# 图谱论导引(第十期)

> 前两期文章介绍图计数, 极值图论, 并由此引申至染色相关定理. 本期将回归教材主线, 介绍二分图, 正则图等图的判定条件.

## 正则图的等价判定条件

记$\Delta := \max_{v\in V(G)} \deg v$, $\delta := \max_{v\in V(G)} \deg v$, $\overline{d} := \dfrac{\sum_{v\in V(G)} \deg v}{|V(G)|}$, 则$\delta \le \overline{d} \le \Delta$. 今试问: $\lambda_1$如何排序? 自然, $\lambda_1 \le \Delta$. 根据Rayleigh定理,

$$\lambda_1 := \sup_{\|x\|=1} x^T A(G) x.$$

代入$x = \dfrac{1}{\sqrt{|V|}}\mathbf{1}_{|v|}$则有$\delta \le \overline{d} \le \lambda_1 \le \Delta$. 自然, $\delta = \overline{d}$或$\overline{d} = \Delta$时$G$必正则. 以下为若干等价条件:

- $\lambda_1 = \Delta$若且仅若$G$正则.
  提示: (必要性)对任意特征向量$x$, 不妨设$|x_u| = \|x\|_\infty$. 则$|\lambda_1||x_u| \le \sum_{v\sim u} |x_v| \le \Delta(G)|x_u|$. 取等若且仅若$G$正则.
- $\lambda_1 = \overline{d}$若且仅若$G$正则.
  提示: (必要性)当$\overline{d}$为特征值时, $\mathbf{1}$必为其特征向量. 从而$G$正则. 检验得$\lambda_1$恰为$\overline{d}$.
- $n\lambda_1 = \sum_i \lambda_i^2$若且仅若$G$正则.
  提示: 注意到$\sum_i \lambda_i^2 = \mathrm{trace}(A^2) = \sum_v \deg v$即可.

## 二部图的等价判定条件

注意到二部图的邻接矩阵始终为$\begin{pmatrix} O & A^T \\ A & O \end{pmatrix}$形式, 从而$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$为特征值为$\lambda$的特征向量若且仅若$\begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix}$为特征值为$-\lambda$的特征向量. 故有如下断言:

- $G$为二部图若且仅若$\lambda_1 = -\lambda_n$.
- $G$为二部图若且仅若$G$的谱关于0对称.

下只需证明第一条的充分性. 此前有引理一则:

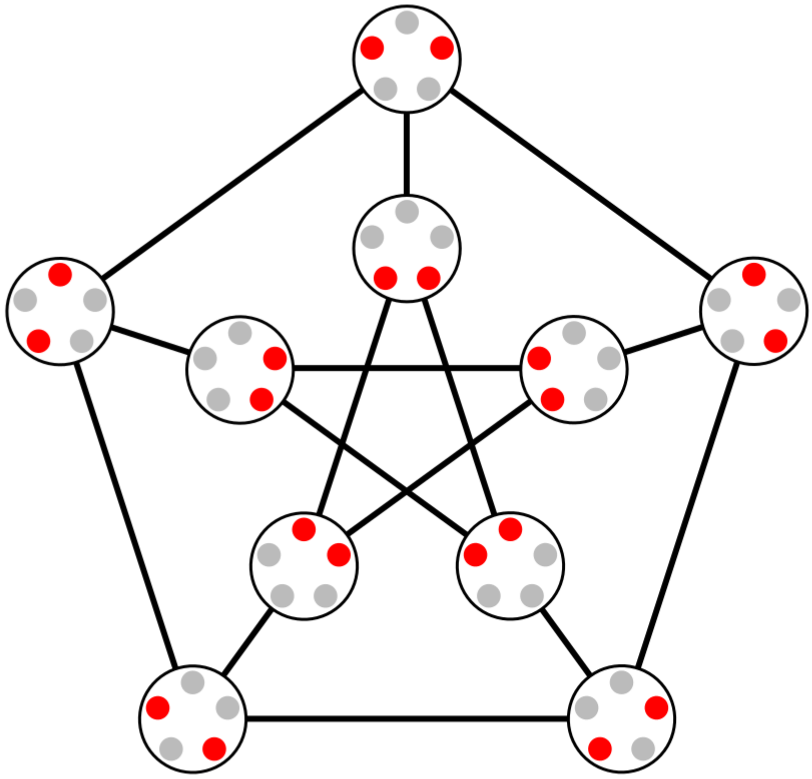
> 称作实对称矩阵$M$可约, 若且仅若存在置换矩阵(permutation matrix)$P$使得$P^{-1}MP$为$\begin{pmatrix} M_1 & O \\ O & M_2 \end{pmatrix}$形式. 例如$A(G\dot\cup H)$可约. 若$M$不可约且非负, 则$M$的最大特征值重数为$1$.
>
> 证明: 设$x$为$\lambda_1$对应的特征向量. 若$M$最大特征值重数不为一, 则可不妨$x$中元素有正有负, 记作$\dfrac{x^T M x}{x^T x} = \lambda_1$. 令$y = (|x_1|, \ldots, |x_n|)$, 则$\lambda_1 \ge \dfrac{y^T M y}{y^T y} \ge \dfrac{x^T M x}{x^T x} = \lambda_1$, 从而$k_1(x+y)$与$k_2(x-y)$均为特征向量, $k_1$与$k_2$为固定常数. 由于$(x+y) \perp (x-y)$. 是故$M$可约.

若$\lambda_1 = \lambda_n$, 则$A^2$的最大特征值重数不唯一. 从而$A^2$可约, 不妨设为$\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$. 观察得$A$中存在两类点集(分别由$A_1$与$A_2$之序标对应)使得其间不存在长度为2的走步, 即$A$为二部图.

## 围长与偶图

若连通的简单图$G$不包含任何$C_n(\forall n\geq 3)$, 则称$G$为树(tree). 树对图论, 组合学, 计算机科学等学科至关重要; 本文以篇幅故暂不对树深入探讨. 若对某一正整数$n\geq 3$, 图包含某一$C_n$, 则称$G$为有圈图. 其中, $n$之下确界称作围长(girth). 显然, (非树)的二部图围长为偶数.

偶图$O_n := KG(2n-1,n-1)$系一类特殊的Kneser图. 根据定义, 偶图$O_n$之顶点本质上等同于$\mathbb{Z}_{2n-1}$之一切$n-1$元子集, 对应的顶点相连若且仅若两子集之交为空. 可观察到$O_2\cong K_3$, $O_3$同构于Petersen图



偶图之围长应分情况计算, 其中

1. $n=2$时, $O_2\cong K_3$之围长显然为3.
2. $n=3$时, $O_3$即Petersen图之围长应至少为5(相邻点无邻点, 非相邻两点有且仅有一个邻点). 是故从图中国寻找$C_5$子图即可.
3. $n\geq 4$时, 构造集合$\{1,\dots,n-1\}$, $\{n,\dots,2n-2\}$, $\{2n-1,1,\dots,n-2\}$, $\{n-1,\dots,2n-3\}$, $\{2n-2,\dots,n-3\}$, $\{n,\dots,2n-1\}$即可知围长至多为6. 下仅需检验围长不为5, 4, 3即可. 若图中存在$C_5$, 则对应的五个顶点分别使用了$5(n-1)$个数字, 且每一数字至多出现两次, 因此$5(n-1)\leq 2(2n-1)$,即$n\leq 3$. 同理上述计算可知, 图中不应包含$C_3$与$C_4$.

## 奇围长

能否通过特征多项式相关系数计算围长? 注意到偶数次闭合漫步可能是对某对无圈漫步的折返, 而奇数次闭合漫步必定包含了一个圈, 故研究奇围长相对容易许多. 根据牛顿多项式相关定理, 设$P_G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_ix^i$, $G$之奇围长为$2n-1$若且仅若对任意$l\leq n+1$都有$c_{2l-1}=0$且$c_{2n-1}\neq 0$. 回顾公式

$$c_i=\sum_{H\in\mathcal{H}_i}(-1)^{p(H)}2^{c(H)}.$$

其中$\mathcal{H}_i$表示了一切顶点数为$i$的$G$的基本子图(即一切圈与若干$K_2$的无交并), $p(H)$为部件数量, $c(H)$为圈数. 不妨设$2m-1$为最小奇圈之长度, 则最小奇圈之数量为$-\dfrac{c_{2m-1}}{2}$.