1 记号说明

定理 1 (代数基本定理)**.** 记多项式 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ 的次数为 $\deg f$, 则对任意 $c \in \mathbb{C}[x]$, 方程 $f(x) = c$ 有 $\deg f$ 个根 (含重数).

约定 1. 取多项式 $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, 记 $\deg f(x) = n$, 称 $f(x) = 0$ 解集为 n 个 (含重数) 使得 f 取值为 0 的点的无交并.

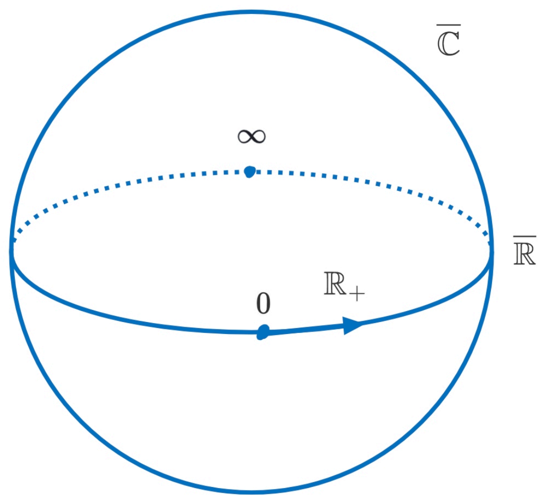
例 1. 例如 $f(x) = (x-1)^2(x-2)$ 的零点集为无交并 $\{2\} \sqcup \{1\} \sqcup \{1\}$, 简写作 $\{1, 1, 2\}$.

定理 2. 取系数含参 α 的多项式 $f_\alpha(x) \in \mathbb{C}(\alpha)[x]$, 其中

$$f_\alpha(x) = \sum_{0 \le k \le n} c_k(\alpha) x^k,$$

$c_k(\alpha)$ 均为含 α-有理函数. 则存在曲线 $\{\gamma_i(\alpha)\}_{1 \le i \le n}$ 使得 $\{\gamma_i(\alpha_0)\}_{1 \le i \le n}$ 恰为 $f_{\alpha_0}(x) = 0$ 的所有根, 且曲线 $\{\gamma_i(\alpha)\}_{1 \le i \le n}$ 在 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus c_n^{-1}(0)$ 上连续, 并在除去有限个点的 $\mathbb{R}$ 的子区间中内闭一致连续.

定义 1. 定义 $\mathbb{C}$ 的单点紧化为球 $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, 赤道面为 $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. 如下图所示



约定 2. 取 $g \in \mathbb{C}[x]$, $n = \deg g$. 兹有约定: 对于任意 $m > n$, g 作为 m 次多项式有 $m - n$ 重根 ∞.

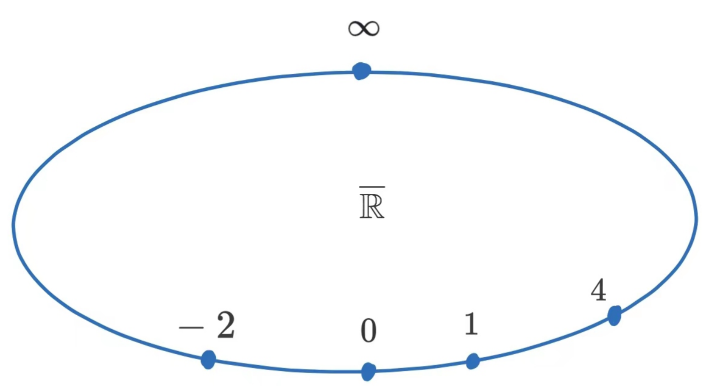
例 2. 记 $f_\alpha(x) := x(\alpha x - 1)$, 则 f 作为二次多项式, 其根集为 $\{\alpha^{-1}, 0\}$. 此处 $0^{-1} = \infty$.

约定 3 (相邻序)**.** 对有限集合 (元素两两不等) $S \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, 记 $\{\frac{-1}{n}\}_{n \geq 1}$ 的收敛方向为赤道正向. 对任意相邻的 $x, y \in S$, 称 $x \leqq y$ 若且仅若 y 位于 x 的正向.

例 3. 例如 $S = \{1, -2, 4, \infty, 0\}$, 则

$$\infty \leqq -2 \leqq 0 \leqq 1 \leqq 4 \leqq \infty.$$

如下图所示



定义 2 (开区间)**.** $\forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}$, $x \neq y$, 定义开区间

$$(x, y) := \{\alpha \in \overline{\mathbb{R}} \mid x \leqq \alpha \leqq y\}.$$

同理定义闭区间与半开闭区间.

定理 3. 取系数含参 α 的 n 次多项式 $f_\alpha(x) \in \mathbb{C}(\alpha)[x]$, 其中

$$f_\alpha(x) = \sum_{0 \leq k \leq n} c_k(\alpha) x^k,$$

$c_k(\alpha)$ 均为含 α-有理函数. 则存在曲线 $\{\gamma_i(\alpha)\}_{1\leq i\leq n}$ 使得 $\{\gamma_i(\alpha_0)\}_{1\leq i\leq n}$ 恰为 $f_{\alpha_0}(x) = 0$ 的所有根, 且在通常球面度量的意义下, 曲线 $\{\gamma_i(\alpha)\}_{1\leq i\leq n}$ 在 $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ 时均为连续的闭曲线, 并在某一除去有限个点的 $\overline{\mathbb{R}}$ 的子区间中内闭一致连续.

2 交错根定理

定理 4 (交错根定理)**.** 若 f 与 g 均为 n 次实多项式, 其根均为实数. 记 f 的根为

$$r_1 \leqq r_2 \leqq \cdots \leqq r_n \leqq r_1,$$

记 g 的根为

$$s_1 \leqq s_2 \leqq \cdots \leqq s_n \leqq s_1.$$

若满足交错根条件, 即

$$r_1 \leqq s_1 \leqq r_2 \leqq s_2 \leqq \cdots \leqq r_n \leqq s_n \leqq r_1,$$

则对任意 $\alpha \in \mathbb{R}$, $f+\alpha g$ 作为 n 次多项式在 $\overline{\mathbb{R}}$ 上有 n 个相异的根.

证明. 考虑 $h_t = tf + (1-t)g$ $(0 \leq t \leq 1)$, 则根据引理, h_t 的根为 n 条 $\overline{\mathbb{C}}$ 上一致连续 (采用球面通常度量) 的曲线之并, 记曲线为 $l_i := \gamma_i([0,1])$, $1 \leq i \leq n$.

可以发现, 这些曲线有如下性质:

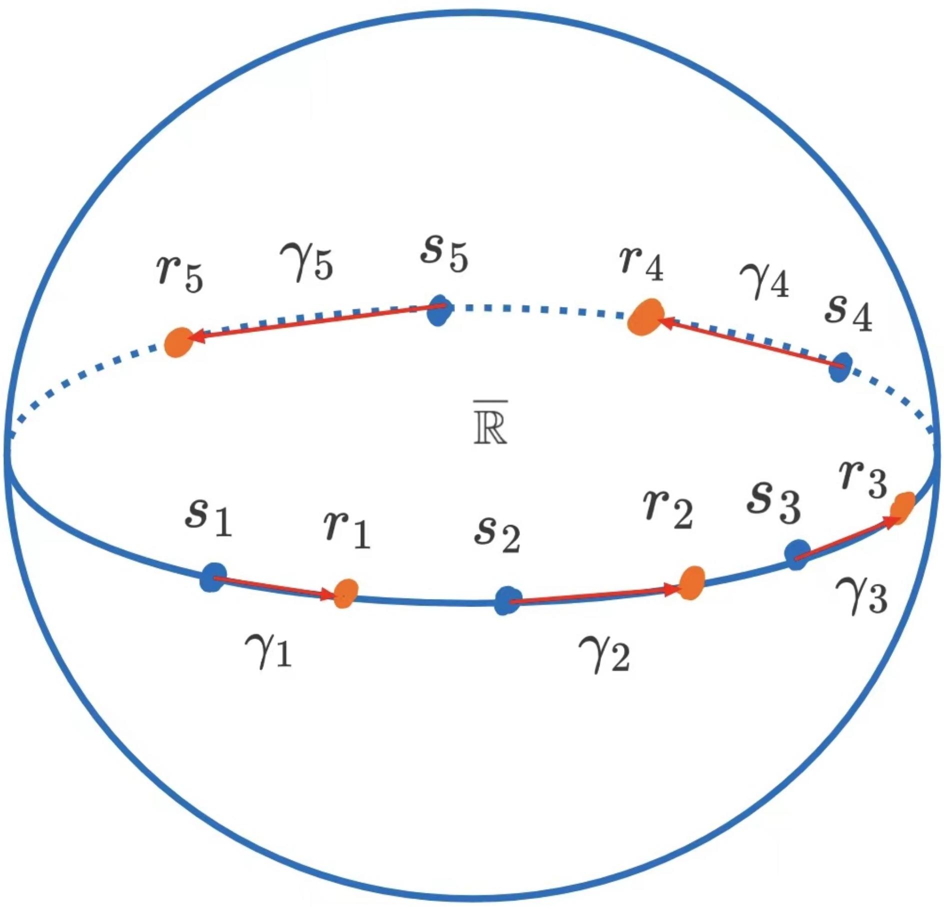
1. 不妨设 $\gamma_i(0) = s_i$, 则存在置换 $\sigma \in S_n$ 使得 $\gamma_i(1) = r_{\sigma(i)}$.
2. 对任意 $t = t_0$, $\{\gamma_1(t_0), \ldots, \gamma_n(t_0)\}$ 关于赤道对称.
3. 对任意 $t \in (0,1)$ 与 γ_i, $\gamma_i(t)$ 不为任一 f 或 g 的

根; 反之 f 与 g 有相同的根, 与题设矛盾.

根据定理 3 以及赤道对称性, 存在 $\varepsilon \in (0,1)$ 使得 $\bigcup_{1\leq i\leq n}\gamma_i([0,\varepsilon])$ 为 n 条 $\overline{\mathbb{R}}$ 上弧线的无交并. 考查所有符合上述条件的 ε, 存在上确界 $\varepsilon_0 \in (0,1]$.

兹有断言 $\varepsilon_0 = 1$. 若不然, 存在 $i < j$ 使得 $\gamma_i([0,\varepsilon_0]) \cap \gamma_j([0,\varepsilon_0]) \neq \emptyset$. 根据连续性, $\gamma_i(t)$ 与 $\gamma_j(t)$ 在 $t \in [0,\varepsilon_0]$ 时均位于赤道, 而交错根条件表明某一 $\gamma(t)$ 在 $t \in (0,1)$ 时业已通过 f 的一根, 矛盾.

由上述可知 h_t 在 $t \in [0,1]$ 时恒有 n 个两两不交的根, σ 为恒等映射或轮换 $\binom{1\,2\cdots n}{2\,3\cdots 1}$. 如下图所示.



□

Corollary 4.1. 记 $f+\alpha g$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ 的解曲线为 $\{\gamma_i'(\alpha)\mid\alpha\in\mathbb{R}\}_{1\le i\le n}$, 证明恰有

$$\left(\bigsqcup_{1\le i\le n}\bigsqcup_{\alpha\in\mathbb{R}}\gamma_i'(\alpha)\right)\cup\{s_i\}_{1\le i\le n}=\overline{\mathbb{R}}.$$

即, 每一 γ_i' 不走回头路, 且所有 $\gamma_i'(\mathbb{R})$ 的无交并恰为 $\overline{\mathbb{R}}$ 去掉 g 的解集.

Corollary 4.2. 令上式中 n 次多项式 g 的一根为 ∞, 即视 g 为通常意义下 $n-1$ 次多项式, 则有以下推论.

若对任意 $\alpha\in\mathbb{R}$, $f+\alpha g$ 均有 n 个两两不同的实根, 则当且仅当以下两点同时成立.

- $\deg f=\deg g+1$,
- $(x-\infty)\cdot g$ 与 f 作为 n 次多项式有交错的根.

定义 3 (分岔区间)**.** 取 $f,g\in\mathbb{R}[x]$ 为有 n 个不等实根的 n 次多项式, 且 f 与 g 无重根. 若 f 与 g 的根在 $\leqq$ 关系下有且仅有两处不交错 (形如 $r_i\leqq r_j$ 或 $s_i\leqq s_j$), 则称如上不交错的区间为分岔区间.

例 4 ($(x^2-1)+\alpha(4-x^2)$ 的分岔现象)**.** 取 $f=$

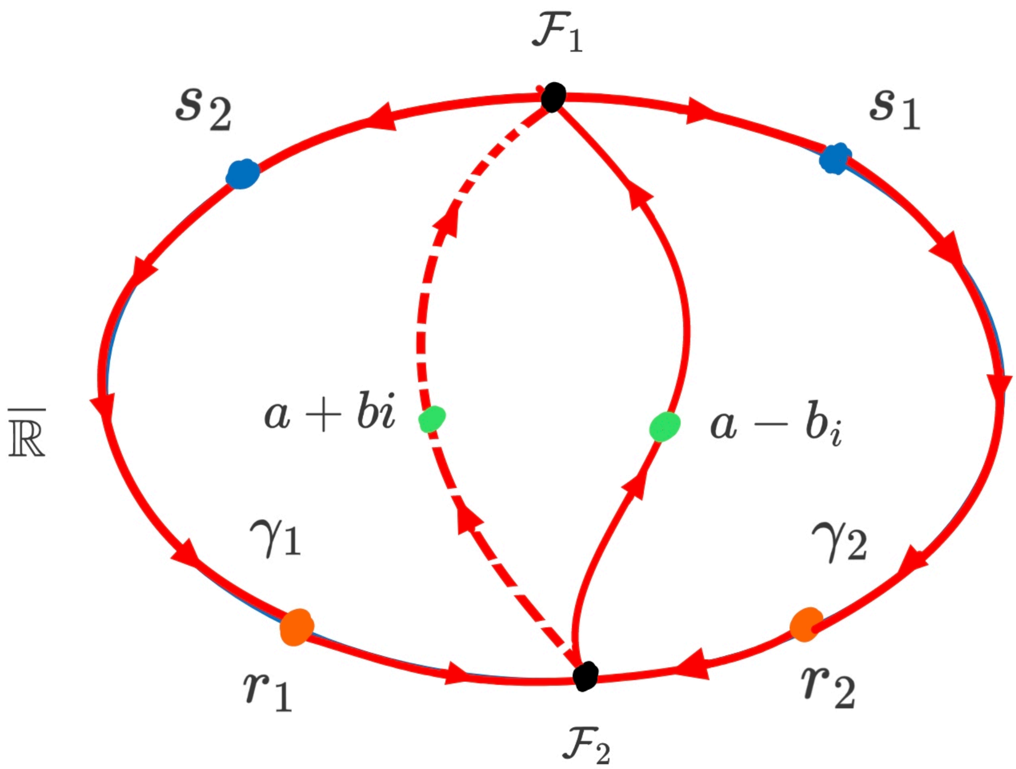
(x^2-1), $g=(4-x^2)$, 则有根

$$r_1 \leqq r_2 \leqq s_1 \leqq s_2.$$

并有

1. $\frac{1}{4} \leqq \alpha \leqq 1$ 时, $f+\alpha g$ 有两个共轭复根,
2. $1 \leqq \alpha \leqq \frac{1}{4}$ 时, $f+\alpha g$ 在 $\overline{\mathbb{R}}$ 上有两个不等的根.
3. $\alpha \in \{\frac{1}{4}, 1\}$ 时, $f+\alpha g$ 有重根.

相应的 $\gamma_1(\alpha)$ 与 $\gamma_2(\alpha)$ 如下图所示, 其中 $\gamma_i(0)=r_i$.



图中 $\gamma_i(\frac{1}{4})=\mathcal{F}_1$ 与 $\gamma_i(1)=\mathcal{F}_2$ 分别为分岔起起点与分岔终点.

定义 4 (分岔)**.** 称区间 (x,y) 为一次分岔, 若存在 $i \neq j$ 使得

1. $\gamma_i(x) = \gamma_j(x)$, $\gamma_i(y) = \gamma_j(y)$;

2. $\gamma_i(\alpha) = \overline{\gamma_j(\alpha)}$, $\forall \alpha \in (x, y)$.

例 5. 取各根为实数的实系数多项式 $f = \prod_{k=1}^{4}(x - r_k)$ 与 $g = \prod_{k=1}^{4}(x - s_k)$. 若满足

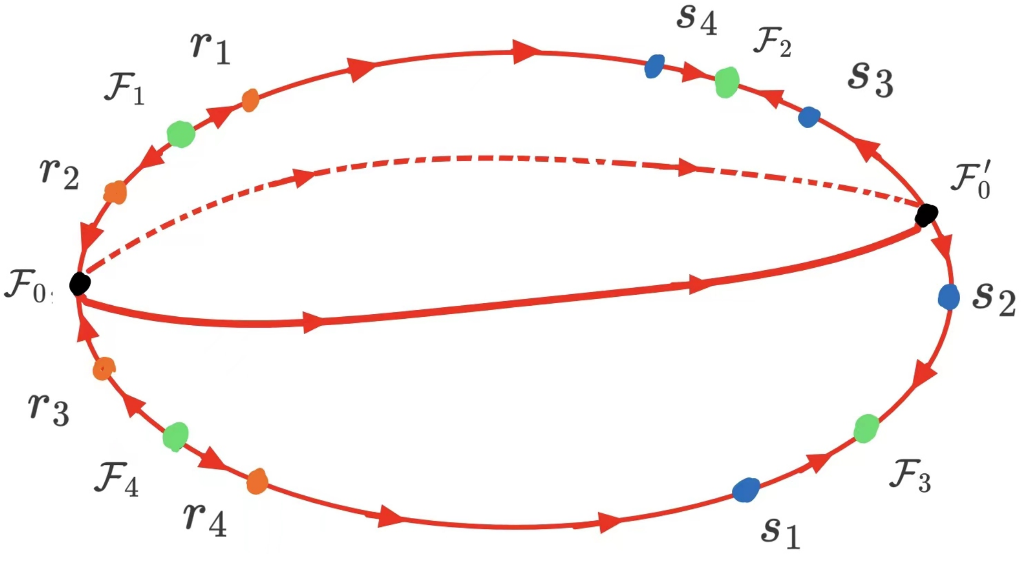
$$r_1 \leqq r_2 \leqq r_3 \leqq r_4 \leqq s_1 \leqq s_2 \leqq s_3 \leqq s_4 \leqq r_1,$$

我们断言存在 $a \leqq b \leqq c \leqq d$ 使得

- $a \leqq \alpha \leqq b$ 或 $c \leqq \alpha \leqq d$ 时, $f + \alpha g$ 有四个两两不同的实根,
- $b \leqq \alpha \leqq c$ 时, $f + \alpha g$ 有且仅有两个共轭复根与两个两两不同的实根.

换言之, $\overline{\mathbb{R}}$ 上有一段孤立的开区间使得 $f + \alpha g$ 有且仅有两个不同的实根, 且 $f + \alpha g$ 在该区间端点外的某段邻域内有四个实根.

证明. 考虑如下分岔图



注意到区间 (r_{i-1}, r_i) 与 (r_i, r_{i+1}) 中分岔点一者为起点, 另一者为终点. 从而 $\mathcal{F}_0$ 与 $\mathcal{F}_0'$ 构成一个分岔区间, 不妨记作 (b, c). 而 $\mathcal{F}_1$ 与 $\mathcal{F}_2$ (或相应地, $\mathcal{F}_3$), $\mathcal{F}_4$ 与 $\mathcal{F}_3$ (或相应地, $\mathcal{F}_2$) 构成另外两个分岔区间. 上图中

$$(b, c) \subseteq (0, \infty) =: (a, d)$$

即为所求. $\square$

定理 5 (交错根定理)**.** 取有 n 个不等实根的实系数多项式 $f = \prod_{k=1}^n (x - r_k)$ 与 $g = \prod_{k=1}^n (x - s_k)$, 若 f 与 g 的根在 $\leqq$ 关系下出现了 n_m 个形如

$$s_j \leqq r_i \leqq r_{i+1} \leqq \cdots \leqq r_{i+m} \leqq s_l$$

的式子, 则 $f + \alpha g$ 至少有

$$\max\left\{0, n - \sum_{m \geq 1} n_m \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor\right\}$$

个实根.

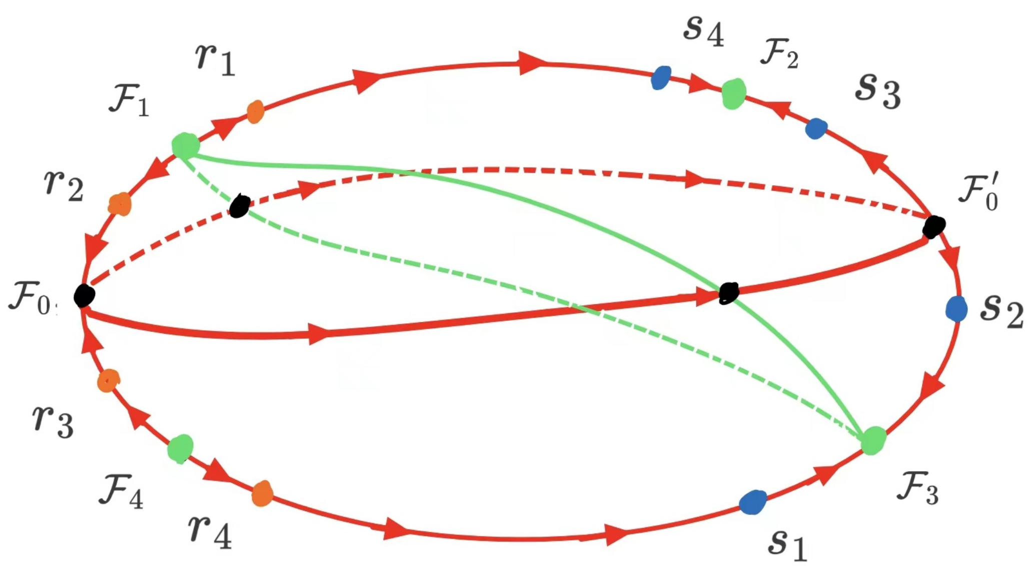
特别地, 记 $r_1 \leqq r_2 \leqq \cdots \leqq r_n$, 记 $(\{s_i, r_i\}, \leqq)$ 关系下 (r_t, r_{t+1}) 之间的 $\leqq$ 数为 N_t (约定 $r_i = r_{i+n}$),

则 $f+\alpha g$ 至少有

$$\frac{1}{2}\max\left\{0, n-\left|\sum_{t=1}^{n}(-1)^{t+N_1+\cdots+N_t}\right|\right\}$$

个实根.

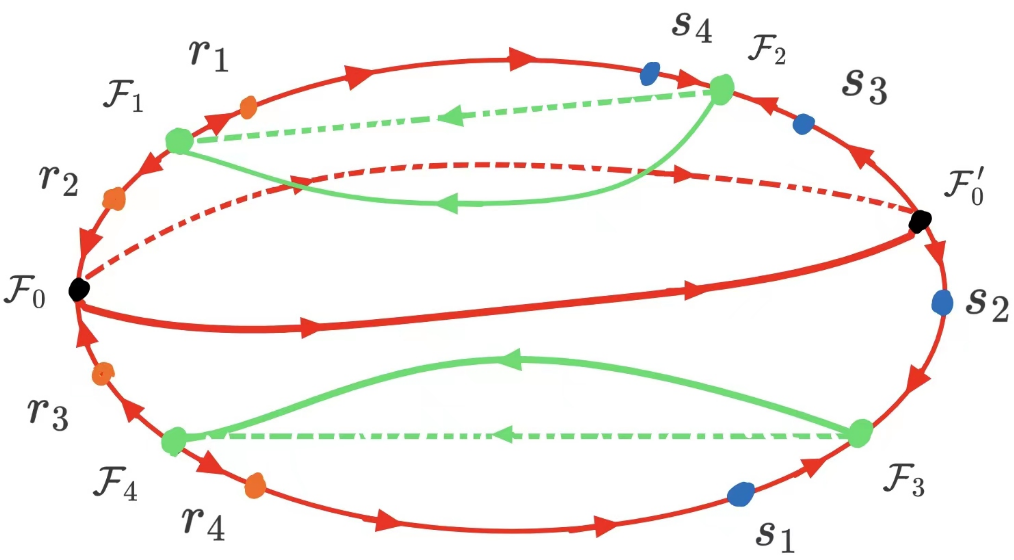
例 6. 实际上, 例 5 中的 $\mathcal{F}_1$ 只能与 $\mathcal{F}_2$ 构成分岔区间. 若 $\mathcal{F}_1$ 与 $\mathcal{F}_3$ 构成分岔区间, 则下图中红线与绿线交叉.



从而存在 $\alpha_1 \neq \alpha_2$ 使得 $f+\alpha_1 g$ 与 $f+\alpha_2 g$ 有重根. 此时 f 与 g 有重根, 矛盾.

定理 6 (单参数根曲线)**.** 根据 6 中的结论, 不难发现 $\{\gamma_i\}_{1\leq i\leq n}$ 将 $\overline{\mathbb{C}}$ 划分为 N 个定向单连通开区间. 特别地, $\{\gamma_i\}_{1\leq i\leq n}$ 在 $\overline{\mathbb{C}}$ 上生成的定向图可按照 $\frac{\mathrm{d}(\gamma_i(\alpha))}{\mathrm{d}\alpha}$ 的方向一笔画, 称之单参数根曲线, 记作 r_0.

例 7. 以下图为例.



$\{\gamma_i\}_{1\leq i\leq 4}$ 划分出四个对连通区间, 按边缘定向列出如下

- $\mathcal{F}_1 \to r_1 \to s_4 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_1$,
- $\mathcal{F}_1 \to r_2 \to \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_0' \to s_3 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_1$,
- $\mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_0' \to s_2 \to \mathcal{F}_3 \to \mathcal{F}_4 \to r_3 \to \mathcal{F}_0$,
- $\mathcal{F}_4 \to r_4 \to s_1 \to \mathcal{F}_3 \to \mathcal{F}_4$.

可选择单参数根曲线, 使得依次经过

$$\mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_0' \to \mathcal{F}_3$$
$$\to \mathcal{F}_4 \to \mathcal{F}_3 \to \mathcal{F}_4 \to \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_0' \to \mathcal{F}_2.$$