作者: 张陈成
学号: 023071910029

三角范畴抄书笔记

三角范畴简介

目录

1 预三角范畴

原旨 1. 以下谈论的范畴都是本质小的. 换言之, Ob 在同构下的等价类构成集合.

定义 1 (加法范畴的自等价)**.** 称 $T:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ 为范畴 $\mathcal{C}$ 到自身的范畴等价, 当且仅当

1. (全) $T:\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(TX,TY)$ 对一切 $X,Y\in\mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ 满.
2. (忠实) $T:\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(TX,TY)$ 对一切 $X,Y\in\mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ 单.
3. (稠密/本质满) 对任意 $X'\in\mathsf{Ob}(C)$, 总存在 $X\in\mathrm{Ob}(C)$ 使得 $TX\simeq X'$.

注 1. 等价地, 存在函子 $S:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ 与函子的自然同构 $TS\simeq\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\simeq ST$. 不妨直接假定 $S^{-1}=T$[1].

定义 2 (三角与三角射)**.** 称 $(\mathcal{C},T)$ 中的三角为六元组 (X,Y,Z,u,v,w), 即如下态射序列

$$X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}Z\xrightarrow{w}TX\ .$$

三角间的态射 (下称 “三角射”) 对应态射范畴的三角. 即, 使得下图交换的三元组 (f,g,h).

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f'"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g'"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h'"'] & TX \arrow[d, "Tf'"] \\
X' \arrow[r, "u'"'] & Y' \arrow[r, "v'"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] & TX'
\end{tikzcd}\ .$$

[1] 待补充???

定义 3 (三角同构)**.** 若三角间的某态射有左逆及右逆 (从而左右逆相等), 则称两三角同构.

例 1. 三角 (X,Y,Z,u,v,w) 与 $(X,Y,Z,\varepsilon_1 u,\varepsilon_2 v,\varepsilon_3 w)$ 同构. 其中 $\varepsilon_i\in\{\pm 1\}$, $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3=1$.

定义 4 (预三角范畴)**.** 给定范畴 $\mathcal{C}$, 范畴自同构函子 $T:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$, 以及某些三角组成的类 $\mathcal{E}$. 称 $(\mathcal{C},T,\mathcal{E}$ 为预三角范畴, 若满足以下命题.

1. $\mathcal{E}$ 中存在形如以下的三角.
   (a) $X\xrightarrow{\mathrm{id}_X}X\xrightarrow{0}0\xrightarrow{0}TX$ 为三角.
   (b) 任意 $X\xrightarrow{f}Y$ 可嵌入形如 $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z\xrightarrow{h'}TX$ 的三角.
   (c) 对任意 $(X,Y,Z,u,v,w)\in\mathcal{E}$, 若 $\mathcal{C}$ 中存在同构的三角 $(X,Y,Z,u,v,w)\simeq(X',Y',Z',u',v',w')$, 则后者也在 $\mathcal{E}$ 中.
2. $\mathcal{E}$ 中三角的顺时针旋转也在 $\mathcal{E}$ 中. 此处顺时针旋转是指
$$\left[X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}Z\xrightarrow{w}TX\right]\Longrightarrow\left[Y\xrightarrow{v}Z\xrightarrow{w}TX\xrightarrow{-Tu}TY\right].$$
3. 态射范畴的态射也可补全作三角. 换言之, 交换图 $\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X' \arrow[r, "u'"'] & Y' \end{tikzcd}$ 总能被补全作交换图
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "h"] & TX \arrow[d, "Tf"] \\ X' \arrow[r, "u'"'] & Y' \arrow[r, "v"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] & TX' \end{tikzcd}.$$

称 $\mathcal{E}$ 中的三角为 "好三角", 也可想象之为 "正合列".

注 2. 以上定义中条件可改进如下

1. 1-(b) 中嵌入位置是任意的,
2. 1-(b) 中嵌入的三角在同构意义下唯一.
3. 2 是充要的, 可定义 "顺时针旋转" 的逆变换为 "逆时针旋转".
4. 3 中 $\{f,g,h\}$ 中任意两者的存在性推出第三者的存在性 (不必唯一)[2].

往后依次证明之.

命题 1. 注 2 中的第三条成立.

证明. 任意三角在 T^{-1} 作用下得到同构的三角, 此处 T^{-2} 的逆变换为六次顺时针旋转. 因此, 好三角的六次逆时针旋转仍为好三角. 验证知逆时针旋转为 T^{-2} 与五次顺时针旋转之/复合. 反之, 若逆时针变换定义, 则定义顺时针变换为 T^2 与五次逆时针旋转之复合. □

命题 2. 注 2 中的第一条成立.

[2] 该条结论位置不妥, 往后调整之.

证明. 依定义, 存在三角

$$T^{-1}X \xrightarrow{-T^{-1}u} T^{-1}Y \xrightarrow{-T^{-1}v} T^{-1}Z \xrightarrow{-T^{-1}w} X \ .$$

考虑顺时针旋转, 得

$$T^{-1}Y \xrightarrow{-T^{-1}v} T^{-1}Z \xrightarrow{-T^{-1}w} X \xrightarrow{u} Y \ .$$

再次顺时针旋转, 遂有

$$T^{-1}Z \xrightarrow{-T^{-1}w} X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \ .$$

□

命题 3. “好三角” 中相继映射之复合为 0.

证明. 不妨取好三角

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \ .$$

将原三角补全作以下态射范畴的三角

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & X \arrow[r] \arrow[d, "u"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & TX \arrow[d, "Tu"] \\ X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & TX \end{tikzcd} .$$

从而 $vu = 0$. 考虑一次顺时针旋转, 则 $wv = 0$. □

2 同调核与同调余核

定义 5 (同调核, 同调余核)**.** 预三角范畴中, 对好三角导出的映射链、

$$\cdots \longrightarrow T^{-1}Z \xrightarrow{-T^{-1}w} X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX \xrightarrow{-Tu} TY \longrightarrow \cdots ,$$

定义前一态射是后一态射的同调核, 后一态射是前一态射的同调余核.

注 3. 依照预三角范畴之定义及若干推论, 不难有以下结论.

1. 恒等映射的同调核与同调余核均为 0;
2. 任意态射均有同调核与同调余核, 且在同构意义下唯一;
3. 同调核的同调余核即同调余核的同调核, 亦即映射本身.

命题 4 (同调余核的分解原理)**.** 给定好三角 (X, Y, Z, u, v, w), $Y \xrightarrow{\alpha} M$ 被 v 分解当且仅当 $\alpha u = 0$.

证明. 若存在 φ 使得 $\varphi v = \alpha$, 考虑交换图

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\alpha"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "\varphi"] & TX \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, equal] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} .$$

根据 “二推三” 补全左侧正方形, 得 $\alpha u = 0$. 反之, 若 $\alpha u = 0$, 则有正合列间的交换图

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\alpha"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "\varphi"] & TX \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, equal] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} .$$

依照 “二推三” 补全的 φ 给出分解 $\varphi v = \alpha$. $\square$

注 4. 等价地, 好三角的交换图 $\begin{tikzcd} & N \arrow[d, "\psi"'] & & \\ X \arrow[r, "u"'] & Y \arrow[r, "v"'] & Z \arrow[r, "w"'] & TX \end{tikzcd}$ 中, ψ 被 u 分解当且仅当 $v\psi = 0$.

定义 6 (上同调函子)**.** 称预三角范畴 $\mathcal{C}$ 到 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 上的加法函子 H 是上同调函子, 当且仅当 H 在好三角上的作用导出长正合列

$$\cdots \xrightarrow{H(-T^{-1}v)} H(T^{-1}Z) \xrightarrow{H(-T^{-1}w)} H(X) \xrightarrow{H(u)} H(Y) \xrightarrow{H(v)} H(Z) \xrightarrow{H(w)} H(TX) \xrightarrow{H(-Tu)} \cdots .$$

$\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{A}$ 的反变上同调函子等价于 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 到 $\mathcal{A}$ 的上同调函子.

例 2. 对任意 $M \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$, 函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, -)$ 与 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, M)$ 均是上同调函子.

对前者, 好三角 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ 给出链复形 (任意 $d \in \mathbb{Z}$)

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^dX) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^du)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^dY) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^dv)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^dZ) .$$

下证明 T^dY 处正合性. 对任意 $g \in \ker \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^dv)$, 总存在 f 使得下图交换

$$\begin{tikzcd} T^{-d}M \arrow[r] \arrow[d, "T^{-d}g"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & T^{1-d}M \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, dashed, "f"] & T^{1-d}M \arrow[d, "T^{1-d}g"] \\ Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & TX \arrow[r, "-Tu"] & TY \end{tikzcd} .$$

此时 $T^{1-d}g = -(Tu)f$. 故 $g = T^{d-1}(-(Tu)f) \in \mathrm{im}\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, T^du)$. 同理, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, M)$ 是反变正合的.

命题 5. 若好三角的态射中有两处映射为同构, 则第三处亦然. 这也直接证明了注 2 中的第二条.

证明. 考虑三角旋转, 不失一般性地设以下交换图中 f 与 g 是同构.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "h"] & TX \arrow[d, "Tf"] \\ X' \arrow[r, "u'"'] & Y' \arrow[r, "v'"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] & TX' \end{tikzcd} .$$

记 $h^M : \mathcal{C} \to \mathrm{Ab}, X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, X)$, 则有正合列间的交换图

$$\begin{tikzcd} h_Z(X) & h_Z(Y) \arrow[l, "h_Z(u)"'] & h_Z(Z) \arrow[l, "h^Z(v)"'] & h_Z(TX) \arrow[l, "h^Z(w)"'] & h_Z(TY) \arrow[l, "h_Z(-Tu)"'] \\ h_Z(X') \arrow[u, "h_Z(f)"] & h_Z(Y') \arrow[l, "h_Z(u')"] \arrow[u, "h_Z(g)"'] & h_Z(Z') \arrow[l, "h_Z(v')"] \arrow[u, dashed, "h_Z(h)"'] & h_Z(TX') \arrow[l, "h_Z(w')"] \arrow[u, "h_Z(Tf)"'] & h_Z(TY') \arrow[l, "h_Z(-Tu')"] \arrow[u, "h_Z(Tg)"'] \end{tikzcd} .$$

此处 $\{h_Z(f), h_Z(g), h_Z(Tf), h_Z(Tg)\}$ 均为同构. 根据五引理, 中间处 $h_Z(h)$ 为同构. 显然存在 $h' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', Z)$ 使得 $h' \circ h = \mathrm{id}_Z \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(Z)$. 同理地, 将 h_Z 换作 $h^{Z'}$ 可知 h 有左逆与右逆, 从而 h 与 h' 为互逆的同构. $\square$

注 5. 仿照以上证明, 有 “二推三” 推论. 即, 若 $\{f, g, h\}$ 中任意两者为同构, 则第三者亦然.

原旨 2. 若无特殊说明, 默认范畴中的决出极限 (余极限) 的定向系统是小的.

定义 7 (下降)**.** 记 $\mathcal{A}$ 是容许极限的 Abel 范畴. 称预三角范畴到 Abel 范畴的同调函子 $H : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ 为下降, 若其保持积.

例 3. 对任意 $M \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$, 形如 h^M 的同调函子均为下降.

定义 8 (预三角)**.** 预三角即在一切同调函子下正合的三角. 预三角包括好三角.

命题 6. 预三角之积仍为预三角. 考虑任意下降即可.

3 好三角的可裂性

命题 7 (直和保持好三角)**.** 给定预三角范畴 $\mathcal{C}$, 则好三角的有限直和仍是好三角. 若范畴允许某种无穷直和, 则无穷个好三角的该种无穷直和仍是好三角.

证明. 考虑以下交换图

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\binom{1}{0}"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\binom{1}{0}"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "i"] & TX \arrow[d, "T\binom{1}{0}"] \\
X \oplus X' \arrow[r, "u \oplus u'"] & Y \oplus Y' \arrow[r, dashed, "g"] & W \arrow[r, dashed, "h"] & T(X \oplus X') \\
X' \arrow[r, "u'"'] \arrow[u, "\binom{0}{1}"] & Y' \arrow[r, "v'"'] \arrow[u, "\binom{0}{1}"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] \arrow[u, dashed, "j"'] & TZ' \arrow[u, "T\binom{0}{1}"']
\end{tikzcd} .$$

其中, g 与 h 为 $u \oplus u'$ 嵌入的某个好三角中的映射. 连接映射 i 与 j 由好三角间的同态给出. 依照 “二推三” 推论, 只需证明下交换图中 $(T\binom{1}{0}, T\binom{0}{1})$ 为同构:

$$\begin{tikzcd}
X \oplus X' \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y \oplus Y' \arrow[r] \arrow[d, equal] & Z \oplus Z' \arrow[r] \arrow[d, dashed, "(i,j)"'] & TX \oplus TX' \arrow[d, dashed, "(T\binom{1}{0}, T\binom{0}{1})"'] \\
X \oplus X' \arrow[r] & Y \oplus Y' \arrow[r, dashed, "g"'] & W \arrow[r, dashed, "h"'] & T(X \oplus X')
\end{tikzcd} .$$

这是显然的: 根据熟知结论, 加法范畴间的函子为加法函子当且仅当其保持有限余积. 对无穷情形, 由于 T 是自同构, 从而与极限交换. □

例 4. 对预三角范畴 $\mathcal{C}$ 与任意 $X, Y \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$, 总有直和 $X \xrightarrow{\binom{1}{0}} X \oplus Y \xrightarrow{(0,1)} Y \xrightarrow{0} TX$.

定义 9 (可裂单/满)**.** 可裂单态射即存在左逆的态射, 可裂满态射即存在右逆的态射.

命题 8. 给定好三角 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$, 则 u 可裂单等价于 v 可裂满, 亦等价于 $w = 0$.

证明. $w = 0$ 时有以下交换图 (三角同构)

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, equal] & X \oplus Z \arrow[r, "(0,1)"] \arrow[d, dashed, "(\varphi,\psi)"] & Z \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & TX \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "u"'] & Y \arrow[r, "v"'] & Z \arrow[r, "w"'] & TX
\end{tikzcd} .$$

依照交换图, $\varphi = u$, 且 ψ 是 v 的右逆. 反之, 有交换图 (三角同构)

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, equal] & X \oplus Z \arrow[r, "(0,1)"] \arrow[d, "(u, v_r^{-1})"'] & Z \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & TX \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "u"'] & Y \arrow[r, "v"'] & Z \arrow[r, "w"'] & TX
\end{tikzcd}.$$

其中 v_r^{-1} 为 v 的右逆, 从而只能有 $w = 0$. 这表明 $w = 0$ 与 v 可裂满是等价的.

$w = 0$ 时亦有如下交换图 (三角同构)

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "(\alpha, \beta)"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, equal] & TX \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "\binom{1}{0}"'] & X \oplus Z \arrow[r, "(0,1)"'] & Z \arrow[r, "0"'] & TX
\end{tikzcd}.$$

显然 $\beta = v$, α 是 u 的左逆. 反之, 有交换图 (三角同构)

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "(u_l^{-1}, v)"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, equal] & TX \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "\binom{1}{0}"'] & X \oplus Z \arrow[r, "(0,1)"'] & Z \arrow[r, "0"'] & TX
\end{tikzcd}.$$

从而只能有 $w = 0$. 这表明 $w = 0$ 与 u 可裂单是等价的. □

注 6. 特别地, 若 $X \xrightarrow{u} Y$ 是同构, 则有好三角的同构 $(X, Y, Z, u, v, w) \simeq (X, Y, 0, u, 0, 0)$.

命题 9. 给定好三角 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$, 则 u 可裂单等价于 u 是单态射.

证明. 仅证明单态射可裂. 若 u 单, 则根据好三角中相邻态射复合为零知 $w = 0$. 此时存在 φ 使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, dashed, "\varphi"] & Z \arrow[r, "0"] \arrow[d] & TX \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, equal] & X \arrow[r] & 0 \arrow[r] & TX
\end{tikzcd}.$$

此时 φ 为 u 的左逆, 因此 u 可裂单. □

注 7. 同理, 好三角中的满态射与可裂满等价. 从而好三角中以下条件等价:

$$u \text{ 单} \Longleftrightarrow u \text{ 可裂单} \Longleftrightarrow w = 0 \Longleftrightarrow v \text{ 满} \Longleftrightarrow v \text{ 可裂满}.$$

命题 10 (“二推三” 的唯一性条件)**.** 给定好三角的交换图 (实线处)

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dl, dotted] & TX \arrow[d, "Tf"] \arrow[dl, dotted] \\
X' \arrow[r, "u'"'] & Y' \arrow[r, "v'"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] & TX'
\end{tikzcd}$$

依定义知存在 h 使得上图交换. 若 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(TX, Z') = 0$ 或 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y') = 0$, 则 h 唯一.

证明. 若存在 $h, h' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Z')$ 使得上图交换, 则 $(h - h')v = 0 = w'(h - h')$. 若 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(TX, Z') = 0$ 或 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y') = 0$, 依分解定理知 $h - h' = 0$. □

4　三角范畴

定义 10 (三角范畴)**.** 称预三角范畴为三角范畴, 若满足以下命题.

- 将 $\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "vu"'] & Y \arrow[r, "v"] & Z \end{tikzcd}$ 中映射 $\{u, v, uv\}$ 分别嵌入三个好三角, 则存在虚线处的好三角使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
 & & & X \arrow[dl, "u"'] \arrow[dd, "vu"] & & \\
 & & Y \arrow[dr, "v"] \arrow[ddl, "i"'] & & & \\
 & & & Z \arrow[d, "k"] \arrow[dr, "j"] & & \\
 & Z' \arrow[rr, dashed, "f"] \arrow[dl, "i'"'] & & Y' \arrow[r, dashed, "g"] \arrow[d, "k'"] & X' \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[dr, "j'"'] & TZ' \\
TX \arrow[rrr, equal] & & & TX \arrow[rr, "Tu"'] & & TY \arrow[u, "Ti"']
\end{tikzcd}.$$

定义 11 (三角子范畴)**.** 称三角范畴的子范畴 $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ 为三角子范畴, 若满足以下命题

1. 任取 $\mathcal{C}$ 中同构的好三角, 若一者为 $\mathcal{C}'$ 中的好三角, 则另一者亦然.
2. T 也是范畴 $\mathcal{C}'$ 的自同构. 换言之, $\mathcal{C}'$ 是 $\mathcal{C}$ 的 T-不变子空间.
3. 给定 $\mathcal{C}$ 中好三角 (X, Y, Z, u, v, w), 若 $X, Z \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$, 则 $Y \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$.

定义 12 (三角函子)**.** 称三角范畴间的加法函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ 为三角函子, 若存在自然同构 $\varphi : FT \simeq T'F$.

注 8. 依照范畴等价/同构, 定义三角函子 (或三角范畴间) 的同构/等价为三角同构/三角等价.

注 9. 也称好三角为正合列. 相应地, 三角函子也称作正合函子.

例 5. 三角函子的核给出三角子范畴.

命题 11. 三角函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ 对 Ob 保持单, 对 Mor 保持满, 则对 Mor 保持单 (忠实).

证明. 任取 v 使得 $Fv = 0$, 下证明 $v = 0$ 即可. 考虑如下好三角的交换图

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d] \arrow[l, dashed, bend left, "u'"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d] & TX \arrow[d] \\
FX \arrow[r, "Fu"'] & FY \arrow[r, "0"'] & FZ \arrow[r, "Fw"'] & FTX
\end{tikzcd}.$$

由题设知 $Fv = 0$, 故 Fu 可裂满. 由于 F 对 Mor 保持满, 则存在 u' 使得 $(Fu)(Fu') = F(uu') = \mathrm{id}_{FY}$. 此时考虑如下好三角的同态

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "uu'"] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d, dashed] & TY \arrow[d] \\
FY \arrow[r, "F(uu')"'] & FY \arrow[r] & 0 \arrow[r] & T'FY
\end{tikzcd}.$$

由于 F 对 Ob 保持单, 且 $FW = 0$, 故 $W = 0$. 此时 uu' 为 Y 的自同构, 遂 $v = 0$. $\square$

命题 12. 对三角范畴间的伴随对, 一者为三角函子当且仅当另一者为三角函子.

证明. 待补充. □

注 10. 一般地, Abel 范畴间的正合函子仅有 "左伴随右正合-右伴随左正合" 一对应; 对三角范畴而言, 有 "左伴随正合-右伴随正合" 一对应.

5 基变换

定义 13 (八面体公理)**.** 将定义 10 中的命题改写如下: 对任意映射链 $X \xrightarrow{u_1} Y \xrightarrow{u_2} Z$, 存在如下交换图使得前两行与中间两列为好三角.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "v_1"] \arrow[d, "u_2"'] & Z' \arrow[r, "w_1"] \arrow[d, "\alpha"] & TX \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "u_3"] & Z \arrow[r, "v_3"] \arrow[d, "v_2"'] & Y' \arrow[r, "w_3"] \arrow[d, "\beta"] & TX \arrow[d, "Tu_1"] \\
 & X' \arrow[r, equal] \arrow[d, "w_2"'] & X' \arrow[r, "w_2"] \arrow[d, "\gamma"] & TY \\
 & TY \arrow[r, "Tv_1"] & TZ' &
\end{tikzcd}
.
$$

称该命题为 "八面体公理".

命题 13 (基变换)**.** 八面体公理等价于如下命题: 对好三角 (X, Y, Z, u_1, v_1, w_1) 与态射 $Z' \xrightarrow{\varepsilon} Z$, 有交换图

$$
\begin{tikzcd}
 & E \arrow[r, equal, dashed] \arrow[d, dashed, "\alpha"'] & E \arrow[d, dashed, "\delta"] & \\
X \arrow[r, dashed, "u_2"] \arrow[d, equal, dashed] & Y' \arrow[r, dashed, "v_2"] \arrow[d, dashed, "\beta"'] & Z' \arrow[r, dashed, "w_2"] \arrow[d, "\varepsilon"] & TX \arrow[d, equal, dashed] \\
X \arrow[r, "u_1"] & Y \arrow[r, "v_1"] \arrow[d, dashed, "\gamma"'] & Z \arrow[r, "w_1"] \arrow[d, dashed, "\eta"] & TX \arrow[d, dashed, "Tu_2"] \\
 & TE \arrow[r, equal, dashed] & TE \arrow[r, dashed, "T\alpha"] & TY'
\end{tikzcd}
.
$$

证明. 由八面体公理推得基变换: 依照八面体公理补全 $\begin{tikzcd} Z' \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, equal] & Z \arrow[d, "w_1"] \\ Z' \arrow[r] & TX \end{tikzcd}$ 即可; 反之, 任意映射链 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$ 总能嵌入好三角 $\begin{tikzcd} & & X \arrow[d, "u"] & \\ T^{-1}Z \arrow[r, "T^{-1}w'"] & X' \arrow[r, "u'"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \end{tikzcd}$, 而后应用基变换定理即得八面体公理. □

定义 14 (余基变换)**.** 八面体公理等价于如下命题: 对好三角 (X, Y, Z, u_1, v_1, w_1) 与态射 $X \xrightarrow{\delta} X'$, 有交换图

$$
\begin{tikzcd}
 & F \arrow[r, equal, dashed] \arrow[d, dashed, "\eta"'] & F \arrow[d, dashed, "\alpha"'] & \\
T^{-1}Z \arrow[r, dashed, "-T^{-1}w_2"] \arrow[d, equal, dashed] & X \arrow[r, dashed, "u_2"] \arrow[d, "\delta"'] & Y \arrow[r, dashed, "v_2"] \arrow[d, dashed, "\beta"'] & Z \arrow[d, equal, dashed] \\
T^{-1}Z \arrow[r, "-T^{-1}w_1"] & X' \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon"'] & Y' \arrow[r, "v_1"] \arrow[d, dashed, "\gamma"'] & Z \arrow[d, dashed, "-w_2"'] \\
 & TF \arrow[r, equal, dashed] & TF \arrow[r, dashed, "-T\eta"] & TX
\end{tikzcd}
.
$$

注 11. 余基变换, 基变换, 以及八面体公理彼此等价.

命题 14 (4 × 4 引理)**.** 交换图 $\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "u_1"] & X_2 \arrow[d, "u_2"] \\ Y_1 \arrow[r, "\alpha_2"] & Y_2 \end{tikzcd}$ 总能补全作如下四行四列的好三角

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "u_1"] & X_2 \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "u_2"] & X_3 \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d, "u_3"] & TX_1 \arrow[d, "Tu_1"] \\
Y_1 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "v_1"] & Y_2 \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "v_2"] & Y_3 \arrow[r, "\gamma_2"] \arrow[d, "v_3"] & TY_1 \arrow[d, "Tv_1"] \\
Z_1 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "w_1"] & Z_2 \arrow[r, "\beta_3"] \arrow[d, "w_2"] & Z_3 \arrow[r, "\gamma_3"] \arrow[d, "w_3"] & TZ_1 \arrow[d, "-Tw_1"] \\
TX_1 \arrow[r, "T\alpha_1"] & TX_2 \arrow[r, "T\beta_1"] & TX_3 \arrow[r, "-T\gamma_1"] & T^2X_1
\end{tikzcd}.$$

其中, 右下角方块反交换, 其余方块交换.

证明. 注意到如下交换图

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, equal] & X_2 \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "u_2"'] & X_3 \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d] & TX_1 \arrow[d, equal] \\
X_1 \arrow[r] & Y_2 \arrow[r] \arrow[d, "v_2"'] & W \arrow[r] \arrow[d] & TX_1 \arrow[d, "T\alpha_1"] \\
 & Z_2 \arrow[r, equal] \arrow[d, "w_2"'] & Z_2 \arrow[r, "w_2"] \arrow[d] & TX_2 \\
 & TX_2 \arrow[r, "T\beta_1"] & TX_3 &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, equal] \arrow[d, "u_1"'] & X_1 \arrow[d] & & \\
Y_1 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "v_1"'] & Y_2 \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d] & Y_3 \arrow[r, "\gamma_2"] \arrow[d, equal] & TY_1 \arrow[d, "Tv_1"] \\
Z_1 \arrow[r] \arrow[d, "w_1"'] & W \arrow[r] \arrow[d] & Y_3 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_2"] & TZ_1 \\
TX_1 \arrow[r, equal] & TX_1 \arrow[r, "Tu_1"] & TY_1 &
\end{tikzcd}.$$

未完待续. □

6 第一章习题

问题 1. 设 $u : X \longrightarrow Y$ 是预三角范畴 $\mathcal{C}$ 的态射. 则 u 是同构当且仅当 $X \xrightarrow{u} Y \longrightarrow 0 \longrightarrow TX$ 是好三角.

证明. u 是同构当且仅当以下两条同时成立

- u 可裂单, 即, 任意好三角 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ 中 $w = 0$;
- u 可裂满, 即, 任意好三角 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ 中 $v = 0$.

从而 u 是同构当且仅当 $X \xrightarrow{u} Y \longrightarrow 0 \longrightarrow TX$ 是好三角. □

问题 2. 设 $\mathcal{C}$ 是预三角范畴. 若 $(X, Y, Z, 0, v, w)$ 是好三角, 则 $Z \simeq T(X) \oplus Y$. 反之, $(X, Y, T(X) \oplus Y, 0, \binom{0}{1}, (-1, 0))$ 是好三角.

证明. 前一问依照 “三推二” 法则, 遂有同构 φ 使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, equal] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "\varphi"] & TX \arrow[r, "-Tu"] \arrow[d, equal] & TY \arrow[d, equal] \\
Y \arrow[r, "\binom{0}{1}"'] & T(X) \oplus Y \arrow[r, "{(-1,0)}"'] & TX \arrow[r, "0"'] & TY
\end{tikzcd}.$$

其中, 第二行是两个基本好三角的直和. 后一问显然. $\square$

问题 3. 设 $(\mathcal{C}, T)$ 是预三角范畴, $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴. 设 $\mathrm{H} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$ 是上同调函子. 则对于 $\mathcal{C}$ 中的好三角之间的三角射

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"'] & TX \arrow[d, "Tf"'] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & TX'
\end{tikzcd}$$

有 $\mathcal{A}$ 中长正合列的交换图

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{H}^n(X) \arrow[r, "\mathrm{H}^n(u)"] \arrow[d, "\mathrm{H}^n(f)"] & \mathrm{H}^n(Y) \arrow[r, "\mathrm{H}^n(v)"] \arrow[d, "\mathrm{H}^n(g)"] & \mathrm{H}^n(Z) \arrow[r, "\mathrm{H}^n(w)"] \arrow[d, "\mathrm{H}^n(h)"] & \mathrm{H}^{n+1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{H}^{n+1}(f)"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{H}^n(X') \arrow[r, "\mathrm{H}^n(u')"] & \mathrm{H}^n(Y') \arrow[r, "\mathrm{H}^n(v')"] & \mathrm{H}^n(Z') \arrow[r, "\mathrm{H}^n(w')"] & \mathrm{H}^{n+1}(X') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

这里 $\mathrm{H}^i(X) := \mathrm{H}(T^i X)$, $\mathrm{H}^i(u) := \mathrm{H}(T^i u)$. 换言之, 预三角范畴的上同调函子的连接态射是自然的.

证明. 证明预三角范畴的态射范畴为预三角范畴即可. 关键步骤是证明态射范畴的态射范畴之态射也可补全作三角. 换言之, 任取态射范畴的态射范畴中的对象 $\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ X' \arrow[r] & Y' \end{tikzcd}$ 与 $\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A' \arrow[r] & B' \end{tikzcd}$, 其间的任意态射可嵌入好三角. 换言之, 存在交换图 $\begin{tikzcd} P \arrow[r, dashed, "1"] \arrow[d, dashed, "2"] & Q \arrow[d, dashed, "3"] \\ P' \arrow[r, dashed, "4"] & Q' \end{tikzcd}$ 下图交换

$$\begin{tikzcd}
 & & & P \arrow[r, "1"] \arrow[dd, "2"] \arrow[ddr, squiggly] & Q \arrow[dd, "3"] \\
 & A \arrow[r] \arrow[dd] \arrow[ddr, squiggly] \arrow[urr, dashed] & B \arrow[dd] \arrow[urr, dashed] & & \\
X \arrow[r] \arrow[urr] \arrow[dd] \arrow[ddr, squiggly] & Y \arrow[urr] \arrow[dd] & & P' \arrow[r, "4"] & Q' \\
 & A' \arrow[r] \arrow[urr, dashed] & B' \arrow[urr, dashed] & & \\
X' \arrow[r] \arrow[urr] & Y' \arrow[urr] & & &
\end{tikzcd}.$$

实际上, 可通过上, 下, 左, 右侧构造态射 $\{1, 2, 3, 4\}$. 依照对角面 (波浪线处) 构造态射 $P \curvearrowright Q'$, 从而检验 $3 \circ 1 = 4 \circ 2$. $\square$

问题 4. 设 $\mathcal{D}$ 是三角范畴 $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, T, \mathcal{E})$ 的全子加法范畴. 设 $\mathcal{D}$ 对于同构封闭, 并且 T 是 $\mathcal{D}$ 的自同构. 则 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 的三角子范畴当且仅当

若好三角 $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow TX$ 中 X 和 Y 属于 $\mathcal{D}$, 则 $Z \in \mathcal{D}$;

也当且仅当

若好三角 $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow TX$ 中 Y 和 Z 属于 $\mathcal{D}$, 则 $X \in \mathcal{D}$.

证明. 考虑顺时针旋转与逆时针旋转即可转化之为等价命题. □

问题 5. 三角范畴 $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, T, \mathcal{E})$ 的一个全子范畴 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 的三角子范畴当且仅当 $\mathcal{D}$ 对于同构封闭, 并且 $(\mathcal{D}, T, \mathcal{E} \cap \mathcal{D})$ 是三角范畴, 其中 $\mathcal{E} \cap \mathcal{D}$ 是指三项均在 $\mathcal{D}$ 中的 $\mathcal{E}$ 中的三角作成的类.

证明. 显然. □

问题 6. 设 $\mathcal{C}$ 是预三角范畴, $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ 是好三角, $f : W \longrightarrow Z$. 则 $wf = 0$ 当且仅当存在 $f' : W \longrightarrow Y$ 使得 $vf' = f$.

证明. 若 $wf = 0$, 则补全好三角间的同态

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, equal] & X \oplus W \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, dashed, "\varphi"'] & W \arrow[r, "0"] \arrow[d, "f"'] & TX \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, "u"'] & Y \arrow[r, "v"'] & Z \arrow[r, "w"'] & TX \end{tikzcd} .$$

其中 $\{e_i, p_i\}_{i=1,2}$ 是结构态射. 根据满态射的右消去性, 有 $v\varphi e_2 = f$. 取 $f' = \varphi e_2$ 即可. 若存在 f' 使得 $vf' = f$, 则 $wf = (wv)f' = 0$. □

问题 7. 设 $\mathcal{C}$ 是预三角范畴, (X, Y, Z, u, v, w), (X', Y', Z', u', v', w') 是好三角, $g : Y \longrightarrow Y'$. 则 $v'gu = 0$ 当且仅当存在从第一个三角到第二个三角的三角射 (f, g, h).

此时若 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, T^{-1}Z') = 0$, 则 f, h 由 g 唯一确定.

证明. 一方面, $v'gv = 0$ 表明 $v'g$ 通过 X' 分解, 从而构造 f. 依照 "二推三" 得三角射. 反之显然. 唯一性间10. □

问题 8. 设 $\mathcal{C}$ 是预三角范畴, (X, Y, Z, u, v, w) 是好三角. 若 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(TX, Z) = 0$, 则 w 是唯一的态射使得 (X, Y, Z, u, v, w) 是好三角.

证明. 依照 10, 下图虚线处的态射 φ 是唯一的

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, dashed, "\varphi"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, equal] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, equal] & TX \arrow[d, dashed, "T\varphi"] \\ X \arrow[r, "u"'] & Y \arrow[r, "v"'] & Z \arrow[r, "w'"'] & TX \end{tikzcd} .$$

下仅需证明 $\varphi = \mathrm{id}_X$. 由于 $u(\mathrm{id}_X - \varphi) = 0$, 故 $(\mathrm{id}_X - \varphi)$ 通过 $T^{-1}w$ 分解. 依照 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(TX, Z) = 0$ 知 $\varphi = \mathrm{id}_X$. □

问题 9. 从预三角范畴 $\mathcal{C}$ 到 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的一个加法函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ 是上同调函子当且仅当对任一好三角 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ 和任意 i, $H(T^iX) \longrightarrow H(T^iY) \longrightarrow H(T^iZ)$ 正合.

证明. 置 $X' = T^iX$, $Y' = T^iY$, $Z' = T^iZ$ 即可. □

问题 10. 设 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ 是三角函子. 则 $\ker F = \{X \in \mathcal{C} \mid F(X) \simeq 0\}$ 是 $\mathcal{C}$ 的三角子范畴.

证明. 易观察到 $\operatorname{Ker} F$ 关于同构封闭, 与 T 交换. 若 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ 中 $X, Z \in \operatorname{Ker} F$, 则好三角 $FX \xrightarrow{Fu} FY \xrightarrow{Fv} FZ \xrightarrow{Fw} F(TX)$ 中 $Fu = Fv = Fw = 0$, 因此 $FY \simeq FX \simeq 0$. 从而 $Y \in \operatorname{Ker} F$. □

问题 11. 设 $\mathcal{C}$ 是预三角范畴. 则 $T^2: \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 是三角自同构.

证明. T^2 即顺时针旋转六次, 自然是 $\mathcal{C}$ 的三角自同构. □

问题 12. 对任意三角范畴 $(\mathcal{C}, T)$, $(T, -\mathrm{Id}_{T^2})$ 是 $\mathcal{C}$ 到自己的三角同构, 其中 $-\mathrm{Id}_{T^2}: T^2 \to T^2$ 是下述的自然同构: 对于任一 $X \in \mathcal{C}$, $-\mathrm{Id}_{T^2}(X)$ 定义为 $-\mathrm{Id}_{T^2 X}$.

证明. 三角范畴 $T : (\mathcal{C}, T) \to (\mathcal{C}, T)$, 其中自然同构 $(-\mathrm{Id}_{T^2})_X : T^2X \xrightarrow{\sim} -T^2X$. T 良定义. 注意到 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ 是 $\mathcal{C}$ 中好三角当且仅当 $-TX \xrightarrow{-Tu} -TY \xrightarrow{-Tv} -TZ \xrightarrow{-Tw} -T^2X$ 亦然, 其态射范畴同理. □

问题 13. 对三角范畴 $(\mathcal{C}, [1])$ 和整数 n, $([n], (-1)^n \mathrm{Id}_{[n+1]}): \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 是三角同构.

证明. 即上题之推广. 证明略. □

问题 14. *证明.* □

问题 15. *证明.* □

问题 16. *证明.* □

问题 17. *证明.* □

问题 18. *证明.* □

问题 19. *证明.* □

问题 20. *证明.* □

问题 21. *证明.* □

问题 22. *证明.* □