

# Math 33B HW#6

## Chapter 9.2

$$2) A = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{vmatrix} -1-\lambda & 6 \\ -3 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1-\lambda)(8-\lambda) + 18 = 0$$

$$(\lambda+1)(\lambda-8) + 18 = 0$$

$$\lambda^2 - 7\lambda - 8 + 18 = 0$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$$

$$(\lambda-5)(\lambda-2) = 0$$

$$\lambda = 5, 2$$

$$Av = \lambda v$$

$$\begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -8 & 6 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = C_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$4) A = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3-\lambda & -6 \\ 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$(-3-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$

$$3 + 4\lambda + \lambda^2 = 0$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda = -3, -1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$-2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$-1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = C_1 e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$6) A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1-\lambda & -1 \\ -1 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$(-1-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 - 1 = 0$$

$$\lambda(\lambda+2) = 0$$

$$\lambda = 0, -2$$

$$0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$-2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$8) A = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}, y(0) = (1, -2)^T$$

$$y(t) = C_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = 3e^{2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + -5e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$12) A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, y(0) = (1, 5)^T$$

$$y(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$16) A = \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(-4-\lambda)(4-\lambda)+32=0$$

$$-16+\lambda^2+32=0$$

$$\lambda^2+16=0$$

$$\lambda = 4i, -4i$$

$$A - (4i)I = \begin{bmatrix} -4-4i & -8 \\ 4 & 4-4i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1+i & 1 \\ 1 & -1-i \end{bmatrix}$$

$$z(t) = e^{4it} \begin{bmatrix} -1+i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\cos 4t + i \sin 4t \begin{bmatrix} -1+i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(\cos 4t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \sin 4t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) + i(\cos 4t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \sin 4t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix})$$

$$i \sin 4t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\cos 4t - \sin 4t \\ \cos 4t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \cos 4t - \sin 4t \\ \sin 4t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos 4t - \sin 4t \\ \cos 4t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 4t - \sin 4t \\ \sin 4t \end{bmatrix}$$

$$18) A = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$(-1-\lambda)(-5-\lambda)+5=0$$

$$5+6\lambda+\lambda^2+5=0$$

$$\lambda^2+6\lambda+10=0$$

$$\frac{-6 \pm \sqrt{36-40}}{2}$$

$$-3 \pm i$$

$$A - (-3+i)I = \begin{bmatrix} 2-i & -5 \\ 5 & -2-i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2+i \\ 5 & -2-i \end{bmatrix}$$

$$z(t) = e^{(-3+i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2+i \end{bmatrix}$$

$$e^{-3t} e^{it} \begin{bmatrix} 1 \\ -2+i \end{bmatrix}$$

$$e^{-3t} (\cos t + i \sin t) \begin{bmatrix} 1 \\ -2+i \end{bmatrix}$$

$$e^{-3t} (\cos t + i \sin t) \left( \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$e^{-3t} \left( \cos t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} - \sin t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \cos t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \sin t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$$

$$e^{-3t} \left( \begin{bmatrix} \cos t \\ -2 \cos t - \sin t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t - 2 \sin t \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = e^{-3t} \begin{bmatrix} \cos t \\ -2 \cos t - \sin t \end{bmatrix}$$

$$y_2 = e^{-3t} \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t - 2 \sin t \end{bmatrix}$$

$$20) A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(-1-\lambda)(-1-\lambda)+9=0$$

$$1+2\lambda+\lambda^2+9=0$$

$$\lambda^2+2\lambda+10=0$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4-40}}{2}$$

$$\lambda = -1 \pm 3i$$

$$A - (-1+3i)I = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$z(t) = e^{(-1+3i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= e^{-t} e^{3it} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{-t} (\cos 3t + i \sin 3t) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{-t} (\cos 3t + i \sin 3t) \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$e^{-t} (\cos 3t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \sin 3t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \cos 3t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + i \sin 3t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix})$$

$$e^{-t} \left( \begin{bmatrix} \cos 3t \\ -\sin 3t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \sin 3t \\ \cos 3t \end{bmatrix} \right)$$

$$y_1 = e^{-t} \begin{bmatrix} \sin 3t \\ \cos 3t \end{bmatrix}$$

$$y_2 = e^{-t} \begin{bmatrix} \cos 3t \\ -\sin 3t \end{bmatrix}$$

$$22) A = \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, y(0) = (0, 2)^T$$

$$y(t) = c_1 \begin{bmatrix} -\cos 4t - \sin 4t \\ \cos 4t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \cos 4t - \sin 4t \\ \sin 4t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c_1 = c_2 = 2$$

$$y(t) = 2 \begin{bmatrix} -\cos 4t - \sin 4t \\ \cos 4t \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \cos 4t - \sin 4t \\ \sin 4t \end{bmatrix}$$

$$24) A = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}, y(0) = (1, -5)^T$$

$$y(t) = c_1 e^{-3t} \begin{bmatrix} \cos t \\ -2 \cos t - \sin t \end{bmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t - 2 \sin t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = e^{-3t} \begin{bmatrix} \cos t \\ -2 \cos t - \sin t \end{bmatrix} - 3e^{-3t} \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t - 2 \sin t \end{bmatrix}$$

$$26) A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, y(0) = (3, 2)^T$$

$$y(t) = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} \sin 3t \\ \cos 3t \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} \cos 3t \\ -\sin 3t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = 2e^{-t} \begin{bmatrix} \sin 3t \\ \cos 3t \end{bmatrix} + 3e^{-t} \begin{bmatrix} \cos 3t \\ -\sin 3t \end{bmatrix}$$