作者: 张陈成
学号: 023071910029

三角范畴抄书笔记

例子: 同伦范畴

目录

1 链复形

原旨 1. 默认 $\mathcal{A}$ 是加法范畴.

定义 1 (上链复形)**.** $\mathcal{A}$ 上的一个上链复形是形如如下映射链

$$\cdots \xrightarrow{d^{i-2}} X^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} X^i \xrightarrow{d^i} X^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \cdots$$

其中相邻两项复合为 0, 即, $d^{i+1}d^i$ 对一切 $i \in \mathbb{Z}$ 成立. 记上链复形 $X := X^\bullet := (X^n, d_X^n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

定义 2 (上链复形间同态)**.** 称 $f : X \to Y$ 是上链复形复形的同态, 若 $\left(\begin{array}{c} X^n \\ \downarrow f^n, (d_X^n, d_Y^n) \\ Y^n \end{array}\right)$ 是态射范畴的上链复形.

注 1. 链复形即反变的上链复形.

原旨 2. 以下简称上链复形为复形.

定义 3 (复形范畴)**.** $\mathcal{A}$ 的复形范畴为 $C(\mathcal{A})$, 其对象为复形, 态射为复形间同态.

命题 1. 加法范畴 (相应地, Abel 范畴) 的复形范畴仍为加法范畴 (相应地, Abel 范畴).

证明. 给定加法范畴 $\mathcal{A}$, 可自然地定义零复形, 复形的有限直和, 复形态射的加法群, 从而 $C(\mathcal{A})$ 是加法范畴.

若 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, 下给出 $f : X \to Y$ 的核. 依次构造 $K^n \xhookrightarrow{\iota^n} X^n \xrightarrow{f^n} Y^n$. 根据核的泛性质, 存在唯一的态射 d_K^n 使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, dashed] & K^{n-1} \arrow[r, dashed, "d_K^{n-1}"] \arrow[d, "\iota^{n-1}"'] & K^n \arrow[r, dashed, "d_K^n"] \arrow[d, "\iota^n"'] & K^{n+1} \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\iota^{n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r, "d_X^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[d, "f^n"'] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^{n-1} \arrow[r, "d_Y^{n-1}"'] & Y^n \arrow[r, "d_Y^n"'] & Y^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}.$$

依照交换图知 $\iota^{n+1}d_K^n d_K^{n-1} = 0$. 根据单态射的左消去律, K 为复形. 同理地, $C(\mathcal{A})$ 中映射有唯一的余核. 再同理地, 核之余和等于余核之核, 即像. 因此 $C(\mathcal{A})$ 为 Abel 范畴. □