in\mathbb{B}^{n+1},i\ne j\}$$

即可.

D_n 图

若 $G(\Phi')$ 为有三个端点的树, 不妨设 $G(\Phi')$ 由三条路 $\{u_i\}_{i=1}^p$, $\{v_i\}_{i=1}^q$, $\{u_i\}_{i=1}^r$ 连接而成, 且令 $c=u_p=u_q=u_r$. 记 $u=\sum_{i=1}^{p-1}i\cdot u_i$, $v=\sum_{i=1}^{q-1}i\cdot v_i$, $w=\sum_{i=1}^{r-1}i\cdot w_i$, 则

$$1=\langle c,c\rangle\ge\sum_{x\in\{u,v,w\}}\frac{\langle c,x\rangle^2}{\langle x,x\rangle}=\sum_{t\in\{p,q,r\}}\frac{1-p^{-1}}{2}.$$

从而 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\geq 1$. 实际上, 若采用多数 Lie 群相关教材中对最简根系之定义, Φ' 中元素的线性无关性从定义中即可说明. 因此上式等号不可取.

依假定, $p,q,r\geq 2$. 从而 $p=q=1$ 时 $r\in\mathbb{N}=\{0,1\}$. 即

$$D_n\sim\{\pm e_i\pm e_j:e_i,e_j\in\mathbb{B}^n\}.$$

$E_{6,7,8}$ 图

考虑解 $p=2$, $q=3$, $r=3,4,5$. 构造并检验之 (过程略) 得

$$E_8\sim D_8\cup\left\{\sum_{i=1}^{8}\frac{\varepsilon_i}{2}e_i:\varepsilon\in\{\pm 1\},e_i\in\mathbb{B}^8,\prod_{i=1}^{n}\varepsilon_i=1\right\}.$$

对应$r=6$之情形.

$$E_7\sim\{x\perp v:x\in E_8\}\quad\text{for any fixed } v\in E_8.$$

对应$r=5$之情形.

$$E_6\sim\{x\perp\operatorname{span}(v_1,v_2,v_3):x\in E_8\}\quad\text{for any fixed } v_i\in E_8.$$

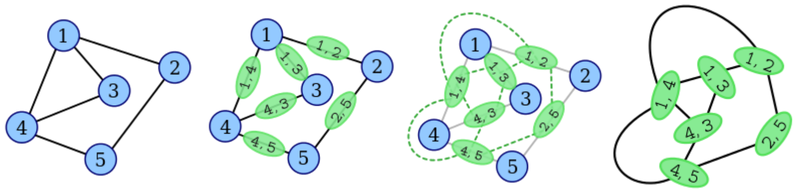
因此, 我们对所有 $\lambda_{\min}\geq -2$ 的简单图之类别进行了初步界定.

$\lambda_{\min} \geq -2$ 简单图之分类

本节将给出以下结论:

- 图 G 有 A_n 表示若且仅若 G 为某一顶点数为 $n+1$ 的二分图之线图.
- 图 G 有 D_n 表示若且仅若 G 为某一广义线图 (含不以 A_n 表示的线图).
- 图 G 有 E_n 表示若且仅若 G 为例外图.

对 G 而言, 线图 $L(G)$ 以 $E(G)$ 为顶点集合, 以 $E(G)$ 中的边相邻关系决定 $V(L(G))$ 中的顶点相邻关系. 下图为由 G 构造 $L(G)$ 之方式.



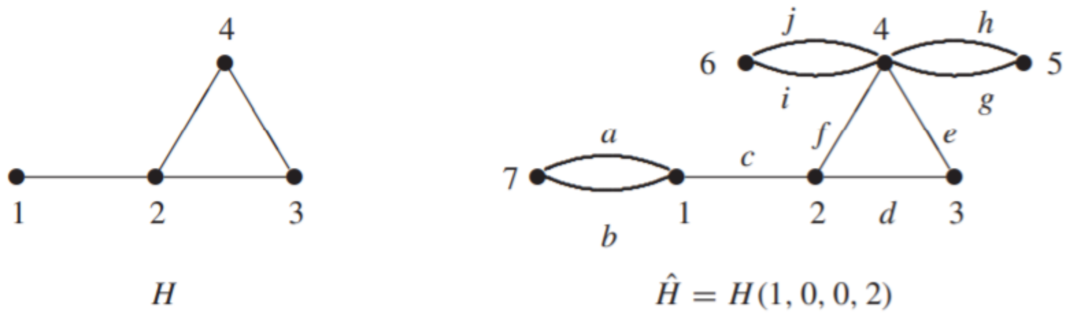
作 G 的导出矩阵 $B := (b_{ve})_{|V|\times|E|}$, $b_{ve} = 1$ 若且仅若点 v 与边 e 相连, 反之 $b_{ve} = 0$. 从而 $B^TB - 2I_{|E|}$ 即为 G 线图之邻接矩阵 $A(L(G))$. 由于 B^TB 半正定, $L(G)$之特征值至少为 -2 .

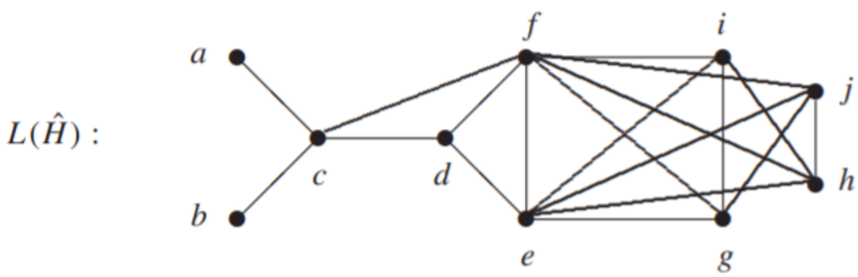
若在 G 中顶点 j 处添上一条边得图 G' , 则 $L(G)$ 为 $L(G')$ 的某一删点图. 特别地, 记 $A := A(L(G))$, 则 $A(L(G'))$ 具有一般形式 $\begin{pmatrix} 0 & u^T \\ u & A \end{pmatrix}$. 对图 G'' 使得

$$A(L(G'')) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & u^T \\ 0 & 0 & u^T \\ u & u & A \end{pmatrix}.$$

经构造, G'' 并非简单图, 但可通过在简单图上添加重边获得. 由于 $A(L(G''))$ 仍为简单图, 同时具备线图的重要特点: $A(L(G'')) + 2I$ 半正定, 即 $\lambda_{\min} \geq -2$. 现称该类形如 $A(L(G''))$ 的图为广义线图.

如下图所示, 构造广义线图的一般步骤如下:





1. 在简单图 H 的部分顶点处添加若干条花瓣 (pendant) , 即有偶数条重边的添边. 例如 $\hat{H}$ 由 H 于点 1 上添加一片花瓣, 于点 4 上添加两片花瓣所得.
2. 仿照线图的定义, 对 $\hat{H}$ 中边进行编号. 其中, 两边相邻若且仅若仅有一个公共顶点. 例如, $i \sim h$, $c \sim a$; 但 $i \nsim j$.
3. 根据连边关系作线图 $L(\hat{H})$.

注意到广义线图 $L(G, a_1, \ldots, a_m)$ 即线图 $L(G)$ 上添加点

$$\{(i, \pm l) : i = 1, \ldots, m, l = 1, \ldots, a_i\}$$

所得. 记 $e_i + e_j$ 为 $L(G, a_1, \ldots, a_m)$ 中由边 $ij \in E(G)$ 对应点所表示的向量, $e_i \pm e_{(i,l)}$ 分别对应点 $(i, \pm l)$ 即可得广义线图之 D_n 表示. 若 G 为二分图, 将边 ij 记作 $e_i - e_j$ 即可得 A_n 表示. 此外, 应说明无法由 A_n 或 D_n 表示的图之存在性.

实际上, 部分满足 $\lambda_{\min} \geq -2$ 之图不属于线图或广义线图, 如 Petersen 图. 注意到 Petersen 图中任意相邻的两点 u, v 满足 $N(u) \neq N(v)$. 从而 Petersen 图并非广义线图. 假设存在 H 使得 $L(H)$ 为 Petersen 图, 则由于 Petersen 图中相邻两点没有公共邻点, 故 H 中不含度至少为 3 的点. 显然 H 为若干圈, 散点及路之无交并. 矛盾.

注意到 E_n 有限, 故例外图有限. 从而对顶点足够多的连通图而言, 若 $\lambda_{\min} \geq -2$, 则该图为线图或广义线图, 进而可通过合适的算法约化之.

就最小特征值严格大于 -2 的图而言, 可稽的结论[4]包括:

1. 若 H 为某一树的线图, 则 $\lambda_{\min} > -2$.
2. 若 H 为某一树添上一片花瓣所生成的广义线图, 则 $\lambda_{\min} > -2$.
3. 若 H 为顶点数为奇数的单圈图, 则 $\lambda_{\min} > -2$.
4. 某些例外图也满足 $\lambda_{\min} > -2$.

$\lambda_{\min} = -2$ 的强正则图

本节将总结 $\lambda_{\min} = 2$ 之强正则图, 原因有下:

1. $\lambda_{\min} \geq 2$ 的图系本文中心议题.
2. Seidel 证明了 $\lambda_{\min} > -2$ 的所有强正则图无非 K_n 与 C_5. 该结果较为平凡.

记强正则图 $G(v, k, \lambda, \mu)$ 为一切满足以下条件的图

1. G 为顶点数为v的正则图, 每条边度为 k .
2. G 中任意相邻的两点的公共邻点数量恒为 λ .
3. G 中任意不邻的两点的公共邻点数量恒为 μ .

强正则图 $G(v, k, \lambda, \mu)$ 含有重数为 1 的主特征值 k . 对任意非主特征值 x 所述的特征向量 x , 有 $x^T \mathbf{1}_v = 0$. 注意到

$$A^2 = kI + \lambda A + \mu(\mathbf{1}_{v\times v} - I_v - A).$$

从而

$$[A^2 + (\mu - \lambda)A + (\mu - k)I_v]x = \mathbf{0}_v.$$

解得

$$\begin{cases} \tau = \dfrac{1}{2}\left[(\lambda - \mu) + \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)}\right], \\ \theta = \dfrac{1}{2}\left[(\lambda - \mu) - \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)}\right]. \end{cases}$$

重数m_τ与m_θ满足$\mathrm{trace}(A)=\tau m_\tau+\theta m_\theta+k=0$, 以及$m_\tau+m_\theta+1=n$. 从而

$$\begin{cases} m_\tau=\dfrac{1}{2}\left[v-1-\dfrac{2k+(v-1)(\lambda-\mu)}{\sqrt{(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu)}}\right], \\ m_\theta=\dfrac{1}{2}\left[v-1+\dfrac{2k+(v-1)(\lambda-\mu)}{\sqrt{(\lambda-\mu)^2+4(k-\mu)}}\right]. \end{cases}$$

对任意点 $v_0\in G$, v_0 的邻点集向非邻点集引出 $k(k-\lambda-1)$ 条边, 而 v_0 邻点集向非邻点集引出 $\mu(v-k-1)$ 条边,从而 $k(k-\lambda-1)=(v-k-1)\mu$.

当 $\theta=-2$ 时, 化简得 $k=2\lambda-\mu+4$.

- 当 $\mu=2$ 时, 得通解 $(n^2,2(n-1),n-2,2)$, 其中 $n\geq 2$.
- 当 $\mu=4$ 时, 得通解 $(n(n-1)/2,2(n-2),n-2,4)$, 其中 $n\geq 4$.

当 $\mu\neq 2,4$ 时, 由特征值关系化简知 $m_\tau=\dfrac{2v-k-2}{\tau+2}=\dfrac{(\mu+2\tau)(\mu+2\tau+2)}{\mu(\tau+2)}$. 下从图的"部件"数量考察.

设 $x\sim a,b$ 但 $a\nsim b$, 记 $\{x,a,b\}$ 包含于 c 个 $K_{1,3}$ 及 q 个 C_4 . 这里限定 $K_{1,3}$ 中任意三点不为 G 中某一 K_3 的三个顶点, 例如 $G=K_4$ 不包含 $K_{1,3}$, 但 $G=K_{3,3}$ 包含 $K_{1,3}$. 计算 x 邻点数量得

$$\begin{aligned} k&=\sum_{y\nsim a,y\nsim by\sim x}1+\sum_{y\nsim a,y\sim by\sim x}1+\sum_{y\sim a,y\nsim by\sim x}1-\sum_{y\sim a,y\sim by\sim x}1 \\ &=2+2\lambda-(\mu-1-q)+c \end{aligned}$$

故 $c+q=k-3-2\lambda+\mu=1$. 因此 $c=0,q=1$ 或 $c=1,q=0$.

若 $c=1$, 则不妨设 $\{x,a,b,c\}$ 组成 $K_{1,3}$. 记 $N(v):=\{x:x\sim v\}$ 为 v 之邻域, $N(H):\{x\in N(v):v\in H\}$ 为 H 之邻域, $F(H):=V(G)\setminus(V(H)\cup N(H))$ 为外点集. 注意到

1. $N(x)\cap F(a)$ 内, $k-\lambda-1=\tau+1$ 个点在 $\{b,c\}\cup N(b,c)\setminus\{x\}$ 中, 从而 $\tau\leq\mu$.
2. $(N(a)\cap F(x))\cup\{a\}$ 中的 $k-\lambda$ 个点包含于 $F(\{b,c\})$ 中的 $\lambda=v-2k+\mu-2$ 个点, 从而 $v\geq 5\tau+\mu+4$.
3. $\mu v=(k-\tau)(k+2)$, 从而 $v=3\tau+\mu+2+\dfrac{2\tau(\tau+1)}{\mu}\in\mathbb{N}$. 因此 $\mu\leq r$.

故得系数组

- $(6\tau+4,3\tau,2\tau-2,\tau)$, 其中 $m_\tau=9-\dfrac{12}{\tau+2}\in\mathbb{N}$. 据 A. E. Brouwer 对 μ 界之估计 ($v\leq\dfrac{m_\tau(m_\tau+3)}{2}$), 取 $\tau=1,2,4,10$ 即可.

若 $q=1$, $\{x,a,b\}$ 属于唯一的 C_4 , 进而 μ 必为偶数, $N(a,b)$ 包含为 $K_{(\mu/2)\times 2}$. 若 $a\sim d\nsim b$, 则 d 与 $N(a,b)$ 中的 $\mu/2$ 个点恰好相邻 (此处从 $K_{1,3}$ 之不存在性分析即可) . 注意到 $F(b)$ 导出强正则图 (系数为 $(v-k-1,k-\mu,\lambda-\mu/2,\mu)$) , 此处允许 $v-k-1=0$ 及 $k-\mu=0$ 之情况.

- $v-k-1=0$情形对应$K_{2\times n}$.

若 $F(b)$ 导出完全图, 则 $m_\tau=8-\dfrac{12}{\tau+2}$. 从而枚举知

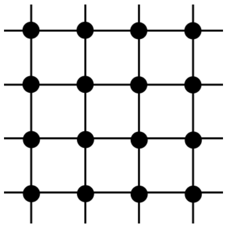
- $(10,6,3,4)$, $(16,10,6,6)$.

若 $F(b)$ 导出 (其余情形的) 强正则图, 则由

$$(k-\mu)=2(\lambda-\mu/2)-\mu+4$$

知 $F(b)$ 导出的强正则图的最小特征值仍为 -2 . 该导出图的最大特征值重数为 $\dfrac{2\tau(\tau+1)}{(\tau-\mu/2+2)\mu/2}$, 从而 μ 仅可能为 6 或 8 , 或该导出的强正则图为 $K_{2\times n}$ 形式. 就此再进行有限次的枚举, 最终整理得到七类可能的图.

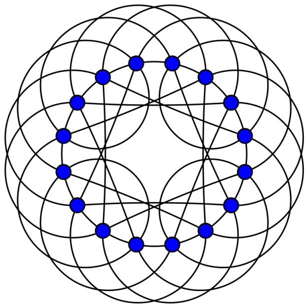
1. $K_{n\times 2}$.
2. $L_2(n)$, 亦作 $H(2,n)$. 系数为 $(n^2, 2(n-1), n-2, 2)$. 前一种表示方式对应格点图 (lattice graph) , 每一点仅与同行同列的点相连.

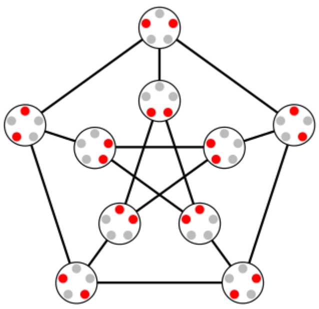
   后一种表示方式为 2 阶 Hamming 图, $H(2,n)$ 的顶点集与 $V(K_n)\times V(K_n)$ 相同, 记作

   $$\{(x_1,x_2) : x_1,x_2\in\{1,2,\ldots,n\}\}$$

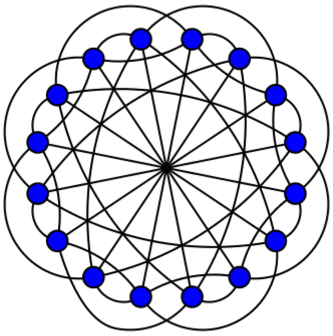
   $(x_i,x_j)\sim(x_k,x_l)$ 若且仅若 $i=k$ 或 $j=l$.
3. $T(n)$. 系数为 $(n(n-1)/2, 2(n-2), n-2, 4)$. 构造与 $L_2(n)$ 相似, 只是 n 阶正方形被换做了 n 阶三角形. 值得一提的是, $T(n)=L(K_n)$.
4. Shrikhand 图. Shrikhand 于1959年证明了结论: 格点图之系数决定了唯一的强正则图, 但 $n=4$ 例外. 实际上, Shrikhand 图与 $L_2(4)$ 拥有相同的谱.

5. Chang 图. $T(n)$ 之系数确定了唯一的强正则图, 除了 $n=8$ 时的三个异构图. 该类图由 Chien-Chiang Lee (李建強) 首次发现, 图附于文末.
6. Petersen 图 ($KG_{5,2}$) , 系数为 $(10,3,0,1)$. 依 $KG_{5,2}$ 之定义作下图

   图中以 $\mathbb{Z}_5$ 之二元子集为点, 连边若且仅若点所对应的子集相离.
7. Clebsch 图, 系数为 $(16,10,6,6)$. 这是证明末段 $\mu=6$ 情形所对应的结果, 其形如下.



8. Schläfli 图, 系数为 $(27, 16, 10, 8)$. 这是证明末段 $\mu = 8$ 情形所对应的结果. 善洞若观火, 明察秋毫者可领会 Schläfli 图中任意一点的邻域 (16个点) 导出 Clebsch 图之补图. Schläfli 图附于文末.

参考文献

[1] Douglas B. West. *Introduction to Graph Theory.* Pearson Education, Inc., 221 River Street Hoboken, NJ 07030 U.S.A., 2002.

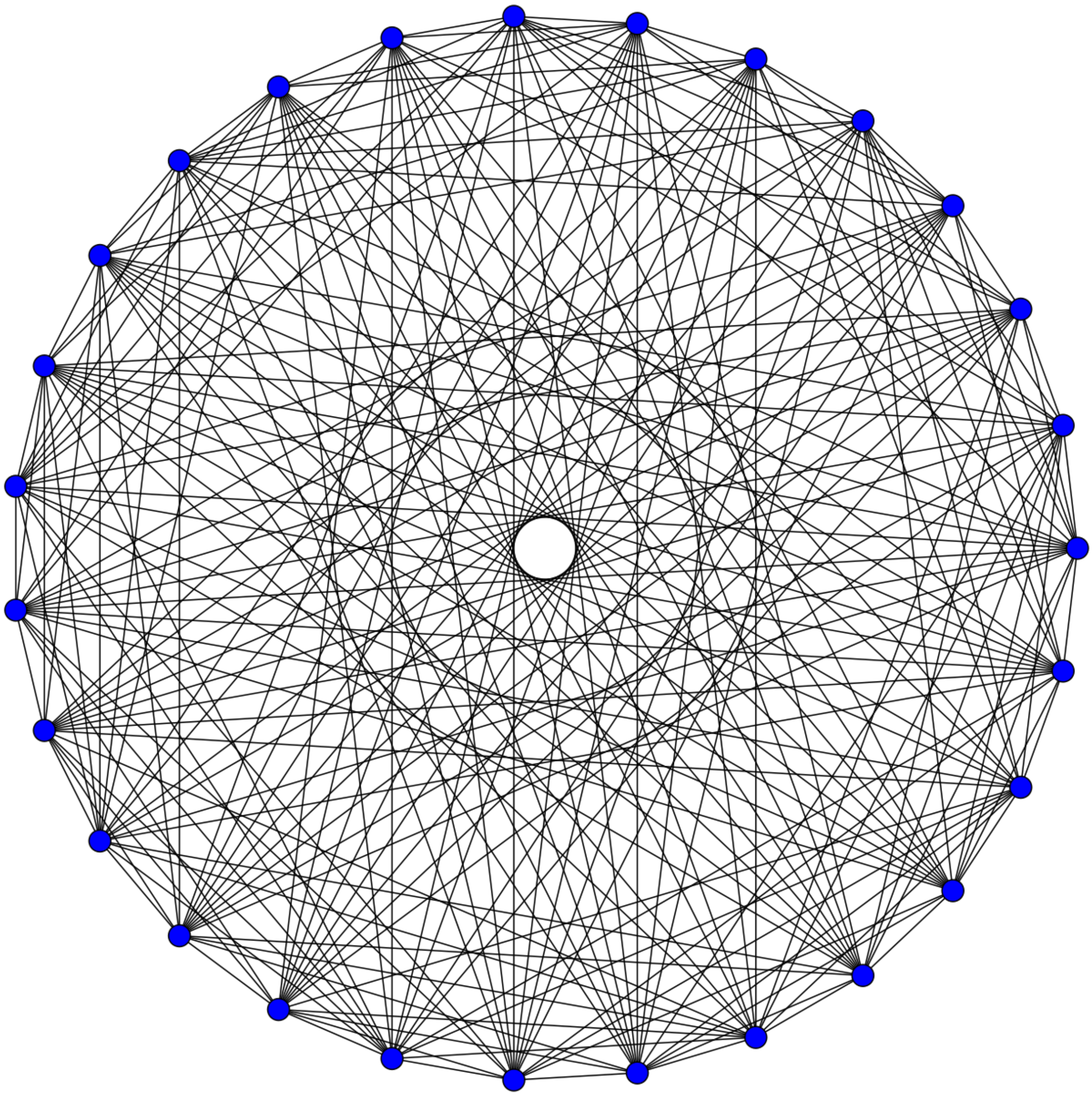
[2] Slobodan Simić, Dragoš Cvetković, Peter Rowlinson. *An Introduction to the Theory of Graph Spectra.* Cambrige University Press, The Edinburgh Building, Cambridge CB2 8RU, U.K., 2002.

[3] G.F. Royle C. Godsil. *Algebraic Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics, 207)*. Springer Publishing Company, Inc., New York, U.S.A., 2002.

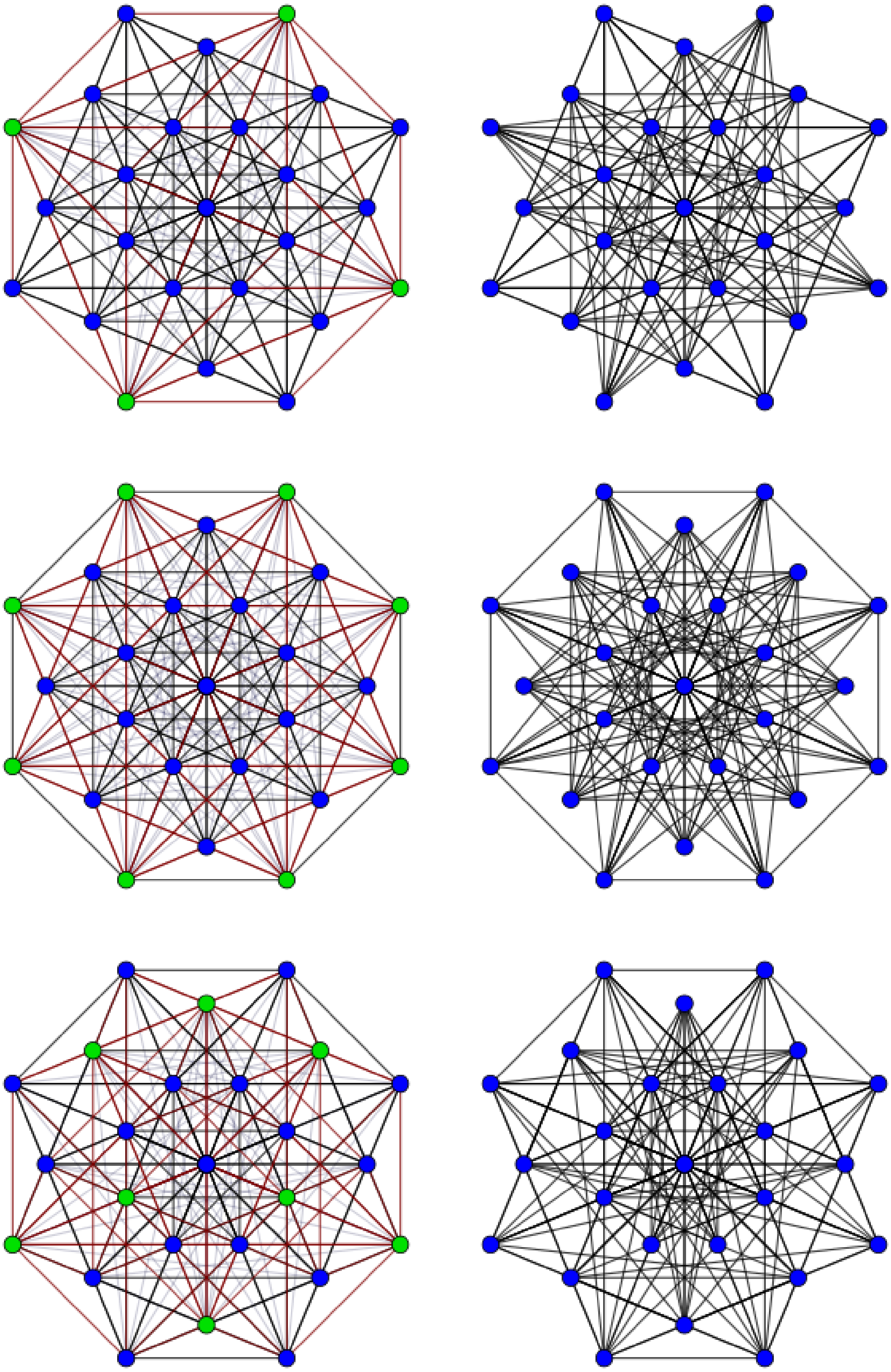
[4] Daniel Bump. *Lie Groups (Graduate Texts in Mathematics, 136)*. Springer Publishing Company, Inc., New York, U.S.A., 2013.

[5] Andries E. Brouwer, Hendrik Van Maldeghem, *Strongly regular graphs*, a preprint downloaded 2021-06-17 from Here, listed as fragments of a text on strongly regular graphs in section 2021 of This.

附图



Schläfli图



Chang图