作者: 张陈成
学号: 023071910029

三角范畴抄书笔记

例子: 同伦范畴

目录

1 链复形

原旨 1. 默认 $\mathcal{A}$ 是加法范畴.

定义 1 (上链复形)**.** $\mathcal{A}$ 上的一个上链复形是形如如下映射链

$$\cdots \xrightarrow{d^{i-2}} X^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} X^i \xrightarrow{d^i} X^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \cdots$$

其中相邻两项复合为 0, 即, $d^{i+1}d^i$ 对一切 $i \in \mathbb{Z}$ 成立. 记上链复形 $X := X^\bullet := (X^n, d_X^n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

定义 2 (上链复形间同态)**.** 称 $f : X \to Y$ 是上链复形复形的同态, 若 $\left(\begin{array}{c} X^n \\ \big\downarrow f^n \\ Y^n \end{array}, (d_X^n, d_Y^n) \right)$ 是态射范畴的上链复形.

注 1. 链复形即反变的上链复形.

原旨 2. 以下简称上链复形为复形.

定义 3 (复形范畴)**.** $\mathcal{A}$ 的复形范畴为 $C(\mathcal{A})$, 其对象为复形, 态射为复形间同态.

命题 1. 加法范畴 (相应地, Abel 范畴) 的复形范畴仍为加法范畴 (相应地, Abel 范畴).

证明. 给定加法范畴 $\mathcal{A}$, 可自然地定义零复形, 复形的有限直和, 复形态射的加法群, 从而 $C(\mathcal{A})$ 是加法范畴.

若 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, 下给出 $f : X \to Y$ 的核. 依次构造 $K^n \xhookrightarrow{\iota^n} X^n \xrightarrow{f^n} Y^n$. 根据核的泛性质, 存在唯一的态射 d_K^n 使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, dashed] & K^{n-1} \arrow[r, dashed, "d_K^{n-1}"] \arrow[d, hook, "\iota^{n-1}"'] & K^n \arrow[r, dashed, "d_K^n"] \arrow[d, hook, "\iota^n"'] & K^{n+1} \arrow[r, dashed] \arrow[d, hook, "\iota^{n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r, "d_X^{n-1}"] \arrow[d, "f^{n-1}"'] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[d, "f^n"'] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "f^{n+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^{n-1} \arrow[r, "d_Y^{n-1}"'] & Y^n \arrow[r, "d_Y^n"'] & Y^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}.$$

依照交换图知 $\iota^{n+1}d_K^n d_K^{n-1}=0$. 根据单态射的左消去律, K 为复形. 同理地, $C(\mathcal{A})$ 中映射有唯一的余核. 再同理地, 核之余和等于余核之核, 即像. 因此 $C(\mathcal{A})$ 为 Abel 范畴. □

定义 4 (零伦)**.** 称 $X \xrightarrow{h} Y$ 为复形间的零伦映射, 若存在一组映射 $(s^n : X^n \to Y^{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$ 使得下图中

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r, "d_X^{n-1}"] \arrow[d, dashed, "h^{n-1}"'] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[d, dashed, "h^n"] \arrow[dl, dashed, "s^n"'] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h^{n+1}"] \arrow[dl, dashed, "s^{n+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^{n-1} \arrow[r, "d_Y^{n-1}"'] & Y^n \arrow[r, "d_Y^n"'] & Y^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$h^n = d_Y^{n-1}s^n + s^{n+1}d_X^n$ 恒成立.

定义 5 (同伦)**.** 若存在复形同态 $f,g : X \to Y$ 使得 $f-g$ 关于某组 $(s^n : X^n \to Y^{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$ 零伦, 则称 f 与 g 关于 s 同伦. 记作 $f \overset{s}{\sim} g$ 或 $s : f \sim g$. 一般地, 表述映射同伦时不强调 s.

注 2. $\mathrm{Hom}_{C(\mathcal{A})}(X,Y)$ 关于同伦关系划分作等价类.

定义 6 (同伦范畴)**.** 复形范畴 $C(\mathcal{A})$ 的同伦范畴 $K(\mathcal{A})$ 定义如下加法范畴:

- $\mathsf{Ob}(C(\mathcal{A})) = \mathsf{Ob}(K(\mathcal{A}))$ 为加法范畴 $\mathcal{A}$ 上的复形全体;
- $\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X,Y) := \dfrac{\mathrm{Hom}_{C(\mathcal{A})}(X,Y)}{\mathrm{Htp}(X,Y)}$ 为商 Abel 群, 其中, 子群 $\mathrm{Htp}(X,Y)$ 由 $\mathrm{Hom}_{C(\mathcal{A})}(X,Y)$ 中的零伦映射全体组成.

定义 7 (同伦等价)**.** 定义两个复形在 $C(\mathcal{A})$ 范畴中的同伦等价为其在 $K(\mathcal{A})$ 范畴中的同构.

定义 8 (可缩复形)**.** 可缩复形为 $K(\mathcal{A})$ 范畴中的零对象.

定义 9 (上同调对象)**.** 复形 X 的 n 次上同调 (协变) 函子为

$$\mathrm{H}^n : C(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{Ab}, \quad X \longmapsto \frac{\ker(d_X^n)}{\mathrm{im}(d_X^{n-1})}.$$

可检验对任意 $n \in \mathbb{Z}$, H^n 是加法函子.

定义 10 (无环复形)**.** 无环复形即 (长) 正合列.

定义 11 (可裂复形)**.** 称 X 是可裂复形, 当且仅当存在一列 $s^n : X^n \to X^{n-1}$ 使得 $d^n s^{n+1} d^n = d^n$. 形象地, "右左右等于右".

命题 2. 无环复形未必可缩. Abel 范畴中, 可缩复形即可裂的无环复形.

证明. 首先证明无环复形未必可缩. 例如下图第一行的短正合列即无环复形

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot 2"] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dl, dashed, "s^1"'] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dl, dashed, "s^2"'] & 0 \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot 2"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd},$$

但其恒等映射非零伦. 若不然, 记恒等映射关于 s 零伦, 则 $s^2 = 0$, 此时 s^1 不存在. 矛盾.

下证明 Abel 范畴中可裂无环复形等价于可缩复形. 一方面, 若 X 可缩, 则 $\mathrm{id}_X \sim 0$. 此时存在一列 $s^n : X^n \to X^{n-1}$ 使得 $\mathrm{id}_{X^n} = d^{n-1}s^n + s^{n+1}d^n$. 对上式右侧复合 d^{n-1} 即得 $d^{n-1} = d^{n-1}s^n d^{n-1}$.

反之, 若 X 是可裂无环复形, 则存在幂等映射 $\varphi_n := (s^{n+1}d^n) : X^n \to X^n$. 此时有交换图

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{im}(\varphi_n) \arrow[rr, dashed, "\mathrm{id}_{\mathrm{im}(\varphi_n)}"] \arrow[dr, hook, "m_{\varphi_n}"] & & \mathrm{im}(\varphi_n) \arrow[d, hook, "m_{\varphi_n}"] \\
X^n \arrow[u, two heads, "\widetilde{\varphi_n}"] \arrow[r, "\varphi_n"'] & X^n \arrow[ur, two heads, "\widetilde{\varphi_n}"] \arrow[r, "\varphi_n"'] & X^n
\end{tikzcd}.$$

其中, 根据 Abel 范畴中满-单分解的在同构意义下的唯一性, 不妨记虚线处为恒等映射. 此时短正合列

$$0 \longrightarrow \ker(\varphi_n) \xrightarrow{\iota_n} X^n \xrightarrow{\widetilde{\varphi_n}} \mathrm{im}(\varphi_n) \longrightarrow 0$$

可裂 ($\widetilde{\varphi^n}$ 可裂满). 因此, X 同构于可缩复形的直和

$$X \simeq \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \Big[\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \ker(\varphi_n) \xrightarrow{d^n} \mathrm{im}(\varphi_n) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \Big].$$

□

命题 3 (正合范畴的强形式蛇引理 (章-荣引理))**.** 略.

注 3 (同调代数基本定理). 以上命题的推论是同调代数基本定理: 对任意 Abel 范畴的短正合列

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\iota} Y \xrightarrow{\pi} Z \longrightarrow 0\ ,$$

总有长正合列

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^{n-1}(Z) \xrightarrow{\partial^{n-1}} \mathrm{H}^n(X) \xrightarrow{\mathrm{H}^n(\iota)} \mathrm{H}^n(Y) \xrightarrow{\mathrm{H}^n(\pi)} \mathrm{H}^n(Z) \xrightarrow{\partial^n} \mathrm{H}^{n+1}(X) \longrightarrow \cdots\ .$$

对态射范畴使用蛇引理, 易知连接态射 ∂ 自然.

定义 12 (拟同构)**.** 称 $X \xrightarrow{f} Y$ 为拟同构, 若对一切 $n \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{H}^n(f)$ 均给出 Abel 群的同构.

例 1. 注意以下相似命题.

1. “可缩复形”“无环复形” 用于描述单个复形的性质. Abel 范畴中, 可缩复形即可裂的无环复形.
2. “同构”“同伦等价”“拟同构” 用于描述两个复形对象的关系. 其中,
$$\text{同构} \xrightarrow{\text{严格强于}} \text{同伦等价} \xrightarrow{\text{严格强于}} \text{拟同构}\ .$$
3. “零伦” 用于描述两个复形对象间的某一态射.
4. “映射相等”“映射同伦”“映射诱导相同的上同调态射” 用于描述复形对象间的两个态射. 其中,
$$\text{映射相等} \xrightarrow{\text{严格强于}} \text{映射同伦} \xrightarrow{\text{严格强于}} \text{映射诱导相同的上同调态射}$$

对第二点说明如下.

- 拟同构而非同伦等价的例子如下:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, "\binom{1}{0}"'] \arrow[dl, dashed, "s^1"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "s^2"'] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & X \oplus X \arrow[r, "{(0,1)}"'] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}.$$

上图中, 链复形的上同调对象均同构; 但不存在 s^1 与 s^2 使得 $\binom{1}{0}$ 是零伦映射.

- 同伦等价而非同构的例子如非零可缩复形与零复形.

对第四点说明如下.

1. 诱导相同的上同调态射未必同伦, 例如取无环但不可裂的复形 X, 则 0 和 id_X 诱导了相同的上同调态射但不同伦.

2. 同伦而非相等的例子如零伦映射与零映射.

2 映射锥

定义 13 (映射锥)**.** 对加法范畴上的复形间态射 $X \xrightarrow{u} Y$, 定义映射锥 $\mathrm{cone}(u)$ 为如下复形

$$\cdots \longrightarrow X^n \oplus Y^{n-1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d_X^n & \\ u^n & d_Y^{n-1} \end{pmatrix}} X^{n+1} \oplus Y^n \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & \\ u^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix}} X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \longrightarrow \cdots.$$

原旨 3. 定义后移运算 $[1] : (X^n, d_X^n)_{n\in\mathbb{Z}} \to (X^{n+1}, d_X^{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ 为 $C(\mathcal{A})$ (相应地, $K(\mathcal{A})$) 的自同构函子.

命题 4. 映射锥 $X \xrightarrow{u} Y$ 确定 $C(\mathcal{A})$ 中的态射序列

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{\binom{0}{1}} \mathrm{cone}(u) \xrightarrow{(1,0)} X[1] .$$

记 $[f]$ 为 f 在 $K(\mathcal{A})$ 中的像, 则 $[u]$ 给出良定义的 $K(\mathcal{A})$ 中态射序列.

证明. 考虑 $C(\mathcal{A})$ 范畴. 今仅需证明对同伦的映射 $s : u \sim v$, 总有同伦的交换图

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, equal] & \mathrm{cone}(u) \arrow[r, "(1,0)"] \arrow[d, "\varphi"'] & X[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "v"'] & Y \arrow[r, "\binom{0}{1}"'] & \mathrm{cone}(v) \arrow[r, "(1,0)"'] & X[1]
\end{tikzcd}.$$

注意到

$$\begin{pmatrix} \mathrm{id}_{X^{n+2}} & 0 \\ s^n & \mathrm{id}_{Y^{n+1}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ u^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ u^{n+1} - s^n d_X^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ v^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{X^{n+1}} & 0 \\ s^{n-1} & \mathrm{id}_{Y^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ v^{n+1} + d_Y^n s^{n-1} & d_Y^n \end{pmatrix}.$$

因此, $s : u \sim v$ 当且仅当 $\varphi : \begin{pmatrix} \mathrm{id} & \\ s & \mathrm{id} \end{pmatrix} : \mathrm{cone}(u) \to \mathrm{cone}(v)$ 使得上图交换. 此时 $\varphi \sim \mathrm{id}_{X[1]\oplus Y}$. □

命题 5 (复形同伦范畴为三角范畴)**.** 记 $\mathcal{E}$ 为映射锥诱导的三角类, 即, 对任意三角 $X' \xrightarrow{u} Y' \xrightarrow{v} Z' \xrightarrow{w} X'[1]$, 总存在复形 X, Y, 态射 u, 以及同伦等价 f, g, h, 使得下图交换.

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z' \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & X'[1] \arrow[d, "{f[1]}"] \\
X \arrow[r, "u"'] & Y \arrow[r, "\binom{0}{1}"'] & \mathrm{cone}(u) \arrow[r, "(1,0)"'] & X[1]
\end{tikzcd}.$$

则 $(K(\mathcal{A}), [1], \mathcal{E})$ 为三角范畴.

证明. 下依次验证如下几条:

1. $(X, X, 0, \mathrm{id}_X, 0, 0) \in \mathcal{E}$;

2. $\mathcal{E}$ 关于 “顺时针旋转” 封闭, 即, $Y \xrightarrow{\binom{0}{1}} \mathrm{cone}(u) \xrightarrow{(0,1)} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1] \in \mathcal{E}$;

3. “二推三” 成立, 即, 给定任意同伦交换图 (f, g 为同伦等价)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, "g"'] & \mathrm{cone}(u) \arrow[r, "(0,1)"] \arrow[d, dashed] & X[1] \arrow[d, "{f[1]}"] \\ X' \arrow[r, "u'"'] & Y' \arrow[r, "\binom{0}{1}"'] & \mathrm{cone}(u') \arrow[r, "(0,1)"'] & X'[1] \end{tikzcd},$$

   总有虚线处的同伦等价使得上图交换;

4. 八面体公理成立.

为书写方便, 下省略 d, u, 1 等同态的角标. 若明确同态的来源与去向, 如此省略不会引起混淆.

1. 作如下 $K(\mathcal{A})$ 中的交换图

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & X[1] \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, equal] & X \arrow[r, "\binom{0}{1}"'] & \mathrm{cone}(\mathrm{id}_X) \arrow[r, "(0,1)"'] & X[1] \end{tikzcd}.$$

   下证明 $\binom{0}{1} : X \to \mathrm{cone}(\mathrm{id}_X)$ 是零伦的. 注意到下图即可

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r, "d_X^{n-1}"] \arrow[d, "\binom{0}{1}"'] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[d, "\binom{0}{1}"'] \arrow[dl, dashed, "\binom{1}{0}"'] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\binom{0}{1}"'] \arrow[dl, dashed, "\binom{1}{0}"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & X^n \oplus X^{n-1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} -d & 0 \\ 1 & d \end{pmatrix}"'] & X^{n+1} \oplus X^n \arrow[r, "\begin{pmatrix} -d & 0 \\ 1 & d \end{pmatrix}"'] & X^{n+2} \oplus X^{n+1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}.$$

   最后验证 $0 \to \mathrm{cone}(\mathrm{id}_X)$ 是同伦等价, 即, $\mathrm{cone}(\mathrm{id}_X)$ 是可缩复形. 事实上, 有下图

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & X^n \oplus X^{n-1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} -d & \\ 1 & d \end{pmatrix}"] \arrow[d, equal] & X^{n+1} \oplus X^n \arrow[r, "\begin{pmatrix} -d & \\ 1 & d \end{pmatrix}"] \arrow[d, equal] \arrow[dl, dashed, "\begin{pmatrix} & 1 \\ & \end{pmatrix}"'] & X^{n+2} \oplus X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dl, dashed, "\begin{pmatrix} & 1 \\ & \end{pmatrix}"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & X^n \oplus X^{n-1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} -d & \\ 1 & d \end{pmatrix}"'] & X^{n+1} \oplus X^n \arrow[r, "\begin{pmatrix} -d & \\ 1 & d \end{pmatrix}"'] & X^{n+2} \oplus X^{n+1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}.$$

2. 只需证明对存在同伦等价 φ 使得下图在 $K(\mathcal{A})$ 中交换

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, equal] & \mathrm{cone}(u) \arrow[r, "{(1,0)}"] \arrow[d, equal] & X[1] \arrow[r, "{-u[1]}"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y[1] \arrow[d, equal] \\ Y \arrow[r, "\binom{0}{1}"'] & \mathrm{cone}(u) \arrow[r, "\binom{0}{1}"'] & \mathrm{cone}(\binom{0}{1}) \arrow[r, "{(1,0)}"'] & Y[1] \end{tikzcd},$$

   兹断言下图即为所求

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\binom{0}{1}"] \arrow[d, equal] & X[1] \oplus Y \arrow[r, "{(1,0)}"] \arrow[d, equal] & X[1] \arrow[r, "{-u[1]}"] \arrow[d, dashed, "\begin{pmatrix} -u[1] \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}"'] & Y[1] \arrow[d, equal] \\ Y \arrow[r, "\binom{0}{1}"'] & X[1] \oplus Y \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}"'] & Y[1] \oplus X[1] \oplus Y \arrow[r, "{(1,0,0)}"'] & Y[1] \end{tikzcd}.$$

(a) 先证明上图在 $K(\mathcal{A})$ 中交换. 仅需验证中间方块的交换性. 等价地, 证明 $\begin{pmatrix} u[1] & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : X[1] \oplus Y \longrightarrow Y[1] \oplus X[1] \oplus Y$ 是零伦的. 注意到

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^n \oplus Y^{n-1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} -d & \\ u & d \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} u & \\ & 1 \end{pmatrix}"] & X^{n+1} \oplus Y^n \arrow[r, "\begin{pmatrix} -d & \\ u & d \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} u & \\ & 1 \end{pmatrix}"] \arrow[dl, dashed, "\begin{pmatrix} & 1 \\ & \end{pmatrix}"'] & X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} u & \\ & 1 \end{pmatrix}"] \arrow[dl, dashed, "\begin{pmatrix} & 1 \\ & \end{pmatrix}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^n \oplus X^n \oplus Y^{n-1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} -d & & \\ & -d & \\ 1 & u & d \end{pmatrix}"'] & Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Y^n \arrow[r, "\begin{pmatrix} -d & & \\ & -d & \\ 1 & u & d \end{pmatrix}"'] & Y^{n+2} \oplus X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}.$$

(b) 继而证明 $\begin{pmatrix} -u[1] \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是同伦等价. 考虑映射 $(0,1,0)$, 下证明 $\begin{pmatrix} -u[1] \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}(0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -u & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $(0,1,0)\begin{pmatrix} -u[1] \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$ 均与单位矩阵同伦. 后者显然, 前者由如下零伦关系给出

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & Y^n \oplus X^n \oplus Y^{n-1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} -d & & \\ & -d & \\ 1 & u & d \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & u & \\ & & 1 \end{pmatrix}"] & Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Y^n \arrow[r, "\begin{pmatrix} -d & & \\ & -d & \\ 1 & u & d \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & u & \\ & & 1 \end{pmatrix}"] \arrow[dl, dashed, "\begin{pmatrix} & & 1 \\ & & \end{pmatrix}"'] & Y^{n+2} \oplus X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & u & \\ & & 1 \end{pmatrix}"] \arrow[dl, dashed, "\begin{pmatrix} & & 1 \\ & & \end{pmatrix}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^n \oplus X^n \oplus Y^{n-1} \arrow[r, "\begin{pmatrix} -d & & \\ & -d & \\ 1 & u & d \end{pmatrix}"'] & Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Y^n \arrow[r, "\begin{pmatrix} -d & & \\ & -d & \\ 1 & u & d \end{pmatrix}"'] & Y^{n+2} \oplus X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}.$$

3. 取虚线处同伦等价为 $f[1] \oplus g$ 即可.

4. 给定映射链 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$, 八面体公理由如下 $C(\mathcal{A})$ 中的交换图给出

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "v"] & \mathrm{cone}(u) \arrow[r, "{(1,0)}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 1 & \\ & v \end{pmatrix}"] & X[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "vu"] & Z \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}"'] & \mathrm{cone}(vu) \arrow[r, "{(1,0)}"'] \arrow[d, "\begin{pmatrix} u[1] & \\ & v \end{pmatrix}"'] & X[1] \arrow[d, "{u[1]}"] \\
 & \mathrm{cone}(v) \arrow[r, equal] \arrow[d, "{(1,0)}"'] & \mathrm{cone}(v) \arrow[r, "{(1,0)}"'] \arrow[d, "\begin{pmatrix} & \\ 1 & \end{pmatrix}"'] & Y[1] \\
 & Y[1] \arrow[r, "\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}"'] & \mathrm{cone}(u)[1] &
\end{tikzcd}.$$

下仍需验证第三列为三角. 作 $K(\mathcal{A})$ 中交换图

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{cone}(u) \arrow[d, equal] & \operatorname{cone}(vu) \arrow[d, equal] & \operatorname{cone}(v) \arrow[d, equal] & \operatorname{cone}(u)[1] \arrow[d, equal] \\
X[1]\oplus Y \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}1&\\&v\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, equal] & X[1]\oplus Z \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}u[1]&\\&1\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, equal] & Y[1]\oplus Z \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}&\\1&\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "E_{2,1}+E_{4,2}"'] & X[2]\oplus Y[1] \arrow[d, equal] \\
X[1]\oplus Y \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}1&\\&v\end{smallmatrix}\right)"'] \arrow[d, equal] & X[1]\oplus Z \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}O_{2\times 2}\\I_{2\times 2}\end{smallmatrix}\right)"'] \arrow[d, equal] & X[2]\oplus Y[1]\oplus X[1]\oplus Z \arrow[r, "(I_{2\times 2},O_{2\times 2})"'] \arrow[d, equal] & X[2]\oplus Y[1] \arrow[d, equal] \\
\operatorname{cone}(u) & \operatorname{cone}(v) & \operatorname{cone}(\left(\begin{smallmatrix}1&\\&v\end{smallmatrix}\right)) & \operatorname{cone}(u)[1]
\end{tikzcd}.$$

其中, 左侧与右侧方块可换. 为证明中间方块交换, 只需证明以下为零伦映射

$$u[1]\cdot E_{2,1}-E_{3,1}=\begin{pmatrix}0&0\\u[1]&0\\-1&0\\0&0\end{pmatrix}:X[1]\oplus Z\mapsto X[2]\oplus Y[1]\oplus X[1]\oplus Z.$$

注意到零伦关系

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^n\oplus Z^{n-1} \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}-d&\\d&1\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "u\cdot E_{2,1}-E_{3,1}"] & X^{n+1}\oplus Z^n \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}-d&\\d&1\end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d, "u\cdot E_{2,1}-E_{3,1}"] \arrow[dl, dashed, "-E_{1,1}"'] & X^{n+2}\oplus Z^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "u\cdot E_{2,1}-E_{3,1}"] \arrow[dl, dashed, "-E_{1,1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & X^{n+1}\oplus Y^n\oplus X^n\oplus Z^{n-1} \arrow[r, "*"] & X^{n+2}\oplus Y^{n+1}\oplus X^{n+1}\oplus Z^n \arrow[r, "*"] & X^{n+3}\oplus Y^{n+2}\oplus X^{n+2}\oplus Z^{n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}.$$

其中 $*:=\begin{pmatrix}d&&&\\-u&-d&&\\1&&-d&\\&v&vu&d\end{pmatrix}$. 最后证明 $E_{2,1}+E_{4,2}:X[1]\oplus Z\longrightarrow X[2]\oplus Y[1]\oplus X[1]\oplus Z$ 是同伦等价. 作左逆同态 $E_{1,2}+u\cdot E_{1,3}+E_{2,4}$, 下仅需证明

$$(E_{2,1}+u\cdot E_{1,3}+E_{4,2})(E_{1,2}+E_{2,4})=E_{2,2}+u\cdot E_{2,3}+E_{4,4}\in\operatorname{End}_{C(\mathcal{A})}(X[2]\oplus Y[1]\oplus X[1]\oplus Z)$$

同伦于恒等映射. 实际上, $-E_{1,3}$, 给出 $\begin{pmatrix}-1&&&\\&&u&\\&&-1&\\&&&\end{pmatrix}\sim O$.

$\square$