



## 三角范畴抄书笔记

例子: 同伦范畴

## 目录

1 链复形	1
2 复形同伦范畴是三角范畴	4
3 映射筒	8

## 1 链复形

原旨 1. 默认  $\mathcal{A}$  是加法范畴.

定义 1 (上链复形).  $\mathcal{A}$  上的一个上链复形是形如如下映射链

$$\dots \xrightarrow{d^{i-2}} X^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} X^i \xrightarrow{d^i} X^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \dots$$

其中相邻两项复合为 0, 即,  $d^{i+1}d^i$  对一切  $i \in \mathbb{Z}$  成立. 记上链复形  $X := X^\bullet := (X^n, d_X^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ .

定义 2 (上链复形间同态). 称  $f: X \rightarrow Y$  是上链复形复形的同态, 若  $\begin{pmatrix} X^n \\ \downarrow f^n, (d_X^n, d_Y^n) \\ Y^n \end{pmatrix}$  是态射范畴的上链复形.

注 1. 链复形即反变的上链复形.

原旨 2. 以下简称上链复形为复形.

定义 3 (复形范畴).  $\mathcal{A}$  的复形范畴为  $C(\mathcal{A})$ , 其对象为复形, 态射为复形间同态.

命题 1. 加法范畴 (相应地, Abel 范畴) 的复形范畴仍为加法范畴 (相应地, Abel 范畴).

证明. 给定加法范畴  $\mathcal{A}$ , 可自然地定义零复形, 复形的有限直和, 复形态射的加法群, 从而  $C(\mathcal{A})$  是加法范畴.

若  $\mathcal{A}$  是 Abel 范畴, 下给出  $f: X \rightarrow Y$  的核. 依次构造  $K^n \xrightarrow{\iota^n} X^n \xrightarrow{f^n} Y^n$ . 根据核的泛性质, 存在唯一的态射  $d_K^n$  使得下图交换

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\quad} & K^{n-1} & \xrightarrow{d_K^{n-1}} & K^n & \xrightarrow{d_K^n} & K^{n+1} & \xrightarrow{\quad} \dots \\ & & \downarrow \iota^{n-1} & & \downarrow \iota^n & & \downarrow \iota^{n+1} & \\ \dots & \xrightarrow{\quad} & X^{n-1} & \xrightarrow{d_X^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{d_X^n} & X^{n+1} & \xrightarrow{\quad} \dots \\ & & \downarrow f^{n-1} & & \downarrow f^n & & \downarrow f^{n+1} & \\ \dots & \xrightarrow{\quad} & Y^{n-1} & \xrightarrow{d_Y^{n-1}} & Y^n & \xrightarrow{d_Y^n} & Y^{n+1} & \xrightarrow{\quad} \dots \end{array}$$

依照交换图知  $\iota^{n+1}d_K^n d_K^{n-1} = 0$ . 根据单态射的左消去律,  $K$  为复形. 同理地,  $C(\mathcal{A})$  中映射有唯一的余核. 再同理地, 核之余和等于余核之核, 即像. 因此  $C(\mathcal{A})$  为 Abel 范畴.  $\square$

**定义 4** (零伦). 称  $X \xrightarrow{h} Y$  为复形间的零伦映射, 若存在一组映射  $(s^n : X^n \rightarrow Y^{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}$  使得下图中

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & X^{n-1} & \xrightarrow{d_X^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{d_X^n} & X^{n+1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow h^{n-1} & \swarrow s^n & \downarrow h^n & \swarrow s^{n+1} & \downarrow h^{n+1} \\ \cdots & \longrightarrow & Y^{n-1} & \xrightarrow{d_Y^{n-1}} & Y^n & \xrightarrow{d_Y^n} & Y^{n+1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

$h^n = d_Y^{n-1}s^n + s^{n+1}d_X^n$  恒成立.

**定义 5** (同伦). 若存在复形同态  $f, g : X \rightarrow Y$  使得  $f - g$  关于某组  $(s^n : X^n \rightarrow Y^{n-1})_{n \in \mathbb{Z}}$  零伦, 则称  $f$  与  $g$  关于  $s$  同伦. 记作  $f \stackrel{s}{\sim} g$  或  $s : f \sim g$ . 一般地, 表述映射同伦时不强调  $s$ .

注 2.  $\text{Hom}_{C(\mathcal{A})}(X, Y)$  关于同伦关系划分作等价类.

**定义 6** (同伦范畴). 复形范畴  $C(\mathcal{A})$  的同伦范畴  $K(\mathcal{A})$  定义如下加法范畴:

- $\text{Ob}(C(\mathcal{A})) = \text{Ob}(K(\mathcal{A}))$  为加法范畴  $\mathcal{A}$  上的复形全体;
- $\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X, Y) := \frac{\text{Hom}_{C(\mathcal{A})}(X, Y)}{\text{Htp}(X, Y)}$  为商 Abel 群, 其中, 子群  $\text{Htp}(X, Y)$  由  $\text{Hom}_{C(\mathcal{A})}(X, Y)$  中的零伦映射全体组成.

**定义 7** (同伦等价). 定义两个复形在  $C(\mathcal{A})$  范畴中的同伦等价为其在  $K(\mathcal{A})$  范畴中的同构.

**定义 8** (可缩复形). 可缩复形为  $K(\mathcal{A})$  范畴中的零对象.

**定义 9** (上同调对象). 复形  $X$  的  $n$  次上同调 (协变) 函子为

$$H^n : C(\mathcal{A}) \longrightarrow \text{Ab}, \quad X \longmapsto \frac{\ker(d_X^n)}{\text{im}(d_X^{n-1})}.$$

可检验对任意  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $H^n$  是加法函子.

**定义 10** (无环复形). 无环复形即 (长) 正合列.

**定义 11** (可裂复形). 称  $X$  是可裂复形, 当且仅当存在一系列  $s^n : X^n \rightarrow X^{n-1}$  使得  $d^n s^{n+1} d^n = d^n$ . 形象地, “右左右等于右”.

**命题 2.** 无环复形未必可缩. Abel 范畴中, 可缩复形即可裂的无环复形.

证明. 首先证明无环复形未必可缩. 例如下图第一行的短正合列即无环复形

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot 2} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ \parallel & & \parallel & \swarrow s^1 & \parallel & \swarrow s^2 & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot 2} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \end{array},$$

但其恒等映射非零伦. 若不然, 记恒等映射关于  $s$  零伦, 则  $s^2 = 0$ , 此时  $s^1$  不存在. 矛盾.

下证明 Abel 范畴中可裂无环复形等价于可缩复形. 一方面, 若  $X$  可缩, 则  $\text{id}_X \sim 0$ . 此时存在一系列  $s^n : X^n \rightarrow X^{n-1}$  使得  $\text{id}_{X^n} = d^{n-1}s^n + s^{n+1}d^n$ . 对上式右侧复合  $d^{n-1}$  即得  $d^{n-1} = d^{n-1}s^n d^{n-1}$ .

反之, 若  $X$  是可裂无环复形, 则存在幂等映射  $\varphi_n := (s^{n+1}d^n) : X^n \rightarrow X^n$ . 此时有交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{im}(\varphi_n) & \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathrm{im}(\varphi_n)}} & \mathrm{im}(\varphi_n) & & \\ \uparrow \varphi_n & \searrow m_{\varphi_n} & \nearrow \tilde{\varphi}_n & \downarrow m_{\varphi_n} & \\ X^n & \xrightarrow{\varphi_n} & X^n & \xrightarrow{\varphi_n} & X^n \end{array}$$

其中, 根据 Abel 范畴中满-单分解的在同构意义下的唯一性, 不妨记虚线处为恒等映射. 此时短正合列

$$0 \longrightarrow \ker(\varphi_n) \xrightarrow{\iota_n} X^n \xrightarrow{\tilde{\varphi}_n} \mathrm{im}(\varphi_n) \longrightarrow 0$$

可裂 ( $\tilde{\varphi}_n$  可裂满). 因此,  $X$  同构于可缩复形的直和

$$X \simeq \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \left[ \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \ker(\varphi_n) \xrightarrow{d^n} \mathrm{im}(\varphi_n) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \right].$$

□

**命题 3** (正合范畴的强形式蛇引理 (章-荣引理)). 略.

**注 3** (同调代数基本定理). 以上命题的推论是同调代数基本定理: 对任意 Abel 范畴的短正合列

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\iota} Y \xrightarrow{\pi} Z \longrightarrow 0,$$

总有长正合列

$$\cdots \longrightarrow H^{n-1}(Z) \xrightarrow{\partial^{n-1}} H^n(X) \xrightarrow{H^n(\iota)} H^n(Y) \xrightarrow{H^n(\pi)} H^n(Z) \xrightarrow{\partial^n} H^{n+1}(X) \longrightarrow \cdots.$$

对态射范畴使用蛇引理, 易知连接态射  $\partial$  自然.

**定义 12** (拟同构). 称  $X \xrightarrow{f} Y$  为拟同构, 若对一切  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $H^n(f)$  均给出 Abel 群的同构.

**例 1.** 注意以下相似命题.

1. “可缩复形”“无环复形”用于描述单个复形的性质. Abel 范畴中, 可缩复形即可裂的无环复形.
2. “同构”“同伦等价”“拟同构”用于描述两个复形对象的关系. 其中,

$$\text{同构} \xrightarrow{\text{严格强于}} \text{同伦等价} \xrightarrow{\text{严格强于}} \text{拟同构}.$$

3. “零伦”用于描述两个复形对象间的某一态射.
4. “映射相等”“映射同伦”“映射诱导相同的上同调态射”用于描述复形对象间的两个态射. 其中,

$$\text{映射相等} \xrightarrow{\text{严格强于}} \text{映射同伦} \xrightarrow{\text{严格强于}} \text{映射诱导相同的上同调态射}$$

对第二点说明如下.

- 拟同构而非同伦等价的例子如下:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \scriptstyle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & X \oplus X & \xrightarrow{(0,1)} & X & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(虚线箭头  $s^1$  从  $X$  到  $X \oplus X$ ,  $s^2$  从  $X$  到  $X \oplus X$ )

上图中, 链复形的上同调对象均同构; 但不存在  $s^1$  与  $s^2$  使得  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  是零伦映射.

- 同伦等价而非同构的例子如非零可缩复形与零复形.

对第四点说明如下.

1. 诱导相同的上同调态射未必同伦, 例如取无环但不可裂的复形  $X$ , 则  $0$  和  $\text{id}_X$  诱导了相同的上同调态射但不同伦.
2. 同伦而非相等的例子如零伦映射与零映射.

## 2 复形同伦范畴是三角范畴

**定义 13** (映射锥). 对加法范畴上的复形间态射  $X \xrightarrow{u} Y$ , 定义映射锥  $\text{cone}(u)$  为如下复形

$$\dots \longrightarrow X^n \oplus Y^{n-1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d_X^n & \\ u^n & d_Y^{n-1} \end{pmatrix}} X^{n+1} \oplus Y^n \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & \\ u^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix}} X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \longrightarrow \dots$$

**原旨 3.** 定义后移运算  $[1] : (X^n, d_X^n)_{n \in \mathbb{Z}} \rightarrow (X^{n+1}, d_X^{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$  为  $C(\mathcal{A})$  (相应地,  $K(\mathcal{A})$ ) 的自同构函子.

**命题 4.** 映射锥  $X \xrightarrow{u} Y$  确定  $C(\mathcal{A})$  中的态射序列

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \text{cone}(u) \xrightarrow{(1,0)} X[1].$$

记  $[f]$  为  $f$  在  $K(\mathcal{A})$  中的像, 则  $[u]$  给出良定义的  $K(\mathcal{A})$  中态射序列.

**证明.** 考虑  $C(\mathcal{A})$  范畴. 今仅需证明对同伦的映射  $s : u \sim v$ , 总有同伦的交换图

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & \text{cone}(u) & \xrightarrow{(1,0)} & X[1] \\ \parallel & & \parallel & & \varphi \downarrow & & \parallel \\ X & \xrightarrow{v} & Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & \text{cone}(v) & \xrightarrow{(1,0)} & X[1] \end{array}.$$

注意到

$$\begin{pmatrix} \text{id}_{X^{n+2}} & 0 \\ s^n & \text{id}_{Y^{n+1}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ u^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ u^{n+1} - s^n d_X^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ v^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{id}_{X^{n+1}} & 0 \\ s^{n-1} & \text{id}_{Y^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ v^{n+1} + d_Y^n s^{n-1} & d_Y^n \end{pmatrix}.$$

因此,  $s : u \sim v$  当且仅当  $\varphi : \begin{pmatrix} \text{id} & \\ s & \text{id} \end{pmatrix} : \text{cone}(u) \rightarrow \text{cone}(v)$  使得上图交换. 此时  $\varphi \sim \text{id}_{X[1] \oplus Y}$ . □

**命题 5** (复形同伦范畴为三角范畴). 记  $\mathcal{E}$  为映射锥诱导的三角类, 即, 对任意三角  $X' \xrightarrow{u} Y' \xrightarrow{v} Z' \xrightarrow{w} X'[1]$ , 总存在复形  $X, Y$ , 态射  $u$ , 以及同伦等价  $f, g, h$ , 使得下图交换.

$$\begin{array}{ccccccc} X' & \xrightarrow{u} & Y' & \xrightarrow{v} & Z' & \xrightarrow{w} & X'[1] \\ f \downarrow & & g \downarrow & & \downarrow h & & \downarrow [f[1]] \\ X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & \text{cone}(u) & \xrightarrow{(1,0)} & X[1] \end{array}.$$

则  $(K(\mathcal{A}), [1], \mathcal{E})$  为三角范畴.

证明. 下依次验证如下几条:

1.  $(X, X, 0, \text{id}_X, 0, 0) \in \mathcal{E}$ ;
2.  $\mathcal{E}$  关于 “顺时针旋转” 封闭, 即,  $Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \text{cone}(u) \xrightarrow{(0,1)} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1] \in \mathcal{E}$ ;
3. “二推三” 成立, 即, 给定任意同伦交换图  $(f, g)$  为同伦等价

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & \text{cone}(u) & \xrightarrow{(0,1)} & X[1] \\ f \downarrow & & g \downarrow & & \vdots & & \downarrow f[1] \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & \text{cone}(u') & \xrightarrow{(0,1)} & X'[1] \end{array},$$

总有虚线处的同伦等价使得上图交换;

4. 八面体公理成立.

为书写方便, 下省略  $d, u, 1$  等同态的角标. 若明确同态的来源与去向, 如此省略不会引起混淆.

1. 作如下  $K(\mathcal{A})$  中的交换图

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xlongequal{\quad} & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X[1] \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow & & \parallel \\ X & \xlongequal{\quad} & X & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & \text{cone}(\text{id}_X) & \xrightarrow{(0,1)} & X[1] \end{array}.$$

下证明  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : X \rightarrow \text{cone}(\text{id}_X)$  是零伦的. 注意到下图即可

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & X^{n-1} & \xrightarrow{d_X^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{d_X^n} & X^{n+1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \swarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \downarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \swarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \downarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \cdots & \longrightarrow & X^n \oplus X^{n-1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d & 0 \\ 1 & d \end{pmatrix}} & X^{n+1} \oplus X^n & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d & 0 \\ 1 & d \end{pmatrix}} & X^{n+2} \oplus X^{n+1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

最后验证  $0 \rightarrow \text{cone}(\text{id}_X)$  是同伦等价, 即,  $\text{cone}(\text{id}_X)$  是可缩复形. 事实上, 有下图

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & X^n \oplus X^{n-1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d & 0 \\ 1 & d \end{pmatrix}} & X^{n+1} \oplus X^n & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d & 0 \\ 1 & d \end{pmatrix}} & X^{n+2} \oplus X^{n+1} \longrightarrow \cdots \\ & & \parallel & \swarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \parallel & \swarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \parallel \\ \cdots & \longrightarrow & X^n \oplus X^{n-1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d & 0 \\ 1 & d \end{pmatrix}} & X^{n+1} \oplus X^n & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d & 0 \\ 1 & d \end{pmatrix}} & X^{n+2} \oplus X^{n+1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

2. 只需证明对存在同伦等价  $\varphi$  使得下图在  $K(\mathcal{A})$  中交换

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & \text{cone}(u) & \xrightarrow{(1,0)} & X[1] & \xrightarrow{-u[1]} & Y[1] \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow \varphi & & \parallel \\ Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & \text{cone}(u) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & \text{cone}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) & \xrightarrow{(1,0)} & Y[1] \end{array},$$

兹断言下图即为所求

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & X[1] \oplus Y & \xrightarrow{(1,0)} & X[1] & \xrightarrow{-u[1]} & Y[1] \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow \begin{pmatrix} -u[1] \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & & \parallel \\ Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & X[1] \oplus Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} & Y[1] \oplus X[1] \oplus Y & \xrightarrow{(1,0,0)} & Y[1] \end{array}.$$

(a) 先证明上图在  $K(\mathcal{A})$  中交换. 仅需验证中间方块的交换性. 等价地, 证明  $\begin{pmatrix} u[1] & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : X[1] \oplus Y \longrightarrow Y[1] \oplus X[1] \oplus Y$  是零伦的. 注意到

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & X^n \oplus Y^{n-1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d & \\ u & d \end{pmatrix}} & X^{n+1} \oplus Y^n & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d & \\ u & d \end{pmatrix}} & X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} \\ \cdots & \longrightarrow & Y^n \oplus X^n \oplus Y^{n-1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d & -d \\ 1 & u & d \end{pmatrix}} & Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Y^n & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d & -d \\ 1 & u & d \end{pmatrix}} & Y^{n+2} \oplus X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

(b) 继而证明  $\begin{pmatrix} -u[1] \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  是同伦等价. 考虑映射  $(0, 1, 0)$ , 下证明  $\begin{pmatrix} -u[1] \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0, 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -u & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $(0, 1, 0) \begin{pmatrix} -u[1] \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$  均与单位矩阵同伦. 后者显然, 前者由如下零伦关系给出

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & Y^n \oplus X^n \oplus Y^{n-1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d & -d \\ 1 & u & d \end{pmatrix}} & Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Y^n & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d & -d \\ 1 & u & d \end{pmatrix}} & Y^{n+2} \oplus X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 & u \\ & 1 \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 & u \\ & 1 \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 & u \\ & 1 \end{pmatrix} \\ \cdots & \longrightarrow & Y^n \oplus X^n \oplus Y^{n-1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d & -d \\ 1 & u & d \end{pmatrix}} & Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Y^n & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d & -d \\ 1 & u & d \end{pmatrix}} & Y^{n+2} \oplus X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

3. 取虚线处同伦等价  $f[1] \oplus g$  即可.

4. 给定映射链  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$ , 八面体公理由如下  $C(\mathcal{A})$  中的交换图给出

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & \text{cone}(u) & \xrightarrow{(1,0)} & X[1] \\ \parallel & & \downarrow v & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 & v \end{pmatrix} & & \parallel \\ X & \xrightarrow{vu} & Z & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & \text{cone}(vu) & \xrightarrow{(1,0)} & X[1] \\ & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} u[1] & v \end{pmatrix} & & \downarrow u[1] \\ & & \text{cone}(v) & \xlongequal{\quad} & \text{cone}(v) & \xrightarrow{(1,0)} & Y[1] \\ & & \downarrow (1,0) & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 & \end{pmatrix} & & \\ & & Y[1] & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & \text{cone}(u)[1] & & \end{array}$$

下仍需验证第三列为三角. 作  $K(\mathcal{A})$  中交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{cone}(u) & & \text{cone}(vu) & & \text{cone}(v) & & \text{cone}(u)[1] \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 X[1] \oplus Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & \\ & v \end{pmatrix}} & X[1] \oplus Z & \xrightarrow{\begin{pmatrix} u[1] & \\ & 1 \end{pmatrix}} & Y[1] \oplus Z & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & \\ & \end{pmatrix}} & X[2] \oplus Y[1] \\
 \parallel & & \parallel & & \downarrow E_{2,1} + E_{4,2} & & \parallel \\
 X[1] \oplus Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & \\ & v \end{pmatrix}} & X[1] \oplus Z & \xrightarrow{\begin{pmatrix} O_{2 \times 2} & \\ & I_{2 \times 2} \end{pmatrix}} & X[2] \oplus Y[1] \oplus X[1] \oplus Z & \xrightarrow{\begin{pmatrix} I_{2 \times 2} & O_{2 \times 2} \end{pmatrix}} & X[2] \oplus Y[1] \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 \text{cone}(u) & & \text{cone}(v) & & \text{cone}\left(\begin{pmatrix} 1 & \\ & v \end{pmatrix}\right) & & \text{cone}(u)[1]
 \end{array} .$$

其中, 左侧与右侧方块可换. 为证明中间方块交换, 只需证明以下为零伦映射

$$u[1] \cdot E_{2,1} - E_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u[1] & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : X[1] \oplus Z \mapsto X[2] \oplus Y[1] \oplus X[1] \oplus Z.$$

注意到零伦关系

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & X^n \oplus Z^{n-1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d & \\ & 1 \end{pmatrix}} & X^{n+1} \oplus Z^n & \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d & \\ & 1 \end{pmatrix}} & X^{n+2} \oplus Z^{n+1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow u \cdot E_{2,1} - E_{3,1} & & \downarrow u \cdot E_{2,1} - E_{3,1} & & \downarrow u \cdot E_{2,1} - E_{3,1} \\
 \cdots & \longrightarrow & X^{n+1} \oplus Y^n \oplus X^n \oplus Z^{n-1} & \xrightarrow{*} & X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Z^n & \xrightarrow{*} & X^{n+3} \oplus Y^{n+2} \oplus X^{n+2} \oplus Z^{n+1} \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

其中  $*$  :=  $\begin{pmatrix} d & & & & \\ -u & -d & & & \\ 1 & & -d & & \\ & v & vu & d & \end{pmatrix}$ . 最后证明  $E_{2,1} + E_{4,2} : X[1] \oplus Z \longrightarrow X[2] \oplus Y[1] \oplus X[1] \oplus Z$  是同伦等

价. 作左逆同态  $E_{1,2} + u \cdot E_{1,3} + E_{2,4}$ , 下仅需证明

$$(E_{2,1} + u \cdot E_{1,3} + E_{4,2})(E_{1,2} + E_{2,4}) = E_{2,2} + u \cdot E_{2,3} + E_{4,4} \in \text{End}_{C(\mathcal{A})}(X[2] \oplus Y[1] \oplus X[1] \oplus Z)$$

同伦于恒等映射. 实际上,  $-E_{1,3}$ , 给出  $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & u & & \\ & & -1 & \\ & & & \end{pmatrix} \sim O$ .

□

注 4. 给定映射链

$$\cdots \longrightarrow \text{cone}(u)[-1] \xrightarrow{(-1,0)} X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \text{cone}(u) \xrightarrow{(1,0)} X[1] \longrightarrow \cdots,$$

相邻两项之复合为零伦.

### 3 映射筒

**定义 14** (映射筒). 给定映射  $X \xrightarrow{u} Y$  与  $K(\mathcal{A})$  中三角  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \text{cone}(u) \xrightarrow{(1,0)} X[1]$ , 定义映射筒  $\text{cyl}(u)$  为同伦核的映射锥. 即,

$$\text{cyl}(u) := \text{cone}\left((-1, 0) : \text{cone}(u)[-1] \rightarrow X\right) = X[1] \oplus Y \oplus X \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

其  $n$ -次微分为

$$\begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & & \\ u^{n+1} & d_Y^n & \\ -\text{id}_{X^{n+1}} & & d_X^n \end{pmatrix} : X^{n+1} \oplus Y^n \oplus X^n \longrightarrow X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \oplus X^{n+1}.$$

**例 2.** 映射  $X \xrightarrow{u} Y$  诱导了如下  $K(\mathcal{A})$  中正合列, 其中任意三角为好三角.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \text{cone}(u)[-1] & \xrightarrow{(-1,0)} & X & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & \text{cyl}(u) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} & \text{cone}(u) & \xrightarrow{(1,0)} & X[1] & \longrightarrow & \cdots \\ & & \parallel & & & & \parallel & & & & \parallel & & \\ & & X \oplus Y[-1] & & & & X[1] \oplus Y \oplus X & & & & X[1] \oplus Y & & \end{array}.$$

**命题 6.** 映射筒给出如下可裂短正合列

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \text{cyl}(u) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \text{cone}(u) \longrightarrow 0.$$

**命题 7.**  $(0, 1, u) : \text{cyl}(u) \longrightarrow Y$  是同伦等价.

证明. 依照态射在好三角中嵌入的唯一性, 作同伦范畴的交换图

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & \text{cone}(u) & \xrightarrow{(1,0)} & X[1] \\ \parallel & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & & \parallel & & \parallel \\ X & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & \text{cyl}(u) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} & \text{cone}(u) & \xrightarrow{(1,0)} & X[1] \\ \parallel & & \downarrow (0,1,u) & & \parallel & & \parallel \\ X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & \text{cone}(u) & \xrightarrow{(1,0)} & X[1] \end{array}.$$

显然第一行第二列方块与第二行第一列方块交换, 且上图第二列复合为  $\text{id}_Y$ . 依照“二推三”之同构定理,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0, 1, u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 与 } \text{id}_{\text{cyl}(u)} \text{ 同伦. 下仅需证明}$$

1. 第一行第一列处方块交换, 即,  $\begin{pmatrix} 0 \\ u \\ -1 \end{pmatrix} : X \rightarrow \text{cyl}(u)$  零伦;
2. 第二行第二列处方块交换, 即,  $\begin{pmatrix} 1 & \\ & -u \end{pmatrix} : \text{cyl}(u) \rightarrow \text{cone}(u)$  零伦;



对前者, 考虑

$$\begin{pmatrix} 0 \\ u \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d & & \\ u & d & \\ -1 & & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \end{pmatrix}.$$

对后者, 考虑

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d & & \\ u & d & \\ -1 & & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -d & \\ u & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

注 5. 对 Abel 范畴中复形的短正合列  $0 \longrightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{\pi} Z \longrightarrow 0$ , 有交换图

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & \text{cyl}(u) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} & \text{cone}(u) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow (0,1,u) & & \downarrow (0,v) \\ 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{\pi} & Z \longrightarrow 0 \end{array}.$$

此时, 蛇引理给出长正合列的交换图. 注意到  $(0, 1, u)$  是同伦等价, 从而是拟同构, 因此长正合列同构. 此时  $(0, v) : \text{cone}(u) \longrightarrow Z$  为拟同构.

**定义 15** (同伦像). 映射筒即  $\text{cyl}(u) := \text{cone}(\text{hker}(u))$ ; 相应地, 定义同伦像  $\text{him}(v) := \text{cone}(\text{hcoker}(v))[-1]$ . 具体地, 给定  $Y \xrightarrow{v} Z$ , 则  $\text{him}(v) = Z \oplus Y \oplus Z[-1]$  的  $n$ -次上同调为

$$\begin{pmatrix} d_Z^n & & \\ & d_Y^n & \\ -\text{id}_{Z^n} & -v^n & -d_Y^{n-1} \end{pmatrix} : Z^n \oplus Y^n \oplus Z^{n-1} \longrightarrow Z^{n+1} \oplus Y^{n+1} \oplus Z^n.$$

**命题 8** ( $\text{him}(v)$  的对偶命题). 类似映射筒, 有如下关于同伦像的相似命题

1. 有好三角  $Z[-1] \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}} \text{cone}(v)[-1] \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} \text{him}(v) \xrightarrow{(-1,0,0)} Z$ .
- 1' 将上一条中的好三角顺时针旋转, 并将前两项反号, 得  $\text{cone}(v)[-1] \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \text{him}(v) \xrightarrow{(1,0,0)} Z \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \text{cone}(v)$ .
2. 有可裂短正合列  $0 \longrightarrow \text{cone}(v)[-1] \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \text{him}(v) \xrightarrow{(1,0,0)} Z \longrightarrow 0$
3. 有同伦等价的交换图

$$\begin{array}{ccccccc} \text{cone}(v)[-1] & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} & \text{him}(v) & \xrightarrow{(1,0,0)} & Z & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & \text{cone}(v) \\ \parallel & & \downarrow (0,-1,0) & & \parallel & & \parallel \\ \text{cone}(v)[-1] & \xrightarrow{(-1,0)} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & \text{cone}(v) \\ \parallel & & \downarrow \begin{pmatrix} v \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} & & \parallel & & \parallel \\ \text{cone}(v)[-1] & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} & \text{him}(v) & \xrightarrow{(1,0,0)} & Z & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & \text{cone}(v) \end{array}.$$

4. 对任意 Abel 范畴复形的短正合列  $0 \longrightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \longrightarrow 0$ , 有拟同构  $\begin{pmatrix} -u \\ 0 \end{pmatrix} : X \rightarrow \text{cone}(v)[-1]$ , 如以下正合列的交换图所示

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \begin{pmatrix} -u \\ 0 \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \text{cone}(v)[-1] & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} & \text{him}(v) & \xrightarrow{(1,0,0)} & Z \longrightarrow 0 \end{array}.$$

**命题 9** ( $H^n$  是上同调函子). 给定同伦范畴  $K(\mathcal{A})$ , 则任一  $H^n$  将好三角映作正合列. 三角射诱导的长正合列之连接态射自然.

证明. 对任意  $K(\mathcal{A})$  中好三角  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \text{cone}(u) \xrightarrow{(1,0)} X[1]$ , 既证同伦交换图

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\ f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow & & \downarrow f[1] \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & \text{cone}(u') & \xrightarrow{(1,0)} & X'[1] \\ \parallel & & \uparrow (0,1,u) & & \parallel & & \parallel \\ X' & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & \text{cyl}(u') & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} & \text{cone}(u') & \xrightarrow{(1,0)} & X[1] \end{array}.$$

作用任一  $H^n$  函子, 得

$$\begin{array}{ccccccc} H^n(X) & \xrightarrow{u} & H^n(Y) & \xrightarrow{v} & H^n(Z) & & \\ \sim \downarrow & & \sim \downarrow & & \sim \downarrow & & \\ H^n(X') & \xrightarrow{u'} & H^n(Y') & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & H^n(\text{cone}(u')) & & \\ \parallel & & \sim \downarrow & & \parallel & & \\ H^n(X') & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} & H^n(\text{cyl}(u')) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} & H^n(\text{cone}(u')) & & \end{array}.$$

其中, 最后一行为可裂短正合列,  $\sim$  表示同伦等价在  $H^n$  下的像, 即同构. 因此前两行均正合. 对任意三角射

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H^n(X[-1]) & \xrightarrow{H^n(-w[-1])} & H^n(X) & \xrightarrow{H^n(u)} & H^n(Y) & \xrightarrow{H^n(v)} & H^n(Z) & \xrightarrow{H^n(w)} & H^n(X[1]) & \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow H^n(h[-1]) & & \downarrow H^n(f) & & \downarrow H^n(g) & & \downarrow H^n(h) & & \downarrow H^n(f[1]) & \\ \cdots & \longrightarrow & H^n(X'[-1]) & \xrightarrow{H^n(-w'[-1])} & H^n(X') & \xrightarrow{H^n(u')} & H^n(Y') & \xrightarrow{H^n(v')} & H^n(Z') & \xrightarrow{H^n(w')} & H^n(X'[1]) & \longrightarrow \cdots \end{array}.$$

其中, 任一  $H^n(-)$  函子将同伦交换图映作 Abel 范畴的交换图. □