丛代数一瞥

Remark 本文仅草率地引入若干例子, 以介绍丛代数中的初等议题. 例如以下例子

Example 0.1 考虑序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$, 其中

- $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 1$;
- $x_{n+4} = \dfrac{x_{n+1}x_{n+3} + x_{n+2}^2}{x_n}$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$.

序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ 被称为 Simos-4 序列, 其前几项为

$$1, 1, 1, 1, 2, 3, 7, 23, 59, 314, 1529, 8209, 83313, 620297, 7869898, \ldots$$

Theorem 0.2 我们观察到 Simos-4 序列为正整数序列. 证明从略.

Frieze 铺砌

Definition 1.1 定义 n 阶 Frieze 铺砌为以下 $n+1$ 横行组成的周期数组,

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots & & \\
{\color{red}a_1} & & {\color{red}a_2} & & {\color{red}a_3} & & {\color{red}\cdots} & & {\color{red}a_{n-1}} & & {\color{red}a_n} & & {\color{blue}\boxed{z_1}} & & {\color{red}a_2} & & {\color{red}\cdots} & \\
 & {\color{red}b_1} & & {\color{red}b_2} & & {\color{red}\cdots} & & {\color{red}b_{n-2}} & & {\color{red}b_{n-1}} & & {\color{blue}\boxed{y_1}} & & {\color{blue}\boxed{y_2}} & & {\color{red}\cdots} & & \\
{\color{blue}\boxed{\cdots}} & & {\color{red}\ddots} & & {\color{red}\ddots} & & {\color{red}\ddots} & & {\color{red}\ddots} & & {\color{blue}\boxed{\ddots}} & & {\color{blue}\boxed{\ddots}} & & {\color{blue}\boxed{\ddots}} & & {\color{red}\cdots} & \\
 & {\color{blue}\boxed{\ddots}} & & {\color{red}x_1} & & {\color{red}x_2} & & {\color{red}x_3} & & {\color{blue}\boxed{c_1}} & & {\color{blue}\boxed{\cdots}} & & {\color{blue}\boxed{c_{n-3}}} & & {\color{blue}\boxed{c_{n-2}}} & & \\
{\color{blue}\boxed{\cdots}} & & {\color{blue}\boxed{\cdots}} & & {\color{red}y_1} & & {\color{red}y_2} & & {\color{blue}\boxed{b_1}} & & {\color{blue}\boxed{b_2}} & & {\color{blue}\boxed{\cdots}} & & {\color{blue}\boxed{b_{n-2}}} & & {\color{blue}\boxed{b_{n-1}}} & \\
 & {\color{blue}\boxed{\cdots}} & & {\color{blue}\boxed{\cdots}} & & {\color{red}z_1} & & {\color{blue}\boxed{a_1}} & & {\color{blue}\boxed{a_2}} & & {\color{blue}\boxed{\cdots}} & & {\color{blue}\boxed{\cdots}} & & {\color{blue}\boxed{a_{n-1}}} & & {\color{blue}\boxed{a_n}} \\
\cdots & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots &
\end{array},$$

其中

- 首末两行为 0, 次首末两行为 1, 即 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = z_1 = 1$;
- 除首末两行, 一切元素为正整数;
- 蓝色(框内)三角形的第 k 行与红色(未框出)三角形的第 $n+1-k$ 行相等;
- 任一 2×2 的 $\diamond$ 形数阵等同于 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z})$ 中的某一元素, 即

$$\forall \boxed{\begin{array}{ccc} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{array}}, \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1.$$

Example 1.2 以下为某一 7 阶 Frieze 铺砌

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccc}
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & \boxed{1} & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
\boxed{1} & & 2 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & & 4 & & 1 & & 2 & & 2 & & 3 & & 1 \\
 & \boxed{1} & & 3 & & 5 & & 2 & & 1 & & 7 & & 3 & & 1 & & 3 & & 5 & & 2 & \\
2 & & \boxed{1} & & 7 & & 3 & & 1 & & 3 & & 5 & & 2 & & 1 & & 7 & & 3 & & 1 \\
 & \boxed{1} & & 2 & & 4 & & 1 & & 2 & & 2 & & 3 & & 1 & & 2 & & 4 & & 1 & \\
1 & & \boxed{1} & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 &
\end{array}.$$

Definition 1.3 称 Frieze 铺砌含有丛, 若且仅若次首与次末行被若干 1 相连. 例如 **Example 1.4** 所表示的 Frieze 铺砌包含丛 (连接次首末两行的某些 1 被框出).

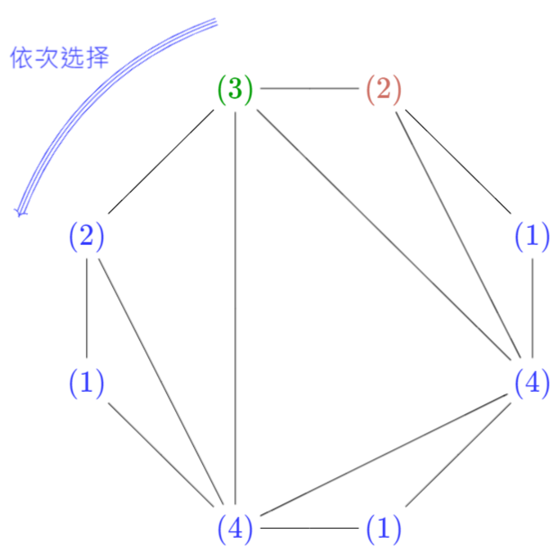
Example 1.4 实际上, 我们可以求出 n 阶 Frieze 铺砌的所有形式. 如 $n=5$ 时待定系数如下

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
a & & \frac{b+1}{a} & & \frac{a+1}{b} & & b & & \frac{a+b+1}{ab} & & a \\
 & b & & \frac{a+b+1}{ab} & & a & & \frac{b+1}{a} & & \frac{a+1}{b} & \\
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 &
\end{array}.$$

注意到构成 cluster 若且仅若 $\frac{b+1}{a}$ 与 $\frac{a+1}{b}$ 均为整数, 从而解得

$$(a,b)=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}.$$

Theorem 1.5 n 阶 Frieze 铺砌的第三行同构于正 n 边形三角化后个顶点处三角形数量之总和之排列.



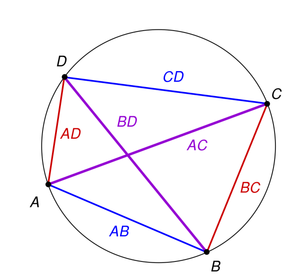
$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
 & 3 & & 2 & & 1 & & 4 & & 1 & & 4 & & 1 & & 2 \\
5 & & 5 & & 1 & & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
 & 8 & & 2 & & 2 & & 2 & & 8 & & 2 & & 2 & & 2 \\
3 & & 3 & & 3 & & 1 & & 5 & & 5 & & 1 & & 3 & \\
 & 1 & & 4 & & 1 & & 2 & & 3 & & 2 & & 1 & & 4 \\
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

🔗链接

证明见此处.

Theorem 1.6 正 m 边形两两不同的三角化方法数为 $\frac{1}{m-1}\binom{2m-4}{m-2}$.

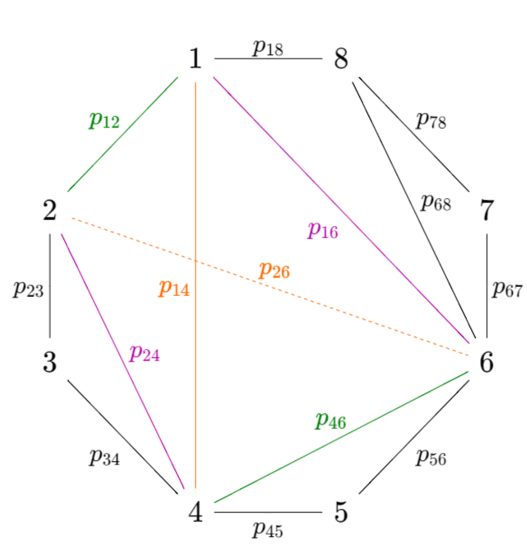
Theorem 1.7 (**Ptolemy**) 右图系圆内接四边形, 则



$$|AD|\cdot|BC|+|AB|\cdot|CD|=|AC|\cdot|BD|.$$

此处 $|AD|$ 即通常意义下的边长. 证明见任意一本平面几何教程.

Theorem 1.8 Frieze 铺砌满足 Ptolemy 对应, 例如下图中 $p_{12}p_{46}+p_{16}p_{24}=p_{14}p_{26}$.



$$\begin{array}{ccccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \\
p_{11}=1 & & p_{22}=1 & & p_{33}=1 & & p_{44}=1 & & 1 \\
 & p_{12}=3 & & p_{23}=2 & & p_{34}=1 & & p_{45}=4 & \\
5 & & p_{13}=5 & & p_{24}=1 & & p_{35}=3 & & p_{46}=3 \\
 & 8 & & p_{14}=2 & & p_{25}=2 & & p_{36}=2 & \\
3 & & 3 & & p_{15}=3 & & p_{26}=1 & & 5 \\
 & 1 & & 4 & & p_{16}=2 & & 2 & \\
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 &
\end{array}$$

🔗链接

Example 1.9 无穷维 Frieze 铺砌暂不在讨论之列, 例如

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccc}
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
& 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 \\
& 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & \\
4 & & 4 & & 4 & & 4 & & 4 & & 4 & & 4 & & 4 & & 4 & & 4 & & 4 & & 4 \\
& 5 & & 5 & & 5 & & 5 & & 5 & & 5 & & 5 & & 5 & & 5 & & 5 & & 5 & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}.$$

Definition 1.10 Grassmann 空间 $\mathrm{Gr}_{k,m}(\mathbb{R})$ 为 $\mathbb{R}^m$ 中 k 维子空间之集, 即商空间

$$\{A \in \mathbb{R}^{m\times k} \mid \mathrm{rank}(A) = k\}/\text{初等(纵)列变换}.$$

特别地, 可取代表元

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n-k,1} & \cdots & \cdots & a_{n-k,k} \end{pmatrix}.$$

从而可见同构 $\mathrm{Gr}_{k,m}(\mathbb{R}) \cong \mathrm{Gr}_{(m-k),m}(\mathbb{R})$.

Example 1.11 定义子空间 $\mathrm{Gr}^+_{2,m}(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{Gr}_{2,m}(\mathbb{R})$, 其中任意 $A \in \mathrm{Gr}^+_{2,m}(\mathbb{R})$ 的一切 2×2 子式行列式值均为正. 实际上, 判断 A 恒正与否所需的最少行列式值为 $2n-3$. 对任意 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$, 记 $p_{ij} = \det\begin{pmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{pmatrix}$, 则有关系

$$p_{ik}p_{jl} = p_{ij}p_{kl} + p_{il}p_{jk} \qquad (1 \le i < j < k < l \le m).$$

对照 **Theorem 1.8**, 计算 A 的所有 2×2 子式的行列式值仅需所有边(n 条)与三角化给出的对角线($n-3$ 条) 即可.

Definition 1.12 Example 1.11 中给出 $\mathrm{Gr}_{2,m}(\mathbb{R})$ 的一种恒正条件. 先定义 $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ 上的旗恒正条件如下, 记 $J = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$, 则 $A \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ 旗恒正若且仅若一切

$$\det\begin{pmatrix} a_{1,i_1} & a_{1,i_2} & \cdots & a_{k,i_k} \\ a_{2,i_1} & a_{2,i_2} & \cdots & a_{k,i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,i_1} & a_{k,i_2} & \cdots & a_{k,i_k} \end{pmatrix} > 0.$$

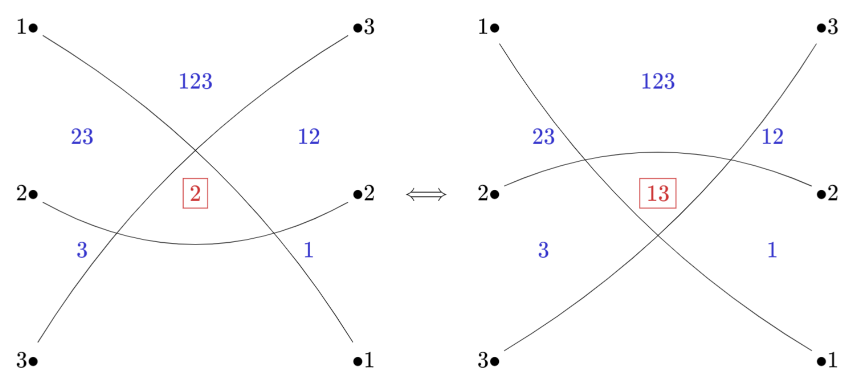
其中 $1 \le k \le n$, 不妨假定 $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$.

💡 **Remark** 可以注意到, $(\det(a_{t,i_t}) \mid 1 \le k \le n, J \subseteq \{1,\dots,n\})$ 在左乘 1-对角下三角矩阵下不变. 该性质可以联系 Lie 群半单表示.

Remark 称之旗恒正, 是因为对 $J_1 \subsetneq J_2 \subsetneq \cdots$, 限制在 $\{1, 2\dots, |J_k|\} \times J_k$ 上的子矩阵之列向量空间如旗帜般包含, 如

$$\mathrm{span}\{1\text{ 维的升旗台(点)}\} \subsetneq \mathrm{span}\{1\text{ 维旗杆}\} \subsetneq \mathrm{span}\{2\text{ 维旗面}\} \subsetneq \cdots.$$

Example 1.13 我们希望寻找刻画旗恒正关系的最少子矩阵数. 实际上, 观察变换



🔗链接

图中,

- 任意一张图左右两侧的黑点分别为 $\{1,\dots,n\}$ 的正序与倒序;
- 任意两条线有且仅有一个交点;
- 不存在交于一点的三条直线.

记 p_J 为 $\det(a_{k,i_l})_{1\le k,l\le |J|}$, 则有关系 $p_{\{1,3\}}p_{\{2\}} = p_{\{1,2\}}p_{\{3\}} + p_{\{2,3\}}p_{\{1\}}$. 从而旗恒正关系所需的最少子矩阵恰好等同于图中区域数量, 即 $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$.

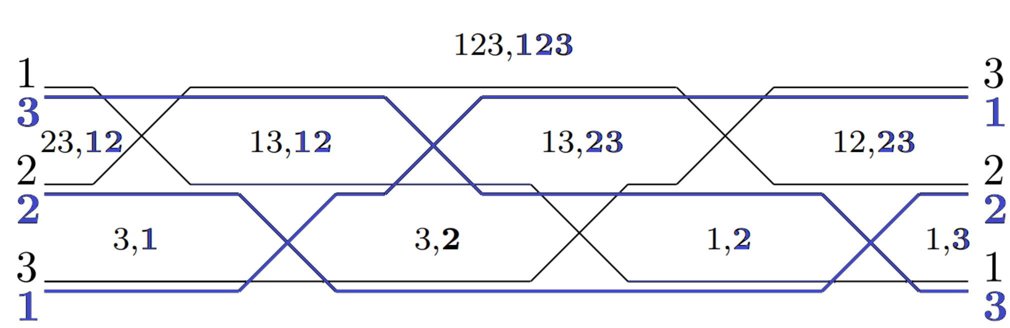
Theorem 1.14 (**Muir**) 若矩阵的某些子式(方阵)的行列式满足某些齐次恒等关系(如 $p_{\{1,3\}}p_{\{2\}} = p_{\{1,2\}}p_{\{3\}} + p_{\{2,3\}}p_{\{1\}}$), 则对于嵌入

$$\iota : U \hookrightarrow \tilde{U}, A \mapsto \begin{pmatrix} A & * \\ * & *_{R\times C} \end{pmatrix},$$

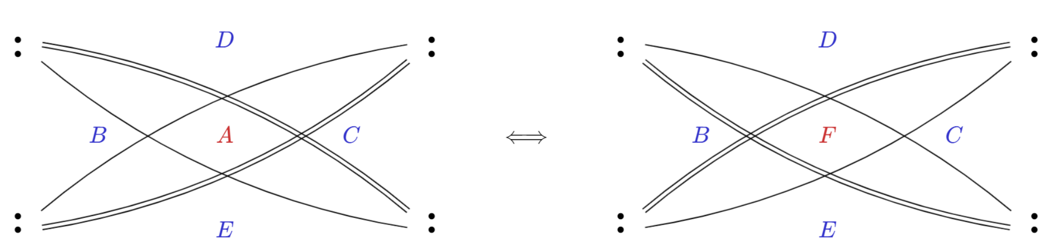
相应的恒等式在嵌入的空间中仍成立, 其中 $p_{I,J} \mapsto p_{I\dot\cup R, J\dot\cup C}$. 例如 $\mathfrak{sl}_4(\mathbb{R})$ 中

$$p_{\{1,3,4\}}p_{\{2,4\}} = p_{\{1,2,4\}}p_{\{3,4\}} + p_{\{2,3,4\}}p_{\{1,4\}}.$$

Example 1.15 将旗恒正关系推广至一般情形, 即判断 $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ 的子式行列式值($\sum_{i=1}^{3}\binom{3}{i}^2 = 19$ 种)恒正所需的最少子式行列式值. 类比 **Example 1.13**, 考虑双写图表



对应的子式有 9 个. 相应的自然变换另有下图(其中, $AF = DE + BC$).



🔗链接

Quivers

Definiton 2.1 丛代数中的 quiver 为有向图, 其中

- 允许多重边;
- 不允许出现边数为 1 或 2 的定向环;
- 顶点分为固定的与可迁的两类.
- 在运动中, 固定点间的连边被保留, 即一切活动在所有可迁点及其箭头上进行.

Definition 2.2 固定 quiver 内的可迁顶点 k, 定义 k 处的运动 μ_k 包含以下四步:

Step I. 右图即为 quiver, 左侧两个蓝色点固定, 右侧四个红色点可迁.

Step II. 若存在长度为 2 的道路 $i \to \boxed{k} \to j$, 则添边 $i \to j$. 此时暂不考虑有无既有的连边 $i \to j$.

> 特别地, 当 i 与 j 均不是可迁的, 则不进行任何操作!

Step III. 将 $\boxed{k}$ 点处所有箭头反向, 如 $i \to \boxed{k}$ (resp. $\boxed{k} \to j$) 变更为 $\boxed{k} \to j$ (resp. $j \to \boxed{k}$).

Step IV. 约去边数为 2 的定向圈, 即逐一约化 $i \rightleftarrows j$ 为 $i \quad j$.

I **III**

II **IV**

🔗连接

Theorem 2.3 $\mu_k^2 = \mathrm{Id}$ 对一切(可迁的) k 成立. 对不相连的 i 与 j, 有对易关系 $\mu_i\mu_j = \mu_j\mu_i$.

Definition 2.4 参照 **Definition 3.2**, 定义 quiver 上的

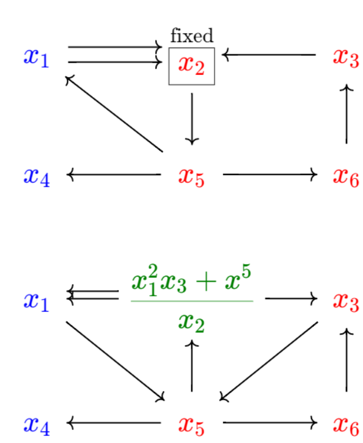
$$\begin{aligned} \text{丛} &\longleftrightarrow \{\text{丛变量}\}, \\ \text{广丛} &\longleftrightarrow \{\text{丛变量}, \text{常量}\}; \\ \text{常量} &\longleftrightarrow \bullet\ \text{固定点}, \\ \text{丛变量} &\longleftrightarrow \bullet\ \text{可迁点}. \end{aligned}$$

> 💡 **Remark** 对上述许多变换均可建立广丛, 例如以下几个例子.

Example 2.5 定义变换如下

$$\mu_k : (Q, x) \mapsto (Q', x');$$

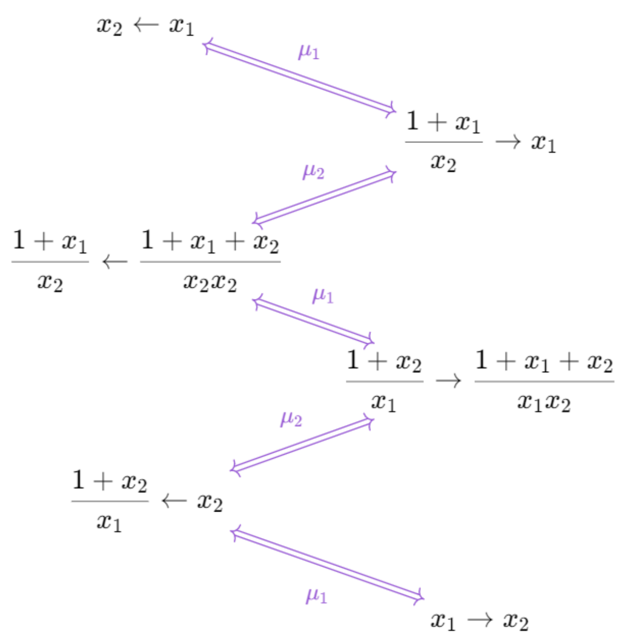
$$\begin{aligned} Q' &= \mu_k(Q), \\ x' &= (x \setminus \{x_k\}) \cup \{x_k'\}, \\ x_k' &:= \frac{\prod_{j \leftarrow k} x_j + \prod_{i \to k} x_i}{x_k}. \end{aligned}$$

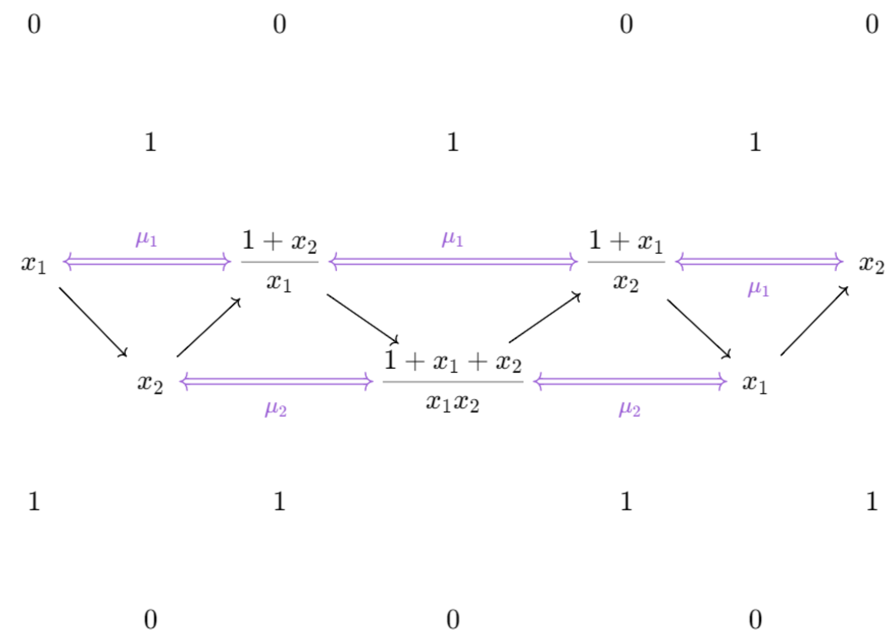


🔗链接

从而生成若干 Laurent 多项式.

特别地, Quiver $1 \to 2$ 中所有顶点可迁, 则有如下变换





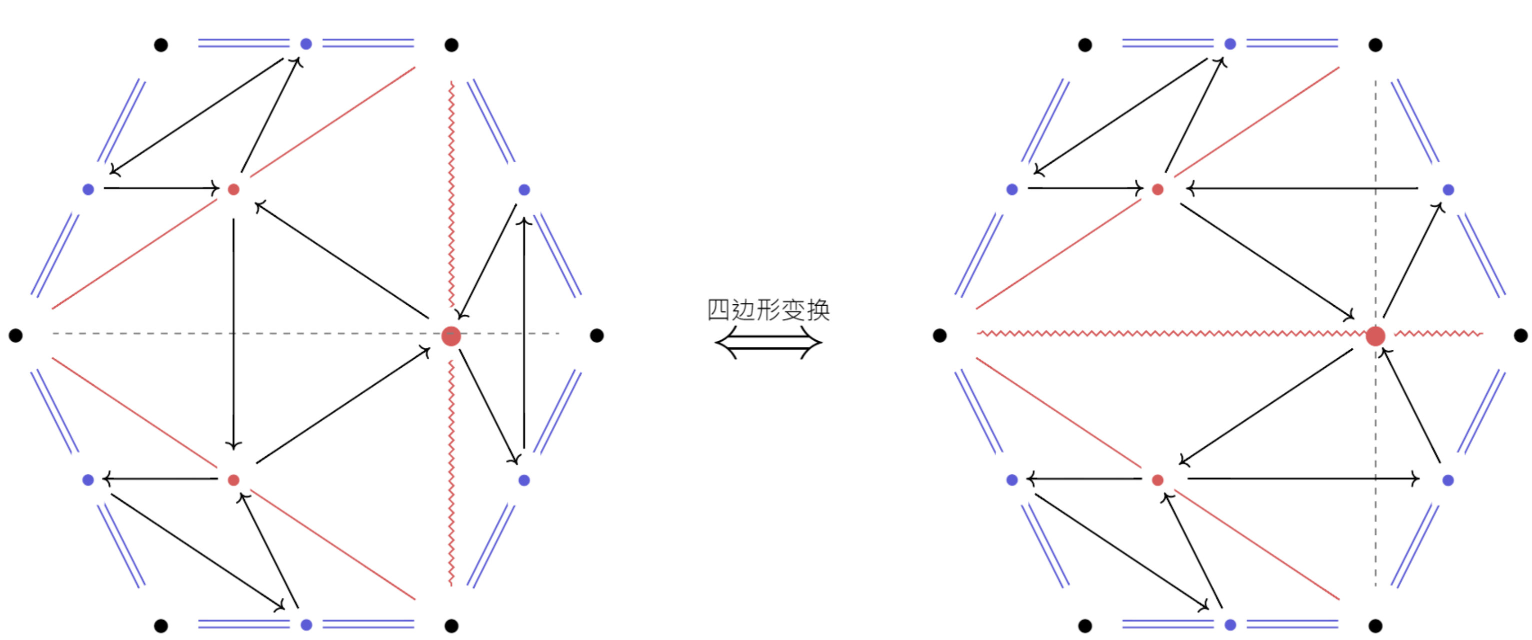
🔗link

此处, 丛代数 $A(1\to 2)$ 即二元有理式环 $\mathbb{C}(x_1,x_2):=\mathrm{frac}(\mathbb{C}[x_1,x_2])$ 的子环, 生成元为

$$\chi=\left\{x_1,x_2,\frac{1+x_1}{x_2},\frac{1+x_2}{x_1},\frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2}\right\}.$$

一般地, 从代数定义为多项式环 $\mathbb{C}[\chi,x_{n+1},\ldots,x_m]$. 其中 χ 为可迁点在有限步运动下可能生成的所有 Laurant 多项式, $\{x_{n+1},\ldots,x_m\}$ 为固定点.

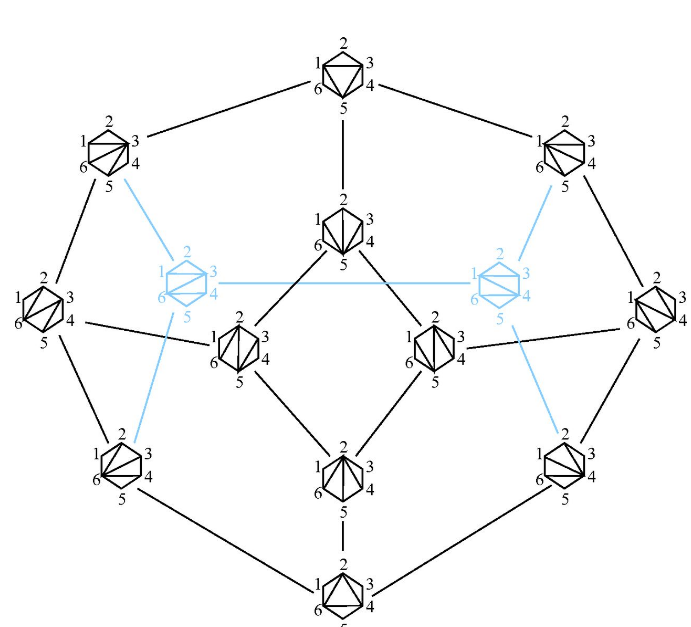
Example 2.6 正多边形三角剖分间的转化关系如下, 其中丛变量为对角线, 常量为多边形的边,



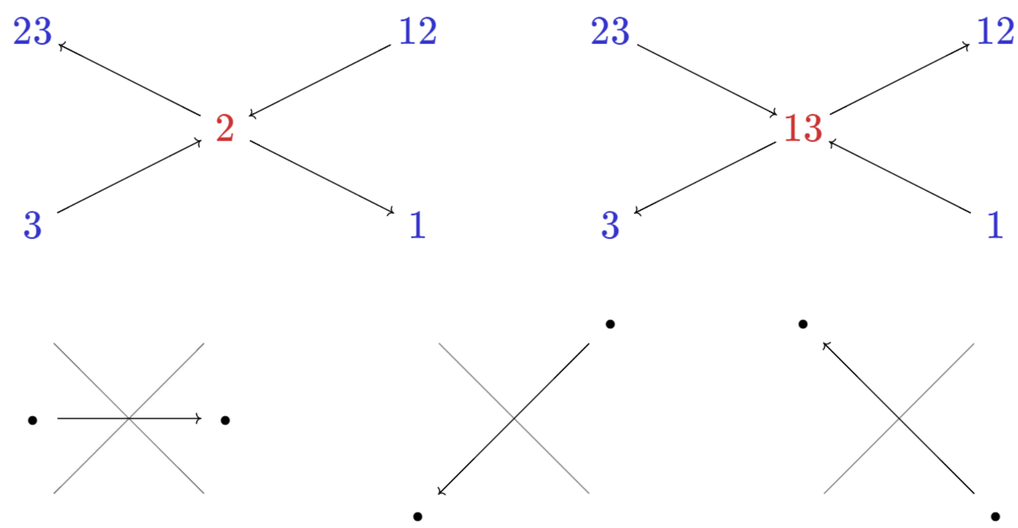
🔗链接

其中任意三角形中的**小三角统一呈逆时针相接**, 任意变量处的箭头"**两进两出, 方向相对**".

以下是对六边形间三角化的转化关系(区分顶点), 边表示一次运动(由于运动变换对合, 故图无向).



Example 2.7 Example 1.13 中的变换可表示如下, 其中下行表示连接规则.

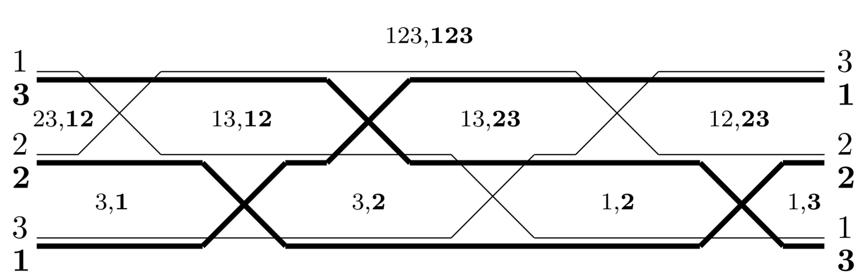


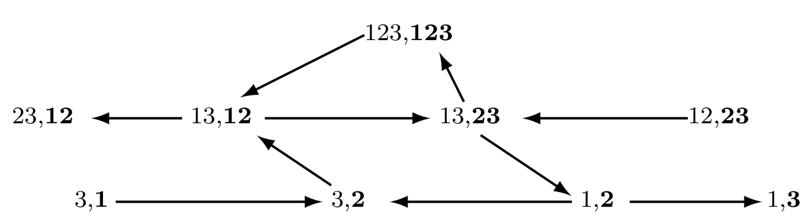
🔗链接

对于 **Example 1.15** 中的双写, 可简化规则为如下. 称存在区域间的连边 $c \to c'$ 以下一者成立

$$\begin{array}{ccccc} c'\mathrm{X}c & \substack{c \\ \mathrm{L}<c'>\mathbf{R}} & \substack{c' \\ \mathbf{L}<c>\mathrm{R}} & \substack{\forall<c'>\mathbf{R} \\ \mathbf{L}<c>\forall} & \substack{\forall<c>\mathbf{R} \\ \mathbf{L}<c'>\forall} \\ c\mathbf{X}c' & \substack{\mathrm{L}<c'>\mathbf{R} \\ c} & \substack{\mathbf{L}<c>\mathrm{R} \\ c'} & \substack{\mathrm{L}<c'>\forall \\ \forall<c>\mathrm{R}} & \substack{\mathrm{L}<c>\forall \\ \forall<c'>\mathrm{R}} \end{array}.$$

从而转化 **Example 1.15** 如下.





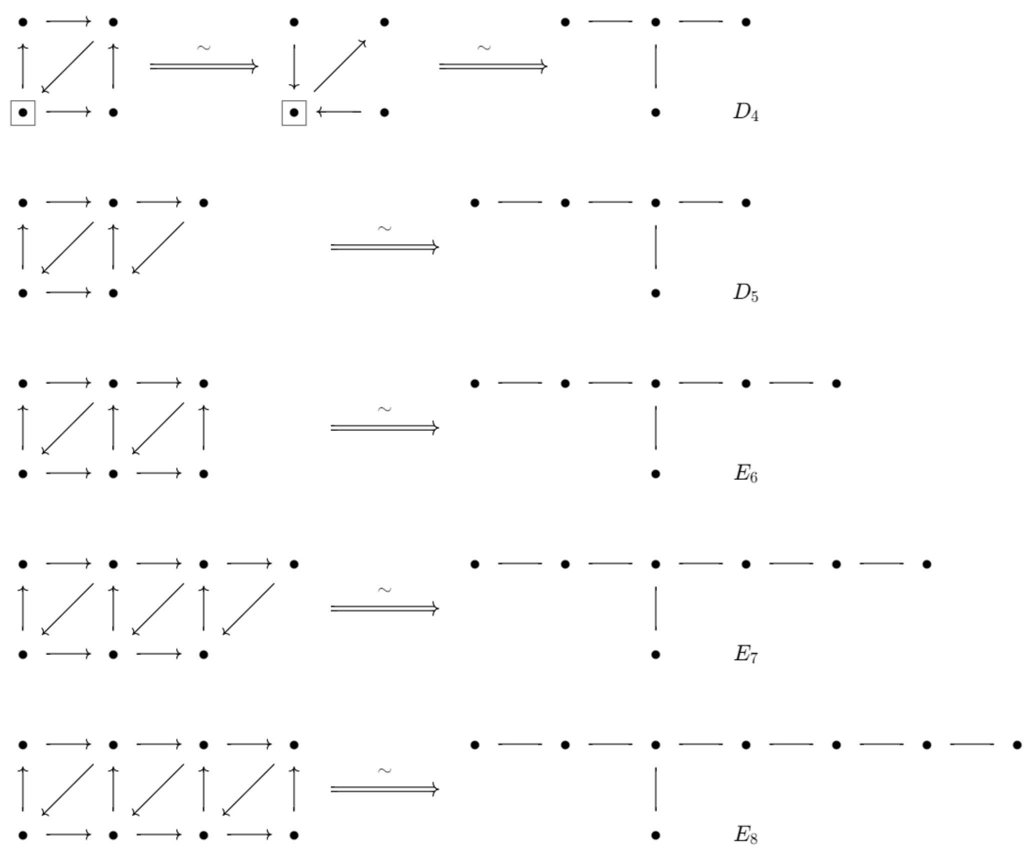
Definition 2.8 称 Q 与 Q' **运动等价**, 若他们能通过有限步运动相转化. 记等价类为 $[Q]$.

Definition 2.9 称 Q 与 Q' 由相同的**型**, 若他们在相差若干个固定点与固定边的意义下运动等价. 换言之, 他们的**可迁部分运动等价**.

Example 2.10 假定树上所有顶点可迁, 则可以通过源与汇处的运动实现所有定向图之间的转变.

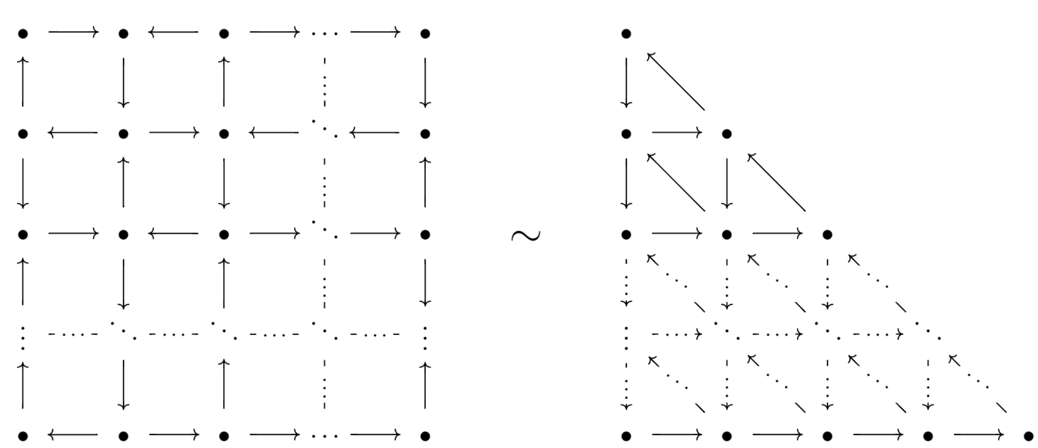
> 💡 **Remark** 职是之故, 树即等价类.

Example 2.11 依照第一行, 类似得到格 quiver 与特殊 Dynkin 图间的转化关系.



🔗链接

类似地, 还有 $k\times(2k+1)$-型方格 quiver 与 $\binom{2k}{2}$-型三角格 quiver 间的等价关系



矩阵表示

Definition 3.1 quiver Q 的矩阵表示为 $\tilde{B}(Q):=(b_{i,j})_{m\times n}$, 其中 $b_{i,j}$ 为 $i\to j$ 的连边数. 其中 m 行对应所有顶点, n 列对应可迁顶点. 记可迁顶点诱导的 n 阶子方阵为 $B(Q)$, 则 $B(Q)$ 反对称.

Proposition 3.2 μ_k 对应的矩阵变换为

$$b'_{ij}=\begin{cases}-b_{ij}, & (i=k)\vee(j=k);\\ b_{ij}+b_{ik}b_{kj}, & (b_{ik}>0)\wedge(b_{jk}>0);\\ b_{ij}-b_{ik}b_{kj}, & (b_{ik}<0)\wedge(b_{jk}<0);\\ b_{ij}, & \text{otherwise}.\end{cases}$$

Proposition 3.3 以下结论对 B 与 $\tilde{B}$ 均成立: $\mu_k^2=\mathrm{Id}$, μ_k 和转置可易, μ_i 与 μ_j 可易即 $b_{ij}=0$.

Definition 3.4 称 n 阶矩阵 B 为**可反对称化矩阵**, 若且仅若存在正整数 $\{1,\dots,d\}$ 使得 $d_ib_{ij}+d_jb_{ji}=0$ 对一切 $1\le i,j\le n$ 成立. 定义 B 的反对称化为 $S(B)=(\mathrm{sgn}(b_{ij})\sqrt{|b_{ij}b_{ji}|})_{n\times n}$.

Proposition 3.5 S 与一切 μ_k 可对易.

Definiton 3.6 根据 **Proposition 3.5**, 定义

$$\Gamma:\text{可反对称化矩阵}\to\text{quivers}, B\mapsto(\mathrm{sgn}(b_{ij})\cdot|b_{ij}b_{ji}|)_{n\times n}.$$

例如 $\Gamma\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-4&0\end{smallmatrix}\right)=\Gamma\left(\begin{smallmatrix}0&2\\-2&0\end{smallmatrix}\right)=(i\ \begin{smallmatrix}\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow\end{smallmatrix}\ j)$.

Proposition 3.7 矩阵在运动中的不变量包括

- $\mathrm{rank}(\tilde{B})$ 与 $\mathrm{rank}(B)$ 在任意有限个 μ_k 的作用下不变;
- 任意可反对称化的矩阵在运动下行列式不变;
- B 中任意一横行(或纵列)中非零元的最大公约数在运动中不变.