作者: 张陈成
学号: 023071910029

三角范畴抄书笔记

三角范畴简介

目录

1 预三角范畴

定义 1 (加法范畴的自等价)**.** 称 $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 为范畴 $\mathcal{C}$ 到自身的范畴等价, 当且仅当

1. (全) $T : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(TX, TY)$ 对一切 $X, Y \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ 满.
2. (忠实) $T : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(TX, TY)$ 对一切 $X, Y \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ 单.
3. (稠密/本质满) 对任意 $X' \in \mathsf{Ob}(C)$, 总存在 $X \in \mathrm{Ob}(C)$ 使得 $TX \simeq X'$.

注 1. 等价地, 存在函子 $S : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 与函子的自然同构 $TS \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \simeq ST$. 不妨直接假定 $S^{-1} = T$[1].

定义 2 (三角及其间态射)**.** 称 $(\mathcal{C}, T)$ 中的三角为六元组 (X, Y, Z, u, v, w), 即如下态射序列

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \ .$$

三角间的态射对应态射范畴的三角. 即, 使得下图交换的三元组 (f, g, h).

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f'"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g'"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h'"'] & TX \arrow[d, "Tf'"] \\
X' \arrow[r, "u'"'] & Y' \arrow[r, "v'"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] & TX'
\end{tikzcd} .$$

定义 3 (三角同构)**.** 若三角间的某态射有左逆及右逆 (从而左右逆相等), 则称两三角同构.

例 1. 三角 (X, Y, Z, u, v, w) 与 $(X, Y, Z, \varepsilon_1 u, \varepsilon_2 v, \varepsilon_3 w)$ 同构. 其中 $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$, $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = 1$.

定义 4 (预三角范畴)**.** 给定范畴 $\mathcal{C}$, 范畴自同构函子 $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, 以及某些三角组成的类 $\mathcal{E}$. 称 $(\mathcal{C}, T, \mathcal{E}$ 为预三角范畴, 若满足以下命题.

1. $\mathcal{E}$ 中存在形如以下的三角.

[1] 待补充???

(a) $X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} TX$ 为三角.

(b) 任意 $X \xrightarrow{f} Y$ 可嵌入形如 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h'} TX$ 的三角.

(c) 对任意 $(X,Y,Z,u,v,w) \in \mathcal{E}$, 若 $\mathcal{C}$ 中存在同构的三角 $(X,Y,Z,u,v,w) \simeq (X',Y',Z',u',v',w')$, 则后者也在 $\mathcal{E}$ 中.

2. $\mathcal{E}$ 中三角的顺时针旋转也在 $\mathcal{E}$ 中. 此处顺时针旋转是指

$$\left[X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX\right] \Longrightarrow \left[Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \xrightarrow{-Tu} TY\right].$$

3. 态射范畴的态射也可补全作三角. 换言之, 交换图 $\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X' \arrow[r, "u'"'] & Y' \end{tikzcd}$ 总能被补全作交换图

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "h"] & TX \arrow[d, "Tf"] \\ X' \arrow[r, "u'"'] & Y' \arrow[r, "v"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] & TX' \end{tikzcd}.$$

称 $\mathcal{E}$ 中的三角为 “好三角”, 也可想象之为 “正合列”.

注 2. 以上定义中条件可改进如下

1. 1-(b) 中嵌入位置是任意的,
2. 1-(b) 中嵌入的三角在同构意义下唯一.
3. 2 是充要的, 可定义 “顺时针旋转” 的逆变换为 “逆时针旋转”.
4. 3 中 $\{f,g,h\}$ 中任意两者的存在性推出第三者的存在性 (不必唯一)[2].

往后依次证明之.

命题 1. 注 2 中的第三条成立.

证明. 任意三角在 T^{-1} 作用下得到同构的三角, 此处 T^{-2} 的逆变换为六次顺时针旋转. 因此, 好三角的六次逆时针旋转仍为好三角. 验证知逆时针旋转为 T^{-2} 与五次顺时针旋转之/复合. 反之, 若逆时针变换定义, 则定义顺时针变换为 T^2 与五次逆时针旋转之复合. □

命题 2. 注 2 中的第一条成立.

证明. 依定义, 存在三角

$$T^{-1}X \xrightarrow{-T^{-1}u} T^{-1}Y \xrightarrow{-T^{-1}v} T^{-1}Z \xrightarrow{-T^{-1}w} X.$$

考虑顺时针旋转, 得

$$T^{-1}Y \xrightarrow{-T^{-1}v} T^{-1}Z \xrightarrow{-T^{-1}w} X \xrightarrow{u} Y.$$

再次顺时针旋转, 遂有

$$T^{-1}Z \xrightarrow{-T^{-1}w} X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z.$$

□

[2] 该条结论位置不妥, 往后调整之.

命题 3. “好三角” 中相继映射之复合为 0.

证明. 不妨取好三角

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \ .$$

将原三角补全作以下态射范畴的三角

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & X \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & TX \arrow[d, "Tu"] \\ X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & TX \end{tikzcd} .$$

从而 $vu = 0$. 考虑一次顺时针旋转, 则 $wv = 0$. □

定义 5 (上同调函子)**.** 称预三角范畴 $\mathcal{C}$ 到 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 上的加法函子 H 是上同调函子, 当且仅当 H 在好三角上的作用导出长正合列

$$\cdots \xrightarrow{H(-T^{-1}v)} H(T^{-1}Z) \xrightarrow{H(-T^{-1}w)} H(X) \xrightarrow{H(u)} H(Y) \xrightarrow{H(v)} H(Z) \xrightarrow{H(w)} H(TX) \xrightarrow{H(-Tu)} \cdots .$$

$\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{A}$ 的反变上同调函子等价于 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 到 $\mathcal{A}$ 的上同调函子.

例 2. 对任意 $M \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$, 函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, -)$ 与 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, M)$ 均是上同调函子.

对前者, 好三角 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ 给出链复形 (任意 $d \in \mathbb{Z}$)

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^d X) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^d u)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^d Y) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^d v)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^d Z) \ .$$

下证明 $T^d Y$ 处正合性. 对任意 $g \in \ker \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^d v)$, 总存在 f 使得下图交换

$$\begin{tikzcd} T^{-d}M \arrow[r] \arrow[d, "T^{-d}g"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & T^{1-d}M \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, dashed, "f"] & T^{1-d}M \arrow[d, "T^{1-d}g"] \\ Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & TX \arrow[r, "-Tu"] & TY \end{tikzcd} .$$

此时 $T^{1-d}g = -(Tu)f$. 故 $g = T^{d-1}(-(Tu)f) \in \mathrm{im}\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^d u)$. 同理, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, M)$ 是反变正合的.

命题 4. 若好三角的态射中有两处映射为同构, 则第三处亦然. 这也直接证明了注 2 中的第二条.

证明. 考虑三角旋转, 不失一般性地设以下交换图中 f 与 g 是同构.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "h"] & TX \arrow[d, "Tf"] \\ X' \arrow[r, "u'"'] & Y' \arrow[r, "v'"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] & TX' \end{tikzcd} .$$

记 $h^M : \mathcal{C} \to \mathrm{Ab}, X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, X)$, 则有正合列间的交换图

$$\begin{tikzcd} h_Z(X) & h_Z(Y) \arrow[l, "h_Z(u)"'] & h_Z(Z) \arrow[l, "h^Z(v)"'] & h_Z(TX) \arrow[l, "h^Z(w)"'] & h_Z(TY) \arrow[l, "h_Z(-Tu)"'] \\ h_Z(X') \arrow[u, "h_Z(f)"] & h_Z(Y') \arrow[l, "h_Z(u')"] \arrow[u, "h_Z(g)"'] & h_Z(Z') \arrow[l, "h_Z(v')"] \arrow[u, dashed, "h_Z(h)"'] & h_Z(TX') \arrow[l, "h_Z(w')"] \arrow[u, "h_Z(Tf)"'] & h_Z(TY') \arrow[l, "h_Z(-Tu')"] \arrow[u, "h_Z(Tg)"'] \end{tikzcd} .$$

此处 $\{h_Z(f), h_Z(g), h_Z(Tf), h_Z(Tg)\}$ 均为同构. 根据五引理, 中间处 $h_Z(h)$ 为同构. 显然存在 $h' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Z)$ 使得 $h' \circ h = \mathrm{id}_Z \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(Z)$. 同理地, 将 h_Z 换作 $h^{Z'}$ 可知 h 有左逆与右逆, 从而 h 与 h' 为互逆的同构. □

注 3. 仿照以上证明, 有 “二推三” 推论. 即, 若 $\{f, g, h\}$ 中任意两者为同构, 则第三者亦然.

2 好三角的可裂性

命题 5 (直和保持好三角)**.** 给定预三角范畴 $\mathcal{C}$, 则好三角的有限直和仍是好三角. 若范畴允许某种无穷直和, 则无穷个好三角的该种无穷直和仍是好三角.

证明. 考虑以下交换图

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\binom{1}{0}"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\binom{1}{0}"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "i"] & TX \arrow[d, "T\binom{1}{0}"] \\
X \oplus X' \arrow[r, "u \oplus u'"] & Y \oplus Y' \arrow[r, dashed, "g"] & W \arrow[r, dashed, "h"] & T(X \oplus X') \\
X' \arrow[r, "u'"'] \arrow[u, "\binom{0}{1}"] & Y' \arrow[r, "v'"'] \arrow[u, "\binom{0}{1}"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] \arrow[u, dashed, "j"'] & TZ' \arrow[u, "T\binom{0}{1}"']
\end{tikzcd} .$$

其中, g 与 h 为 $u \oplus u'$ 嵌入的某个好三角中的映射. 连接映射 i 与 j 由好三角间的同态给出. 依照“二推三”推论, 只需证明下交换图中 $(T\binom{1}{0}, T\binom{0}{1})$ 为同构:

$$\begin{tikzcd}
X \oplus X' \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y \oplus Y' \arrow[r] \arrow[d, equal] & Z \oplus Z' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "(i,j)"'] & TX \oplus TX' \arrow[d, dashed, "(T\binom{1}{0}, T\binom{0}{1})"'] \\
X \oplus X' \arrow[r] & Y \oplus Y' \arrow[r, dashed, "g"'] & W \arrow[r, dashed, "h"'] & T(X \oplus X')
\end{tikzcd} .$$

这是显然的: 根据熟知结论, 加法范畴间的函子为加法函子当且仅当其保持有限余积. 无穷部分证明待补充.

□

例 3. 对预三角范畴 $\mathcal{C}$ 与任意 $X, Y \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$, 总有直和 $X \xrightarrow{\binom{1}{0}} X \oplus Y \xrightarrow{(0,1)} Y \xrightarrow{0} TX$.

定义 6 (可裂单/满)**.** 可裂单态射即存在左逆的态射, 可裂满态射即存在右逆的态射.

命题 6. 给定好三角 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$, 则 u 可裂单等价于 v 可裂满, 亦等价于 $w = 0$.

证明. $w = 0$ 时有以下交换图 (三角同构)

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, equal] & X \oplus Z \arrow[r, "(0,1)"] \arrow[d, dashed, "(\varphi,\psi)"] & Z \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & TX \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "u"'] & Y \arrow[r, "v"'] & Z \arrow[r, "w"'] & TX
\end{tikzcd} .$$

依照交换图, $\varphi = u$, 且 ψ 是 v 的右逆. 反之, 有交换图 (三角同构)

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, equal] & X \oplus Z \arrow[r, "(0,1)"] \arrow[d, "(u,v_r^{-1})"'] & Z \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & TX \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "u"'] & Y \arrow[r, "v"'] & Z \arrow[r, "w"'] & TX
\end{tikzcd} .$$

其中 v_r^{-1} 为 v 的右逆, 从而只能有 $w = 0$. 这表明 $w = 0$ 与 v 可裂满是等价的.

$w = 0$ 时亦有如下交换图 (三角同构)

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "(\alpha,\beta)"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, equal] & TX \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "\binom{1}{0}"'] & X \oplus Z \arrow[r, "(0,1)"'] & Z \arrow[r, "0"'] & TX
\end{tikzcd} .$$

显然 $\beta = v$, α 是 u 的左逆. 反之, 有交换图 (三角同构)

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "{(u_l^{-1},v)}"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, equal] & TX \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "\binom{1}{0}"'] & X \oplus Z \arrow[r, "{(0,1)}"'] & Z \arrow[r, "0"'] & TX
\end{tikzcd}.$$

从而只能有 $w = 0$. 这表明 $w = 0$ 与 u 可裂单是等价的. □

注 4. 特别地, 若 $X \xrightarrow{u} Y$ 是同构, 则有好三角的同构 $(X, Y, Z, u, v, w) \simeq (X, Y, 0, u, 0, 0)$.

3 三角范畴

定义 7 (三角范畴)**.** 称预三角范畴为三角范畴, 若满足以下命题.

- 将 $\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "vu"'] & Y \arrow[r, "v"] & Z \end{tikzcd}$ 中映射 $\{u, v, uv\}$ 分别嵌入三个好三角, 则存在虚线处的好三角使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "u"] \arrow[dr, "vu"] & & & & TZ' \\
Y \arrow[r, "v"'] \arrow[ddr, "i"] & Z \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "k"] & & X' \arrow[r, "j'"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & TY \arrow[u, "Ti"'] \\
& & Y' \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[dr, "k'"] & & \\
& Z' \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[rr, "i'"] & & TX \arrow[uur, "Tu"'] &
\end{tikzcd}.$$

定义 8 (三角子范畴)**.** 称三角范畴的子范畴 $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ 为三角子范畴, 若满足以下命题

1. 任取 $\mathcal{C}$ 中同构的好三角, 若一者为 $\mathcal{C}'$ 中的好三角, 则另一者亦然.

2. T 也是范畴 $\mathcal{C}'$ 的自同构. 换言之, $\mathcal{C}'$ 是 $\mathcal{C}$ 的 T-不变子空间.

3. 给定 $\mathcal{C}$ 中好三角 (X, Y, Z, u, v, w), 若 $X, Z \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$, 则 $Y \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$.

定义 9 (三角函子)**.** 称三角范畴间的加法函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ 为三角函子, 若存在自然同构 $\varphi : FT \simeq T'F$.

注 5. 依照范畴等价/同构, 定义三角函子 (或三角范畴间) 的同构/等价为三角同构/三角等价.

注 6. 也称好三角为正合列. 相应地, 三角函子也称作正合函子.

例 4. 三角函子的核给出三角子范畴.

命题 7. 三角函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ 对 Ob 保持单, 对 Mor 保持满, 则对 Mor 保持单 (忠实).

证明. 任取 v 使得 $Fv = 0$, 下证明 $v = 0$ 即可. 考虑如下好三角的交换图

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d] \arrow[l, bend left, dashed, "u'"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d] & TX \arrow[d] \\
FX \arrow[r, "Fu"'] & FY \arrow[r, "0"'] & FZ \arrow[r, "Fw"'] & FTX
\end{tikzcd}.$$

由题设知 $Fv=0$, 故 Fu 可裂满. 由于 F 对 Mor 保持满, 则存在 u' 使得 $(Fu)(Fu')=F(uu')=\mathrm{id}_{FY}$. 此时考虑如下好三角的同态

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "uu'"] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d, dashed] & TY \arrow[d] \\
FY \arrow[r, "F(uu')"'] & FY \arrow[r] & 0 \arrow[r] & T'FY
\end{tikzcd}.$$

由于 F 对 Ob 保持单, 且 $FW=0$, 故 $W=0$. 此时 uu' 为 Y 的自同构, 遂 $v=0$. □

命题 8. 对三角范畴间的伴随对, 一者为三角函子当且仅当另一者为三角函子.

证明. 待补充. □

注 7. 一般地, Abel 范畴间的正合函子仅有 “左伴随右正合-右伴随左正合” 一对应; 对三角范畴而言, 有 “左伴随正合-右伴随正合” 一对应.